L.D. Landau
E.M. Lifşıs

NƏZƏRİ FİZİKA

MEXANİKA

I CİLD

Rus dilindən tərcümə edən:
Əmrulla Qulu oğlu
Ağamalıyev

Tərcümənin redaktoru:
AMEA-nın akademiki
Firudin Məmmədəli oğlu
Həşimzadə

Bakı – "Elm" – 2014

L.D. Landau
E.M. Lifşıs

MEXANİKA

I CİLD

Kitabın Azərbaycan dilinə tərcümə
olunmuş variantı
Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası
"Elm" Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya Mərkəzində
nəşrə hazırlanıb çap olunmuşdur

ISBN 978 – 9952 – 453 – 29 –4

655(07) – 2014

Bakı – "Elm" – 2014

MÜNDƏRİCAT

Redaktorun dördüncü nəşrə müqəddiməsi

"Nauka" nəşriyyatı bu cildlə L.D.Landau və E.M.Lifşisin "Nəzəri fizika" kursunu yenidən nəşr etməyə başlayır.

Bu tom ilk dəfə olaraq E.M.Lifşisin ölümündən sonra nəşr olunur. Mənim üzərimə kursu müəllifsiz çap etdirmək kimi kədərli və məsuliyyətli vəzifə düşmüşdür.

"Mexanika"nın indiki nəşrində üçüncü nəşrdən sonra aşkar olan mexaniki səhvlər düzəldilmiş və izahların dəqiqləşdirilməsi üçün kiçik dəyişikliklər edilmişdir. Bu düzəlişlər E.M.Lifşis tərəfindən hazırlanmış və mənim tərəfimdən ingiliscə nəşrində qismən nəzərə alınmışdır.

May 1987-ci il **L.P.Pitayevski**

Üçüncü nəşrə müqəddimə

Bu kitab ikinci nəşrində birinci nəşrindən təxminən fərqlənmirdi. Yeni nəşri hazırlayarkən hər hansı gözə çarpan yenidən işləməyə ehtiyac yaranmadı. Ona görə kitabın böyük hissəsi olduğu kimi yazılmışdır (bir neçə nəşriyyat səhvlərini düzəltmək şərtilə). Adiabatik invariantlara həsr olunmuş axırıncı paraqraf L.P.Pitayevski ilə birlikdə mənim tərəfimdən işlənmiş və əlavələr edilmişdir.

İyun 1972 ci il **E. M. Lifşıs**

Birinci nəşrə müqəddimə

Bu kitabla bizim "Nəzəri fizika" tomlarımızın hamısının ardıcıl olaraq yenidən nəşrinə başlamaq əzmindəyik. Onun yekun planı aşağıdakı kimi təsəvvür olunur.

1.Mexanika
2.Sahə nəzəriyyəsi...
3.Kvant mexanikası
4. Relyativistik kvant nəzəriyyəsi
5.Statistik fizika
6.Hidrodinamika
7. Elastiklik nəzəriyyəsi
8. Sərt mühütün elektrodinamikası
9. Fiziki kinetika

Biz İ.J.Dzyaloşınski və L.P.Pitayevskiyə kitabın korrekturasını oxumaqda köməklərinə görə minnətdarlıq edirik.

Moskva iyul 1957 ci il **L.D.Landau, E.M.Lifşıs**

Sentyabr 1964 cü il

I FƏSİL

HƏRƏKƏT TƏNLIKLƏRI

§ 1 Ümumiləşmiş koordinatlar

Mexanikanın əsas anlayışlarından biri maddi nöqtə anlayışıdır[1]. Bu anlayış altında hərəkətini təsvir etdikdə ölçülırini nəzərə almamaq mümkün olan cisimlər başa düşülür. Aydındır ki, cismin ölçülərinin nəzərə alınmaması konkret məsələnin şərtindən asılıdır. Məsələn, planetlərin Günəş ətrafında hərəkətini öyrənərək onlara maddi nöqtə kimi baxmaq olar. Lakin onların sutka ərzində fırlanmalarına baxdıqda onları maddi nöqtə hesab etmək olmaz. Maddi nöqtənin fəzadakı vəziyyəti onun x,y,z dekart koordinatları və ya $\vec{r}$ radius vektoru ilə təyin olunur. $\vec{r}$ vektorunun t zamanına görə törəməsi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

maddi nöqtənin sürəti, ikinci tərtibdən törəməsi $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ isə təcili adlanır. Gələcəkdə, qəbul olunduğu kimi, zamana görə diferensiallamanı hərifin üstündə qoyulmuş nöqtə ilə işarə edəcəyik $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

N dənə maddi nöqtələrdən təşgil olunmuş sistemin fəzadakı vəziyyətini təyin etmək N dənə radius-vektoru yəni, $3N$ dənə koordinatı bilmək lazımdır. Ümumiyyətlə sistemin vəziyyətini birqiymətli təyin etmək üçün zəruri olan, bir-birindən asılı olmayan kəmiyyətlərə sistemin sərbəstlik dərəcələrinin sayı deyilir. Baxdığımız halda bu ədəd $3N$-ə bərabərdir. Həmin kəmiyyətlərin dekart koordinatları olması vacib deyil. Məsələnin şərtindən asılı olaraq başqa koordinatların sistemi daha əlverişli ola bilər. Sistemin vəziyyətini tam xarakterizə istənilən S dənə $q_1, q_2, ... q_S$ dəyişənləri sistemin ümumiləşmiş koordinatları, onların törəmələri $\dot{q}_i$ isə ümumiləşmiş sürətləri adlanır.

Ümumiləşmiş koordinatların zamanın müəyyən anında verilməsi sistemin "Mexaniki halını" zamanın sonrakı anlarındakı qiymətlərini bilmək mənasında təyin etmir. Sistemin koordinatlarında verilmiş qiymətlərində onun sürətləri ixtiyari qiymətlərə malik ola bilər və buna uyğun olaraq sonrakı zaman anlarında sistemin vəziyyəti müxtəlif ola bilər (yəni zamanın sonsuz kiçik dt intervallarında).

Koordinatların və sürətlərin eyni zamanda məlum olması, təcrübə göstərildiyi kimi, sistemin halını tamamilə təyin edir və sistemin gələcək hərəkətini təyin etməyə imkan verir. Riyazi nöqteyi nəzərdən bu o demekdir ki, q koordinatlarının

[1] Biz bir çox hallarda "maddi nöqtə" anlayışının əvəzinə "zərrəcik" anlayışından istifadə edəcəyik.

və $\dot{q}$ sürətlərinin verilməsi $\ddot{q}$ təcilini zamanın həmin anında birqiymətli təyin etməyə imkan verir[1].

Təcili koordinat və sürətlərdə əlaqələndirən ifadələrə hərəkət tənliyi deyilir. Bu ifadələr $q(t)$ dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibdən diferensial tənliklərdir. Həmin tənlikləri inteqrallamaqla $q(t)$ asılılığını, yəni mexaniki sistemin hərəkət trayektoriyasını tapmağa imkan verir.

§ 2 Ən kiçik təsir prinsipi

Mexaniki sistemin hərəkət qanunun ən ümumi ifadəsi ən kiçik təsir (və ya Hamilton) prinsipi vasitəsilə verilir. Bu prinsipə görə hər bir mexaniki sistem müəyyən

$$L(q_1, q_2, \dots q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_S t)$$

və ya qısa şəkildə $L(q,\dot{q},t)$ funksiyası ilə xarakterizə olunur. Sistemin hərəkəti isə aşağıdakı şərti ödəyir.

Tutaq ki, zamanın $t=t_1$ və $t=t_2$ anlarında sistem koordinatların $q^{(1)}$ və $q^{(2)}$ qiymətləri ilə xarakterizə olunan müəyyən vəziyyətdə olur. Bu zaman sistem bu iki nöqtə arasında elə hərəkət edir ki,

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{2.1}$$

inteqralı ən kiçik mümkün olan qiymət alsın[2]. L funksiyası Laqranj funksiyası (2.1) isə təsir inteqralı adlanır.

Laqranj funksiyasının yalnız q və $\dot{q}$ dəyişənlərindən asılı olması və $\ddot{q}$, $\dddot{q}$ və s. yüksək tərtibdən törəmələrdən asılı olmaması yuxarıda qeyd etdiyimiz mexaniki sistemin halının q koordinatları və $\dot{q}$ sürətləri vasitəsilə birqiymətli təyin edilməsi faktının ifadəsidir.

(2.1) inteqralının minimumluq məsələni həll edən diferensial tənliklərin çıxarılışına keçək. Formulaların yazılışını sadələşdirmək məqsədilə fərz edək ki, sistem bir sərbəstlik dərəcəsinə malikdir, yəni yalnız bir dənə q(t) funksiyası təyin edilməlidir.

Tutaq ki, q=q(t) funksiyası S-inteqralını minimumlaşdıran funksiyasıdır. Deməli q(t) trayektoriyasından hər hansı

$$q(t)+\delta q(t) \tag{2.2}$$

[1] İşarələmənin qısa olması üçün çox hallarda q işarəsi altında $q_1, q_2, \dots q_S$ koordinatları çoxluğunu uyğun olaraq $\dot{q}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_S)$ çoxluğunu başa düşəcəyik.

[2] Lakin, qeyd etmək lazımdır ki, ən kiçik təsir prinsipinin bu formada ifadəsi, hərəkətin tam trayektoru üzrə həmişə doğru olmur. Yalnız trayektoriyanın ayrı-ayrı sonsuz kiçik hissələri üçün doğru olur. Tam trayektoriya üçün (2.1) inteqralı minimum qiymət yox ekstremal qiymət də ola bilər. Lakin bu vəziyyət hərəkət tənliyi alarkən çox əhəmiyyət kəsb edir, çünki hərəkət tənliyini alarkən yalnız ekstremallıq şərtindən istifadə olunur.

trayektoriyasına keçdikdə S inteqralı artır. Burada $\delta q(t)$ funksiyası t_1-dən t_2-yə qədər intervalda sonsuz kiçik funksiyadır. (onu $q(t)$ funksiyasının variasiyası adlandırırlar) $t=t_1$ və $t=t_2$ anlarında müqayisə olunan (2.2) trayektoriyalarının hamısı eyni $q^{(1)}$ və $q^{(2)}$ qiymətləri aldıqlarına görə

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0 \tag{2.3}$$

olmalıdır. $q(t)$-dən $q+\delta q(t)$-yə keçdikdə δ-in dəyişməsi

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

fərqi ilə təyin olunur. Bu fərqi δq və $\delta\dot{q}$-nin üstlərinə görə ayrılışı (inteqralaltı ifadədə) birinci tərtibdən həddlərlə başlayır. S[1] inteqralında minimumluğunun zəruri şərti həmin həddlər çoxluğunun sıfıra bərabər olmasıdır; buna inteqralın birinci variasiyası (və ya adətən sadəcə variasiya) deyilir. Beləliklə ən kiçik təsir prinsipini belə

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0 \tag{2.4}$$

və ya variasiya alsaq

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt = 0$$

şəklində yazmaq olar.

$\delta\dot{q} = \frac{\partial}{\partial t}\delta q$ olduğunu yada salsaq və ikinci həddə hissə-hissə inteqrallama aparsaq alırıq ki,

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\delta q dt = 0 \tag{2.5}$$

Alınan ifadədə (2.3) şərtinə görə birinci hədd sıfır olur. Qalan inteqral δq-nun ixtiyari qiymətində sıfıra bərabər olmalıdır. Bu isə yalnız inteqral altı ifadənin eyniyyətlə sıfıra bərabər olduğu halda mümkündür.

Beləliklə

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

tənliyini almış oluruq.

---

[1] Ümumiyyətlə-ekstremallıq

Bir neçə sərbəstlik dərəcəsi olduqda ən kiçik təsir prinsipində S dənə $q_i(t)$ funksiyalarının hər biri asılı olmayaraq variasiyaya uğramalıdır. Aydındır ki, bu halda biz S dənə

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \; (i = 1,2,\ldots S) \tag{2.6}$$

tənlikkərini almış olardıq.

Bu tənliklər axtardığımız tənliklərdir. Bu tənliklər mexanikada Laqranj[1] tənlikləri adlanırlar.

Laqranj funksiyası məlum olarsa (2.6) tənlikləri təcillə, koordinat və sürətlər arasında münasibət yaradır, yəni sistemin hərəkət tənliklərini verir.

Riyazi nöqteyi-nəzərdən (2.6) tənlikləri $q_i(t)$ koordinatları üçün S sayda ikinci tərtibdən diferensial tənliklər sistemidir. Belə sistemin ümumi həllinə 2S dənə ixtiyarı sabitlər daxil olur. Onları təyin etmək və beləliklə mexaniki sistemin hərəkətini tapmaq üçün, sistemin verilmiş andakı halını xarakterizə edən başlanğıc şərtlərini, məsələn, koordinat və sürətlərin başlanğıc qiymətlərini bilmək lazımdır.

Fərz edək ki, mexaniki sistem iki A və B hissəsindən ibarətdir A və B sistemlərinin hər biri qapalı olduqları halda L_A və L_B Laqranj funksiyasına malikdir. Əgər həmin hissələri bir birindən o qədər aralasaq ki, onlar aralarındakı qarşılıqlı təsiri nəzərə almamaq mümkün olsun, onda ümumi sistemin Laqranj funksiyası

$$\lim L = L_A + L_B \tag{2.7}$$

limitinə yaxınlaşacaqdır.

Laqranj funksiyasının bu additivlik xassəsi, qarşılıqlı təsirdə olmayan hissələrin hərəkət tənlikləri digər hissələrə aid olan dəyişənlərdən asılı olmaması faktını göstərir.

Aydındır ki, mexaniki sistemin Laqranj funksiyasını ixtiyarı sabitə vurduqda, bu Laqranj tənliklərində özünü göstərmir. Düşünmək olardı ki, buradan ciddi bir qeyri-müəyyənlik meydana cıxır: müxtəlif izole edilmiş mexaniki sistemlərin Laqranj funksiyalarını müxtəlif ixtiyarı sabitlərə vurmaq olar. Additivlik xassəsi bu qeyrimüəyyənliyi aradan qaldırır. Additivlik xassəsi bütün sistemlərin Laqranj funksiyalarını eyni zamanda eyni sabitlərə vurmaqa icazə verir. Bu isə öz növbəsində fiziki sistemin ölçü vahidlərinin ixtiyari seçilməsinə gətirir. Bu məsələyə biz §4-də qayıdacağıq.

Bundan sonra aşaqıdakı ümumi qeydi etmək lazımdır. Bir-birindən koordinat və zamandan asılı $f(q,t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialı qədər fərqlənən $L'(q,\dot{q},t)$ və $L(q,\dot{q},t)$ Laqranj funksiyalarına baxaq.

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \tag{2.8}$$

[1] Variasiya hesabı kursunda (2.1) formasında olan inteqrallarının eksteremumunu hesablayan halda bu tənliklər Eyler tənlikləri adlanırlar

Bu funksiyalar vasitəsilə hesablanmış (2.1) təsir inteqralları aşağıdakı kimi əlaqəlidirlər.

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}dt = S + f\left(q^{(2)},t_2\right) - f\left(q^{(1)},t_1\right)$$

başqa sözlə desək, bir birindən variasiyası sıfıra bərabər olan əlavə həddlə fərqlənirlər. Beləliklə $\delta S' = 0$ ifadəsi $\delta S = 0$ ifadəsilə üst-üstə düşür və bu zaman hərəkət tənliyinin forması dəyişməz qalır.

Beləliklə Laqranj funksiyası hər hansı $f(q,t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialı dəqiqliyi ilə təyin olunur.

§ 3 Qalileyin nisbilik prinsipi

Mexaniki hadisələri öyrənmək üçün hər hansı hesablama sistemi lazımdır. Müxtəlif hesablama sistemlərində hərəkət qanunları, ümumiyyətlə, müxtəlif formada olur. Əgər ixtiyarı hesablama sistemə keçsək ola bilər ki, hətta ən sadə hadisələrin qanunları çox mürəkkəb şəkil alsın. Təbiidirki, elə hesablama sistemi seçmək lazımdır ki, bu hesablama sistemində mexanikanın qanunları ən sadə şəkil alsın. İxtiyari hesablama sisteminə nəzərən fəza qeyri bircins və qeyri izotrop olur. Bu o deməkdir ki, heç bir başqa cisimlə qarşılıqlı təsirdə olmayan cisim üçün onun fəzadakı müxtəlif vəziyyətləri və onun fəzadakı ixtiyarı istiqaməti mexaniki noqtey-nəzərdən ekvivalent deyildir. Bu müddəa həm də zaman anlayışına aiddir, ümumi halda zaman bircins deyil, yəni zamanın müxtəlif anları ekvivalent deyillər. Fəza və zamanın bu xassələrinin mexaniki hadisələrin təsvirində əmələ gətirdikləri çətinliklər aydındır. Məsələn, bu halda sərbəst (yəni xarici təsirə məruz qalmayan) maddi nöqtə sükunətdə qala bilməz: zərrəciyin müəyyən andakı sürəti sıfır olduqda, növbəti anda maddi nöqtə sürət alıb müəyyən istiqamətdə hərəkət edə bilər.

Lakin elə hesablama sistemi seçmək olar ki, həmin hesablama sisteminə nəzərən fəza bircinslilik və izotropluq, zaman isə bircinslilik xassəsinə malik olsun. Belə sistem inersial (ətalət) hesablama sistemi adlanır. Bu sistemə nəzərən sərbəst cism müəyyən anda sükunətdədirsə o həmişə sükunətdə qalacaqdır.

Biz indi ətalət hesablama sistemində hərəkət edən sərbəst maddi nöqtənin Laqranj funksiyası barədə bəzi mülahizələr yürüdə bilərik. Fəza və zamanın bircinslilik xassələri göstərir ki, həmin funksiya maddi nöqtənin $\vec{r}$ radius vektorundan və t zamanından aşgar şəkildə asılı ola bilməz, yəni yalnız $\vec{v}$ sürətindən asılı ola bilər. Fəzanın izotropluq xassəsi isə göstərir ki, Laqranj funksiyası sürətin istiqamətindən də asılı ola bilməz. Deməli o yalnız sürətin ədədi qiymətindən, yəni onun kvadratından $\vec{v}^2 = v^2$ asılı ola bilər.

$$L = L\left(v^2\right) \tag{3.1}$$

Laqranj funksiyası $\vec{r}$-dən asılı olmadığına görə $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ olur və Laqranj tənliyi $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$ şəklini alır[1] və buradan alınır ki, $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const$ $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ yalnız sürətin funksiyası olduğundan alırıq ki,

$$\vec{v} = const \tag{3.2}$$

Beləliklə biz ətalət hesablama sistemində istənilən sərbəst hərəkətin qiymət və istiqamətcə sabit sürətlə baş verdiyi nəticəsinə gəldik. Bu müddəa ətalət qanunun məğzini təşgil edir.

Əgər baxdığımız ətalət sistemi ilə yanaşı ona nisbətən bərabərsürətli düzxəttli hərəkət edən ikinci bir sistemə baxsaq, onda sərbəst hərəkət qanunun bu sistemində də əvvəlki sistemdəki kimi olacaq: sərbəst hərəkət yenədə sabit sürətlə baş verəcək. Təcrübə göstərir ki, bu sistemlərdə yalnız sərbəst hərəkət qanunları eyni olmur. Həmin sistemlər bütün başqa mexaniki müqayisədə bir-birinə tamamilə ekvivalent olurlar. Beləliklə, görürük ki, yalnız bir dənə yox, sonsuz sayda bir-birinə nisbətən bərabərsürətli və düzxəttli edən ətalət sistemləri vardır. Bu sistemlərin hamısında fəza və zamanın xassələri və mexanika qanunları eynidir. Bu müddəa Qalileyin nisbilik prinsipidir. Bu prinsip mexanikanın ən vacib prinsiplərindən biridir. Deyilənlərin hamısı ətalət hesablama sistemlərinin xassələrinin nadirliyini aydın göstərir. Bu xassələrinə görə məhz belə sistemlərdən mexaniki hadisələri öyrənərkən istifadə edilməlidir. Əks hallar xüsusi qeyd olunmazsa gələcəkdə hər yerdə yalnız ətalət hesablama sistemlərinə baxacağıq.

Sonsuz sayda belə sistemlərin bir-birinə ekvivalentlikləri həm də göstərir ki, başqalarına nəzərən seçilə bilən heç bir "mütləq" hesablama sistemi mövcud deyil. Bir-birinə nisbətən $\vec{v}$ sürəti ilə hərəkət edən K' və K' hesablama sistemlərinə nəzərən eyni bir maddi nöqtənin $\vec{r}$ və $\vec{r}'$ koordinatları bir-birilə

(3.3)

münasibətilə əlaqəlidirlər.

Bu zaman hər iki hesablama sistemində zamanın axınının eyni olduğu başa düşülür.

$$t = t' \tag{3.4}$$

Zamanın mütləqliyi klassik mexanika anlayışlarının əsasını təşgil edir[2]. (3.3) və (3.4) düsturları Qaliley çevirmələri adlanır. Qalileyin nisbilik prinsipini mexanikanın hərəkət tənliklərinin bu çevimələrə nəzərən invariantlıq tələbi kimi də ifadə etmək olar.

§ 4 Sərbəst maddi nöqtənin Laqranj funksiyası

Laqranj funksiyasının təyininə ən sadə haldan maddi nöqtənin ətalət hesablama sistemində sərbəst hərəkətindən başlayaq. Yuxarıda göstərdik ki, bu

---

[1] Skalyar kəmiyyətin vektora görə törəməsi, komponentləri, həmin funksiyanın vektorun uyğun komponentlərinə görə törəmələrinə bərabər olan vektor başa düşülür.

[2] Zamanın mütləqliyi nisbilik nəzəriyyəsi mexanikasında doğru deyil.

halda Laqranj funksiyası yalnız sürət vektorunun kvadratından asılı olur. Bu asılılığın aşgar şəklini tapmaq üçün Qalileyin nisbilik prinsipindən istifadə edək. Əgər K ətalət hesablama sistemi K' ətalət hesablama sisteminə nəzərən sonsuz kiçik sürətilə hərəkət edirsə, onda $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$. Hərəkət tənlikləri bütün hesablama sistemlərinə nəzərən eyni formada olduğundan, belə çevirmələr zamanı $L(v^2)$ Laqranj funksiyası, ondan $f(q,t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialı qədər fərqlənən L' funksiyasına çevrilməlidir (§2 axırına bax).

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2(\vec{v}\vec{\varepsilon}) + \varepsilon^2)$$

Bu ifadəni $\vec{\varepsilon}$-nun üstlərinə görə sıraya ayırıb yüksək tərtibdən sonsuz kiçik kəmiyyətləri nəzərə almasaq taparıq ki,

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2(\vec{v}\vec{\varepsilon})$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki ikinci hədd $\vec{v}$ sürətinin xətti funksiyası olduğu halda zamanın tam diferensialı olacaqdır. Ona görə də $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ ifadəsi sürətdən asılı deyil, yəni Laqranj funksiyası baxdığımız halda sürətin kvadratı ilə mütənasibdir.

Bu formada olan Laqranj funksiyası sürətin sonsuz kiçik çevrilmələri zamanı Qaliley nisbilik prinsipini ödədiyindən birbaşa alınır ki, Laqranj funksiyası sonlu $\vec{v}$ sürətilə K hesablama sisteminin K' sisteminə nəzərən hərəkəti zamanı invariant qalır. Doğrudan da

$$L' = av'^2 = a(v+V)^2 = av^2 + 2avV + aV^2$$

və ya

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(2arV + aV^2 t\right)$$

Burada ikinci hədd tam diferensial olduğu üçün atıla bilər. a sabitini adətən $\frac{m}{2}$ ilə əvəz edirlər və beləliklə sərbəst hərəkət edən nöqtənin Laqranj funksiyası

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{4.1}$$

şəklində yazırıq. m kəmiyyəti maddi nöqtənin kütləsi adlanır. Laqranj funksiyasının additivlik xassəsinə görə qarşılıqlı təsirdə olmayan nöqtələr sisteminin Laqranj funksiyası

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \tag{4.2}$$

şəkildə olur[1]. Qeyd etmək lazımdır ki, yalnız bu xassədən istifadə etdikdə kütlənin

[1] Zərrəciklərin nömrələrinin göstərən indekslər olaraq latın əlifbasının birinci hərflərindən koordinatları göstərən indekslər üçün isə i, k, l... hərflərindən istifadə edəcəyik.

bu cür təyini fiziki (real) məna kəsb edir. İkinci paraqrafda qeyd edildiyi kimi Laqranj funksiyasını ixtiyarı sabitə vurmaq olar; bu hərəkət tənliyində özünü göstərmir. (4.2) funksiyasında bu cür vurma kütlənin ölçü vahidini dəyişməyə gətirir; həqiqi fiziki mənaya malik olan ayrı-ayrı zərrəciklərin kütlələri nisbəti isə bu cür çevirmə zamanı dəyişməz qalır.

Asanlıqla görmək olar ki, kütlə mənfi ola bilməz. Doğrudan da ən kiçik təsir prinsipinə görə maddi nöqtənin fəzanın 1 nöqtəsindən 2 nöqtəsinə həqiqi hərəkəti zamanı

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

inteqralı minimum olur. Kütlə mənfi olsa idi onda zərrəciyın 1 nöqtəsindən əvvəlcə tez-tez uzaqlaşdığı və sonra tez-tez uzaqlaşdığı və sonra tez-tez 2 nöqtəsinə yaxınlaşdığı trayektoriya üzrə təsir inteqralı mütləq qiymətcə istənilən qədər böyük mənfi qiymət ola bilərdi, yəni minimum qiymət ala bilməzdi

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \tag{4.3}$$

olduğunu qeyd etmək daha faydalı olardı. Buna görə Laqranj funksiyasını yazmaq üçün uyğun koordinat sistemində dl qövs elementini tapmaq kifayətdir. Məsələn, dekart koordinatlarında $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ və ona görə də

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{4.4}$$

silindrik koordinatlarda $dl^2 = dr^2 + rd\varphi^2 + dz^2$. Buradan

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{4.5}$$

sferik koordinatlarda $dl^2 = dr^2 + rd\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) \tag{4.6}$$

§ 5 Maddi nöqtələr sisteminin Laqranj funksiyası

İndi isə bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan və başqa cisimlərdə qarşılıqlı təsirdə olmayan maddi nöqtələr sisteminə baxaq. Belə sistemlərə qapalı sistem deyilir. Məlum olur ki, maddi nöqtələr arasındakı qarşılıqlı təsiri, qarşılıqlı təsirdə olmayan nöqtələrin (4.2) Laqranj funksiyasına koordinatın müəyyən (qarşılıqlı təsirin xarakterindən asılı olaraq) funksiyasını əlavə etməklə təsvir etmək olar. Həmin funksiyanın U ilə işarə etsək alırıq ki,

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, \ldots) \tag{5.1}$$

($\vec{r}_a$- a-cı nöqtənin radius vektorudur). Bu ifadə qapalı sistemin Laqranj funksiyasının ümumi formasıdır.

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

cəminə sistemin kinetik enerjisi, U-funksiyasına sistemin potensial enerjisi deyilir. Bu ifadələrin mənası §6-da aydınlaşdırılacaqdır.

Potensial enerjisinin maddi nöqtələrin vəziyyətlərinin zamanın eyni bir andakı qiymətlərindən asılı olması göstərir ki, zərrəciklərin hər-hansı birinin vəziyyətində baş verən dəyişirikli qalan zərrəciklərin vəziyyətlərində ani olaraq özünü biruzə verir; bu isə qarşılıqlı təsirin ani "yazıldığı"nı göstərir. Klassik mexanikada qarşılıqlı tasirin belə xarakterdə olmasının qaçılmamazlığı, klassik mexanikanın əsas müddaları zamanın mütləqliyi və Qalileyin nisbilik prinsipi ilə çox sıx əlaqəlidir. Qarşılıqlı təsir ani yayılmasağdı, yəni qarşılıqlı təsir sonlu sürətlə yayılsaydı, onda bu sürət (bir birinə nisbətən hərəkət edən) müxtəlif hesablama sistemlərində müxtəlif olardı, çünki zamanın mütləqliyi bütün hadisələr üçün sürətlərin toplanması qanunu tətbiq etməyə imkan verir. Belə olan halda qarşılıqlı təsirdə olan sistemlərin hərəkət qanunları müxtəlif (ətalət) sistemlərində müxtəlif olardı. Bu isə Qalileyin nisbilik prinsipinə zidd olardı.

Biz §3-də yalnız zamanın bircinsliliyindən danışdıq. Laqranj funksiyasının (5.1) forması göstərir ki, zaman həm də izotropdur, yəni onun xassəsi hər iki istiqamət üçün eynidir. Doğrudan da t-dən t-yə keçid çevirməsi Laqranj funksiyasını və beləliklə də Laqranj tənliklərini dəyişməz saxlayır. Başqa sözlə, əgər sistemdə hər hansı hərəkət mümkündürsə, onda mütləq əksinə hərəkət də mümkündür, yəni sistemi əvvəlki hallardan əks qaydada keçərək hərəkət etməsi mümkündür. Bu mənada klassik mexanika qanunlarına görə baş verən hərəkətlər hamısı dönəndir.

Laqranj funksiyasını bildikdən sonra bir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a} = \frac{\partial L}{\partial r_a} \tag{5.2}$$

hərəkət tənliklərini yaza bilərik. Bu tənlikdə (5.1) ifadəsini yerinə yazsaq

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_a} \tag{5.3}$$

tənliyini alarıq. Bu şəkildə yazılmış hərəkət tənlikləri Nyuton tənlikləri adlanırlar. Həmin tənliklər qarşılıqlı təsirdə olan zərrəciklərin mexanikasının əsasını təşkil edir. (5.3) tənliyinin sağ tərəfindəki

$$F_a = -\frac{\partial U}{\partial r_a} \tag{5.4}$$

vektoru, a-cı nöqtəyə təsir edən qüvvə adlanır. U-funksiyası kimi o da yalnız zərrəciklərin koordinatlarından asılı olur. Onların sürətlərindən asılı olmurlar.

Buna görə də (5.3) tənliyi göstərirki zərrəciklərin təcillərində yalnız koordinatdan asılı olurlar.

Potensial enerji ixtiyarı sabiti əlavə etmək dəqiqliyi ilə təyin olunmuş kəmiyyətdir, belə sabitin əlavə olunması hərəkət tənliyini dəyişdirmir (bu §2-ci Laqranj funksiyasının birqiymətsizliyin xüsusi halıdır). Həmin sabitin seçilməsinin ən təbii və ümumiyyətlə qəbul olunmuş üsulu belədir: zərrəciklər arasındakı məsafə çoxaldıqca potensial enerji sıfıra yaxınlaşmalıdır.

Hərəkəti təsvir etmək üçün dekart koordinatları əvəzinə q_i ümumiləşmiş koordinatlardan istifadə etdikdə uyğun çevirmələr aparmaq lazımdır.

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Bu ifadələri

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) - U$$

funksiyasında yerinə yazsaq

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q) \tag{5.5}$$

ifadəsini alırıq. Burada a_{ik} kəmiyyətləri yalnız q_i koordinatlarının funksiyalarıdır. Ümumiləşmiş koordinatlarda yazılmış kinetik enerji əvvəldə olduğu kimi yenədə sürətlərin kvadratın funksiyasıdır. Lakin indi o həmdə koordinatın funksiyası ola bilər.

İndiyə kimi biz yalnız qapalı sistemlərdən danışdıq. İndi isə müəyyən qanunla hərəkət edən B sistemi ilə qarşılıqlı təsirdə olan qeyri qapalı A sisteminə baxaq. Bu halda deyirlərki, A sistemi verilmiş xarici sahədə (B sistemi vasitəsilə yaradılan) hərəkət edir. Hərəkət tənlikləri hər bir koordinatın asılı olmayaraq variasiyası nəticəsində ən kiçik təsir prinsipindən alındığına görə, A sisteminin L_A Laqranj funksiyasını almaq üçün bütöv $A+B$ sisteminin L Laqranj funksiyasından istifadə edə bilərik. Bu zaman q_B koordinatlarini zamanın məlum aşgar funksiyası hesab etməliyik.

$A+B$ sistemini qapalı sistem hesab edərək yaza bilərik ki,

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$$

burada birinci iki hədd A və B sistemlərinin kinetik enerjiləri, üçüncü hədd isə onların birgə potensial enerjisidir. Bu ifadə də q_B əvəzinə zamanın aşgar funksiyasını yazıb və $T\left(q_B(t), \dot{q}_B(t)\right)$ kinetik enerjisini zamanın aşgar funksiyası olduğuna görə nəzərə almasaq, onda

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))$$

olduğunu görərik.

Beləliklə alırıq ki, sistemin xatici sahədə hərəkəti adi formada Laqranj funksiyası vasitəsilə təsəvir olunur. Lakin əvvəlkindən bir fərq yalnız ondan ibarətdir ki, indi potensial enerji zamandan aşgar şəkildə asılı ola bilər.

Beləliklə bir zərrəciyin xarici sahədə hərəkəti üçün Laqranj funksiyası

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r,t) \tag{5.6}$$

hərəkət tənliyi isə

$$m\dot{v} = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{5.7}$$

şəklindədirlər.

Sahənin bütün nöqtələrində zərrəciyə eyni $\vec{F}$ qüvvəsi təsir edirsə belə sahə bircins sahə adlanır. Aydındır ki, belə sahənin potensial enerjisi

$$U = -Fr \tag{5.8}$$

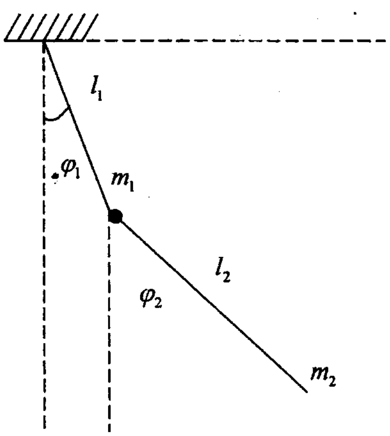
ifadəsinə bərabərdir.

Bu paragrafın axırında Laqranj tənliklərinin konkret məsələlərə tətbiqi barədə aşağıdakı qeydi edək. Əksər hallarda cisimlər (maddi nöqtələr) arasındakı qarşılıqlı təsirin əlaqələr xarakterli, yəni zərrəciklərin qarşılıqlı vəziyyətlərinə qoyulmuş məhdudiyyətlər şəklində verildiyi mexaniki sistemlərə baxmalı oluruq. Faktiki olaraq belə əlaqələr cisimləri müxtəlif çubuqlar (sterjen), iplər və şarnirlər və s. vasitəsilə bərkitməklə yaradılır. Bu vəziyyət cisimlərin hərəkətində yeni faktor əmələ gətirir. Beləki, cismin hərəkəti birləşmə nöqtələrində sürtünmə ilə müşayət olunur. Bunun nəticəsində də məsələ təmiz mexaniki məsələ çərçivəsindən kənara çıxır (bax §25). Lakin biz çox məsələlərdə sürtünmə o qədər zəyif olur ki, onun hərəkətə təsirini tamamilə nəzərə almamaq mümkün olur. Cisimləri "birləşdirən elementlərin" kütlələrini nəzərə almamaq mümkün olduğu halda isə onların oynadığı rol sistemin s sərbəstlik dərəcələrinin sayını (3N-ə nisbətən) azaltmaqdan ibarət olur. Bu halda hərəkəti təyin etmək üçün yenə də (5.5) düsturundakı Laqranj funksiyasından istifadə etmək lazımdır. Bu zaman asılı olmayan ümumiləşmiş koordinatların sayı faktiki sərbəstlik dərəcələrinin sayına bərabər götürülür.

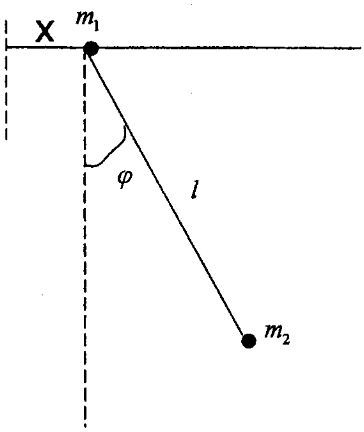
Məsələlər.

Bircins ağırlıq sahəsində (ağırlıq qüvvəsinin təcili-g) olan aşağıdakı sistemlərin Laqranj funksiyalarını tapın.

1. İkiqat riyazi rəqqas (şəkil 1).



Şəkil 1.



Şəkil 2.

Həlli. Koordinatlar olaraq l_1 və l_2 iplərinin şaquli istiqamətdə əmələ gətirdikləri φ_1 və φ_2 bucaqlarını seçək. Onda m_1 kütləli zərrəcik üçün alırıq ki,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \qquad U = -m_1 g l \cos\varphi_1$$

ikinci zərrəciyin kinetik enerjisini tapmaq üçün onun x_2, y_2 koordinatlarını (koordinat başlangıcı asqı nöqtəsində seçilmiş, y oxu isə şaquli istiqamətdə aşağı yönəlmişdir) φ_1 və φ_2 bucaqları vasitəsilə ifadə edək:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

Bundan sonra alırıq ki,

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right]$$

və nəhayət

$$T_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

2. Asqı nöqtəsi (kütləsi m_1) üfüqü istiqamətdə (şəkil 2) hərəkət edə bilən m_2 kütləli müstəvi rəqqas.

Həlli. m_1 nöqtəsi üçün x koordinatını, rəqqasın ipinin şaqqulə əmələ gətirdiyi φ bucaqını seçərək alırıq ki

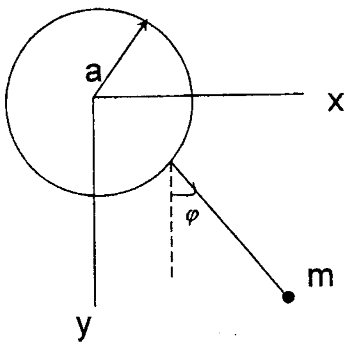
$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi\right) + m_2 g l \cos\varphi$$

3. Asqı nöqtəsi aşağıdakı kimi hərəkət edə bilən müstəvi rəqqasın:

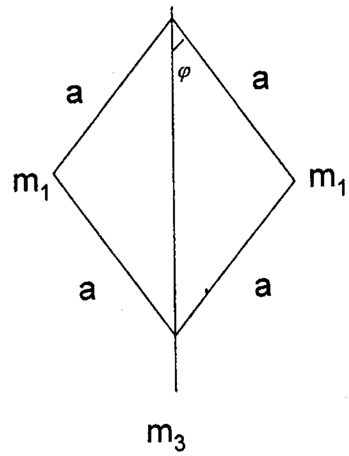
a. şaquli çevrə boyunca sabit γ tezliyi ilə (şəkil 3.),

b. $a\cos gt$ qanunu ilə üfüqi istiqamətdə,

c. $a\cos\gamma t$ qanunu ilə şaquli istiqamətdə



Şəkil 2.



Şəkil 4.

Həlli: a. m nötəsinin koordinatları

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = -a\sin\gamma t + l\cos\varphi$$

Laqranj funksiyası

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\lambda^2\sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi$$

burada yalnız zamandan asılı olan hədd və $mal\cos(\varphi - \gamma t)$ ifadəsinin zamana görə tam diferensialı atılmışlar.

b. m nötəsinin koordinatları

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi$$

Laqranj funksiyası (tam diferensialları atdıqdan sonra)

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\sin\gamma t\sin\varphi + mgl\cos\varphi$$

c. Analoji olaraq

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi$$

4. Şəkil 4-də göstərilən sistem m_2 nöqtəsi şaquli ox boyunca hərəkət edir, sistem şaquli ox ətrafında sabit Ω bucaq sürətilə fırlanır.

Həlli: a xəttinin şaquli oxla əmələ gətirdiyi bucağı θ, sistemin fırlanma bucağını φ ilə işarə edək: $\dot{\varphi} = \Omega$; m nöqtələrinin hər birinin yerdəyişmə element $dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2\sin^2\theta d\varphi^2$ m_2 nöqtəsinin A asqı nöqtəsindən olan məsafəsi $2a\cos\theta$-dır. Ona görə də $dl_1^2 = -2a\sin\theta d\theta$. Laqranj funksiyası

$$L = m_1 a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2\theta) + 2m_2 a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\theta$$