L.D. Landau
E.M. Lifşıs

NƏZƏRİ FİZİKA

MEXANİKA

I CİLD

Rus dilindən tərcümə edən:
Əmrulla Qulu oğlu Ağamalıyev

Tərcümənin redaktoru:
AMEA-nın akademiki
Firudin Məmmədəli oğlu Həşimzadə

Bakı – "Elm" – 2014

L.D. Landau
E.M. Lifşıs

MEXANİKA

I CİLD

Kitabın Azərbaycan dilinə tərcümə
olunmuş variantı
Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası
"Elm" Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya Mərkəzində
nəşrə hazırlanıb çap olunmuşdur

ISBN 978 – 9952 – 453 – 29 –4

655(07) – 2014

Bakı – "Elm" – 2014

MÜNDƏRİCAT

Redaktorun
dördüncü nəşrə müqəddiməsi

"Nauka" nəşriyyatı bu cildlə L.D.Landau və E.M.Lifşisin "Nəzəri fizika" kursunu yenidən nəşr etməyə başlayır.

Bu tom ilk dəfə olaraq E.M.Lifşisin ölümündən sonra nəşr olunur. Mənim üzərimə kursu müəllifsiz çap etdirmək kimi kədərli və məsuliyyətli vəzifə düşmüşdür.

"Mexanika"nın indiki nəşrində üçüncü nəşrdən sonra aşkar olan mexaniki səhvlər düzəldilmiş və izahların dəqiqləşdirilməsi üçün kiçik dəyişikliklər edilmişdir. Bu düzəlişlər E.M.Lifşis tərəfindən hazırlanmış və mənim tərəfimdən ingiliscə nəşrində qismən nəzərə alınmışdır.

May 1987-ci il **L.P.Pitayevski**

Üçüncü nəşrə müqəddimə

Bu kitab ikinci nəşrində birinci nəşrindən təxminən fərqlənmirdi. Yeni nəşri hazırlayarkən hər hansı gözə çarpan yenidən işləməyə ehtiyac yaranmadı. Ona görə kitabın böyük hissəsi olduğu kimi yazılmışdır (bir neçə nəşriyyat səhvlərini düzəltmək şərtilə). Adiabatik invariantlara həsr olunmuş axırıncı paraqraf L.P.Pitayevski ilə birlikdə mənim tərəfimdən işlənmiş və əlavələr edilmişdir.

İyun 1972 ci il **E. M. Lifşıs**

Birinci nəşrə müqəddimə

Bu kitabla bizim "Nəzəri fizika" tomlarımızın hamısının ardıcıl olaraq yenidən nəşrinə başlamaq əzmindəyik. Onun yekun planı aşağıdakı kimi təsəvvür olunur.

1.Mexanika
2.Sahə nəzəriyyəsi...
3.Kvant mexanikası
4. Relyativistik kvant nəzəriyyəsi
5.Statistik fizika
6.Hidrodinamika
7. Elastiklik nəzəriyyəsi
8. Sərt mühütün elektrodinamikası
9. Fiziki kinetika

Biz İ.J.Dzyaloşınski və L.P.Pitayevskiyə kitabın korrekturasını oxumaqda köməklərinə görə minnətdarlıq edirik.

Moskva iyul 1957 ci il **L.D.Landau, E.M.Lifşıs**

Sentyabr 1964 cü il

I FƏSİL

HƏRƏKƏT TƏNLIKLƏRI

§ 1 Ümumiləşmiş koordinatlar

Mexanikanın əsas anlayışlarından biri maddi nöqtə anlayışıdır[1]. Bu anlayış altında hərəkətini təsvir etdikdə ölçülırini nəzərə almamaq mümkün olan cisimlər başa düşülür. Aydındır ki, cismin ölçülərinin nəzərə alınmaması konkret məsələnin şərtindən asılıdır. Məsələn, planetlərin Günəş ətrafında hərəkətini öyrənərək onlara maddi nöqtə kimi baxmaq olar. Lakin onların sutka ərzində fırlanmalarına baxdıqda onları maddi nöqtə hesab etmək olmaz. Maddi nöqtənin fəzadakı vəziyyəti onun x,y,z dekart koordinatları və ya $\vec{r}$ radius vektoru ilə təyin olunur. $\vec{r}$ vektorunun t zamanına görə törəməsi

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

maddi nöqtənin sürəti, ikinci tərtibdən törəməsi $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ isə təcili adlanır. Gələcəkdə, qəbul olunduğu kimi, zamana görə diferensiallamanı hərifin üstündə qoyulmuş nöqtə ilə işarə edəcəyik $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

N dənə maddi nöqtələrdən təşgil olunmuş sistemin fəzadakı vəziyyətini təyin etmək N dənə radius-vektoru yəni, $3N$ dənə koordinatı bilmək lazımdır. Ümumiyyətlə sistemin vəziyyətini birqiymətli təyin etmək üçün zəruri olan, bir-birindən asılı olmayan kəmiyyətlərə sistemin sərbəstlik dərəcələrinin sayı deyilir. Baxdığımız halda bu ədəd $3N$-ə bərabərdir. Həmin kəmiyyətlərin dekart koordinatları olması vacib deyil. Məsələnin şərtindən asılı olaraq başqa koordinatların sistemi daha əlverişli ola bilər. Sistemin vəziyyətini tam xarakterizə istənilən S dənə $q_1, q_2, ... q_S$ dəyişənləri sistemin ümumiləşmiş koordinatları, onların törəmələri $\dot{q}_i$ isə ümumiləşmiş sürətləri adlanır.

Ümumiləşmiş koordinatların zamanın müəyyən anında verilməsi sistemin "Mexaniki halını" zamanın sonrakı anlarındakı qiymətlərini bilmək mənasında təyin etmir. Sistemin koordinatlarında verilmiş qiymətlərində onun sürətləri ixtiyari qiymətlərə malik ola bilər və buna uyğun olaraq sonrakı zaman anlarında sistemin vəziyyəti müxtəlif ola bilər (yəni zamanın sonsuz kiçik dt intervallarında).

Koordinatların və sürətlərin eyni zamanda məlum olması, təcrübə göstərildiyi kimi, sistemin halını tamamilə təyin edir və sistemin gələcək hərəkətini təyin etməyə imkan verir. Riyazi nöqteyi nəzərdən bu o demekdir ki, q koordinatlarının

[1] Biz bir çox hallarda "maddi nöqtə" anlayışının əvəzinə "zərrəcik" anlayışından istifadə edəcəyik.

və $\dot{q}$ sürətlərinin verilməsi $\ddot{q}$ təcilini zamanın həmin anında birqiymətli təyin etməyə imkan verir[1].

Təcili koordinat və sürətlərdə əlaqələndirən ifadələrə hərəkət tənliyi deyilir. Bu ifadələr $q(t)$ dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibdən diferensial tənliklərdir. Həmin tənlikləri inteqrallamaqla $q(t)$ asılılığını, yəni mexaniki sistemin hərəkət trayektoriyasını tapmağa imkan verir.

§ 2 Ən kiçik təsir prinsipi

Mexaniki sistemin hərəkət qanunun ən ümumi ifadəsi ən kiçik təsir (və ya Hamilton) prinsipi vasitəsilə verilir. Bu prinsipə görə hər bir mexaniki sistem müəyyən

$$L(q_1, q_2, \ldots q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_S t)$$

və ya qısa şəkildə $L(q,\dot{q},t)$ funksiyası ilə xarakterizə olunur. Sistemin hərəkəti isə aşağıdakı şərti ödəyir.

Tutaq ki, zamanın $t=t_1$ və $t=t_2$ anlarında sistem koordinatların $q^{(1)}$ və $q^{(2)}$ qiymətləri ilə xarakterizə olunan müəyyən vəziyyətdə olur. Bu zaman sistem bu iki nöqtə arasında elə hərəkət edir ki,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt \tag{2.1}$$

inteqralı ən kiçik mümkün olan qiymət alsın[2]. L funksiyası Laqranj funksiyası (2.1) isə təsir inteqralı adlanır.

Laqranj funksiyasının yalnız q və $\dot{q}$ dəyişənlərindən asılı olması və $\ddot{q}$, $\dddot{q}$ və s. yüksək tərtibdən törəmələrdən asılı olmaması yuxarıda qeyd etdiyimiz mexaniki sistemin halının q koordinatları və $\dot{q}$ sürətləri vasitəsilə birqiymətli təyin edilməsi faktının ifadəsidir.

(2.1) inteqralının minimumluq məsələni həll edən diferensial tənliklərin çıxarılışına keçək. Formulaların yazılışını sadələşdirmək məqsədilə fərz edək ki, sistem bir sərbəstlik dərəcəsinə malikdir, yəni yalnız bir dənə q(t) funksiyası təyin edilməlidir.

Tutaq ki, q=q(t) funksiyası S-inteqralını minimumlaşdıran funksiyasıdır. Deməli q(t) trayektoriyasından hər hansı

$$q(t) + \delta q(t) \tag{2.2}$$

---

[1] İşarələmənin qısa olması üçün çox hallarda q işarəsi altında $q_1, q_2, \ldots q_S$ koordinatları çoxluğunu uyğun olaraq $\dot{q}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_S)$ çoxluğunu başa düşəcəyik.

[2] Lakin, qeyd etmək lazımdır ki, ən kiçik təsir prinsipinin bu formada ifadəsi, hərəkətin tam trayektoru üzrə həmişə doğru olmur. Yalnız trayektoriyanın ayrı-ayrı sonsuz kiçik hissələri üçün doğru olur. Tam trayektoriya üçün (2.1) inteqralı minimum qiymət yox ekstremal qiymət də ola bilər. Lakin bu vəziyyət hərəkət tənliyi alarkən çox əhəmiyyət kəsb edir, çünki hərəkət tənliyini alarkən yalnız ekstremallıq şərtindən istifadə olunur.

trayektoriyasına keçdikdə S inteqralı artır. Burada $\delta q(t)$ funksiyası t_1-dən t_2-yə qədər intervalda sonsuz kiçik funksiyadır. (onu $q(t)$ funksiyasının variasiyası adlandırırlar) $t=t_1$ və $t=t_2$ anlarında müqayisə olunan (2.2) trayektoriyalarının hamısı eyni $q^{(1)}$ və $q^{(2)}$ qiymətləri aldıqlarına görə

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0 \tag{2.3}$$

olmalıdır. $q(t)$-dən $q+\delta q(t)$-yə keçdikdə δ-in dəyişməsi

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)dt-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

fərqi ilə təyin olunur. Bu fərqi δq və $\delta\dot{q}$-nin üstlərinə görə ayrılışı (inteqralaltı ifadədə) birinci tərtibdən həddlərlə başlayır. S[1] inteqralında minimumluğunun zəruri şərti həmin həddlər çoxluğunun sıfıra bərabər olmasıdır; buna inteqralın birinci variasiyası (və ya adətən sadəcə variasiya) deyilir. Beləliklə ən kiçik təsir prinsipini belə

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt=0 \tag{2.4}$$

və ya variasiya alsaq

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0$$

şəklində yazmaq olar.

$\delta\dot{q}=\frac{\partial}{\partial t}\delta q$ olduğunu yada salsaq və ikinci həddə hissə-hissə inteqrallama aparsaq alırıq ki,

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\delta q dt=0 \tag{2.5}$$

Alınan ifadədə (2.3) şərtinə görə birinci hədd sıfır olur. Qalan inteqral δq-nun ixtiyari qiymətində sıfıra bərabər olmalıdır. Bu isə yalnız inteqral altı ifadənin eyniyyətlə sıfıra bərabər olduğu halda mümkündür.

Beləliklə

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

tənliyini almış oluruq.

[1] Ümumiyyətlə-ekstremallıq

Bir neçə sərbəstlik dərəcəsi olduqda ən kiçik təsir prinsipində S dənə $q_i(t)$ funksiyalarının hər biri asılı olmayaraq variasiyaya uğramalıdır. Aydındır ki, bu halda biz S dənə

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ (i=1,2,\ldots S) \tag{2.6}$$

tənlikkərini almış olardıq.

Bu tənliklər axtardığımız tənliklərdir. Bu tənliklər mexanikada Laqranj[1] tənlikləri adlanırlar.

Laqranj funksiyası məlum olarsa (2.6) tənlikləri təcillə, koordinat və sürətlər arasında münasibət yaradır, yəni sistemin hərəkət tənliklərini verir.

Riyazi nöqteyi-nəzərdən (2.6) tənlikləri $q_i(t)$ koordinatları üçün S sayda ikinci tərtibdən diferensial tənliklər sistemidir. Belə sistemin ümumi həllinə 2S dənə ixtiyarı sabitlər daxil olur. Onları təyin etmək və beləliklə mexaniki sistemin hərəkətini tapmaq üçün, sistemin verilmiş andakı halını xarakterizə edən başlanğıc şərtlərini, məsələn, koordinat və sürətlərin başlanğıc qiymətlərini bilmək lazımdır.

Fərz edək ki, mexaniki sistem iki A və B hissəsindən ibarətdir A və B sistemlərinin hər biri qapalı olduqları halda L_A və L_B Laqranj funksiyasına malikdir. Əgər həmin hissələri bir birindən o qədər aralasaq ki, onlar aralarındakı qarşılıqlı təsiri nəzərə almamaq mümkün olsun, onda ümumi sistemin Laqranj funksiyası

$$\lim L = L_A + L_B \tag{2.7}$$

limitinə yaxınlaşacaqdır.

Laqranj funksiyasının bu additivlik xassəsi, qarşılıqlı təsirdə olmayan hissələrin hərəkət tənlikləri digər hissələrə aid olan dəyişənlərdən asılı olmaması faktını göstərir.

Aydındır ki, mexaniki sistemin Laqranj funksiyasını ixtiyarı sabitə vurduqda, bu Laqranj tənliklərində özünü göstərmir. Düşünmək olardı ki, buradan ciddi bir qeyri-müəyyənlik meydana cıxır: müxtəlif izole edilmiş mexaniki sistemlərin Laqranj funksiyalarını müxtəlif ixtiyarı sabitlərə vurmaq olar. Additivlik xassəsi bu qeyrimüəyyənliyi aradan qaldırır. Additivlik xassəsi bütün sistemlərin Laqranj funksiyalarını eyni zamanda eyni sabitlərə vurmaqa icazə verir. Bu isə öz növbəsində fiziki sistemin ölçü vahidlərinin ixtiyari seçilməsinə gətirir. Bu məsələyə biz §4-də qayıdacağıq.

Bundan sonra aşaqıdakı ümumi qeydi etmək lazımdır. Bir-birindən koordinat və zamandan asılı $f(q,t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialı qədər fərqlənən $L'(q,\dot{q},t)$ və $L(q,\dot{q},t)$ Laqranj funksiyalarına baxaq.

$$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t) \tag{2.8}$$

[1] Variasiya hesabı kursunda (2.1) formasında olan inteqrallarının eksteremumunu hesablayan halda bu tənliklər Eyler tənlikləri adlanırlar

Bu funksiyalar vasitəsilə hesablanmış (2.1) təsir inteqralları aşağıdakı kimi əlaqəlidirlər.

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}dt = S + f\left(q^{(2)},t_2\right) - f\left(q^{(1)},t_1\right)$$

başqa sözlə desək, bir birindən variasiyası sıfıra bərabər olan əlavə həddlə fərqlənirlər. Beləliklə $\delta S' = 0$ ifadəsi $\delta S = 0$ ifadəsilə üst-üstə düşür və bu zaman hərəkət tənliyinin forması dəyişməz qalır.

Beləliklə Laqranj funksiyası hər hansı $f(q,t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialı dəqiqliyi ilə təyin olunur.

§ 3 Qalileyin nisbilik prinsipi

Mexaniki hadisələri öyrənmək üçün hər hansı hesablama sistemi lazımdır. Müxtəlif hesablama sistemlərində hərəkət qanunları, ümumiyyətlə, müxtəlif formada olur. Əgər ixtiyarı hesablama sistemə keçsək ola bilər ki, hətta ən sadə hadisələrin qanunları çox mürəkkəb şəkil alsın. Təbiidirki, elə hesablama sistemi seçmək lazımdır ki, bu hesablama sistemində mexanikanın qanunları ən sadə şəkil alsın. İxtiyari hesablama sisteminə nəzərən fəza qeyri bircins və qeyri izotrop olur. Bu o deməkdir ki, heç bir başqa cisimlə qarşılıqlı təsirdə olmayan cisim üçün onun fəzadakı müxtəlif vəziyyətləri və onun fəzadakı ixtiyarı istiqaməti mexaniki noqtey-nəzərdən ekvivalent deyildir. Bu müddəa həm də zaman anlayışına aiddir, ümumi halda zaman bircins deyil, yəni zamanın müxtəlif anları ekvivalent deyillər. Fəza və zamanın bu xassələrinin mexaniki hadisələrin təsvirində əmələ gətirdikləri çətinliklər aydındır. Məsələn, bu halda sərbəst (yəni xarici təsirə məruz qalmayan) maddi nöqtə sükunətdə qala bilməz: zərrəciyin müəyyən andakı sürəti sıfır olduqda, növbəti anda maddi nöqtə sürət alıb müəyyən istiqamətdə hərəkət edə bilər.

Lakin elə hesablama sistemi seçmək olar ki, həmin hesablama sisteminə nəzərən fəza bircinslilik və izotropluq, zaman isə bircinslilik xassəsinə malik olsun. Belə sistem inersial (ətalət) hesablama sistemi adlanır. Bu sistemə nəzərən sərbəst cism müəyyən anda sükunətdədirsə o həmişə sükunətdə qalacaqdır.

Biz indi ətalət hesablama sistemində hərəkət edən sərbəst maddi nöqtənin Laqranj funksiyası barədə bəzi mülahizələr yürüdə bilərik. Fəza və zamanın bircinslilik xassələri göstərir ki, həmin funksiya maddi nöqtənin $\vec{r}$
radius vektorundan və t zamanından aşgar şəkildə asılı ola bilməz, yəni yalnız $\vec{v}$ sürətindən asılı ola bilər. Fəzanın izotropluq xassəsi isə göstərir ki, Laqranj funksiyası sürətin istiqamətindən də asılı ola bilməz. Deməli o yalnız sürətin ədədi qiymətindən, yəni onun kvadratından $\vec{v}^2 = v^2$ asılı ola bilər.

$$L = L\left(v^2\right) \tag{3.1}$$

Laqranj funksiyası $\vec{r}$-dən asılı olmadığına görə $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ olur və Laqranj tənliyi $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$ şəklini alır[1] və buradan alınır ki, $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const$ $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ yalnız sürətin funksiyası olduğundan alırıq ki,

$$\vec{v} = const \tag{3.2}$$

Beləliklə biz ətalət hesablama sistemində istənilən sərbəst hərəkətin qiymət və istiqamətcə sabit sürətlə baş verdiyi nəticəsinə gəldik. Bu müddəa ətalət qanunun məğzini təşgil edir.

Əgər baxdığımız ətalət sistemi ilə yanaşı ona nisbətən bərabərsürətli düzxəttli hərəkət edən ikinci bir sistemə baxsaq, onda sərbəst hərəkət qanunun bu sistemində də əvvəlki sistemdəki kimi olacaq: sərbəst hərəkət yenədə sabit sürətlə baş verəcək. Təcrübə göstərir ki, bu sistemlərdə yalnız sərbəst hərəkət qanunları eyni olmur. Həmin sistemlər bütün başqa mexaniki müqayisədə bir-birinə tamamilə ekvivalent olurlar. Beləliklə, görürük ki, yalnız bir dənə yox, sonsuz sayda bir-birinə nisbətən bərabərsürətli və düzxəttli edən ətalət sistemləri vardır. Bu sistemlərin hamısında fəza və zamanın xassələri və mexanika qanunları eynidir. Bu müddəa Qalileyin nisbilik prinsipidir. Bu prinsip mexanikanın ən vacib prinsiplərindən biridir. Deyilənlərin hamısı ətalət hesablama sistemlərinin xassələrinin nadirliyini aydın göstərir. Bu xassələrinə görə məhz belə sistemlərdən mexaniki hadisələri öyrənərkən istifadə edilməlidir. Əks hallar xüsusi qeyd olunmazsa gələcəkdə hər yerdə yalnız ətalət hesablama sistemlərinə baxacağıq.

Sonsuz sayda belə sistemlərin bir-birinə ekvivalentlikləri həm də göstərir ki, başqalarına nəzərən seçilə bilən heç bir "mütləq" hesablama sistemi mövcud deyil. Bir-birinə nisbətən $\vec{v}$ sürəti ilə hərəkət edən K' və K' hesablama sistemlərinə nəzərən eyni bir maddi nöqtənin $\vec{r}$ və $\vec{r}'$ koordinatları bir-birilə

(3.3)

münasibətilə əlaqəlidirlər.

Bu zaman hər iki hesablama sistemində zamanın axınının eyni olduğu başa düşülür.

$$t = t' \tag{3.4}$$

Zamanın mütləqliyi klassik mexanika anlayışlarının əsasını təşgil edir[2]. (3.3) və (3.4) düsturları Qaliley çevirmələri adlanır. Qalileyin nisbilik prinsipini mexanikanın hərəkət tənliklərinin bu çevimələrə nəzərən invariantlıq tələbi kimi də ifadə etmək olar.

§ 4 Sərbəst maddi nöqtənin Laqranj funksiyası

Laqranj funksiyasının təyininə ən sadə haldan maddi nöqtənin ətalət hesablama sistemində sərbəst hərəkətindən başlayaq. Yuxarıda göstərdik ki, bu

---

[1] Skalyar kəmiyyətin vektora görə törəməsi, komponentləri, həmin funksiyanın vektorun uyğun komponentlərinə görə törəmələrinə bərabər olan vektor başa düşülür.

[2] Zamanın mütləqliyi nisbilik nəzəriyyəsi mexanikasında doğru deyil.

halda Laqranj funksiyası yalnız sürət vektorunun kvadratından asılı olur. Bu asılılığın aşgar şəklini tapmaq üçün Qalileyin nisbilik prinsipindən istifadə edək. Əgər K ətalət hesablama sistemi K' ətalət hesablama sisteminə nəzərən sonsuz kiçik sürətilə hərəkət edirsə, onda $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$. Hərəkət tənlikləri bütün hesablama sistemlərinə nəzərən eyni formada olduğundan, belə çevirmələr zamanı $L(v^2)$ Laqranj funksiyası, ondan $f(q,t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialı qədər fərqlənən L' funksiyasına çevrilməlidir (§2 axırına bax).

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2(\vec{v}\vec{\varepsilon}) + \varepsilon^2)$$

Bu ifadəni $\vec{\varepsilon}$-nun üstlərinə görə sıraya ayırıb yüksək tərtibdən sonsuz kiçik kəmiyyətləri nəzərə almasaq taparıq ki,

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2(\vec{v}\vec{\varepsilon})$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki ikinci hədd $\vec{v}$ sürətinin xətti funksiyası olduğu halda zamanın tam diferensialı olacaqdır. Ona görə də $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ ifadəsi sürətdən asılı deyil, yəni Laqranj funksiyası baxdığımız halda sürətin kvadratı ilə mütənasibdir.

Bu formada olan Laqranj funksiyası sürətin sonsuz kiçik çevrilmələri zamanı Qaliley nisbilik prinsipini ödədiyindən birbaşa alınır ki, Laqranj funksiyası sonlu $\vec{v}$ sürətilə K hesablama sisteminin K' sisteminə nəzərən hərəkəti zamanı invariant qalır. Doğrudan da

$$L' = av'^2 = a(v+V)^2 = av^2 + 2avV + aV^2$$

və ya

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(2arV + aV^2 t\right)$$

Burada ikinci hədd tam diferensial olduğu üçün atıla bilər. a sabitini adətən $\frac{m}{2}$ ilə əvəz edirlər və beləliklə sərbəst hərəkət edən nöqtənin Laqranj funksiyası

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{4.1}$$

şəklində yazırıq. m kəmiyyəti maddi nöqtənin kütləsi adlanır. Laqranj funksiyasının additivlik xassəsinə görə qarşılıqlı təsirdə olmayan nöqtələr sisteminin Laqranj funksiyası

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \tag{4.2}$$

şəkildə olur[1]. Qeyd etmək lazımdır ki, yalnız bu xassədən istifadə etdikdə kütlənin

[1] Zərrəciklərin nömrələrinin göstərən indekslər olaraq latın əlifbasının birinci hərflərindən koordinatları göstərən indekslər üçün isə i, k, l... hərflərindən istifadə edəcəyik.

bu cür təyini fiziki (real) məna kəsb edir. İkinci paraqrafda qeyd edildiyi kimi Laqranj funksiyasını ixtiyarı sabitə vurmaq olar; bu hərəkət tənliyində özünü göstərmir. (4.2) funksiyasında bu cür vurma kütlənin ölçü vahidini dəyişməyə gətirir; həqiqi fiziki mənaya malik olan ayrı-ayrı zərrəciklərin kütlələri nisbəti isə bu cür çevirmə zamanı dəyişməz qalır.

Asanlıqla görmək olar ki, kütlə mənfi ola bilməz. Doğrudan da ən kiçik təsir prinsipinə görə maddi nöqtənin fəzanın 1 nöqtəsindən 2 nöqtəsinə həqiqi hərəkəti zamanı

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

inteqralı minimum olur. Kütlə mənfi olsa idi onda zərrəciyın 1 nöqtəsindən əvvəlcə tez-tez uzaqlaşdığı və sonra tez-tez uzaqlaşdığı və sonra tez-tez 2 nöqtəsinə yaxınlaşdığı trayektoriya üzrə təsir inteqralı mütləq qiymətcə istənilən qədər böyük mənfi qiymət ola bilərdi, yəni minimum qiymət ala bilməzdi

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \tag{4.3}$$

olduğunu qeyd etmək daha faydalı olardı. Buna görə Laqranj funksiyasını yazmaq üçün uyğun koordinat sistemində dl qövs elementini tapmaq kifayətdir. Məsələn, dekart koordinatlarında $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ və ona görə də

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{4.4}$$

silindrik koordinatlarda $dl^2 = dr^2 + rd\varphi^2 + dz^2$. Buradan

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{4.5}$$

sferik koordinatlarda $dl^2 = dr^2 + rd\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right) \tag{4.6}$$

§ 5 Maddi nöqtələr sisteminin Laqranj funksiyası

İndi isə bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan və başqa cisimlərdə qarşılıqlı təsirdə olmayan maddi nöqtələr sisteminə baxaq. Belə sistemlərə qapalı sistem deyilir. Məlum olur ki, maddi nöqtələr arasındakı qarşılıqlı təsiri, qarşılıqlı təsirdə olmayan nöqtələrin (4.2) Laqranj funksiyasına koordinatın müəyyən (qarşılıqlı təsirin xarakterindən asılı olaraq) funksiyasını əlavə etməklə təsvir etmək olar. Həmin funksiyanın U ilə işarə etsək alırıq ki,

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, \ldots) \tag{5.1}$$

($\vec{r}_a$- a-cı nöqtənin radius vektorudur). Bu ifadə qapalı sistemin Laqranj funksiyasının ümumi formasıdır.

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

cəminə sistemin kinetik enerjisi, U-funksiyasına sistemin potensial enerjisi deyilir. Bu ifadələrin mənası §6-da aydınlaşdırılacaqdır.

Potensial enerjisinin maddi nöqtələrin vəziyyətlərinin zamanın eyni bir andakı qiymətlərindən asılı olması göstərir ki, zərrəciklərin hər-hansı birinin vəziyyətində baş verən dəyişirikli qalan zərrəciklərin vəziyyətlərində ani olaraq özünü biruzə verir; bu isə qarşılıqlı təsirin ani "yazıldığı"nı göstərir. Klassik mexanikada qarşılıqlı tasirin belə xarakterdə olmasının qaçılmamazlığı, klassik mexanikanın əsas müddaları zamanın mütləqliyi və Qalileyin nisbilik prinsipi ilə çox sıx əlaqəlidir. Qarşılıqlı təsir ani yayılmasağdı, yəni qarşılıqlı təsir sonlu sürətlə yayılsaydı, onda bu sürət (bir birinə nisbətən hərəkət edən) müxtəlif hesablama sistemlərində müxtəlif olardı, çünki zamanın mütləqliyi bütün hadisələr üçün sürətlərin toplanması qanunu tətbiq etməyə imkan verir. Belə olan halda qarşılıqlı təsirdə olan sistemlərin hərəkət qanunları müxtəlif (ətalət) sistemlərində müxtəlif olardı. Bu isə Qalileyin nisbilik prinsipinə zidd olardı.

Biz §3-də yalnız zamanın bircinsliliyindən danışdıq. Laqranj funksiyasının (5.1) forması göstərir ki, zaman həm də izotropdur, yəni onun xassəsi hər iki istiqamət üçün eynidir. Doğrudan da t-dən t-yə keçid çevirməsi Laqranj funksiyasını və beləliklə də Laqranj tənliklərini dəyişməz saxlayır. Başqa sözlə, əgər sistemdə hər hansı hərəkət mümkündürsə, onda mütləq əksinə hərəkət də mümkündür, yəni sistemi əvvəlki hallardan əks qaydada keçərək hərəkət etməsi mümkündür. Bu mənada klassik mexanika qanunlarına görə baş verən hərəkətlər hamısı dönəndir.

Laqranj funksiyasını bildikdən sonra bir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a} = \frac{\partial L}{\partial r_a} \tag{5.2}$$

hərəkət tənliklərini yaza bilərik. Bu tənlikdə (5.1) ifadəsini yerinə yazsaq

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_a} \tag{5.3}$$

tənliyini alarıq. Bu şəkildə yazılmış hərəkət tənlikləri Nyuton tənlikləri adlanırlar. Həmin tənliklər qarşılıqlı təsirdə olan zərrəciklərin mexanikasının əsasını təşkil edir. (5.3) tənliyinin sağ tərəfindəki

$$F_a = -\frac{\partial U}{\partial r_a} \tag{5.4}$$

vektoru, a-cı nöqtəyə təsir edən qüvvə adlanır. U-funksiyası kimi o da yalnız zərrəciklərin koordinatlarından asılı olur. Onların sürətlərindən asılı olmurlar.

Buna görə də (5.3) tənliyi göstərirki zərraciklərin təcillərində yalnız koordinatdan asılı olurlar.

Potensial enerji ixtiyarı sabiti əlavə etmək dəqiqliyi ilə təyin olunmuş kəmiyyətdir, belə sabitin əlavə olunması hərəkət tənliyini dəyişdirmir (bu §2-ci Laqranj funksiyasının birqiymətsizliyin xüsusi halıdır). Həmin sabitin seçilməsinin ən təbii və ümumiyyətlə qəbul olunmuş üsulu belədir: zərraciklər arasındakı məsafə çoxaldıqca potensial enerji sıfıra yaxınlaşmalıdır.

Hərəkəti təsvir etmək üçün dekart koordinatları əvəzinə q_i ümumiləşmiş koordinatlardan istifadə etdikdə uyğun çevirmələr aparmaq lazımdır.

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s),\ \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Bu ifadələri

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) - U$$

funksiyasında yerinə yazsaq

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q) \tag{5.5}$$

ifadəsini alırıq. Burada a_{ik} kəmiyyətləri yalnız q_i koordinatlarının funksiyalarıdır. Ümumiləşmiş koordinatlarda yazılmış kinetik enerji əvvəldə olduğu kimi yenədə sürətlərin kvadratın funksiyasıdır. Lakin indi o həmdə koordinatın funksiyası ola bilər.

İndiyə kimi biz yalnız qapalı sistemlərdən danışdıq. İndi isə müəyyən qanunla hərəkət edən B sistemi ilə qarşılıqlı təsirdə olan qeyri qapalı A sisteminə baxaq. Bu halda deyirlərki, A sistemi verilmiş xarici sahədə (B sistemi vasitəsilə yaradılan) hərəkət edir. Hərəkət tənlikləri hər bir koordinatın asılı olmayaraq variasiyası nəticəsində ən kiçik təsir prinsipindən alındığına görə, A sisteminin L_A Laqranj funksiyasını almaq üçün bütöv $A+B$ sisteminin L Laqranj funksiyasından istifadə edə bilərik. Bu zaman q_B koordinatlarini zamanın məlum aşgar funksiyası hesab etməliyik.

$A+B$ sistemini qapalı sistem hesab edərək yaza bilərik ki,

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$$

burada birinci iki hədd A və B sistemlərinin kinetik enerjiləri, üçüncü hədd isə onların birgə potensial enerjisidir. Bu ifadə də q_B əvəzinə zamanın aşgar funksiyasını yazıb və $T\left(q_B(t), \dot{q}_B(t)\right)$ kinetik enerjisini zamanın aşgar funksiyası olduğuna görə nəzərə almasaq, onda

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))$$

olduğunu görərik.

Beləliklə alırıq ki, sistemin xatici sahədə hərəkəti adi formada Laqranj funksiyası vasitəsilə təsəvir olunur. Lakin əvvəlkindən bir fərq yalnız ondan ibarətdir ki, indi potensial enerji zamandan aşgar şəkildə asılı ola bilər.

Beləliklə bir zərrəciyin xarici sahədə hərəkəti üçün Laqranj funksiyası

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r,t) \tag{5.6}$$

hərəkət tənliyi isə

$$m\dot{v} = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{5.7}$$

şəklindədirlər.

Sahənin bütün nöqtələrində zərrəciyə eyni $\vec{F}$ qüvvəsi təsir edirsə belə sahə bircins sahə adlanır. Aydındır ki, belə sahənin potensial enerjisi

$$U = -Fr \tag{5.8}$$

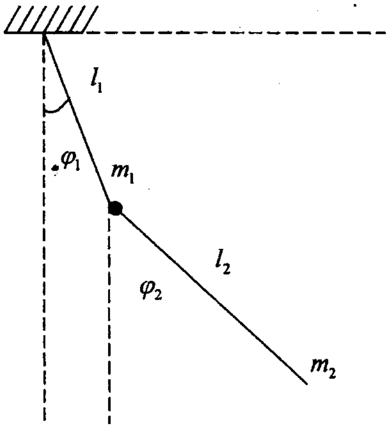
ifadəsinə bərabərdir.

Bu paragrafın axırında Laqranj tənliklərinin konkret məsələlərə tətbiqi barədə aşağıdakı qeydi edək. Əksər hallarda cisimlər (maddi nöqtələr) arasındakı qarşılıqlı təsirin əlaqələr xarakterli, yəni zərrəciklərin qarşılıqlı vəziyyətlərinə qoyulmuş məhdudiyyətlər şəklində verildiyi mexaniki sistemlərə baxmalı oluruq. Faktiki olaraq belə əlaqələr cisimləri müxtəlif çubuqlar (sterjen), iplər və şarnirlər və s. vasitəsilə bərkitməklə yaradılır. Bu vəziyyət cisimlərin hərəkətində yeni faktor əmələ gətirir. Beləki, cismin hərəkəti birləşmə nöqtələrində sürtünmə ilə müşayət olunur. Bunun nəticəsində də məsələ təmiz mexaniki məsələ çərçivəsindən kənara çıxır (bax §25). Lakin biz çox məsələlərdə sürtünmə o qədər zəyif olur ki, onun hərəkətə təsirini tamamilə nəzərə almamaq mümkün olur. Cisimləri "birləşdirən elementlərin" kütlələrini nəzərə almamaq mümkün olduğu halda isə onların oynadığı rol sistemin s sərbəstlik dərəcələrinin sayını (3N-ə nisbətən) azaltmaqdan ibarət olur. Bu halda hərəkəti təyin etmək üçün yenə də (5.5) düsturundakı Laqranj funksiyasından istifadə etmək lazımdır. Bu zaman asılı olmayan ümumiləşmiş koordinatların sayı faktiki sərbəstlik dərəcələrinin sayına bərabər götürülür.

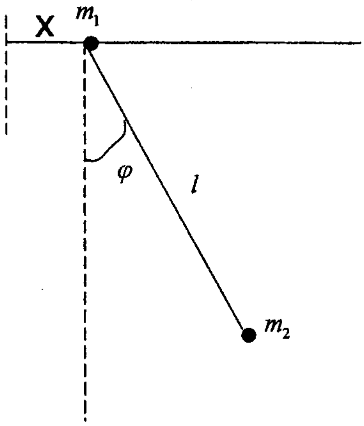
Məsələlər.

Bircins ağırlıq sahəsində (ağırlıq qüvvəsinin təcili-g) olan aşağıdakı sistemlərin Laqranj funksiyalarını tapın.

1. İkiqat riyazi rəqqas (şəkil 1).



Şəkil 1.



Şəkil 2.

Həlli. Koordinatlar olaraq l_1 və l_2 iplərinin şaquli istiqamətdə əmələ gətirdikləri φ_1 və φ_2 bucaqlarını seçək. Onda m_1 kütləli zərrəcik üçün alırıq ki,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \qquad U = -m_1 g l \cos\varphi_1$$

ikinci zərrəciyin kinetik enerjisini tapmaq üçün onun x_2, y_2 koordinatlarını (koordinat başlangıcı asqı nöqtəsində seçilmiş, y oxu isə şaquli istiqamətdə aşağı yönəlmişdir) φ_1 və φ_2 bucaqları vasitəsilə ifadə edək:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \qquad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

Bundan sonra alırıq ki,

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\right]$$

və nəhayət

$$T_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

2. Asqı nöqtəsi (kütləsi m_1) üfüqü istiqamətdə (şəkil 2) hərəkət edə bilən m_2 kütləli müstəvi rəqqas.

Həlli. m_1 nöqtəsi üçün x koordinatını, rəqqasın ipinin şaqulə əmələ gətirdiyi φ bucaqını seçərək alırıq ki

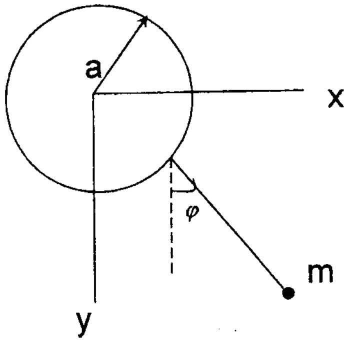
$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos\varphi\right) + m_2 g l \cos\varphi$$

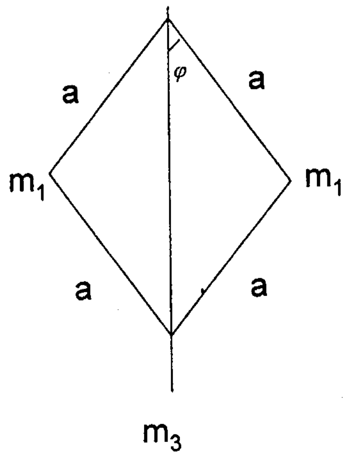
3. Asqı nöqtəsi aşağıdakı kimi hərəkət edə bilən müstəvi rəqqasın:

a. şaquli çevrə boyunca sabit γ tezliyi ilə (şəkil 3.),

b. $a\cos gt$ qanunu ilə üfüqi istiqamətdə,

c. $a\cos\gamma t$ qanunu ilə şaquli istiqamətdə





Şəkil 2. Şəkil 4.

Həlli: a. m nötəsinin koordinatları

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = -a\sin\gamma t + l\cos\varphi$$

Laqranj funksiyası

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\lambda^2\sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi$$

burada yalnız zamandan asılı olan hədd və $mal\cos(\varphi - \gamma t)$ ifadəsinin zamana görə tam diferensialı atılmışlar.

b. m nötəsinin koordinatları

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi$$

Laqranj funksiyası (tam diferensialları atdıqdan sonra)

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\sin\gamma t\sin\varphi + mgl\cos\varphi$$

c. Analoji olaraq

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi$$

4. Şəkil 4-də göstərilən sistem m_2 nöqtəsi şaquli ox boyunca hərəkət edir, sistem şaquli ox ətrafında sabit Ω bucaq sürətilə fırlanır.

Həlli: a xəttinin şaquli oxla əmələ gətirdiyi bucağı θ, sistemin fırlanma bucağını φ ilə işarə edək: $\dot{\varphi} = \Omega$; m nöqtələrinin hər birinin yerdəyişmə element $dl_1^2 = a^2d\theta^2 + a^2\sin^2\theta d\varphi^2$ m_2 nöqtəsinin A asqı nöqtəsindən olan məsafəsi $2a\cos\theta$-dır. Ona görə də $dl_1^2 = -2a\sin\theta d\theta$. Laqranj funksiyası

$$L = m_1a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2\theta) + 2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\theta$$

II FƏSİL

SAXLANMA QANUNLARI

§ 6 Enerji

Mexaniki sistemin hərəkəti zamanı onun halını təyin edən 2S sayda q_i və $\dot{q}_i$ kəmiyyətləri zaman keçdikcə dəyişirlər. Lakin, həmin kəmiyyətlərdən asılı elə funksiyalar vardır ki, onlar hərəkət zamanı sabit qalırlar. Onların qiymətləri yalnız başlanğıc şərtlərindən asılı olurlar. Bu funksiyalar hərəkət inteqralları adlanırlar.

S dənə sərbəstlik dərəcəsinə malik olan qapalı sistem üçün asılı olmayan hərəkət inteqrallarının sayı 2S-1-dir. Müddəa aşağıdakı sadə mülahizədən aydın olur. Hərəkət tənliklərinin ümumi həllərinin 2S dənə ixtiyarı sabitlərdən asılı olur. (bax səh. 12). Qapalı sistemin hərəkət tənlikləri zamandan aşgar şəkildə asılı olmadığından zamanın başlanğıc ani ixtiyarı olaraq seçilə bilər. Ona görədə tənliyin həllindəki inteqrallama sabitlərindən biri t_0 ani kimi götürülə bilər.

$$q_i(t) = q_i(t + t_0, c_1, c_2 \ldots c_{2S-1})$$
$$\dot{q}_i(t) = \dot{q}_i(t + t_0, c_1, c_2 \ldots c_{2S-1})$$

şəklində yazılmış 2S dənə funksiyalardan $t+t_0$ anını kənar etməklə c_i sabitlərini q_i və $\dot{q}_i$ dəyişənlərinin funksiyaları kimi tapa bilərik. Onlarda hərəkət inteqralları olacaqlar.

Lakin hərəkət inteqrallarının hamısı mexanikada eyni rol oynamırlar. Onların içərisində bir neçələrinin saxlanması zaman və fəzanın xassələrindən onların bircinslilik və izotropluq xassələrindən irəli gəlir. Bu saxlalal kəmiyyətlərin hamısı çox vacib olan ümumi xassəyə -additivlik xassəsinə malikdirlər.Onların ümumi sistem qiymətləri bir-biri ilə qarşılıqlı təsirdə olmayan ayrı-ayrı hissələrin qiymətləri cəminə bərabər olur.

Bu növ saxlanan kəmiyyətlərin additivlik xassələri onlara çox vacib mexaniki rol verir. Fərz edək ki, məsələ, iki cisim müəyyən zaman müddətinlə qarşılıqlı təsirdə olublar. Həm qarşılıqlı təsirdən əvvəl həm də qarşılıqlı təsirdən sonra tam sistemin additivlik inteqrallama sabiti ayrı-ayrı hissələrini inteqrallama sabitlərinin cəminə bərabər olduğundan, saxlanma qanunları sistemin qarşılıqlı təsirdən əvvəlki halını bilərək onun təsirdən sonrakı halı barədə müəyyən mülahizə yürütməyə imkan verir.

İndi zamanın bircinsliliyi xassəsindən irəli gələn saxlanma qanuna baxaq.

Zamanın bircinsliliyi xassəsindən alınır ki, qapalı sistemin Laqranj funksiyası zamandan aşgar şəkildə asılı ola bilməz. Ona görə də qapalı sistemin Laqranj funksiyasının zamana görə tam törəməsi

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

şəklində olacaqdır. (Laqranj funksiyası zamandan aşgar şəklində asılı olsaydı bərabərliyin sağ tərəfinə $\frac{dL}{dt}$ həddi əlavə olunardı). Burada $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ həddini Laqranj tənliyindən istifadə edərək $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ ilə əvəz etsək

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

və ya

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=0$$

Buradan görünür ki,

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=const \tag{6.1}$$

kəmiyyəti sistemin hərəkəti zamanı dəyişməz qalır və inteqrallama sabitlərindən biridir. Bu kəmiyyət sistemin enerjisi adlanır. Enerjinin additivliyi (6.1) düsturundan Laqranj funksiyasından xətti asılı olduğuna görə onun additivliyindən nəticə olaraq çıxır.

Enerjinin saxlanması qanunu yalnız qapalı sistemlər üçün deyil, həm də sabit xarici sahədə (yəni zamandan asılı olmayan) olan sistemlər üçün də ödənilir. Enerjinin saxlanması qanunu alarkən istifadə etdiyimiz Laqranj funksiyasının zamandan aşgar asılı olmaması bu halda da ödənilir. Enerjisi saxlanılan sistemləri bəzi hallarda konservativ sistem də adlandırırlar. §5-də gördüyümüz kimi qapalı sistemin (və ya sabit xarici sahədə olan) Laqranj funksiyası

$$L=T(q,\dot{q})-U(q)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada T sürətlərin kvadratik funksiyasıdır. Bu halda bircins funksiyalar haqqında Eyler teoremini tətbiq etsək alırıq ki

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T$$

Bunu (6.1) düsturunda nəzərə alsaq tapırıq ki,

$$E=T(q,\dot{q})+U(q) \tag{6.2}$$

Dekart koordinatlarında

$$E=\sum_a\frac{m_a v_a^2}{2}+U(r_1,r_2\ldots) \tag{6.3}$$

Beləliklə sistemin enerjisi iki müxtəlif həddlərin cəmi şəklində - kinetik və potensial enerjilərin cəmi şəklində ifadə oluna bilər. Kinetik enerji yalnız sürətdən, potensial enerji yalnız koordinatdan asılı olurlar.

§ 7 İmpuls

Digər bir saxlanma qanunu fəzanın bircinsliliyindən meydana çıxır.

Bu bircinsliliyə görə qapalı sistemin mexaniki xassələri sistemi fəzada özünə paralel olaraq köçürdükdə dəyişmir. Bu deyilənə uyğun olaraq sonsuz kiçik $\vec{\varepsilon}$ qədər paralel köçürməyə baxaq və bu zaman Laqranj funksiyasının dəyişmədiyini tələb edək.

Paralel köçürmə dedikdə sistemin bütün nöqtələrinin eyni məsafə qədər dəyişməsini ifadə edən çevirmə başa düşülür, yəni onların radius vektorları $\vec{r}_a \to \vec{r} + \vec{\varepsilon}$ olur. Laqranj funksiyasının zərrəciklərin koordinatlarının sonsuz kiçik dəyişmələri, sürətlərin isə dəyişməz qaldığı halda dəyişməsi

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} \delta \vec{r}_a = \vec{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$$

kimi olacaq. Burada cəmləmə əməliyyatı maddi nöqtələrin hamısı üzrə aparılır. $\vec{\varepsilon}$ - nun ixtiyarı olmasından $\delta L = 0$ olması

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \qquad (7.1)$$

olması tələbinə ekvivalentdir.

Burada (5.2) Laqranj tənliyindən istifadə etsək alırıq ki,

$$\sum_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\right) = 0$$

Beləliklə, bir qapalı mexaniki sistem üçün

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \qquad (7.2)$$

vektoru kəmiyyət hərəkət zamanı dəyişməz qalır. $\vec{P}$ vektoru sistem impulsu adlanır[1]. (5.1) düsturu ilə ifadə olunan Laqranj funksiyasını diferensialladıqdan sonra alırıq ki, impuls sürətlərlə

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a \qquad (7.3)$$

şəklində ifadə olunur. İmpulsun additivliyi aydındır. Bundan əlavə enerjidən fərqli olaraq, mexaniki sistemin impulsu hissələr arasındakı qarşılıqlı təsir olduğu halda da ayrı-ayrı zərrəciklərin

$$\vec{P}_a = m_a \vec{v}_a$$

impulsları cəminə bərabər olur.

---

[1] Köhnəlmiş adı – hərəkət miqdarı

İmpuls vektorunun hər üç komponentini xarici sahə olmadıqda saxlanılır. Lakin xarici sahə olduğu halda da impulsun ayrı-ayrı komponentləri saxlana bilər. Bunun üçün xarici sahənin potensialı dekart koordinatlarının hər-hansı birindən asılı olmamalıdıq. Aydındır ki, həmin koordinata parlel olaraq köçürmə zamanı sistemin xassəsi dəyişməyəcək və bundan istifadə edərək göstərmək olar ki, impulsun həmin oxa proyeksiyası dəyişməz qalacaq. Belə ki, z oxu boyunca yönəlmiş bircins xarici sahədə impulsun x və y komponentləri saxlanırlar.

Əvvəkli (7.1) bərabərliyi sadə fiziki mənaya malikdir.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$$

törəməsi qapalı sistemin a-cı zərrəciyinə təsir edən qüvvədir. Beləliklə (7.1) ifadəsi göstərir ki, qapalı sistemin bütün zərrəciklərinə təsir edən qüvvələrin cəmi sıfıra bərabərdir.

$$\sum_a \vec{F}_a = 0 \tag{7.4}$$

Xüsusi halda iki maddi nöqtədən ibarət olan sistem üçün $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$: birinci zərrəciyə təsir edən qüvvə ədədi qiymətcə ikinci zərrəciyə təsir edən qüvvəyə bərabər olub istiqamətcə ikinci maddi nöqtəyə təsir edən qüvvənin əksinə yönəlmişdir. Bu müddəa təsirin əks təsirə bərabərliyi müddəası adlanır. Əgər hərəkət q_i ümumiləşmiş koordinatları ilə təsvir olunursa, onda Laqranj funksiyasının ümuniləşmiş sürətlərə görə törəmələri

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.5}$$

ümumiləşmiş impulslar,

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.6}$$

törəmələri isə ümumiləşmiş qüvvələr adlanırlar. Bu növ işarələmələrdə Laqranj tənlikləri

$$\dot{P}_i = F_i \tag{7.7}$$

şəklini alırlar.

Dekart koodinatlarında ümumiləşmiş impulslar $\vec{P}_a$ vektorunun komponentləri ilə üst-üstə düşürlər. Ümumi halda P_i kəmiyyətləri q_i ümumiləşmiş koordinatlarının xətli bircins funksiyaları olurlar. Bu xətti bircins funksiyalar həmişə kütlə ilə sürətin hasili ilə üst-üstə düşmürlər.

Məsələ.

Kütləsi m olan zərrəcik $\vec{v}_1$ sürətilə sabit U_1 potensialına malik olan sahədən, sabit U_2 potensialına malik olan sahəyə keçir. Zərrəciyin sürətinin dəyişmə istiqamətini təyin edir.

Həlli. Sahələrin potensial enerjiləriləri sahələri ayıran müstəvilərə paralel istiqamətdəki koordinatlardan asılı deyil. Ona görə də zərrəciyin impulsunun həmin müstəvi proyeksiyası saxlanılır. Zərrəciyin əvvəlki və ikinci sahədəki $\vec{v}_2$ sürətlərinin sahələri ayıran müstəviyə normal istiqaməti ilə əmələ gətirdikləri bucaqları uyğun olaraq θ_1 və θ_2 ilə işarə etsək alarıq ki, $\vec{v}_1 \sin\theta_1 = \vec{v}_2 \sin\theta_2$. $\vec{v}_1$ və $\vec{v}_2$ sürətləri arasındakı əlaqə enerjinin saxlanması qanunundan alınır. Nəticədə alırıq ki

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}$$

§ 8 Ətalət mərkəzi

Müxtəlif (ətalət) hesablama sistemlərində qapalı mexaniki sistemin impulsu müxtəlif qiymətə malik olur. Əgər K' sistemi K sisteminə nəzərən $\vec{V}$ sürətilə hərəkət edirsə, onda zərrəciklərin həmin sistemlərə nəzərən $\vec{v}'_a$ və $\vec{v}_a$ sürətləri $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$ ifadəsilə əlaqələnirlər. Ona görə mexaniki sistemin həmin hesablama sistemlərinə nəzərən $\vec{P}$ və $\vec{P}'$ impulsları

$$P = \sum_b m_a v_a + \sum_a m_a v'_a + V \sum_a m_a$$

və ya

$$P = P' + V \sum_a m_a \tag{8.1}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Xüsusi halda, elə K' hesablama sistemləri var ki, həmin hesablama sistem-impuls sıfıra bərabər olsun. (8.1) düsturunda $\vec{P}' = 0$ yazsaq

$$V = \frac{P}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a v_a}{\sum m_a} \tag{8.2}$$

alırıq.

Mexaniki sistemi tam impulsu sıfıra bərabərdirsə onda deyirlər ki, mexaniki sistem uyğun hesablama sisteminə nəzərən sükunətdədir. Bu müddəa maddi nöqtənin sükunət halının tamamilə təbii ümumiləşməsidir. Buna uyğun olaraq (8.2) düsturu ilə təyin olunan $\vec{V}$ sürəti mexaniki sistemin tam bir cisim kimi irəliləmə hərəkətinin sürəti fiziki məna kəsb edir. Beləliklə görürük ki, impulsun saxlanması qanunu, mexaniki sistemin tam bir cisim kimi sükunət və hərəkət halı məvhumunu təyin edək.

(8.2) düsturu göstərir ki, mexaniki sistemin $\vec{P}$ impulsu ilə $\vec{V}$ sürəti arasındakı əlaqə kütləsi $\mu = \sum m_a$ kütləsinə malik olan maddi nöqtənin impulsu ilə sürəti arasındakı əlaqə düsturu ilə eynidir. Bu vəziyyəti kütlənin additivliyi müddəası kimi də başa düşmək olar.

(8.2) düsturunun sağ tərəfini $\vec{R}$ vektorunun zamana görə tam törəməsi kimi ifadə etmək olar

$$R = \frac{\sum m_a r_a}{\sum m_a} \qquad (8.3)$$

Sistemin tam bir cisim kimi fəzada yerdəyişməsinə radius vektoru (8.3) düsturu ilə təyin olunan maddi nöqtənin yerdəyişməsi kimi baxmaq olar. Bu nöqtəyə sistemin ətalət mərkəzi deyirlər. İmpulsun saxlanması qanunu, sistemi ətalət mərkəzini bərabərsürətli düzxətli hərəkəti qanunu kimi də ifadə etmək olur. Bu formada ifadə edilmiş qanun §3 –də maddi nöqtə üçün verilmiş ətalət qanunun ümumiləşməsidir.

Qapalı sistemin mexaniki xassələrini öyrənərkən ətalət mərkəzinin sükunətdə olan sistemə nəzərən öyrənilməsi daha əlverişlidir. Bu halda mexaniki sistemin ətalət mərkəzinin bərabərsürətli düzxəttli hərəkəti məsələnin həllindən ayrılır.

Bir tam kimi sükunətdə olan mexaniki sistemin enerjisinə adətən daxili enerji E_{dax} deyilir.

Daxili enerji maddi nöqtələrin nisbi hərəkətlərinin kinetik enerjisi və onların qarşılıqlı təsirinin potensial enerjisi cəmindən ibarətdir. $\vec{V}$ sürətilə hərəkət edən sistemin tam enerjisi

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{dax} \qquad (8.4)$$

şəklində ifadə olunur.

Bu düstur kifayət qədər aydın olmasına baxmayaraq onun çıxarılışını verək.

Mexaniki sistemin K və K' sistemlərindəki E və E' enerjiləri aşağıdakı kimi əlaqəlidirlər.

$$E = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + v = \frac{1}{2}\left[m_a\left(\vec{v}_a' + \vec{V}\right)^2 + U\right] = \frac{\mu V^2}{2} + \vec{V}\sum_a m_a \vec{v}_a' + \sum \frac{m_a v_a'^2}{2} + U$$

və ya

$$E = E' + \vec{V}\vec{P} + \frac{\mu V^2}{2} \qquad (8.5)$$

Bu düstur vasitəsilə bir hesablama sistemindən digərinə keçdikdə enerjinin çevrilməsi qanunu verilir. İmpulsun bu cür keçid zamanı çevrilməsi düsturu (8.1)-də verilmişdir.

K' sistemində ətalət mərkəzi sükunətdədirsə onda $\vec{P}' = 0$ $E' = E_{dax}$ olur və yenədə (8.4) düsturunu alırıq.

Məsələ

Bir ətalət hesablama sistemindən digərinə keçdikdə təsir funksiyasının çevrilməsi qanununu tapın.

Həlli: Laqranj funksiyası sistemin kinetik və potensial enerjiləri fərqinə bərabər olduğundan (8.5) düsturuna analoji olan düsturla çevrilir.

$$L = L' + \left(\vec{V}\vec{P}'\right) + \frac{1}{2}\mu V^2$$

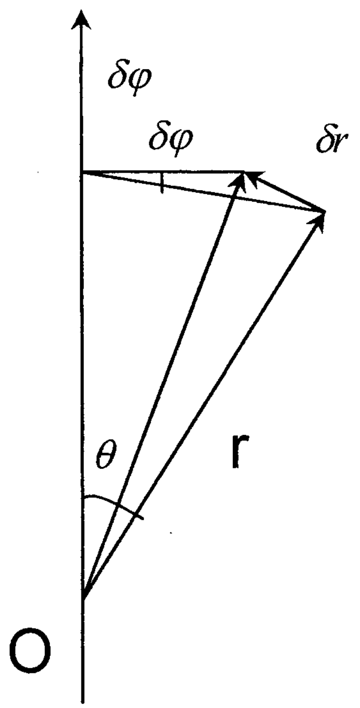
Bu ifadəni zamana görə inteqralladıqdan sonra lazım olan çevrilmə qanunu alırıq

$$S = S' + \mu\left(\vec{V}\vec{R}'\right) + \frac{1}{2}\mu V^2 t$$

burada $\vec{R}'$ ətalət mərkəzinin K' sistemindəki radius vektorudur.

§ 9 İmpuls momenti

Saxlanma qanunun fəzanın izotropluğundan irəli gələn saxlanma qanunun alınmasına keçək. İzotropluq, koordinat oxlarının istiqamətinin fəzada fırlanması zamanı qapalı sistemin mexaniki xassələrinin dəyişmədiyini ifadə edir. Bununla əlaqədar olaraq sonsuz kiçik fırlanmalara baxaq və bu zaman sistemin Laqranj funksiyasının dəyişmədiyini tələb edək.



Şəkil 5

Mütləq qiyməti $\delta\varphi$ bucağına bərabər və istiqaməti isə fırlanma oxunun istiqaməti ilə üst-üstə düşən $\delta\vec{\varphi}$ vektorunu daxil edək (həm də fırlanmanın istiqamətini $\delta\vec{\varphi}$ vektoruna nəzərən vint istiqaməti kimi seçək).

Hər şeydən əvvəl bu cür fırlanma zamanı ixtiyarı maddi nöqtənin radius vektorunun artımını tapaq. Koordinat sisteminin başlanğıcı fırlanma oxunun üzərində seçilmişdir. Radius vektorun ucunun xətti yerdəyişməsi fırlanma bucağı ilə

$$|\delta\vec{r}| = r\sin\theta\delta\varphi$$

düsturu vasitəsilə ifadə olunur (şəkil 5). Bu vektorun istiqaməti isə $\vec{r}$ və $\delta\vec{\varphi}$ vektorlarının olduğu müstəviyə perpendikulyardır. Ona görə də aydındır ki,

$$\delta\vec{r} = \left[\delta\vec{\varphi}\vec{r}\right] \qquad (9.1)$$

Koordinat sisteminin fırlanması zamanı yalnız zərrəciklərin radius vektorları deyil həm də zərrəciklərin sürətləri də çevrilirlər Bütün zərrəciklərin sürətləri eyni şəkildə dəyişirlər. Ona görə də tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən sürətin artımı

$$\delta\vec{v} = \left[\delta\vec{\varphi}\vec{v}\right] \qquad (9.2)$$

Bu ifadələri Laqranj funksiyasının dəyişməzliyi şərtində yerinə yazsaq

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a \right) = 0$$

Burada $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \dot{\vec{P}}_a$, $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \vec{P}_a$ əvəzlənmələrini etdikdən sonra alırıq ki,

$$\sum_a \left(\dot{\vec{P}}_a [\delta \vec{\varphi} \vec{r}_a] + \vec{P}_a [\delta \vec{\varphi} \vec{v}_a] \right) = 0$$

Burada vuruqların yerini dövrü olaraq dəyişək və bu zaman qarışıq hasilin dəyişmədiyini nəzərə alıb $\delta\vec{\varphi}$ vektorunu möhtərizə xaricinə çıxarsaq alırıq ki,

$$\delta\vec{\varphi} \sum_a \left(\vec{r} \dot{\vec{P}}_a + \vec{v}_a \vec{P}_a \right) = \delta\vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a \vec{P}_a] = 0$$

$\delta\vec{\varphi}$ vektorunun ixtiyarı olduğundan alırıq ki,

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a \vec{P}_a] = 0$$

yəni buradan alınır ki, qapalı sistemin hərəkəti zamanı vektoru kəmiyyət

$$M = \sum_a [\vec{r}_a \vec{P}_a] \tag{9.3}$$

saxlanılır. Bu kəmiyyət sistemin impuls momentin (və ya sadəcə impuls) adlanır[1]. Bu kəmiyyətin additivliyi aşgardır. Həm də impuls halında olduğu kimi həmin xassə hissəciklər arasında qarşılıqlı təsirin olub olmamasınından asılı deyil.

Bunlarla additiv hərəkət inteqralları tamamlanır. Beləliklə ixtiyarı qapalı sistem yalnız yeddi dənə belə inteqrallama sabitlərinə malik olurlar: enerji, impulsun və impuls momentinin üç komponentləri.

İmpuls momentinin təyini düsturuna zərrəciyin radius vektoru daxil olduğundan onun qiyməti ümumiyyətlə koordinat başlanğıcının seçilməsindən asıı olur. Koordinat başlanğıcları $\vec{a}$ qədər məsafədə olan iki koordinat sisteminə nəzərən eyni bir nöqtənin radius vektorlarını uyğun olaraq $\vec{r}_a$ və $\vec{r}_a'$ işarə etsək onda $\vec{r}_a = \vec{r}_a' + \vec{a}$. Ona görə də

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a \vec{P}_a] = \sum_a [\vec{r}_a' \vec{P}_a] + [\vec{a} \sum \vec{P}_a]$$

və ya

$$\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{a}\vec{P}] \tag{9.4}$$

Bu düsturdan görünür ki, sistem bütövlükdə sükunətlə isə $(\vec{P} = 0)$ onda onun momenti koordinat başlanğıcının seçilməsindən asılı olmur. İmpuls momenti qiymətini bu qeyri-müəyyənliyi onun saxlanma qanununa təsir etmir, çünki qapalı sistemin impulsu da saxlanılır. Bir-birinə nəzərən $\vec{V}$ sürətilə hərəkət edən iki ətalət K və K' sistemlərinə nəzərən impuls momentləri arasındakı əlaqə düsturunu

[1] Fırlanma momenti, və ya bucaq momenti adları da istifadə olunur.

çıxaraq. Verilmiş anda K və K' hesablama sistemlərinin başlanğıclarının üst-üstə düşdüyünü qəbul etsək onda $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$ olar. Onda alırıq ki,

$$\vec{M} = \sum_a m_a[\vec{r}_a\vec{v}_a] = \sum_a m_a[\vec{r}_a\vec{v}'_a] + \sum_a m_a[\vec{r}_a\vec{V}_a]$$

Alınan ifadələrin sağ tərəfindəki birinci hədd K' sistemindəki $\vec{M}'$ impuls momentidir. İkinci həddə (8.3) düsturuna əsasən ətalət mərkəzinin radius vektorunu daxil etsək alırıq ki,

$$\vec{M} = \vec{M}' + \mu[\vec{R}\vec{V}] \tag{9.5}$$

Bu düstur bir ətalət hesablama sistemindən digərinə keçdikcə impuls momentinin çevrilmə qanununu ifadə edir. Bu düstur (8.1) və (8.5) düsturları ilə ifadə olunan impulsun və enerjinin çevrilməsi qanunlarına oxşardır.

Əgər K' sistemi mexaniki sistemin bütovlükdə sükunətdə olduğu sistem olarsa, onda $\vec{V}$ ətalət mərkəzinin sürəti olacaq, $\mu\vec{V}$ isə sistemin (K sisteminə nəzərən) tam impulsu $\vec{P}$ olar. Onda

$$\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{R}\vec{P}] \tag{9.6}$$

Başqa sözlə desək mexaniki sistemin $\vec{M}$ impulsu onun bütün bir cisim kimi sükunətdə olduğu sistemə nəzərən "məxsusi momenti" ilə onun bütöv bir cisim kimi hərəkətinin $[\vec{R}\vec{P}]$ momenti cəminə bərabərdir.

İmpuls momentinin bütün komponentlərinin saxlanması qanunu (ixtiyarı koordinat başlanğıcına nəzərən) yalnız qapalı sistem üçün doğru olmasına baxmayaraq, bu qanun məhdudlaşdırılmış şəkildə xarici sahədə olan sistemlər üçün də ödənilir. Yuxarıda aparılan çıxarılışdan aydındır ki, impuls momentinin sahənin simmetrik olduğu oxa görə proyeksiyası saxlanılır. Belə simmetriya oxu ətrafında sistemi fırlatdıqda onun mexaniki xassəsi dəyişmir. Əlbətdə bu zaman hesablama sisteminin başlanğıcı simmetriya oxu üzərində götürülməlidir və impuls momenti həmin nöqtəyə nəzərən təyin olunmalıdır.

Belə halların ən vacibi mərkəzi simmetrik sahədir. Bu sahədə potensial enerji yalnız mərkəzlə fəzadakı nöqtənin arasındakı məsafədən asılı olur. Aydındır ki, bu halda impuls momentinin mərkəzdən keçən ixtiyarı xətt üzrə proyeksiyası saxlanılır. Başqa sözlə ixtiyarı nöqtəyə görə təyin olunmuş impuls momenti deyil, yalnız sahənin mərkəzinə görə təyin olunmuş moment $\vec{M}$ saxlanılır.

Başqa misal: z oxuna nəzərən bircins sahə. Bu halda momentin z oxuna nəzərən proyeksiyası M_z saxlanılır.

Qeyd edək ki, impuls momentinin hər hansı ox (onu z oxu adlandıraq) üzrə proyeksiyası Laqranj funksiyasını diferensiallamaqla almaq olur.

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} \tag{9.7}$$

Burada φ bucağı z oxu ətrafında fırlanma bucağıdır.

Bu, yuxarıda verilən impuls momentinin saxlanması qanunun çıxarılışındanda aydındır. Buna bir başa hesablama vasitəsilə əmin olmaq mümkündür r,φ,z silindrik koordinatlarda ($x_a = r_0\cos\varphi_a, y_a = r_0\sin\varphi_a$ ifadələrindən istifadə edərək) tapırıq ki,

$$M_z = \sum_a m_a(x_a\dot{y}_a - y_a\dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2\dot{\varphi}_a \qquad (9.8)$$

Digər tərəfdən Laqranj funksiyası həmin koordinatlarda

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{r}_a^2 + r_a^2\dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

şəklində olduğunu bilərək, onu (9.7) düsturunda yerinə yazıb törəmə aldıqdan sonra (9.8) düsturunu alırıq.

Məsələlər.

1. İmpuls momentinin dekart komponentlərini və mütləq qiymətini silindrik (r,φ,z) koordinatlarda tapın.

Cavab: $M_x = m\sin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\dot{\varphi}\cos\varphi$

$M_y = m\cos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\dot{\varphi}\sin\varphi$

$M_z = mr^2\dot{\varphi}$

$M^2 = m^2r^2\dot{\varphi}(r^2 + z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2$

2. Həmin ifadələri (r,θ,φ) sferik koordinatlarda tapın.

Cavab: $M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$

$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)$

$M_y = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$

$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$

3. Aşağıdakı sahələrdə hərəkət zamanı $\vec{P}$ impulsun və $\vec{M}$ momentin hansı komponentləri saxlanılırlar:

a) sonsuz bircins müstəvinin sahəsi

Cavab: P_x, P_y, M_z (sonsuz müstəvi, xy müstəvisidir)

b) sonsuz bircins silindrin sahəsi

Cavab: M_z, P_z (silindrin oxu –z oxudur)

c) sonsuz bircins prizmanın sahəsi

Cavab: P_z (prizmanın tilləri z oxuna paraleldir)

d) İki maddi nöqtənin sahəsi

Cavab: M_z (nöqtələr z oxunun üzərindədir)

e) sonsuz bircins yarımmüstəvinin sahəsi

Cavab: P_y (sonsuz yarımmüstəvi, xy müstəvisinin y oxu ilə məhdudlaşan hissəsi)

f) Bircins konusun sahəsi

Cavab: M_z (konusun oxu – z oxudur)

g) Bircins çevrəvi torun sahəsi

Cavab: M_z (torun oxu – z oxudur)

h) sonsuz bircins silindrik vintvarı xətti sahəsi

Həlli: Laqranj funksiyası vintin oxu ətrafında $\delta\varphi$ bucağı qədər fırlandıqda və eyni zamanda vintin oxu boyunca $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ qədər köçürmə etdikdə dəyişməz qalır (h- vintin bir addımıdır) ona görə də

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0$$

buradan alırıq ki,

$$M_z + \frac{h}{2\pi}P_z = const$$

§ 10 Mexaniki oxşarlıq

Laqranj funksiyasını ixtiyarı sabitı vurduqda Laqranj tənliklərinin dəyişmədiyini aşgar şəkildə görürük.

Əvvəldə (§2-də qeyd olunan) belə vəziyyət konkret hərəkət tənliklərini inteqrallamadan bir çox mühüm hallarda hərəkətin xarakteri barədə çox lazımlı mülahizələr yürütməyə imkan verir. Belə hallardan biri potensial enerjinin koordinatın bircins funksiyası olduğu, yəni funksiyanın

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \ldots, \alpha r_n) = \alpha^k U(r_1, r_2, \ldots, r_n) \qquad (10.1)$$

sərtini ödədiyi haldır. Burada α ixtiyarı sabit, K isə bincinslilik dərəcəsidir.

Bütün koordinatları α dəfə və zamanı isə β dəfə dəyişdirən

$$\vec{r}_a \to \alpha\vec{r}_a, \qquad t \to \beta t$$

çevirməsini edək. Bu zaman sürətlərin hamısı $\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt}$ α/β dəfə kinetik enerji isə α^2/β^2 dəfə dəyişərlər. Potensial enerji isə α^k-ya vurulacaqdır. Əgər α ilə β arasında

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \text{ yəni } \beta = \alpha^{1-\beta/\alpha}$$

əlaqəsinin yaratsaq, onda belə çevirmə nəticəsində Laqranj funksiyası α^k əmsalına vurulacaq və beləliklə Laqranj tənlikləri dəyişməz qalacaqlar.

Zərrəciklərlərin koordinatlarının eyni ədəd dəfə dəyişdirilməsi bir trayektoriyadan ona həndəsi cəhətdən oxşar olan və ondan yalnız özünün xətti ölçüləri ilə fərqlənən trayektoriyaya keçid deməkdir. Beləliklə belə nəticəyə gəlirik ki, potensial enerji koordinatın (dekart) K tərtibdən bircins funksiyası olduğu halda hərəkət tənlikləri biribirinə həndəsi oxşar olan trayektoriyaların olmasına imkan verir. Bu halda hərəkətə sərf olunan zamanlar (trayektoriyanın müəyyən nöqtələri arasında) arasında

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}} \qquad (10.2)$$

münasibəti ödənilir. Burada l/l' nisbəti trayektoriyaların xətti ölçülərinin nisbətidir. Zamanlar nisbəti ilə bərabər, sistemin ixtiyarı kəmiyyətini də l'/l nisbəti ilə ifadə edə bilirik. Məsələ, sürətlər, enerji və momentlər üçün

$$\frac{v'}{v}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}} \tag{10.3}$$

nisbətlərini alırıq.

Dediklərimizi numayiş etdirmək üçün bir neçə misal göstərək.

Gələcəkdə görə biləcəyimiz kimi, kiçik rəqslər adlandırdığımız halda potensial enerji koordinatın kvadratik (k=2) funksiyası olur. Bu halda (10.2) düsturundan alınır ki, belə rəqslərin periodları onların amplitudasından asılı deyil. Bircins qüvvə sahəsində potensial enerji koordinatın xətti funksiyası olur (bax 5.8), yəni k=1. Onda (10.2) dən alırıq n_1

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{l}}$$

Buradan alınır ki, məsələ, ağırlıq sahəsində düşmə zamanların kvadratları nisbəti onların başlanğıc hündürlükləri nisbətinə bərabərdir.

İki kütlənin Nyuton cazibəsində və ya iki yüklü zərraciyin Kulon qarşılıqlı təsiri zamanı potensial enerji zərrəciklər arasındakı məsafə ilə tərs mütənasibdir, yəni k=-1 tərtibdən bircins funksiyasıdır. Bu halda

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}$$

və biz deyə bilərik ki, məsələ, trayektoriyalar üzrə fırlanma zamanlarının kvadratları nisbəti onların orbitalarının ölçülərinin kubları nisbəti kimidir (Keplerin üçüncü qanunu).

Sistemin hərəkəti potensial enerjinin koordinatın bircins funksiyası olan fəzanın məhdud oblastında baş verirsə, bu halda kinetik və potensial enerjilərin zamana görə orta qiymətləri arasında çox sadə münasibət mövcud olur. Bu münasibət virial teoremi adi ilə məşhurdur.

Kinetik enerjinin sürətlərin kvadratik funksiyası olduğunu bilərək, bircins funksiyalar haqqındakı Eyler teoremindən istifadə edərək

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a}\vec{v}_a = 2T$$

və ya $\frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a}=\vec{P}_a$ ifadəsindən yaza bilərik ki,

$$2T=\sum_a \vec{p}_a\vec{v}_a=\frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{p}_a\vec{r}_a\right)-\sum_a \vec{r}_a\dot{\vec{p}}_a \tag{10.4}$$

Aldığımız bu ifadəki zamana görə ortalayaq. Hər hansı bir $f(t)$ funksiyasının orta qiyməti

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$$

kimi təyin edilir. Asanlıqla görmək olar ki, əgər $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ məhdud $F(t)$ funksiyasının zamana görə tam diferensialıdırsa onda onun zamana görə orta qiyməti

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau} = 0$$

olur.

Tutaq ki, sistem fəzanın məhdud hissəsində sonsuz olmayan sürətlə hərəkət edir. Onda $\sum_a \vec{r}_a\vec{P}_a$ həddi məhdud olacaq, buna görə də (10.4) düsturunun sağ tərəfindəki birinci həddin orta qiyməti sıfır olacaq. İkinci həddə isə $\dot{\vec{P}}_a$ Nyutonun ikinci qanununa əsasən $-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$ yazsaq alırıq ki[1],

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a \vec{r}_a \frac{\partial U}{\partial r_a}} \tag{10.5}$$

Baxdığımız halda potensial enerji k-ci dərəcədə bircins funksiya olarsa, onda Eyler teoreminə əsasən (10.5) düsturu

$$2\bar{T} = k\bar{U} \tag{10.6}$$

axtardığımız ifadəni verir.

$E = \bar{E} = \bar{T} + \bar{U}$ olduğundan (10.6) düsturunu aşağıdakı ekvivalent formada da yazmaq olar.

$$\bar{U} = \frac{2}{k+2}E, \qquad \bar{T} = \frac{k}{k+2}E \tag{10.7}$$

Bu ifadə $\bar{U}$ və $\bar{T}$-nı sistemin tam enerjisi ilə ifadə edir.

Xüsusi halda kiçik rəqslər (k=2) üçün

$$\bar{T} = \bar{U}$$

olduğunu, yəni kinetik enerjinin orta qiymətinin potensial enerjinin orta qiymətinə bərabər olduğunu alırıq. Nyuton qarşılıqlı təsiri (k=-1) üçün isə

$$2\bar{T} = -\bar{U}$$

olur. Bu halda $E = -\bar{T}$ olduğundan belə qarşılıqlı təsir zamanı hərəkət tam enerjinin yalnız mənfi qiymət aldığı halda fəzanın sonlu oblastında baş verir (bax § 15).

[1] (10.5) ifadəsinin sağ tərəfinə bəzi hallarda sistemin virial deyirlər.

Məsələlər.

1. Eyni potensial enerjili müxtəlif kütləli zərrəciklərin eyni trayektoriya üzrə hərəkət zamanları nisbəti necədir?

Cavab $\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}$

2. Potensial enerjini hər hansı sabit vuruq dəfə dəyişdikdə onların hərəkət zamanları necə dəyişər?

Cavab $\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}$

III FƏSIL

HƏRƏKƏT TƏNLİKLƏRİNİN İNTEQRALLANMASI

§ 11 Birölçülü hərəkət

Bir sərbəstlik dərəcəsinə malik sistemin hərəkəti birölçülü hərəkət adlanır. Sabit xarici sahədə olan belə sistemin ən ümumi Laqranj funksiyası

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q) \qquad (11.1)$$

şəklindədir. $a(q)$-ümumiləşmiş q koordinatı dekart koordinatı olarsa (onu x adlandıracaq)

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \qquad (11.2)$$

Bu Laqranj funksiyasına uyğun olan Laqranj tınliyi ümumi şəkildə inteqrallanır. Bu halda hətta hərəkət tənliklərini yazmağa da ehtiyac qalmır və bir başa onun birinci inteqralında – enerjinin saxlanması qanununu ifadə edən tənlikdən istifadə etmək kifayətdir. Beləliklə (11.1) Laqranj funksiyası üçün alırıq ki,

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$$

Bu ifadə birinci tərtibdən və dəyişənlərinə ayırmaqla inteqrallanan diferensial tənliklərdir. Alırıq ki,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

buradan

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const \qquad (11.3)$$

Aldığımız bu həlldə iki dənə inteqrallama sabitlərinin rolunu E tam enerji və inteqrallama sabiti const oynayır.

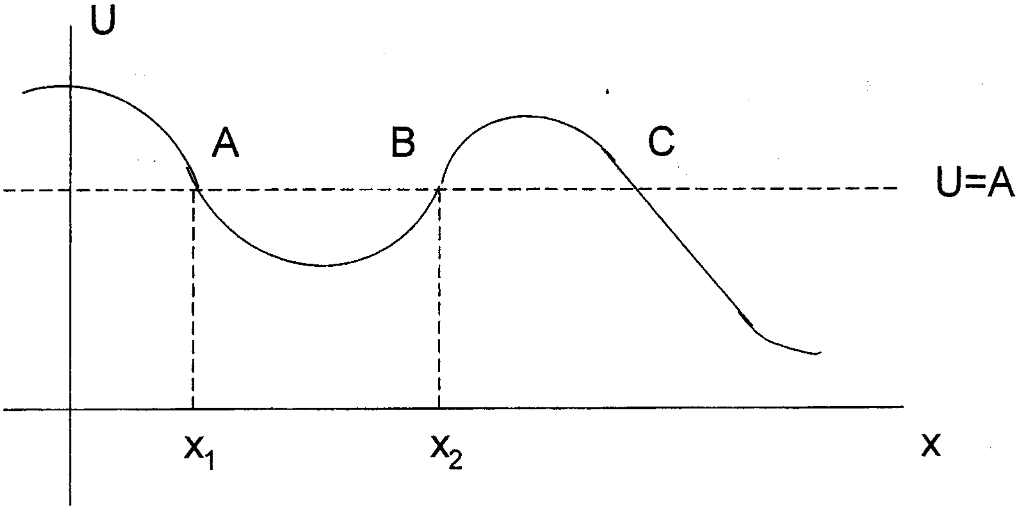
Kinetik enerji həmişə ədəd olduğundan hərəkət zamanı tam enerji potensial enerjidən böyük olur: başqa sözlə hərəkət fəzanın o oblastında baş verir ki, orada $U(x) < E$ olsun.

Tutaq $U(x)$ ki, asılılığı şəkil 6-da göstərilən kimidir. Həmin qrafikdə tam enerjinin verilmiş qiymətinə uyğun olan üfiqi xətt cızmaqla hərəkətin baş verə biləcəyi oblastı təyin edə bilirik. Beləliklə, şəkil 6-da göstərilən halda hərəkət yalnız AB oblastında, və ya C-dən sağdakı oblastda baş verə bilər.

Tam enerjinin potensial enerjiyə bərabər

$$U(x) = E \qquad (11.4)$$

olduğu nöqtələr hərəkətin sərhəd nöqtələrini təyin edir. Həmin nöqtələr dayanma nöqtələri adlanırlar. Bu nöqtələrdə sürət sıfır olur. Əgər hərəkət oblastı iki nöqtə ilə məhdudlaşırsa, onda hərəkət fəzanın məhdud oblastında baş verir və hərəkət finit hərəkəy adlanır. Əgər hərəkət məhdudlaşdırılmayıbsa və ya yalnız bir tərəfdən məhdudlaşdırılıbsa onda hərəkət infinit adlanır və zərrəcik sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə gedir.



Şəkil 6

Birölçülü finit hərəkət rəqsi hərəkətdir-zərrəcik iki sərhəd nöqtələri arasında periodik olaraq təkrar olunan hərəkət edir (şəkil 6-da AB potensial çuxurunda x_1 və x_2 nöqtələri arasında). Bu zaman hərəkətin dönənliyi xassəsinə (şəkil 18) əsasən x_1-dən və x_2-yə qədər məsafəyə sərf olunan zaman müddəti x_2-dən x_1-ə qədər məsafəyə sərf olunan zaman müddətinə bərabər olur. Ona görədə hərəkətin periodu, zərrəciyin x_1 və x_2-dən x_1-ə qayıtma müddəti, x_1-dən və x_2-yə getmə müddətinin ikiyə hasilinə bərabər olacaqdır və ya (11.3)-ə əsasən

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \qquad (11.5)$$

Bu halda x_1 və x_2 nöqtələri (11.4) tənliyinin E tam enerjinin verilmiş qiymətlərindəki kökləridir. Bu düstur hərəkətin periodunun E_{tam} enerjidən asılı olaraq təyin edir.

Məsələlər.

1. müstəvi riyazi rəqqasının (l uzunluqda m kütləli maddi ağırlıq qüvvəsi sahəsində) periodunu təyin edir.

Həlli. Rəqqasın enerjisi

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0$$

burada φ-rəqqasın tarazlıq nöqtəsində meyl bucağı, φ_0 isə meyl bucağının maksimum qiymətidir. Hərəkətin periodunu φ bucağının 0-dan φ_0-a qədər dəyişmə müddətinin 4-ə hasili kimi hesablayaraq tapırıq ki,

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

Bu ifadədə $\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi_0}=\sin\xi$ əvəzlənməsini etsək ineqral $T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$ şəklini alır. Burada $K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$ - birinci növ elliptik inteqraldır. Əgər $\sin\varphi_0/2\approx\frac{\varphi_0}{2}<<1$ (kiçik rəqslər) olarsa $K(k)$ funksiyasının sıraya ayrılışı

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\ldots\right)$$

Bu ayrılışın birinci həddi məlum elementar düsturu olur.

2. m kütləli cismin hərəkətinin periodunu enerjidən asılı olaraq aşağıdakı sahələrdə hərəkəti halında təyin edin.

a) $V=A|x|^n$

Cavab.

$$T=2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^n}}=\frac{2\sqrt{2m}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}{A^{1/n}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$$

Hərəkət tənliklərinin inteqrallanması əvəzləməsi vasitəsilə inteqralı Eylerin adlanan inteqrala gətirmək olur. B-inteqral Γ-funksiya ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$T=\frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{1/n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$$

T-nin E-dən asılılığı (10.2), (10.3) mexaniki oxşarlıq qanununa uyğun gəlir.

b) $U=-\frac{U_0}{ch^2\alpha x}$ $\qquad -U_0<E<0$

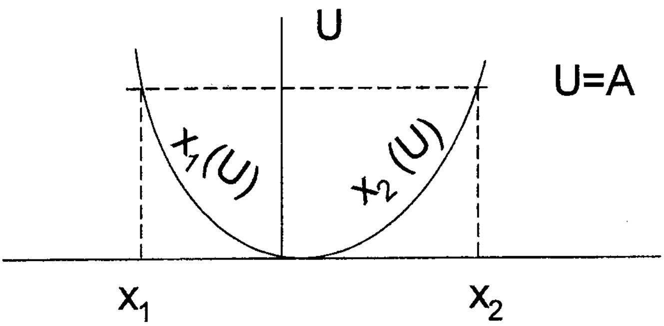
Cavab. $T=\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}$

c) $v=v_0 tg^2\alpha x$

Cavab. $T=\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}$

§ 12 Rəqsin perioduna görə potensial enerjinin təyini

Zərrəciyin $U(x)$ sahəsində rəqsi hərəkətinin T periodunun E_{tam} enerjidə asılığını bilərək, potensial enerjinin formasını nə dərəcədə bərpa etmək məsələsinə baxaq. Riyazi nöqteyi nəzərdən bu (11.5) ineqral tənliyinin T(E) asılılığı məlum olarsa qeyri məlum $U(x)$ funksiyasının tapılması məsələrinə ekvivalentdir. Bu zaman $U(x)$ funksiyasının fəzanın baxdığımız intervalında yalnız bir minimuma malik olduğunu əvvəlcədən fərz edəcəyik. İnteqral tənliyi bu şərti ödəməyən həllərinin olmasının mümkünlüyü kənara qoyacağıq. Əlverişlilik n öqteyi-nəzərdən koordinat başlanğıcını potensial enerjinin minimum nöqtəsində götürək və həmin nöqtədə potensial enerjinin qiymətini sıfıra bərabər seçək.



Şəkil 7

X koordinatına U-nun funksiyası kimi baxaraq (11.5) inteqralın çevirməyə uğradaq. $x(U)$ funksiyası ikiqiymətli funksiyadır – potensial enerjinin hər bir qiyməti x koordinatının iki müxtəlif qiymətində meydana çıxır. Buna uyğun olaraq (11.5) inteqralı iki inteqralın cəminə $x = x_1$-dən $x = 0$ və $x = 0$-dan $x = x_2$ kimi bərabər olacaq. Bu zaman dx-dən $\frac{dx}{dU}dU$-ə keçirik. Bu iki oblasda x-in U-dan asılılığını $x = x_1(U)$ və $x = x_2(U)$ şəklində yazacağıq. Aydındır ki, dU-ya görə inteqrallama sərhədləri E və 0 olacaqlar. Beləliklə alırıq ki,

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \sqrt{2m}\int_0^E \left[\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$$

və ya inteqrallama aparmanın ardıcıllığını dəyişərək

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \int_0^E \left[\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right] = \frac{dUdE}{\sqrt{(\alpha - E)(E - U)}}$$

dE-yə görə inteqrallama sadədir və π-yə bərabərdir. Bundan sonra dU-ya görə inteqrallama çox sadələşir və alınır ki,

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \pi\sqrt{2m}\left[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)\right]$$

(bu zaman $x_2(0) = x_1(0) = 0$ olduğu nəzərə alınmışdır). Alınan ifadədə α-nın yerinə U yazsaq alınır ki,

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}} \tag{12.1}$$

Beləliklə $T(E)$ məlum olduqda $x_2(U)-x_1(U)$ fərqini tapa bilirik. $x_2(U)$ və $x_1(U)$ funksiyaları isə qeyri müəyyən qalırlar. Bu isə öz növbəsində göstərir ki, periodun enerjidən verilmiş asılılığına gətirən sonsuz sayda $U=U(x)$ əyriləri mövcuddur. Həmin əyrilər elə deformasiyalarla fərqlənirlər ki, U eyni qiymətində x-in iki qiymətinin fərqi dəyişmir.

Əgər $U(x)$ funksiyasının ordinat oxuna nəzərən simmetrik olmasını tələb etsək, yəni tələb etsək ki,

$$x_2(U)=-x_1(U)\equiv x(U)$$

onda həllin çoxqiymətliliyi yox olur. Bu halda (12.1) ifadəsi $x\,(U)$ funksiyası üçün birqiymətli

$$x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}} \tag{12.2}$$

ifadəsini verir.

§ 13 Gətirilmiş kütlə

Qarşılıqlı təsirdə olan iki zərrəcikdən ibarət sistemin hərəkəti məsələsi (iki cisim məsələsi) tam və ümumi şəkildə həll olunan ən vacib məsələdir.

Bu məsələnin həlli üçün atılan birinci addım olaraq, həmin hərəkətin iki hərəkətə-ətalət mərkəzinin hərəkətinə və ona nəzərən zərrəciklərin hərəkəti məsələsinə ayırmaqla necə sadələşdiyini göstərək. İki zərrəciyin qarşılıqlı təsirinin potensial enerjisi yalnız onlar arasındakı məsafədən, yəni onların radius vektorlarının fərqinin ədədi qiymətindən asılı olur. Ona görə də belə sistemin Laqranj funksiyası

$$L=\frac{m_1\dot{\vec r}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\dot{\vec r}_2^{\,2}}{2}-U(|\vec r_1-\vec r_2|) \tag{13.1}$$

formasında olur.

Zərrəciklər arasındakı qarşılıqlı məsafə

$$\vec r=\vec r_1-\vec r_2$$

Raduis vektorunun seçək və koordinat başlanğıcını sistemin ətalət mərkəzində seçək. Onda

$$m_1\vec r_1+m_1\vec r_2=0$$

olur. Bu axırıncı iki tənlikdən tapırıq ki,

$$\vec r_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec r,\qquad \vec r_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec r \tag{13.2}$$

Bu ifadələri (13.1) tənliyində yerinə yazsaq alırıq ki,

$$L=\frac{m\dot{r}^2}{2}-U(r) \tag{13.3}$$

burada

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{13.4}$$

işarələmələri edilmişdir. M kəmiyyətinə gətirilmiş kütlə deyilir. (13.3) funksiyası formal olaraq m kütləli maddi nöqtənin tərpənməz mərkəzə nisbətən simmetrik m xarici sahəsində hərəkətinin Laqranj funksiyası ilə üst-üstə düşür.

Beləliklə iki qarşılıqlı təsirdə olan maddi nöqtələrin hərəkəti məsələri, bir maddi nöqtənin verilmiş U(r) xarici sahəsində ki hərəkəti məsələsinə gətirilir. Bu məsələnin $\vec{r}=\vec{r}(t)$ həlindən m_1 və m_2 kütləli zərrəciklərin trayektoriyaları $\vec{r}_1=\vec{r}_1(t)$ və $\vec{r}_2=\vec{r}_2(t)$ (onların ətalət mərkəzinə nəzərən) (13.2) tənlikləri vasitəsilə alınır.

Məsələ

Sistem M kütləli bir zərrəcik və n dənə eyni m kütləli zərrəciklərdən təşgil olunmuşdur. Ətalət mərkəzini aradan çıxarmaqla, məsələni n dənə zərrəciyin hərəkəti məsələsinə gətirin.

Həlli: M kütləli zərrəciyin radius-vektorunu $\vec{R}$, m kütləli zərrəciklərin radius vektorları $\vec{R}_a$ $(a=1,2,3,\ldots n)$ ilə işarə edək. M kütləli zərrəciklə m kütləli zərrəcik arasında məsafəni $\vec{r}_a=\vec{R}_a-\vec{R}$ ilə işarə edib, koordinat başlanğıcını ətalət mərkəzində seçək. Onda

$$M\vec{R}+m\sum_a\vec{R}_a=0$$

Bu iki tənlikdən tapırıq ki,

$$\vec{R}=-\frac{m}{\mu}\sum_a r_a, \quad \vec{R}_a=\vec{R}+\vec{r}_a$$

burada $\mu=M+nm$

Bu ifadələri

$$L=\frac{M\dot{\vec{R}}^2}{2}+\frac{m}{2}\sum_a\dot{\vec{R}}_a-U$$

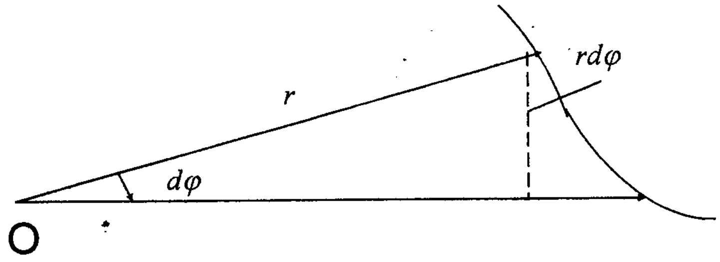
Laqranj funksiyası yerinə yazsaq alırıq ki,

$$L=\frac{m}{2}\sum_a\vec{v}_a^2-\frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a\vec{v}_a\right)^2-U$$

burada $\vec{v}_a\equiv\dot{\vec{r}}_a$

Potensial enerji yalnız zərrəciklər arasındakı məsafədən asılı olduğundan funksiyası kimi ğöstərilə bilər.

§ 14 Mərkəzi sahədə hərəkət



Şəkil 8

İki zərrəciyin hərəkəti məsələsini bir zərrəciyin hərəkəti məsələsinə gətirərkən, biz zərrəciyin potensial enerjisi hər hansı tərpənməz nöqtəyə qədər olan r məsafəsindən asılı olan xarici sahədə hərəkətinə gətirdik. Belə sahə mərkəzi sahə adlanır. Belə sahədə zərrəciyə təsir edən qüvvə

$$F=\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}=-\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$$

ədədi qiymətcə yalnız r məsafəsindən asılı olub, istiqamətcə radius vektor istiqamətində yönəlmiş olur.

§9-da göstərildiyi kimi sistemin sahəsinə nəzərən təyin olunmuş impuls momenti saxlanır. Bir dənə zərrəcik üçün

$$\vec{M}=[\vec{r}\vec{p}]$$

m nə r vektorları bir-birinə perpendikulyar olduqlarından, impuls momentinin saxlanan kəmiyyət olması göstərir ki, zərrəciyin r radius-vektoru həmişə bir müstəvi üzərində - m vektoruna perpendikulyar olan müstəvi üzərində olacaqdır.

Beləliklə maddi nöqtənin mərkəzi sahədə hərəkət trayektoriyası bir müstəvi üzərində olur. Bu müstəvidə r,φ polyar koordinatlarını daxil etdikdə Laqranj funksiyasını

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}+\vec{r}^2\dot{\varphi}^2\right)-U(r) \qquad (14.1)$$

şəklində yaza bilərik ((4.5) desturu ilə müqaisə et).

Həmin funksiya dəyişənindən aşgar şəkildə daxil olmayan istəlinən q_i ümumiləşmiş koordinat dövrü (siklik) koordinat adlanır. Həmin koordinat üçün yalnız Laqranj tənliyindən alırıq ki,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

yəni həmin koordinata uyğun ümumiləşmiş impuls $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ hərəkət inteqralı olur. Bu isə dövrü koordinatlar olduqda hərəkət tənliyini inteqrallamaq məsələsini çox asanlaşdırır.

Baxdığımız halda ümumiləşmiş impuls

$$p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}$$

hərəkət miqdarı momentinin z komponenti $M_z = M$ ilə üst-üstə düşür ((9.6)-ya bax). Beləliklə biz impuls momentinin saxlanması qanuna qayıdırıq.

$$M = mr^2\dot{\varphi} = const \tag{14.2}$$

Qeyd edək ki, maddi nöqtənin mərkəzi sahədə hərəkəti üçün bu qanunun sadə həndəsi mənası vardır. $\frac{1}{2}\vec{r}\vec{r}d\varphi$ ifadəsi iki bir-birinə yaxın radius vektorlarla trayektoriya qövsünün əmələ gətirdikləri sektorun sahəsidir (şəkil 8). Onu df ilə işarə edək. Onda zərrəciyin momenti

$$M = 2m\dot{f} \tag{14.3}$$

şəklində yazmaq olar. Buradakı $\dot{f}$ törəməsinə sektorial sürət deyilir. Ona görə də impuls momentinin saxlanması sektorial sürətin sabitliyi deməkdir- hərəkət edən radius-vektoru bərabər zaman fasiləsində bərabər sahələr çıxır (Keplerin II qanunu[1].)

Maddi nöqtənin mərkəzi sahədə hərəkəti məsələsini tam həll etmək üçün, hərəkət tənliklərini yazıb həll etmək əvəzinə, enerji və impuls momentinin saxlanması qanunlarından istifadə etmək daha əlverişlidir. (14.2) düsturundan istifadə edərək $\dot{\varphi}$-ni M-lə ifadə edib, enerjinin ifadəsində yerinə yazdıqda alırıq ki,

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \vec{r}^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{14.4}$$

Buradan

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{14.5}$$

və ya dəyişənlərə ayıraraq inteqrallasaq

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const \tag{14.6}$$

Bundan sonra (14.2) ifadəsini

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$$

şəklində yazıb, bu ifadəyə dt-nin yerinə (14.5) ifadəsini inteqrallasaq alırıq ki,

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const \tag{14.7}$$

[1] Mərkəzi sahədə impuls momentinin saxlanması qanuna bəzən sahə inteqralı deyilir.

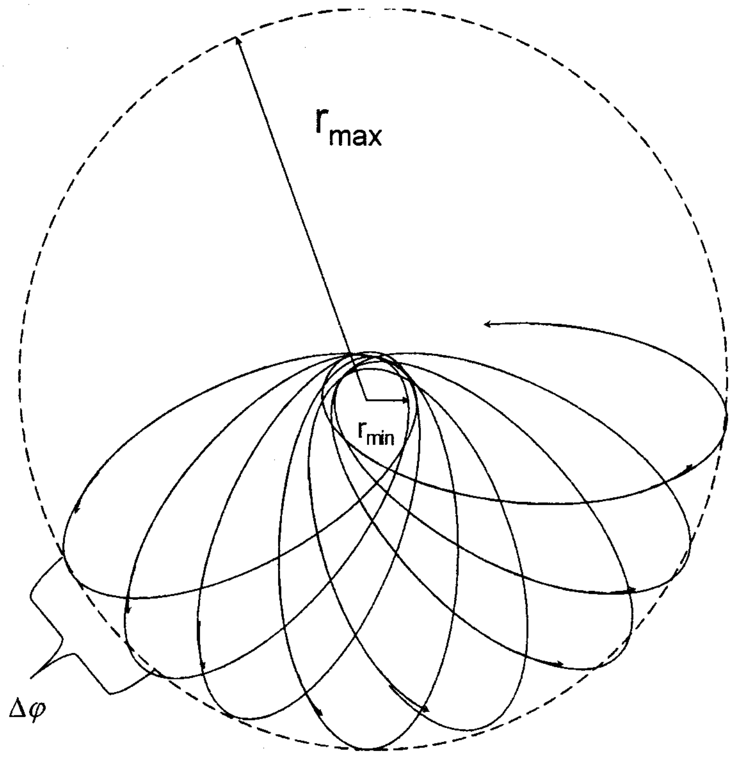
(14.6) və (14.7) düsturları qoyulmuş məsələni ümumi formada həll edir. Bu düsturlardan ikincisi r və φ dəyişənləri arasında əlaqə yaradır, başqa sözlə trayektoriyanın tənliyidir. (14.6) düsturu isə hərəkət edən nöqtənin mərkəzdən olan məsafəsi zamanın qeyri-aşgar funksiyası kimi təyin edir. Qeyd edək ki, φ dəyişənin zamandan asılı olaraq monoton dəyişir: (14.2) düsturundan görünür ki, $\dot{\varphi}$ funksiyası öz işarəsini heç zaman dəyişmir. (14.4) düsturundan görünür ki, hərəkətin radial hissəsinə

$$U_{ef} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (14.8)$$

"effektiv" potensial enerjili sahədə birölçülü hərəkət kimi baxmaq olar.

$\frac{M^2}{2mr^2}$ kəmiyyətinə məzkəzə qaçma enerjisi deyilir. r-in

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \qquad (14.9)$$



Şəkil 9

tənliyini ödəyən qiyməti hərəkət oblastının mərkəzdən olan sərhəddini təyin edir. (14.9) bərabərliyi ödənildikdə radial sürət $\dot{r}$ sıfır olur. Lakin bu zərrəciyin dayandığını göstərmir. (bir ölçülü hərəkətdə olduğu kimi) çünki bu halda bucaq sürəti $\dot{\varphi}$ sıfır olmur. $\dot{r} = 0$ bərabərliyi trayektoriyanın "dönmə nöqtəsi" adlanır. Bu nöqtədə $r(t)$ funksiyası ya artmadan azalmağa və ya əksinə dönür.

r-in mümkün olan qiyməti yalnız bir $r \geq r_{\min}$ şərti ilə məhdudlaşarsa onda zərrəciyin hərəkəti infinit hərəkət olur: onun trayektoriyası sonsuz uzaqlaşmış nöqtədən gəlir və yenə də sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə gedir.

Əgər r-in dəyişmə oblastı iki r_{min} və r_{max} sərhəddinə malikdirsə onda hərəkət finit hərəkət olur və trayektoriya bütünlüklə $r = r_{min}$ və $r = r_{max}$ çevrələri arasında qalan həlqə daxilində yerləşir. Bu heç də trayektoriyanın qapalı əyridən ibarət olmasını göstərmir. Radius-vektoru $r = r_{min}$ çıxıb r_{max}-a və əksinə r_{min}-a qayıtması zaman müddətində radius-vektorun dönmə bucağı $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}} \qquad (14.10)$$

düsturu ilə təyin olunur. $\Delta\varphi$ bucağı 2π-nin rasional hissəsinə bərabər olması $\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$ trayektoriyanın qapalılıq şərtidir. Burada m və n tam ədədlərdir. Onda bu zaman periodunun n dəfə təkrarı zamanı nöqtənin radius-vektora m dənə tam dövr edir və özünün əvvəlki vəziyyətinə qayıdır, yəni trayektoriya qapanır.

Lakin belə hallar çox nadirdir və $U(r)$ funksiyasının ixtiyarı formasında $\Delta\varphi$ bucağı 2π-nin rasional hissəsinə bərabər olmur. Buna görə də ümumi halda finit hərəkətin trayektoriyası qapalı olmur. O sonsuz sayda minimal və maksimal nöqtələrdən keçir (şəkil 9 olduğu kimi) və sonsuz böyük zaman intervalında iki sərhəd çevrələri arasında qalan həlqəli doldurur. Mərkəzi sahənin yalnız iki növündə finit hərəkətin trayektoriyası qapalı olur. Bu sahələr potensial enerjinin $1/r$ və ya r^2-lə mütənasib olduğu sahələrdir. Bunlardan birincisinə növbəti paraqrafda baxılacaq. İkinci hal isə fəzavari ossilyatora uyğundur (bax §23 məsələ 3).

Dönmə nöqtələrində (14.5) kvadrat kök (bununla birlikdə (14.6) və (14.7) düsturlarındakı inteqrallaltı ifadə də) öz işarəsini dəyişir. φ bucağını radius-vektorun dönmə nöqtəsinə yönəlmiş istiqanətindən hesablasaq onda trayektoriyanın həmin nöqtəyə hər iki tərəfdən qonşu olan nöqtələrdə trayektoriyanın parçaları yalnız işarə ilə bir-birindən fərqlənəcəklər. Bu isə trayektoriyanın həmin istiqamətdə nəzərən simmetrikliyi deməkdir. Hər hansı $r = r_{min}$ nöqtəsinə qədər getsək, onda ona nəzərən simmetrik olan eyni patçanın olduğunu görərik və s. Deməli trayektoriya düz və əks istiqamətdə təkrar olunan eyni parçalardan ibarət olur. Bu hal infinit trayektoriyalar üçün də doğrudur. Bu trayektoriya r_{min} nöqtəsində başlayaraq sonsuzluğa qədər davam edən simmetrik budaqlardan ibarətdir.

Mərkəzəqaçma enerjisinin olması ($M \neq 0$ haldakı hərəkət zamanı) $r \to 0$ yaxınlaşdıqda $1/r^2$ qanunu ilə sonsuzluğa yaxınlaşdığı zaman (həmin potensialın cəzbetmə potensialı olduğu halda belə) zərrəciyin sahənin mərkəzinə düşməsinin qarşısının alır. Zərrəciyin mərkəzə düşməsi potensial enerjinin $r \to 0$ kifayət qədər sürətlə $-\infty$-a yaxınlaşdığı halda mümkündür.

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

bərabərsizliyindən

$$r^2U(r)+\frac{M^2}{2m}<Er^2$$

və ya ifadəsindən alınır ki, r sıfıra yaxınlaşan qiyməti yalnız

$$r^2U(r)\Big|_{r\to 0}<-\frac{M^2}{2m} \qquad (14.11)$$

şərti ödənildikdə ala bilər. Başqa sözlə $U(r)$ $-\infty$-a ya $-\alpha/r^2$, $\alpha>\frac{M^2}{2m}$ qanunu ilə yaxınlaşmalı yada $-\frac{1}{r^n}$-ə mütənasib $n>2$ olmalıdır.

Məsələlər.

1. Sferik rəqqasın – l radiuslu sfera üzrə hərəkət edən m kütləli maddi nöqtənin hərəkət tənliyini inteqrallayın.

Həlli: koordinat başlanğıcı sferanın mərkəzində seçilmiş, polyar OX isə şaquli istiqamətdə aşağıya yönəlmiş sferik koordinatlarda rəqqasın Laqranj funksiyası

$$L=\frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2+\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)+mgl\cos\theta$$

φ-koordinatı dövrü olduğundan, impuls momentinin z komponenti ilə üst-üstə düşən P_φ ümumiləşmiş impuls saxlanan kəmiyyət olur.

$$ml^2\sin^2\theta\dot\varphi=M_z=const \qquad (1)$$

Enerji isə

$$E=\frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2+\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot\theta^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta \qquad (2)$$

Bu ifadənin $\dot\theta$ tapıbı dəyişməklə ayırsaq alırıq ki,

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E-U_{ef}(\theta)\right]}} \qquad (3)$$

Burada

$$U_{ef}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta$$

effektiv potensial enerji qəbul olunmuşdur. (1) tənliyindən istifadə edərək φ bucağı üçün alırıq ki,

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{ef}(\theta)}} \qquad (4)$$

(3) və (4) inteqralları uyğun olaraq τ və III növ elliptik inreqrallar sərhəddi isə $E=U_{ef}$ tənliyindən təyin olunur. Axırıncı tənlik $\cos\theta$ görə kub tənlikdir. Həmin tənliyin -1 və +1 intervalında iki kökü vardır. Həmin köklər sfera üzərində iki

çevrənin vəziyyətini təyin edirlər. Hərəkətin trayektoriyası həmin çevrələr arasında yerləşir.

2. Təpə bucağı 2α olan, təpəsi üstə şaquli yerləşdirilir. Konus üzrə maddi nöqtənin ağırlıq qüvvəsi sahəsindəki, hərəkət tənliyini inteqralayın.

Həlli: Koordinat başlanğıcı konusun təpəsində seçilmiş polyar OX isə şaquli istiqamətdə yuxarı yönəlmiş sferik koordinatlarda Laqranj funksiyası

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\alpha$$

φ-koordinat dövrüdür, ona görə də M_z saxlanılır.

$$M_z = mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}$$

Enerji

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr\cos\theta$$

Birinci məsələdə tətbiq olunan üsulla tapırıq ki,

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{ef}(r)\right]}}$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sin^2 \alpha \sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}}$$

$$U_{ef}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr\cos\theta$$

$E = U_{ef}$ şərti ($M_z \neq 0$ olduqda) r-ə nəzərən kub tənlikdir. Onun iki həqiqi kökü vardır. Həmin köklər konus üzərində iki dənə paralel çevrələrin vəziyyətini təyin edir. Hərəkətin trayektoriyası həmin çevrələr arasında yerləşir.

3. m_1 kütləyə malik asqı nöqtəsi horizontal istiqamətdə hərəkət edə bilən müstəvi rəqqasın hərəkət tənliyibi inteqrallayın

Həlli: §5 məsələ 2-də alınmış Laqranj funksiyasında x-koordinatı dövrüdür. Ona görə də ümumiləşmiş P_x impulsu saxlanan kəmiyyətdir. Həmin impuls sistemin tam impulsunun horizontal komponenti ilə üst-üstə düşür:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi}\cos\varphi = const \quad (1)$$

Sistemi sükunətdə götürmək həmişə mümkün olduğundan götürmək olar və (1) tənliyinin inteqralı

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \sin\varphi = const \quad (2)$$

Münasibətini verir. Bu isə üz növbəsində ətalət mərkəzinin horizontal istiqamətində sükunət də olduğunu göstərir. (1) tənliyindən istifadə edərək enerji üçün

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 g l \cos\varphi \tag{3}$$

ifadəsini alırıq. Buradan isə

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2\varphi}{E + m_2 g l \cos\varphi}}d\varphi$$

m_1 zərrəciyin koordinatları $x_2 = x + l\sin\varphi$, $y_2 = l\cos\varphi$-ni (2) tənlikləri vasitəsilə φ-lə ifadə edərək tapırıq ki, həmin zərrəciyin trayektoriyası horizontal yarımoxu $lm_1/(m_1 + m_2)$və şaquli olu l olan ellips parçasından ibarətdir. Əgər $m_1 \to \infty$ olarsa onda çevrə üzrə rəqs edən adi riyazi rəqqasa qayıtmış olur.

§ 15 Kepler məsələsi

Mərkəzi sahənin ən vacib halı potensial enerjinin r-lə tərs mütənasib və uyğun olaraq qüvvənin r^2-lə tərs mütənasib olduğu haldır. Buraya Nyuton cazibə sahəsi və elektrostatik Kulon sahələri daxildir. Məlum olduğu kimi birinci yalnız cazibə xarakterli, ikinci isə həm cazibə həmdə itələmə sahəsi ola bilər.

Əvvəlcə

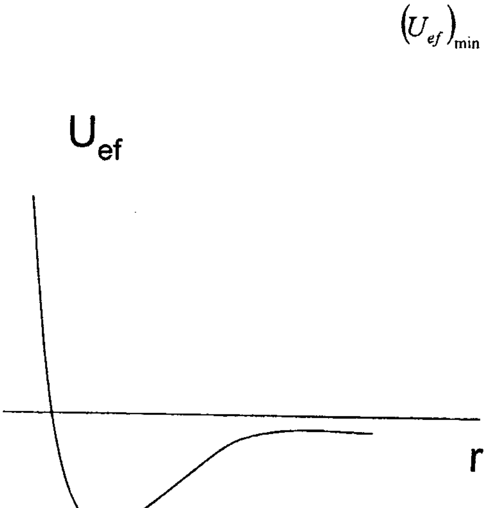
$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{15.1}$$

cazibə sahəsinə baxaq. Burada müsbət sabitdir. "Effektiv" potensial enerjinin

$$U_{ef} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{15.2}$$

qrafiki şəkil 10-da göstərilən kimidir. O $r \to 0$ $+\infty$-a, $r \to \infty$ isə mənfi tərəfdən sıfıra yaxınlaşır. $r = M^2/\alpha m$ nöqtəsində

$$(U_{ef})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} \tag{15.3}$$

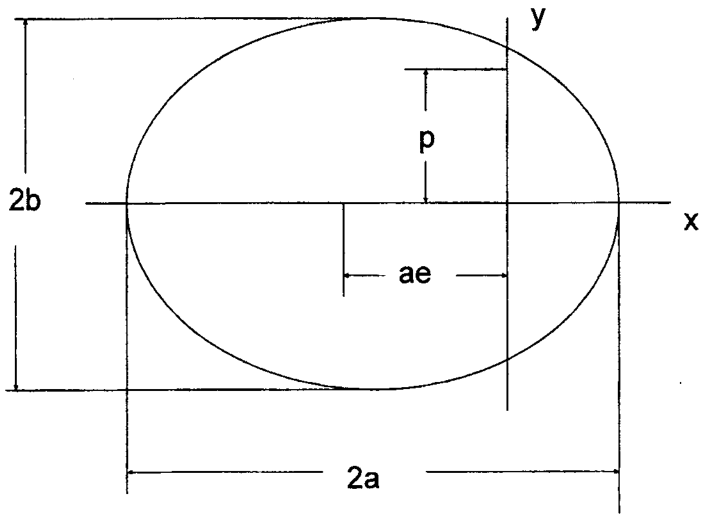


bərabər olan minimuma qiymət alır. Həmin qrafikdən görünür ki, $E > 0$ olduqda zərrəciyin hərəkəti infinit, $E < 0$ olduqda isə finit olacaqdır.

Trayektpriyanın aşgar forması (14.7) düsturu vasitəsilə alınır. Bu düsturdan $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ yazıb, elementar inteqrallama apardıqdan sonra alırıq ki,

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + const$$

Alınan ifadədə φ bucağının başlanğıcını elə seçək ki, const=0 olsun və



Şəkil 11

$$p = \frac{M^2}{m\alpha},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

(15.4)

işarələmələrini etsək trayektoriyanın

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

(15.5)

tənliyini alarıq. Bu tənlik fokus nöqtəsi koordinat başlanğıcı seçilmiş konusvarı kəsiyin tənliyidir. P və e orbitin parametri və eksentriteti adlanırlar. (15.1) tənliyindən görünür ki, φ-nin başlanğıc qiymətini seçilməsi $\varphi = 0$ nöqtəsinin mərkəzə ən yaxın nöqtə olduğuna dəlavət edir (perihali nöqtəsi) (15.1) qanunu ilə qarşılıqlı təsirdə olan ekvivalent iki cisim məsələsində də hər bir zərrəciyin orbiti fokustvarı fokusları onların ətalət mərkəzində olan konusvari kəsikdən ibarətdir.

(15.4) düsturundan görünür ki, $E < 0$ olduqda eksentristet $e < 1$-dir, yəni orbita ellipsdir və paraqrafın əvvəlində deyildiyi kimi, hərəkət finit hərəkətdir (şəkil 11). Analitik həndəsənin məlum düsturlarına görə ellipsin böyük və kiçik yarımoxları

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{15.6}$$

Enerjinin mümkün olan qiyməti (15.3) ifadəsi ilə üst-üstə düşür. Bu zaman e=0 olur və ellips çevrəyə çevrilir. Qeyd edək ki, ellipsin böyük yarımoxu yalnız zərrəciyin enerjisindən (momentindən yox) asılı olur.

Sahənin mərkəzinə ən yaxın və ən uzaq məsafə

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \qquad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e) \tag{15.7}$$

Bu ifadələri (a-nın və e-nin (15.6) və (15.4) ifadələrini nəzərə alaraq). $U_{ef}(r) = E$ tənliyinin kökləri birbaşa da almaq olardı.

Ellips üzrə fırlanma zamanı, yəni hərəkətin T periodunu, (14.3) şəklində yazılmış "sahə inteqralından " almaq daha əlverişlidir. Həmin ifadəni zamana görə sıfırdan T-yə qədər inteqrallasaq alırıq ki,

$$2mf = TM$$

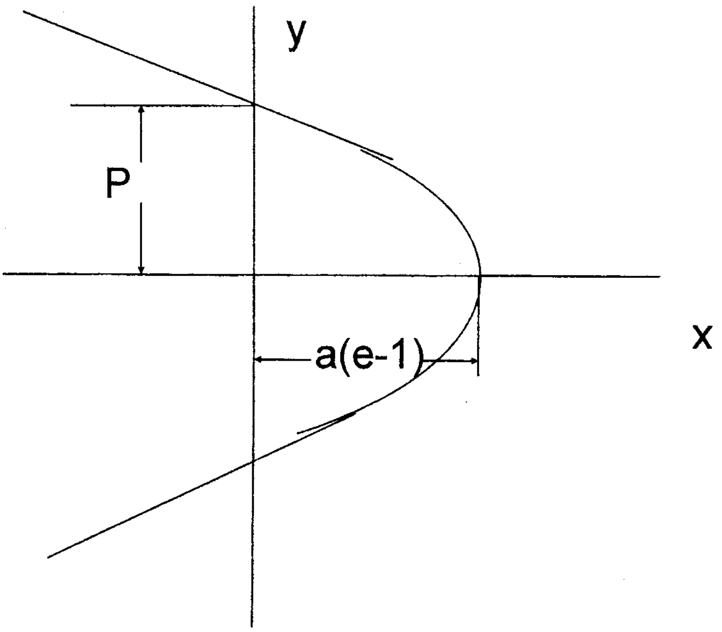
burada f orbitin sahəsidir. Ellips üçün $f = \pi ab$ və (15.6) düsturları vasitəsilə tapırıq ki,

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{15.8}$$

Hərəkətin periodunun kvadratının orbitin xətti olçülərinin kubu ilə mütənasib olduğu artıq §10-da göstərilmişdi. Qeyd edək ki, period yalnız zərrəciyin enerjisindən asılıdır.

$E \geq 0$ olduqda hərəkət infinitdir. $E > 0$ olduqda $e > 1$ olur, yəni trayektoriya hiperboladır. Trayektoriya sahəsinin mərkəzini (fokusu) şəkil 12-də olduğu kimi dolanır. Perihelinin mərkəzdən olan məsafəsi

$$r_{\min} = \frac{p}{e+1} = a(e-1) \tag{15.9}$$



Şəkil 12

burada $r_{\min} = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$ hiperbolanın yarımoxudur.

$E = 0$ olduqda $e = 1$, yəni zərrəcik parabola üzrə hərəkət edir. Perehelindən olan məsafə $r_{\min} = p/2$. Bu hal zərrəciyin sonsuz uzaqlaşmış nöqtədən sükunət hərəkətə başladığı zamam baş verir.

Zərrəciyin koordinatının zamandan asılılığı (14.6) düsturu vasitəsilə alınır. Bu asılılıq əlverişli parametrik formada aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər.

Əvvəlcə elliptik orbitaya baxaq. (14.6) inteqralını (15.4) və (16.6) düsturları vasitəsilə a və e-ni daxil etsək alırıq ki,

$$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$$

Alınan ifadədə $r-a=-ae\cos\xi$ əvəzlənməsini etməklə inteqral aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(\xi-e\sin\xi)+const$$

Burada zamanın başlanğıcını elə seçsək ki, const=0 olsun. Onda r və t-nin aşağıdakı parametrik ifadələrini almış olarıq.

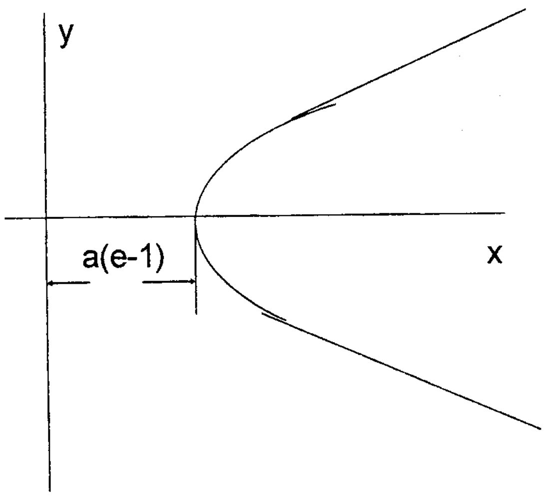
$$t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(\xi-e\sin\xi) \qquad (15.10)$$

(t=0 anında zərrəcik perihelidə olub). Həmin ξ parametri vasitəsilə zərrəciyin $x=r\cos\varphi$ və $y=r\sin\varphi$ koordinatlarında (x və y oxları uyğun olaraq ellipsin böyük və kiçik yarımoxları istiqamətində yönəlmişdir) ifadə etmək olur. (15.5) və (15.10) ifadələrindən alırıq ki,

$$ex=p-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos\xi)=ae(\cos\xi-e)$$

y koordinatını $\sqrt{r^2-x^2}$ kimi yazsaq nəhayət

$$x=a(\cos\xi-e),$$
$$y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi \qquad (15.11)$$



Şəkil 13

olacaq. Ellips boyunca bir tam fırlanmaya ξ parametrinin 0-dan 2π-yə qədər dəyişməsi uyğun gəlir.

Tamamilə analoji hesablamanı hiperbolik trayektoriya üçün aparsaq aşağıdakı nəticəni alarıq.

$$r=a(ech\xi-1), t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esh\xi-\xi)$$
$$x=a(e-ch\xi), y=a\sqrt{e^2-1}sh\xi \qquad (15.12)$$

burada ξ parametri $-\infty$ dan $+\infty$ qədər dəyişir.

İndi isə $U(r)=\frac{\alpha}{r}$ itələmə sahəsində hərəkətə baxaq ($\alpha>0$).

Bu halda effektiv potensial enerji

$$U_{ef}=\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$$

r 0-dan ∞-a qədər dəyişdikdə, monoton olaraq $+\infty$-dan 0-a qədər dəyişir. Zərrəciyin enerjisi yalnız müsbət, hərəkət isə infinit olur. Bütün hesablamalar yuxarıda aparılanlarla analojidır. Trayektoriya (parabola E=0 olduqda) hiperboladır.

$$\frac{p}{r}=-1+e\cos\varphi \tag{15.14}$$

(p və e parametrləri əvvəlki (15.4) düsturu ilə təyin olunurlar).

Bu halda traektoriya sahənin mərkəzinin şəkil 13-də göstərildiyi kimi yanından keçir.

Perihelindən olan məsafə

$$r_{\min}=\frac{p}{e-1}=a(e+1) \tag{15.15}$$

Zamandan asılılıq aşağıdakı parametrik tənliklər vasitəsilə verilir.

$$\begin{gathered} r=a(ech\xi+1),t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esh\xi+\xi) \\ x=a(ch\xi+e),y=a\sqrt{e^2-1}sh\xi \end{gathered} \tag{15.16}$$

Paraqrafın axırında qeyd edək ki, $U(r)=\frac{\alpha}{r}$ (α-nin ixtiyarı işarəsində) hərəkət zamanı yalnız bu sahəyə aid olan məxsasi hərəkət inteqralı vardır. Birbaşa hesablama ilə göstərmək olar ki,

$$[\vec{v}\vec{M}]+\frac{\alpha\vec{r}}{\vec{r}}=const \tag{15.17}$$

saxlanan kəmiyyətdir.

Doğrudan da bunun zamana görə tam törəməsi

$$[\dot{\vec{v}}\vec{M}]+\frac{\alpha\vec{v}}{\vec{r}}-\frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}\vec{r})}{r^3}$$

ifadəsinə bərabərdir. Burada $\vec{M}=m[\vec{r}\vec{v}]$ ifadəsindən istifadə etsək

$$m\vec{r}(\vec{v}\dot{\vec{v}})-m\vec{v}(\vec{r}\dot{\vec{v}})+\frac{\alpha\vec{v}}{\vec{r}}-\frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}\vec{r})}{r^3}$$

Alınan ifadə də $m\dot{\vec{v}}=\frac{\alpha\vec{r}}{\vec{r}^3}$ hərəkət tənliyindən istifadə edərək həmin ifadənin doğrudan da sıfıra bərabər olduğunu göstərə bilərik.

Saxlanan (15.17) vektoru böyük ox üzrə fokusdan peruheliyə doğru istiqamətlənmişdir. Onun ədədi qiyməti isə αe-yə bərabərdir. Bunun üçün həmin vektorun perihelidə qiymətini hesablamaq kifayətdir.

(15.17) hərəkət inteqralında $\vec{M}$ və E inteqralları kimi zərrəciyin halının (koordinat və sürətin) birqiymətli funksiyası olduğunu qeyd edək. Gələcəkdə §50-ci görəcəyik ki, belə əlavə birqiymətli inteqralı meydana çıxması hərəkətin cırlaşması isə əlaqədardır.

Məsələlər.

1. $E=0$ enerjili zərrəciyin $U=-\frac{\alpha}{r}$ sahəsində hərəkəti edərkən koordinatın zamandan asılılığını (parabola üzrə) tapın

Həlli:

$$t=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r-\frac{M^2}{m^2}}}$$

inteqralında

$$r=\frac{M^2}{2m\alpha}\left(1+\eta^2\right)=\frac{p}{2}\left(1+\eta^2\right)$$

əvəzləməsini etsək, nəticədə axtardığımız asılılığın aşağdakı parametrik formada

olduğunu görərik. P parametri $-\infty$-da $+\infty$-a qədər dəyişir.

$$r=\frac{p}{2}\left(1+\eta^2\right),\qquad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right)$$

$$x=\frac{p}{2}\left(1-\eta^2\right),\qquad y=p\eta$$

2. Maddi nöqtənin $U(r)=-\frac{\alpha}{r^2}$ $\alpha>0$ sahəsində hərəkət tənliyini inteqrallayın.

Həlli: (14.6), (14.7) tənliklərindən istifadə edərək və φ,t kəmiyyətlərinin uyğun başlanğıc qiymətlərini seçməklə alırıq ki,

a) $E>0$ olduqda, $\frac{M^2}{2m}>a$ $\qquad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\cos\left[\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right]$

b) $E>0$ olduqda, $\frac{M^2}{2m}<a$ $\qquad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}sh\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$

c) $E<0$ olduqda, $\frac{M^2}{2m}<a$ $\qquad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-M^2}}ch\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right]$

Bütün hallarda

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2-\frac{M^2}{2m}+a}$$

a) və b) hallarında $\varphi \to \infty$ yaxınlaşdıqda zərrəcik mərkəzinə düşür. Hər hansı sonlu r məsafəsindən mərkəzə düşmə

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+Er^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}}\right\}$$

3. $U(r)=-\frac{\alpha}{r}$ potensial enerjiyə sonsuz kiçik $\delta U(r)$ əlavəsi etdikdə finit hərəkətin trayektoriyası qapalı olmur və hər bir dövrdən sonra periheli $\delta\varphi$ bucağı qədər yerini dəyişir. a) $\delta U=\beta/r^2$ və b) $\delta U=\gamma/r^2$ qiymətləri üçün $\delta\varphi$-ni hesablayın.

Həlli: r dəyişənin $r_{\min}$-dan $r_{\max}$-a və sonra $r_{\min}$-a dəyişməsi zamanı φ bucağı (14.10) düsturu ilə təyin olunan $\Delta\varphi$-qədər dəyişir. Həmin düsturu

$$\Delta\varphi=-2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}dr$$

kimi yaza bilərik (gələcəkdə fiktiv olaraq doğulan inteqral almamaq üçün). Bu $U(r)=-\frac{\alpha}{r}+\delta U$ yazıb δU -nun üstlərinə görə sıraya ayıraq. Bu zaman sıfırınrı tərtibdən olan hədd 2π -yə bərabər olacaq. I tərtibdən olan hədd isə axtardığımız yerdəyişməni verəcəkdir

$$\Delta\varphi=\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{2m\delta U dr}{\sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{M^2}{r^2}}}=\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\right)\int_0^{\pi}r^2\delta U d\varphi \qquad (1)$$

burada dr-ə görə inteqrallamadan, "həyacanlanmamış" trayektoriyası üzrə $d\varphi$-yə görə inteqrallamaya keçilmişdir.

(1) düsturunu a) halında inteqrallamaq çox asandır və

$$\delta\varphi=-\frac{2\pi\beta m}{M^2}=-\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

ifadəsini verir (p- həyacanlanmamış ellipsin (15.4) ifadəsilə verilən parametridir. b) halında $r^2\delta U=\gamma/r$ və $\frac{1}{r}$-i (15.5) ifadəsindən götürsək alırıq ki,

$$\delta\varphi=-\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4}=-\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}$$

IV FƏSİL

ZƏRRƏCİKLƏRİN TOQQUŞMASI

§ 16 Zərrəciklərin parçalamçası

İmpuls və enerjinin saxlanması qanunları özü-özlüyündə bir çox hallarda müxtəlif mexaniki hadisələrin xarakteri barədə əhəmiyyətli nəticələr çıxarmağa imkan verir. Bu halda ən əhəmiyyətli olan odur ki, həmin xassələr prosesdə iştirak edən zərrəciklər arasındakı qarşılıqlı təsirin növündən asılı olmur.

Zərrəciyin "öz-özünə" iki hissəyə parçalanma, yəni xarici qüvvənin təsiri olmadan parçalanma prosesinə baxaq. Parçalanmadan sonra alınan hər iki zərrəcik bir birindən asılı olmayaraq hərəkət edirlər.

Bu proses zərrəciyin (parçalanmadan əvvəl) sükunətdə olduğu hesablama sistemində daha sadə şəkil alır. İmpulsun saxlanması qanununa görə parçalanmadan sonra alınan zərrəciklərin impulsların cəmi sıfır olur, yəni zərrəciklər bərabər və əks istiqamətli impulslarla hərəkət edirlər. Onların p_0 ədədi qiymətləri enerjinin

$$E_{dax} = E_{1dax} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2dax} + \frac{p_0^2}{2m_2}$$

saxlanması qanunundan təyin olunur. Burada m_1 və m_2 zərrəciklərin kütlələri, E_{1dax} və E_{2dax} onların daxili enerjiləri, E_{dax} isə əvvəlki (parçalanan) zərrəciyin daxili enerjisidir.

"Parçalanma enerjisini" ε-lə işarə edək.

$$\varepsilon = E_{dax} - E_{1dax} - E_{2dax} \tag{16.1}$$

(aydındır ki, parçalanmanın ümumiyyətlə mümkün olması üçün bu kəmiyyət müsbət olmalıdır). Buradan alınır ki,

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m} \tag{16.2}$$

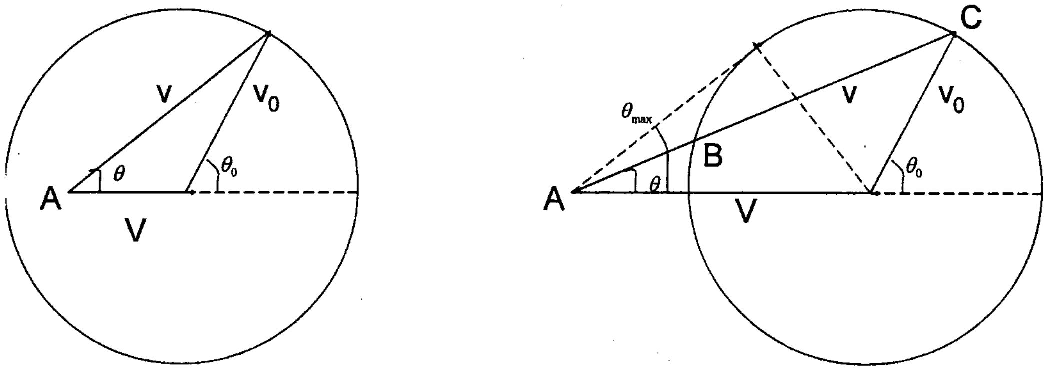
Buradan da p_0 təyin olunur (m-gətirilmiş kütlə olur), zərrəciklərin sürətləri isə $v_{10} = \frac{p_0}{m_1}$; $v_{20} = \frac{p_0}{m_2}$.

İndi isə parçalanan (birinci) zərrəciyin parçalanmaya qədər $\vec{V}$ sürətlə hərəkət etdiyi hesablama sisteminə keçək. Bu sistem ümumi impulsun sıfıra bərabər olduğu "ətalət mərkəzi sistem"-nin (s-sistemi) əksinə olaraq laboratoriya (l-sistemi) sistemi adlandırırlar.

Parçalanmadan alınan zərrəciklərdən birinə baxaq: onun l və s-sistemlərdəki sürətlərinin uyğun olaraq $\vec{v}$ və $\vec{v}_0$ işarə edək. Məlum $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_0$ və ya $\vec{v} - \vec{V} = \vec{v}_0$ ifadəsindən alınır ki,

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2 \tag{16.3}$$

burada θ zərrəciyin sürətinin $\vec{V}$ sürətilə əmələ gətirdiyi bucaqdır (uçma bucağı). Bu düstur vasitəsilə parçalanma zərrəciyin sürətinin onun laboratoriya sistemində uçma bucağından asılılığı təyin olunur. Bu asılılıq şəkil 14-də göstərilən



a) V<v0

a) V>v0

Şəkil 14

diaqramma vasitəsilə ifadə olunmuşdur. Diaqramdan $\vec{v}$ surəti v_0 radiuslu çevrənin hər hansı bir nöqtəsinə, mərkəzdən $\vec{V}$ məsafədə olan A nöqtəsindən çəkilən ilə təyin olunur. $V < v_0$ və $V > v_0$ hallarına şəkil 14-də a) və b) diaqramları uyğun gəlir. Birinci halda zərrəcik istənilən bucağı altından çıxa bilər. İkinci halda isə zərrəcik yalnız

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_0}{V} \tag{16.4}$$

düsturu ilə təyin olunan θ_{max} bucağından artıq olmayan bucaq altında irəliyə doğru çıxa bilər (A nöqtəsindən çevrəyə çəkilən toxunan istiqaməti).

l və s-sistemlərindəki çıxma θ və θ_0 bucaqları arasındakı əlaqə həmin diqramlarından tapılan

$$tg\theta = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V} \tag{16.5}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

Bu ifadəni $\cos\theta_0$-a görə həll etsək

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta} \tag{16.6}$$

düsturunu alarıq. $v_0 > V$ olduqda θ_0-la θ arasında əlaqə (14.a) diaqramından göründüyü kimi qarşısında + işarəsini götürmək lazımdır (bu zaman $\theta_0 = 0$ olduqda $\theta = 0$ alınır). $v_0 < V$ olduqda isə θ_0-la arasındakı əlaqə birqismətli olmur: θ-nın hər bir qiymətinə θ_0-ın iki qiyməti uyğun gəlir. Həmin hallar 14 b) şəklində çevrənin B və C nöqtələrinə mərkəzdən çəkilmiş $\vec{v}_0$ vektorlarına uyğun gəlir. Bu halda kvadrat kökün qarşısında hər iki işarə uyğun gəlir.

Fiziki tətbiqlər zamanı yalnız bir zərrəciyin deyil, çoxlu zərrəciklərin parçalanması prosesinə baxılması zəruri olur. Bu zaman parçalanma zərrəciklərinin istiqamətə (bucaqlara) və eneriyə görə paylanması məsələsi meydana çıxır.

Belə halda əvvəlki zərrəciklərin fəzada xaotik yəni orta hesabla izotrop paylandıqlarını fərz edəcəyik.

S-sistemində qarşıya qoyulan sualların cavabı aydındır. Parçalanma zərrəciklərinin hamısı (eyni növdən olan) eyni enerjiyə malik olurlar və onların istiqamətlərə görə paylanmaları izotropdur. Axırıncı müddəa əvvəlki zərrəciklərin fəzada izotrop şəkildə paylanması haqqında etdiyimiz fərziyyə ilə əlaqəlidir. Bu isə do_0 cisim bucağı altında çıxan zərrəciklər sayının təmin elementin qiymətilə mütənasib olması, yəni $\frac{do_0}{4\pi}$-yə bərabər olması deməkdir. Buradan θ_0 bucaqlarına görə paylanması $do_0 = 2\pi \sin\theta_0 d\theta_0$ etməklə alırıq

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0 \tag{16.7}$$

l-sistemdə paylanmanı (16.7) düsturunu uyğun çevirməyə uğratmaqla ala bilərik. Məsələ l-sistemdə kinetik enerjiyə görə paylanmanı tapaq: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$ ifadəsini kvadrata yüksəldək

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0 V\cos\theta_0$$

buradan tapırıq ki,

$$d\cos\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}$$

Buraya $T = \frac{mv^2}{2}$ ifadəsini daxil edək (burada m zərrəciklərin paylanmasına baxılmasından asılı olaraq m_1 və ya m_2 ola bilər) və (16.7)-də yerinə qoyaq. Onda axtardığımız

$$\frac{dT}{2mv_0 V} \tag{16.8}$$

paylanması alarıq.

Kinetik enerji ən kiçik $T = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ qiymətindən ən böyük $T = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$ qiymətinə qədər dəyişə bilər. (16.8) düsturundan görünür ki, bu intervalda zərrəciklərin paylanması izotropdur.

Zərrəciyin ikidən çox zərrəciklərə parçalanması halında enerji və impulsun saxlanması qanunları zərrəciklərin sürətlərə və istiqamətlərə görə paylanmalarında, iki zərrəciyə parçalanma halına nisbətən daha çox ixtiyariliyə yol verir. Xüsusi halda, s-sistemində parçalanma zərrəciklərinin enerjiləri məlum qiymətə malik olmurlar. Lakin hər bir parçalanma zərrəciyinin ala biləcəyi enerjinin yuxarı sərhəddi məlum olur.

Həmin sərhəddi təyin etmək üçün baxılan (m_1) kütləli bir zərrəcikdən başqa qalan zərrəciklər çoxluğuna bir sistem kimi baxaq. Onun daxili enerjisini E'_{dax}-lə işarə edək. Onda m_1 zərrəciyinin kinetik enerjisinin (16.1) və (16.2) düsturlarına əsasən

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M}\left(E_{dax} - E_{1dax} - E'_{dax}\right)$$

şəklində yazmaq olar (M-əvvəlki zərrəciyin kütləsidir). Aydındır ki, T_{10} mümkün olan ən böyük qiyməti ən kiçik qiymətə malik olduğu halda ala bilər. Bunun üçün isə m_1 zərrəciyindən başqa qalan zərrəciklərin hamısı eyni bir sürətlə hərəkət etməlidirlər. Bu halda E'_{dax} onların daxili enerjilərinin cəminə bərabər $E_{dax} - E_{1dax} - E'_{dax}$ fərqi isə ε parçalanma enerjisinə bərabər olur. Beləliklə

$$(T_{10})_{max} = \frac{M - m_1}{M}\varepsilon \tag{16.9}$$

Məsələlər.

1. Zərrəciklərin l sistemindəki θ_1 və θ_2 bucaqları arasında əlaqəni iki zərrəciyə parçalanma halında tapın.

Həlli: S-sistemdə zərrəciklərin çıxma bucaqları $\theta_{10} = \pi - \theta_{20}$ düsturu ilə əlaqələnir. θ_{10}-yerinə sadəcə olaraq θ_0 yazıb (16.5) düsturunu hər iki zərrəcik üçün

$$V + v_{10}\cos\theta_0 = v_{10}\sin\theta_0 ctg\theta_1$$
$$V - v_{20}\cos\theta_0 = v_{20}\sin\theta_0 ctg\theta_2$$

şəklində yaza bilərik. Bu iki bərabərlikdən θ_0-i kənar etmək olar. Bunun üçün həmin tənlikləri $\cos\theta_0$ və $\sin\theta_0$ görə yazıb $\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 + 1$ cəmini hesablamaq lazımdır. Bundan sonra $v_{10}/v_{20} = m^2/m_1$ olduğunu nəzərə alaraq (16.2)-dən istifadə edərək aşağıdakı tənliyi alırıq.

2. Parçalanma zərrəciklərinin l-sistemində çıxma istiqamətlərinə görə paylanmasını tapın.

Həlli: $v_0 > V$ halında (16.6) ifadəsində kökün qarşısında "+" işarəsi götürüb (16.7)-də yerinə yazaq. Onda axtardığımız paylanmanı aşağıdakı şəkildə alırıq:

$$\frac{\sin\theta d\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos + \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right] \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

$v_0 < V$ olduğu halda θ_0-la θ arasında olan hər iki əlaqəni nəzərə almaq lazımdır. θ bucağı artdıqca ona uyğun olan θ_0 bucaqlarının biri atıb, o biri isə azaldığından (16.6) ifadəsində $d\cos\theta_0$ ifadələrinin kökün qarşısında hər iki işarəni götürdüyümüz haldakı qiymətlərinin fərqini (cəmi yox) götürmək lazımdır. Nəticədə alırıq ki,

$$\sin\theta d\theta \frac{1 + \frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}} \qquad (0 \le \theta \le \theta_{max})$$

3. l-sistemdə hər iki parçalanma zərrəciklərinin çıxış istiqamətləri arasındakı bucağı təyin edin.

Həlli: θ bucağı (16.5) düsturu ilə təyin oluna θ_1 və θ_2 bucaqlarının cəminə bərabərdir $\theta = \theta_1 + \theta_2$ (bax məsələ 1). Həmin bucağın tanqensi ən asan hesablanır. Alınmış ifadənin ekstremumunun tədqiqi θ bucağının mümkün olan intervalının V ilə v_{10} və v_{20} sürətlərinin nisbi qiymətlərindən asılı olaraq aşağıdakı qiymətlərini verir:

$$0 < \theta < \pi \text{, əgər } v_{10} < V < v_{20}$$

$$\pi - \theta_m < \theta < \pi \text{, əgər } V < v_{10}$$

$$0 < \theta < \theta_m \text{, əgər } V > v_{20}$$

(müəyyən olması üçün $v_{20} > v_{10}$ olduğunu qəbul etdik). Bu zaman θ_0 bucağı

$$\sin\theta_m = \frac{V(v_{10} + v_{20})}{V^2 + v_{10}v_{20}}$$

düsturu ilə təyin olunur.

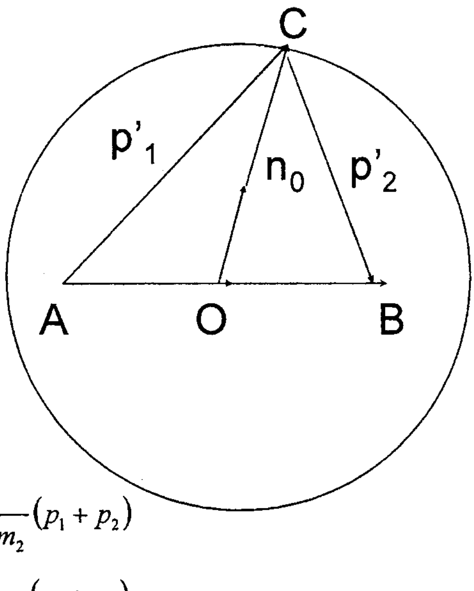
§ 17 Zərrəciklərin elastiki toqquşması

Zərrəciklərin toqquşması onların daxili halını dəyişdirmirsə belə toqquşma elastiki toqquşma adlanır. Buna uyğun olaraq belə toqquşmaya enerjinin saxlanması qanununu tətbiq etdikdə daxili enerjini nəzərə almamaq olar.

Hər iki zərrəciyin ətalət mərkəzi sükunətdə olan sistemə (s-sistemi) nəzərən toqquşma sadə şəkil alır. Əvvəlki paraqrafda etdiyimiz kimi kəmiyyətlərin s-sistemindəki işarələrini "0" indeksi ilə fərqləndirəcəyik. Zərrəciklərin S-sistemində toqquşmadan əvvəlki sürətləri onların laboratoriya sistemindəki $\vec{v}_1$ və $\vec{v}_2$ sürətlərilə

$$v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v},$$

$$v_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}$$



$$\overrightarrow{OC} = mv$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(p_1 + p_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(p_1 + p_2)$$

Şəkil 15

şəklində ifadə olunurlar. Burada $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (bax (13.2)). Zərrəciklərin impulsları impulsun saxlanması qanuna görə qiymətcə bərabər istiqamətcə bir-birinin əksinə, enerjinin saxlanması qanununa görə isə onların ədədi qiymətləri də dəyşməz qalır. Beləliklə s-sistemində toqquşmanın nəticəsi hər iki zərrəciyin sürətlərinin fırlanmasından ibarət olur. Yəni impulslar ədədi qiymətcə dəyişməz, istiqamətcə bir-birinin əksinə olaraq qalırlar. Əgər m_1 zərrəciyin toqquşmadan sürətinin $\vec{n}_0$ vahid vektoru ilə işarə etsək alırıq ki, (onları ştrixlərlə fərqləndiririk)

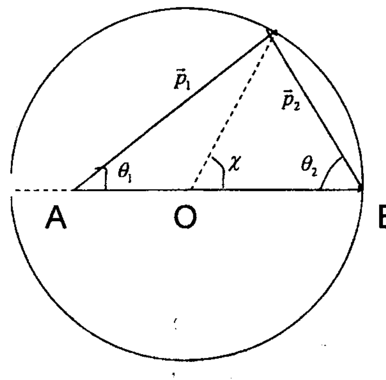
$$v'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\vec{n}_0, \qquad v'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\vec{n}_0 \tag{17.1}$$

Burada laboratoriya sisteminə keçmək üçün bu ifadələrə ətalət mərkəzinin $\vec{V}$ sürətini əlavə etmək kifayətdir. Beləliklə, zərrəciklərin laboratoriya sistemində toqquşmadan sonrakı sürətli üçün

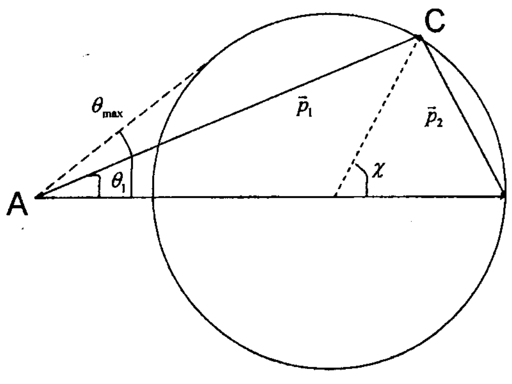
$$v'_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}, \qquad v'_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \tag{17.2}$$

ifadələrini alırıq. Yalnız enerji və impulsun saxlanma qanunlarından istifadə etməklə alınan məlumatlar bununla qurtarır. $\vec{n}_0$ vektorunun istiqamətinə gəlincə o zərrəciklər arasındakı qarşılıqlı təsirdən və onların toqquşmadan əvvəlki qarşılıqlı vəziyyətlərindən asılı olur. Alınan nəticələri həndəsi izah etmək olar. Bu zaman sürətlərdən impulslara keçmək daha əlverişlidir. (17.2) bərabərliyini uyğun olaraq m_1 və m_2 vurmaqla

$$p'_1 = mv\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \quad p'_2 = -mv\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \tag{17.3}$$



a) $m_1 < m_2$



a) $m_1 > m_2$

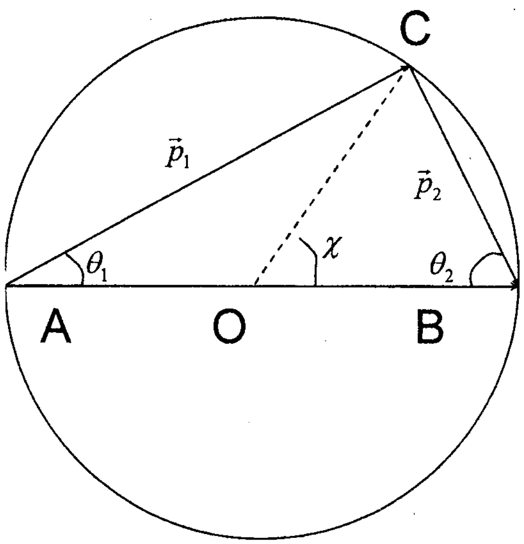
$\overrightarrow{AB} = \vec{p}_1 \qquad AO/OB = m_1/m_2$

Şəkil 16

ifadələrini alırıq (burada $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ gətirilmiş kütlədir). Radiusu mv-yə bərabər olan çevrə çəkək və 15-ci şəkil çəkək. Əgər $\vec{n}_0$ vahid vektoru $\overrightarrow{OC}$ xətti üzrə yönəlmiş, onda $\overrightarrow{AC}$ və $\overrightarrow{CB}$ vektoru $\vec{p}_1'$ və $\vec{p}_2'$ vektorlarını verir. $\vec{p}_1'$ və $\vec{p}_2'$-nin verilmiş qiymətlərində çevrənin radius və A və B nöqtələrinin vəziyyət dəyişməzdir, C nöqtəsi isə çevrə üzərində ixtiyari vəziyyət ala bilər.

Zərrəciklərdən birinin (tutaq ki, m_2 zərrəciyinin) toqquşmadan əvvəl sükunətdə olduğu halı təfsilatı ilə nəzərdən keçirər. Bu halda $OB = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 = mv$ çevrənin radiusuna bərabər olur. AB vektoru isə birinci zərrəciyin toqquşmadan əvvəlki $\vec{p}_1$ impulsuna bərabər olur. Bu zaman $m_1 < m_2$ olsa A nöqtəsi çevrənin daxilində, $m_1 > m_2$ olduqda isə çevrənin xaricində qalır. Uyğun diaqramlar 16 a) və b) şəkillərində verilmişdir.

Şəkillərdə göstərilən θ_1 və θ_2 bucaqları zərrəciklərin toqquşmadan sonra zərbə istiqamətindən ($\vec{p}_1$-istiqamətindən) meyl bucaq-larıdırlar. Şəkildə χ ilə işarə edilən mərkəzi bucaq ($\vec{n}_0$ vektorunun istiqaməti) birinci zərrəciyin ətalət mərkəzi sistemində dönmə bucağıdır. Şəkildən görünür ki, θ_1 və θ_2 bucaqlrı χ bucağı ilə aşağıdakı kimi ifadə olunurlar.



Şəkil 17

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi},$$

$$\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (17.4)$$

Hər iki zərrəciklərin toqquşmadan sonrakı sürətlərinin ədədi qiymətlərini də χ bucağı vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə etmək olur.

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2} \qquad (17.5)$$

$\theta_1 + \theta_2$ cəmi zərrəciklərin toqquşmadan sonrakı sürətləri arasındakı bucaqdır. Aydındır ki, $m_1 < m_2$ olduqda $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$, $m_1 > m_2$ olduqda $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ olur.

Zərrəciklərin toqquşmadan sonra bir düzxətt boyunca hərəkət etdikləri ("qarşı-qarşıya cazibə") hala $\chi = \pi$ qiyməti uyğun gəlir. Bu zaman C nöqtəsi ya (16 a) şəklində A nöqtəsindən sol tərəfdə olur yəni $\vec{p}_1'$ və $\vec{p}_2'$ vektorları əks istiqamətdə yönəlmiş olurlar, ya da A və O nöqtələrinin arasında (16 b) şəklində olduğu kimi, yəni $\vec{p}_1'$ və $\vec{p}_2'$ vektorları eyni istiqamətdə yönəlmiş olurlar.

Bu hal üçün zərrəciklərin toqquşmadan sonrakı sürətləri

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}\ , \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v} \tag{17.6}$$

olurlar. Bu halda $\vec{v}_2'$ ikinci zərrəciyin ala biləcəyi ən böyük sürətdir. Toqquşmadan əvvəl sükunətdə olan zərrəciyin ala biləcəyi maksimum enerji

$$E_{2\max}' = \frac{m_2 v_{2\max}'^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \tag{17.7}$$

burada $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ düşən zərrəciyin başlanğıc enerjisidir. $m_1 < m_2$ olduqda birinci zərrəciyin toqquşmadan sonrakı sürəti istənilən istiqamətə yönələ bilər. Əgər $m_1 > m_2$ olarsa onda düşən zərrəciyin meyl bucağı müəyyən maksimal qiymətdən artıq ola bilməz. Bu zaman AC xətti çevrəyə toxunan olur (şəkil 16 b). Aydındır ki, $\sin\theta_{1\max} = \frac{OC}{OA}$ və ya

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1} \tag{17.8}$$

Biri toqquşmadan əvvəl sükunətdə olan iki eyni kütləli zərrəciklərin toqquşması daha sadə şəkil alıq. Bu halda həm B, həm də A nöqtələri çevrə üzərində olurlar. Bu zaman

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \tag{17.9}$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}, \qquad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2} \tag{17.10}$$

Qeyd edək ki, zərrəciklər toqquşmadan sonra düz bucaq altında hərəkət edirlər.

Məsələ

Düşən m_1 zərrəciyinin, sükunətdə olan m_2 zərrəciyin sürətlərini onların laboratoriya sistemindəki meyl bucaqları ilə ifadə edin.

Həlli: Şəkil 16-da alırıq ki, $p_2' = 2OB\cos\theta_2$ və ya $v_2' = 2v\frac{m}{m_2}\cos\theta_2$. $p_1' = AC$ üçün alırıq ki,

$$OC^2 = AO^2 + p_1'^2 - 2AOp_1'\cos\theta_1$$

və ya

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - \frac{2m}{m_2}\frac{v_1}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

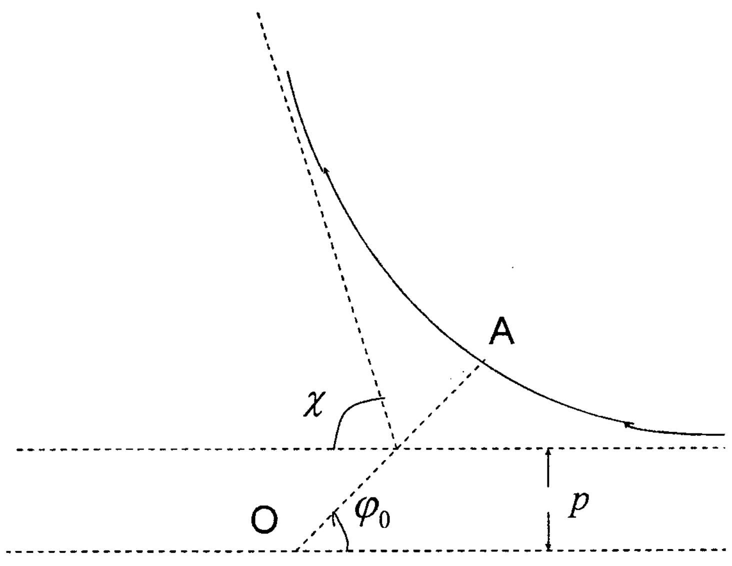
Buradan

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}$$

($m_1 > m_2$ olduqda kvadrat kökün qarşısında hər iki işarəni götürmək lazımdır).

§ 18 Zərrəciklərin səpilməsi

Bundan əvvəlki paraqrafda göstərildiyi kimi iki zərrəciyin toqquşmasının nəticəsini tam təyin etmək (χ bucağını tapmaq) üçün zərrəciklər arasında qarşılıqlı təsiri nəzərə almaqla hərəkət tənliyini həll etmək lazımdır.



Şəkil 18

Ümumi qaydaya uyğun olaraq əvvəlcə m kütləli zərrəciyin U(r) tərpənməz qüvvə mərkəzindən (zərrəciklərin ətalət mərkəzində yerləşmiş) meylini hesablamaq kimi ekvivalent məsələyə baxaq. §14 göstərildiyi kimi zərrəciyin mərkəzi sahədə trayektoriyası mərkəzə ən yaxın nöqtəyə çəkilmiş düzxəttə nəzərən simmetrikdir. (şəkil 18 OA). Ona görə də orbitanın hər iki assimtotu həmin düzxətti eyni bucaq altında kəsirlər. Həmin bucağı φ_0-la işarə etsək onda zərrəciyin χ meyl bucağı şəkildən göründüyü kimi

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \tag{18.1}$$

olacaqdır. φ_0 bucağı isə (14.7) düsturundan

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} \tag{18.2}$$

inteqralı ilə ifadə olunur. İnteqral mərkəzə ən yaxın $r_{\min}$ nöqtəsindən sonsuz uzaqlaşmış nöqtəyə qədər aparılır. $r_{\min}$-un inteqralaltı ifadənin kökü olduğunu yadımıza salaq.

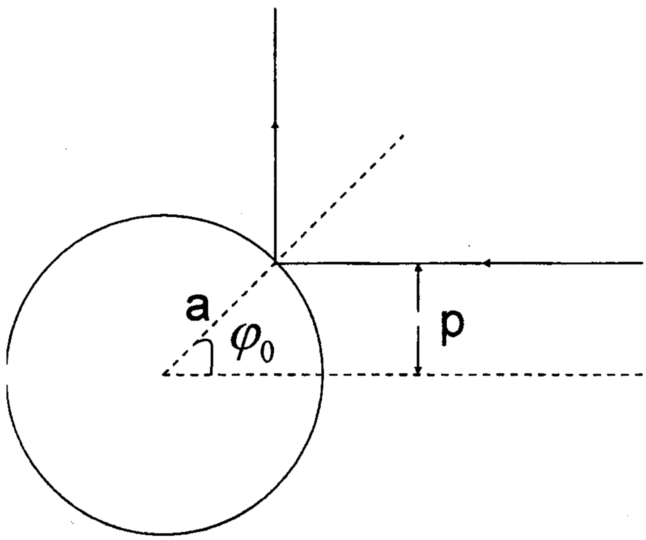
Baxdığımız halda hərəkət infinitdir. Bu zaman E və M sabitlərinin əvəzinə zərrəciyin sonsuz uzaqlaşmış nöqtədəki v_∞ sürətindən və ρ hədəf məsafəsindən istifadə. Hədəf məsafəsi sahənin mərkəzindən v_∞ istiqamətinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğu, yəni qüvvə sahəsi olmasaydı zərrəciyin mərkəz yanından keçə biləcəyi məsafəyə deyilir (şəkil 18).

Enerji və moment həmin kəmiyyətlərlə

$$E=\frac{mv_\infty^2}{2}, \qquad M=m\rho v_\infty \tag{18.3}$$

düsturu ilə ifadə olunurlar. (18.2) düsturu isə aşağıdakı formanı alır

$$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\rho\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}} \tag{18.4}$$



Şəkil 19

Bu düstur (18.1) düsturu ilə birlikdə χ bucağının ρ-məsafəsindən asılılığını təyin edir.

Adətən fiziki tətbiqlər zamanı ayrı-ayrı zərrəciklərin meyl etməsilə deyil, eyni v_∞ sürətinə malik olan eyni zərrəciklər dəstəsinin mərkəzdən səpilməsi məsələsinə baxırlar. Dəstədəki ayrı-ayrı zərrəciklər müxtəlif χ bucağı altında səpilirlər. Vahid zaman müddətində χ ilə $\chi+d\chi$ bucaqları arasında səpilən zərrəciklərin sayını dN-lə işarə edək. Öz-özlüyündə bu kəmiyyət səpilməni xarakterizə edə bilmir, çünki o düşən zərrəciklərin sıxlığından asılıdır (ona mütənasibdir). Ona görə də

$$d\sigma=\frac{dN}{n} \tag{18.5}$$

nisbətini daxil edək. Burada n zərrəciklər dəstəsinin vahid en kəsiyindən vahid zamanda keçən zərrəciklərin sayıdır (təbii olaraq dəstənin en kəsiyinə görə bircins paylandığını fərz edirik). Bu nisbət sahə ölçüsünə malikdir və səpilmənin effektiv kəsiyi adlanır.

Fərz edək ki, χ ilə ρ arasındakı əlaqə qarşılıqlı birqiymətlidir; bu səpilmə bucağının hədəf məsafəsinin monoton azalan funksiyası olduğu halda doğrudur. Belə olan halda χ ilə $\chi+d\chi$ bucaq intervalında, hədəf məsafələri $\rho(\chi)$ ilə $\rho(\chi+d\chi)$ intervalı arasında olan zərrəciklər səpilirlər. Belə zərrəciklərin sayı n-in radiusları ρ və $\rho+d\rho$ olan çevrələri arasında qalan həlqənin sahəsi hasilinə bərabərdir, yəni $dN=2\pi\rho d\rho n$. Ona görə də effektiv kəsik

$$dN=2\pi\rho d\rho \tag{18.6}$$

Effektiv kəsiyin səpilmə bucağından asılılığını tapmaq üçün bu ifadəni

$$d\sigma=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi \tag{18.7}$$

formasında yazmaq kifayətdir. $dp/d\chi$ ifadəsinin (adətən olduğu kimi[1]) mənfi qiymət ala biləcəyi halı nəzərən mütləq qismət (modul) işarəsi altında yazdıq. Bir çox hallarda $d\sigma$ effektiv kəsiyini $d\chi$ xətti bucaq elementinə görə deyil, do cisim bucağına görə hesablayırlar. Təpə bucaqları χ və $\chi + d\chi$ olan konuslar arasındakı cisim bucağı $do = 2\pi \sin\chi d\chi$. Ona görə də (18.7)-dən alırıq ki,

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\varphi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| do \tag{18.8}$$

Zərrəciklər dəstəsinin tərpənməz qüvvə mərkəzindən səpilməli məsələsindən faktiki olaraq həmin zərrəciklər dəstəsinin sükunətdə olan zərrəciklər dəstəsindən səpilməsi məsələsinə keçdikdə (18.7) düsturuna ətalət mərkəzi sistemində effektiv kəsiyin səpilmə bucağından asılılığı düsturu kimi baxa bilərik. Effektiv kəsiyin laboratoriya sistemində bucağından asılılığı tapmaq üçün χ bucağını (17.4) düsturu vasitəsilə θ bucağı ilə ifadə etmək lazımdır. Bu zaman həm düşən zərrəciklərin (əgər χ-ni θ_1-lə ifadə etsək), həmdə əvvəlcə sükunətdə olan zərrəciklərin (əgər χ-ni θ_2-lə ifadə etsək) səpilməsinin effektiv kəsiyini tapmış oluruq.

Məsələlər.

1. Zərrəciklərin radiusu a olan mütləq bərk kürədən səpilməsinin effektiv kəsiyini tapın (yəni qarşılıqlı təsir qanunun $U = \infty$ $r < a$, $U = 0$ $r > a$ olduqda formasında verildikdə).

Həlli: Zərrəcik kürənin xaricində sərbəst hərəkət etdiyinə və kürənin daxilinə girə bilmədiyindən zərrəciyin trayektoriyası kürəciyə toxunma nöqtəsinə çəkilmir, radiusa nəzərən simmetrik olan iki düz xəttdən ibarət olacaq (şəkil 19). Şəkildən göründüyü kimi

$$\rho = a\sin\varphi_0 = a\sin\frac{\pi - \chi}{2} = a\cos\frac{\chi}{2}$$

Bu ifadəni (18.7) və ya (18.8) düsturlarında yerinə yazsaq alırıq ki,

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2}\sin\chi d\chi = \frac{a^2}{4}do \tag{1}$$

yəni s-sistemdə səpilmə izotropdur. Bu ifadəni bucağa görə inteqrallasaq tam effektiv kəsiyin $\sigma = \pi a^2$ olduğunu görərik. Bu isə o demekdir ki, zərrəciyin kürədən ümumiyyətlə səpilməsi üçün lazım olan hədəf sahəsi kürə kəsiyinin sahəsinə bərabər olmalıdır.

Laboratoriya sistemində keçmək üçün χ bucağını (17.4) düsturu vasitəsilə θ_1-bucağı ilə ifadə etmək lazımdır. ((17.4) və (16.5) düsturlarının formal olaraq oxşar olduqlarından) hesablama §16–da ikinci məsələsindəki ilə tamamilə eynidir. $m_1 < m_2$ olduqda (m_1-zərrəciyin , m_2-isə kürəciyin kütlələridir)

[1] $\rho(\chi)$ funksiyası çox qiymətli funksiya olduqda, aydındır ki, həmin funksiyanın bütün budaqlara görə cəmini götürmək lazımdır.

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}\right]do_1$$

$do_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$ $\quad m_1 > m_2$ olduqda isə

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\frac{1+\frac{m_1^2}{m_2^2}\cos 2\theta_1}{\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}\sin^2\theta_1}}do_1$$

$m_1 = m_2$ olduqda isə

$$d\sigma_1 = a^2|\cos\theta_1|do_1$$

Bu ifadəni (1) ifadəsində (17.9) düsturuna müvafiq olaraq $\chi = 2\theta_1$ yazmaqla birbaşada almaq olar.

Əvvəlcədən sükunətdə olan kürələr isə həmişə $\chi = \pi - 2\theta_2$. Bunu (1)-də yerinə qoysaq alırıq ki,

$$d\sigma_2 = a^2|\cos\theta_2|do_2$$

2. Eyni hal üçün effektiv kəsiyi səpilən zərrəciklərin itirdiyi ε enerjisindən asılı funksiya kimi tapın.

Həlli: m_1 zərrəciyin itirdiyi enerji, m_2-zərrəciyinin aldığı enerjiyə bərabərdir. (17.5) və (17.7) düsturlarına uyğun olaraq alırıq ki,

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max}\sin^2\frac{\chi}{2}$$

Buradan isə

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max}\sin^2\frac{\chi}{2}$$

Bu ifadəni birinci məsələnin (1) düsturunda yerinə yazsaq alırıq ki,

$$d\sigma = \pi a^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}}$$

Beləliklə zərrəciklərin ε-nun sıfırdan ε_{max}-a qədər qiymətlərinə görə paylanmasının bircins olduğunu görürük.

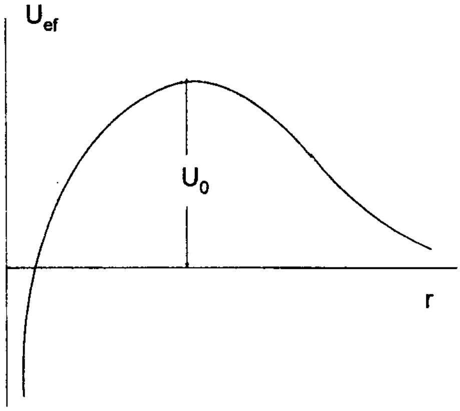
3. Zərrəciklərin $U \sim r^{-n}$ sahəsində səpilməsinin effektiv kəsiyə $\vec{v}_\infty$-sürətindən necə asılıdır?

Həlli: Potensial enerji $k = -n$ tərtibdən bircins funksiyadırsa onda (10.3) düsturuna uyğun olaraq $\rho \sim v_\infty^{-2/n} f(\chi)$

$$\rho = v_\infty^{-2/n} f(\chi)$$

olur (oxşar trayektoriyalar üçün bucağı eynidir). Bu ifadəni (18.6)-da yerinə yazsaq alırıq ki,

$$d\sigma \sim v_\infty^{-4/n} do$$



Şəkil 20

4. Zərrəciyin $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ sahəsində mərkəzə "düşmə"sinin effektiv kəsiyini təyin edin.

Həlli: Mərkəzə $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ şərtini ödəyən zərrəciklər düşə bilər. (bax (14.11)) Yəni hədəf məsafələri $\rho_{\max} = \sqrt{2\alpha / m v_\infty^2}$ -dan çox olmayan zərrəciklər mərkəzə düşə bilirlər. Ona görə axtardığımız effektiv kəsik

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{m v_\infty^2}$$

5. Eyni məsələni $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ $(n > 2$, $\alpha > 0$ olduqda) sahəsində həll edin.

Həlli:

$$U_{ef} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

effektiv potensial enerjinin r məsafəsindən asılılığı şəkil 20-ci göstərildiyi kimidir. Bu zaman

$$\left(U_{ef}\right)_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

sahəsinin mərkəzinə enerjisi $E > U_0$ olan zərrəciklər düşür. $\rho_{\max}$-u $U_0 = E$ şərtindən təyin edərək tapırıq ki,

$$\sigma = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}$$

6. m_1 kütləli zərrəciyin (m_2 kütləli və R radiuslu) sferik səthin üzərinə düşməsinin effektiv kəsiyini tapın (kütlələr arasındakı cəzb etmə qüvvəsi Nyuton qanununu ödəyir).

Həlli: Düşmə səthi $r_{\min} < R$-dir. $r_{\min}$-zərrəciyin trayektoriyasının sferanın mərkəzinə ən yaxın olan məsafəsidir. ρ hədəf məsafəsinin mümkün olan qiyməti $r_{\min} = R$ şərtini ödəyir. Bu isə $U_{ef}(R) = E$ tənliyinin həllinə və ya

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$$

tənliyinin həllinə bərabərdir. Burada $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (γ-qravitasiya sabitidir) və $m_2 >> m_1$ olduğundan $m_2 \approx m_1$ qəbul etmişik. Buradan ρ_{max} təyin edərək tapırıq ki,

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right)$$

$v_\infty \to \infty$ olduqda təbiidir ki, effektiv kəsik sferanın həndəsi kəsiyinin sahəsinə yaxınlaşacaqdır.

7. Effektiv kəsiyin (verilmiş E enerjidə) səpilmə bucağından asılılığını bilərək səpən U(r) mərkəzinin formasını bərpa edin. U(r) funksiyasının monoton azalan (cazibə sahəsi) funksiya olduğunu, və $U(0) > E$, $U(\infty) > 0$ olduğunu fərz edin (B.Firsov 1953).

Həlli: $d\sigma$ ifadəsini səpilmə bucağına görə inteqrallasaq

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi \rho^2 \qquad (1)$$

hədəf məsafəsinin kvadratını təyin edirik. Bu isə $\rho(\chi)$-nin (və bununla da $\chi(\rho)$) məlum funksiya olduğunu göstərir. Aşağıdakı

$$s = \frac{1}{r}, \qquad x = \frac{1}{\rho^2}, \qquad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}} \qquad (2)$$

əvəzlənmələrini qəbul etsək, onda (18.1) və (18.2) düsturları

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}} \qquad (3)$$

şəklində yazırıq. $s_0(x)$ burada

$$xw^2(s_0) - s_0^2 = 0$$

tənliyin köküdür. (3) tənliyi $w(s)$ funksiyası üçün intqral tənlikdir; həmin tənliyi §12-də istifadə olunan üsulla həll etmək olur. (3) tənliyinin hər iki tərəfini $\sqrt{\alpha - x}$-ə bölüb 0-dan α-ya qədər dx-ə görə inteqrallasaq tapırıq ki,

$$\int_0^\alpha \frac{\pi - \chi(x)}{2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} = \int_0^\alpha \int_0^{s_0(x)} \frac{ds dx}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \int_0^{s_0(\alpha)} \int_{x(s_0)}^\alpha \frac{dx ds}{\sqrt{(xw^2 - s^2)(\alpha - x)}} = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}$$

və ya sol tərəfdə hissə-hissə inteqrallama aparsaq alırıq ki,

$$\pi\sqrt{\alpha} - \int_0^\alpha \sqrt{\alpha - x} \frac{d\chi}{dx} dx = \pi \int_0^{s_0(\alpha)} \frac{ds}{w}$$

Bu ifadəni α–ya görə diferensialayaq, bundan sonra $s_0(\alpha)$ əvəzinə sadəcə olaraq s yazsaq və buna uyğun olaraq α-ni s^2/w^2-ilə əvəz etməklə alınan ifadəni diferensialda yazsaq alınır ki,

$$\pi d\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}d\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}ds$$

və ya

$$-\pi d\ln w=d\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)dx}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}$$

Bu tənlik bir-başa inteqrallanır. Bu zaman tənliyin sağ tərəfində dx və $d\left(s/_{w}\right)$-yə inteqrallamanın yerini dəyişmək lazımdır. s=0 (yəni $r\to\infty$) olduqda $w=1$ (yəni $U=0$) olduğunu nəzərə alsaq, və əvvəlki r və q dəyişənlərinə keçsək axırıncı nəticəni (iki ekvivalent formada) alarıq

$$w=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}Arch\frac{\rho}{rw}\frac{d\chi}{d\rho}d\rho\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^{\infty}\frac{\chi(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right\}$$

Bu düstur qeyri-aşgar şəkildə $w(r)$ (və bununlada U(r)) funksiyasının bütün $r>r_{\min}$ və E-nin verilmiş qiymətlərində zərrəciyin ola biləcəyi nöqtələrin koordinatlarından (r-dən) asılılığını verir.

§ 19 Rezerford düsturu

Yuxarıda aldığımız düsturların ən lazımlı (əhəmiyyətli) tətbiqi yüklü zərrəciklərin Kulon sahəsində səpilməsidir.

(18.4) düsturunda $U=\alpha/_{r}$ yazıb, elementar inteqrallama aparsaq alırıq ki,

$$\varphi_0=\arccos\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}$$

buradan

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}tg^2\varphi_0$$

və ya (18.1) düsturuna əsasən $\varphi_0=(\pi-\chi)/_{2}$ daxil etsək alırıq ki,

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}ctg^2\frac{\chi}{2} \qquad (19.1)$$

Bu ifadədən χ-ya görə alıb (18.7) düsturunda yerinə yazaq

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}} d\chi \tag{19.2}$$

düsturunu və ya

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \tag{19.3}$$

düsturunu alırıq. Bu düstur Rezerford düsturu adlanır.

Alınan nəticə α-nın işarəsindən asılı deyil, ona görə də alınan nəticə həm cazibə həm də itələmə Kulon sahələrinə aiddir.

(19.3) düsturu toqquşan zərrəciklərin səpilməsini onların ətalət mərkəzi sükunətdə olan sistemdə təyin edir. Laboratoriya sisteminə keçid (17.4) düsturunun vasitəsilə tapılır. (19.2) düsturunda $\chi = \pi - 2\theta_2$ yazsaq əvvəlcə sükunətdə olan zərrəciyin

$$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2} d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3\theta_2} \tag{19.4}$$

effektiv kəsiyini alırıq. Düşən zərrəcik üçün çevirmə əməliyyatı çox böyük düsturla ifadə olunur. Bunun üçün yalnız iki xüsusi hala baxaq.

Əgər səpən zərrəciyi m_2 kütləsi, səpilən zərrəciyin m_1 kütləsindən böyük olarsa, onda $\chi \approx \theta_1$, $m \approx m_1$ olur və

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4\frac{\theta_1}{2}} \tag{19.5}$$

düsturunu alırıq. Burada $E_1 = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$ düşən zərrəciyin enerjisidir. Əgər zərrəciklərin kütlələri eynidirsə ($m_1 = m_2; m = \frac{m_1}{2}$) onda (17.9)-dan alınır ki, $\chi = 2\theta_1$ və bunu (19.2) düsturunda yerinə yazsaq

$$d\sigma_1 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1} do_1 \tag{19.6}$$

düsturunu alırıq.

Əgər zərrəciklər eyni olarlarsa, onda səpilmədən sonra hansı zərrəciyin toqquşmadan əvvəl sükunətdə olduğu, hansı zərrəciyin isə hərəkətdə olduğu barədə fikirləşmək mənası olur. Bu halda bütün zərrəciklərin səpilməsinin effektiv kəsiyini hesablamaq üçün $d\sigma_1$ və $d\sigma_2$ ifadələrini, θ_1 və θ_2-nin yerinə θ yazıb toplamaq lazımdır. Onda alırıq ki,

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta do \tag{19.7}$$

Yenə də (19.2) düsturuna qayıdaq və həmin düsturun köməyi ilə səpilən zərrəciklərin effektiv kəsiyini onların qarşılıqlı təsir zamanı itirdiklərin enerjidən asılı olaraq paylanmasını tapaq. Səpilən zərrəciklərin m_1 kütləsilə, səpən zərrəciklərin m_2 kütlələri arasında münasibət ixtiyari olduqda səpən zərrəciklərin ətalət mərkəzi sistemində aldığı sürət

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$$

düsturu ilə ifadə olunur (bax (17.5)). Buna uyğun olaraq həmin zərrəciyin aldığı enerji və deməli m_1 zərrəciyinin itirdiyi enerji

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}$$

Bundan $\sin\chi/2$-ni ε-lə ifadə edib, (19.2) düsturunda yerinə yazsaq alırıq ki,

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \tag{19.8}$$

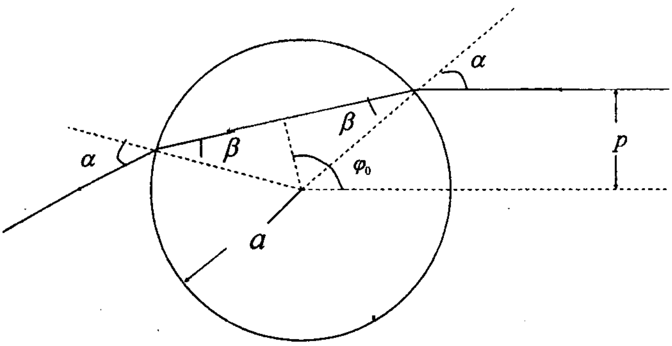
Bu düstur qarşıda qoyulmuş məsələni həll edir, yəni effektiv kəsiyi ε enerjisinin funksiyası kimi ifadə edir. Bu zaman sıfırdan $\varepsilon = \frac{2m^2 v_\infty^2}{m_2}$-yə qədər qiymət alır.

Məsələlər.

1. $U = \frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha > 0)$ səpilmənin effektiv kəsiyini hesablayın.

Həlli: meyl bucağı

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\rho^2 v_\infty^2}}}\right]$$



Şəkil 21

Effektiv kəsik

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{m v_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{do}{\sin\chi}$$

2.Radiusu a dərinliyi isə U_0 olan sferik potensial çuxurdan (yəni $U = 0$ $r > a$ olanda, və $U = -U_0$ $r < a$ olanda) səpilmənin effektiv kəsiyini hesablayın

Həlli: Zərrəciyin düzxəttli trayektoriyası çuxura daxil olanda və çıxanda sınır. §7-dəki məsələnin həllindən α düşmə və β sınma bucağı (şəkil 21) aşağıdakı şəkildə əlaqəlidirlər.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n, \qquad n=\sqrt{1+\frac{2U_0}{mv_\infty^2}}$$

meyl bucağı $\chi=2(\alpha-\beta)$. Ona görə də alırıq ki,

$$\frac{\sin\left(\alpha-\chi/2\right)}{\sin\alpha}=\cos\frac{\chi}{2}-ctg\alpha\sin\frac{\chi}{2}=\frac{1}{n}$$

Bu tənliklər və şəkildən aşgar olan $a\sin\alpha=\rho$ tənliyindən birlikdə α-ni kənar etdikdən sonra ρ ilə χ arasında

$$\rho^2=a^2\frac{n^2\sin^2\frac{\chi}{2}}{n^2+1-2n\cos\frac{\chi}{2}}$$

əlaqəsini alırıq. Nəhayət bu bərabərliyi diferensiallayacaq effektiv kəsiyi alırıq:

$$d\sigma=\frac{a^2n^2}{4\cos\frac{\chi}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\chi}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\chi}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\chi}{2}\right)}do$$

χ bucağı sıfırdan ($\rho=0$ olduqda) -a ($\rho=a$ olduqda) qədər qiymətlər alır. $\cos\frac{\chi_{\max}}{2}=\frac{1}{n}$ tənliyindən tapılır. $d\sigma$ konusu $\chi<\chi_{\max}$ daxilində bütün bucaqlara görə inteqralladıqdan sonra alınan, tam effektiv kəsik, aydındır ki, həndəsi kəsiyin πa^2 sahəsinə bərabər olur.

§ 20 Kiçik bucaqlar altından səpilmə

Böyük hədəf məsafəsində baş verən səpilməyə baxdıqda effektiv kəsiyi hesablama çox asanlaşır. Böyük hədəf məsafələrində U zəyif olur, buna görə də meyl bucağı kiçik olur. Bu zaman hesablamanı birbaşa laboratoriya sistemində, ətalət mərkəzi sistemini daxil etmədən aparmaq olur. X oxunu səpilən zərrəciklərin başlanğıc impulsu istiqamətində seçək (m_1 zərrəcik) xy müstəvisini isə səpilmə müstəvisində seçək. Zərrəciyin səpilmədən sonrakı impulsunu $\vec{p}_1'$ işarə etsək aydındır ki,

$$\sin\theta_1=\frac{p_{1y}'}{p_1'}$$

olar. Kiçik meyletmələrdə $\sin\theta_1$-i θ_1-lə məxrəcdəki p_1'–i isə $p_1=m_1v_\infty$-lə əvəz etmək olar, onda

$$\theta_1\approx\frac{p_{1y}'}{m_1v_\infty} \qquad (20.1)$$

olar. Sonra $\dot{p}_y = F_y$ olduğunu nəzərə alaraq, impulsun y oxu istiqamətində tam dəyişməsini

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt \qquad (20.2)$$

şəklində yaza bilərik. Bu halda qüvvə

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial r} = -\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}$$

(20.2) inteqralına kiçik U daxil olduğundan, hesablama zamanı, həmin dəqiqlikdə zərrəciyin düzxətt ($y = \rho$ düzxətti boyunca) bərabərsürətli (v_∞ sürətilə) hərəkət etdiyini qəbul edə bilərik. Buna uyğun olaraq (20.2) düsturunda

$$F_y = -\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r}, \qquad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

olduğunu qəbul edib

$$\dot{p}_{1y} = -\frac{\rho}{v_\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr}\frac{dr}{r}$$

ifadəsini alarıq.

Nəhayət dx-ə görə inteqrallamadan dr-ə görə inteqrala keçək. Düzxəttli yol üçün $r^2 = x^2 + \rho^2$ olduğundan x-in $-\infty$-dan $+\infty$-a qədər dəyişdiyi zaman r ∞-dan ρ-ya qədər və sonra ρ-dan $+\infty$-a qədər dəyişəçəkdir. Həm də

$$dx = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

Nəhayət (20.1) səpilmə bucağı üçün aşağıdakı ifadəni alırıq[1].

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_0^\infty \frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \qquad (20.3)$$

Bununla da θ_1-lə ρ arasındakı axtardığımız asılılığı tapmış oluruq. Laboratoriya sistemindəki effektiv kəsik (18.8) düsturuna oxşar ifadə vasitəsilə tapılır (χ-nin əvəzinə θ_1). Həmdə $\sin\theta_1$-i θ_1-lə əvəz etmək olur və

$$d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}do_1 \qquad (20.4)$$

Məsələlər.

1.(20.3) düsturunu (18.4)-dən alın.

---

[1] Hesablamanı ətalət mərkəzi sistemində aparsaydıq onda χ bucağı üçün də eyni ifadəni alardıq ($m = m_1$). Çünki kiçik θ_1 və χ bucaqları (17.4) düsturuna əsasən

$$\theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\chi$$

ifadəsilə əlaqəlidirlər.

Həlli: Fiktiv dağılan inteqralı aradan qaldırmaq üçün (18.4) düsturunu

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{min}}^{R}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}dr$$

şəklində yazaq. Burada inteqralın yuxarı sərhəddini R-ə bərabər qılıb nəticədə onu ∞-yaxınlaşdıraq. U-nun kiçik olduğunu nəzərə alıb, kökü U-nun üstlərinə görə sıraya ayıraq, r_{min}-u isə ρ-ya bərabər götürək. Onda alırıq ki,

$$\varphi_0 = \int_0^R\frac{\rho dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}+\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty\frac{U(r)dr}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}$$

bu isə (20.3) düsturuna ekvivalentdir.

1. $U(r)=\alpha/r^n$ $(n>0)$ sahəsində kiçik bucaqlar altında səpilmənin effektiv kəsiyini tapın.

Həlli: (20.3) düsturundan alınır ki,

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1v_\infty^2}\int_0^\infty\frac{dr}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

Bu ifadə də $\frac{\rho^2}{r^2}=u$ əvəzlənməsini etsək inteqral Eylerin B-inteqralına gətirilir. O isə öz növbəsində Γ-funksiya ilə ifadə olunur və

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1v_\infty^2\rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Buradan ρ-nu θ_1-lə ifadə edib (20.4)-də yerinə yazsaq alınır ki,

$$d\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\alpha}{m_1v_\infty^2}\right]^{\frac{2}{n}}\theta_1^{-2}\left(1+\frac{1}{n}\right)do_1$$

V FƏSİL

KİÇİK RƏQSLƏR

§ 21 Birölçülü sərbəst rəqslər

Mexaniki sistemin ən çox yayılmış növü sistemin dayanıqlı tarazlıq nöqtəsi ətrafında etdiyi kiçik rəqslərdir. Belə hərəkəti öyrənməyə ən sadə haldan başlayaq. Tutaq ki, sistem bir sərbəstlik dərəcəsinə malikdir.

Dayanıqlı tarazlıq nöqtəsində sistemin U(q) potensial enerjisi minimum qiymət alır. Sistemi bu vəziyyətdən çıxardıqda $-\frac{dU}{dq}$ qüvvəsi meydana çıxır və sistemi tarazlıq vəziyyətinə qaytarmağa çalışır. Sistemin tarazlıq nöqtəsinin koordinatını q_0-la işarə edək. Tarazlıq nöqtəsində kiçik meyl zamanı $U(q)-U(q_0)$ fərqinin $q-q_0$ fərqinə görə ayırdıqda birinci tərtibdən sıfıra bərabər olmayan həddlə kifayətlənmək olar. Ümumi halda belə hədd ikinci tərtibdən olan həddir.

$$U(q)-U(q_0)\cong\frac{k}{2}(q-q_0)^2$$

burada k müsbət əmsaldır. (potensial enerjinin ikinci tərtib törəməsinin $q=q_0$ nöqtəsindəki qiymətidir). Gələcəkdə potensial enerjinin onun ən kiçik qiymətindən hesablayacayıq (yəni $U(q_0)=0$ götürəcəyik). Koordinatın tarazlıq qiymətindən aralanmasını üçün

$$x=q-q_0 \tag{21.1}$$

işarələnməsini edək. Beləliklə alırıq ki,

$$U(x)=\frac{kx^2}{2} \tag{21.2}$$

Bir sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistemin kinetik enerjisi ümumiyyətlə

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$$

şəklindədir. Baxdığımız yaxınlaşmada $a(q)$ əmsalını onun $q=q_0$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabər götürmək kifayətdir. Sadəlik üçün $a(q_0)=m$ əvəzlənməsini edək[1].

$$a(q_0)=m$$

Onda birölçülü kiçik rəqs edən sistemin[2] Laqranj funksiyası üçün

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2} \tag{21.3}$$

ifadəsini yaza bilərik.

Bu funksiyaya uyğun olan hərəkət tənliyi

[1] kəmiyyətini, x in dekart koordinatı olduğu halda kütlə ilə üst-üstə düşdüyünü qeyd edək.
[2] Belə sistemə çox hallarda birölçülü ossilyator deyirlər.

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{21.4}$$

və ya

$$\ddot{x}+w^2x=0 \tag{21.5}$$

şəklində olur. Burada

$$w=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21.6}$$

(21.5) diferensial tənliyinin iki dənə asılı olmayan həlləri $\cos wt$ və $\sin wt$ -dir. Ona görə tənliyin ümumi həlli

$$x=c_1\cos wt+c_2\sin wt \tag{21.7}$$

şəklindədir. Bu ifadə aşağıdakı kimidə yazıla bilər

$$x=a\cos(wt+\alpha) \tag{21.8}$$

$\cos(wt+\alpha)=\cos wt\cos\alpha-\sin wt\sin\alpha$ onda (21.7) ifadəsilə müqaisədən alınır ki, α və a sabitləri c_1 və c_2 sabitlərilə

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2}, \qquad tg\alpha=-\frac{c_2}{c_1} \tag{21.9}$$

Şəklində əlaqəlidirlər.

Beləliklə sistem dayanıqlı tarazlıq nöqtəsi ətrafında harmonik rəqsi hərəkət edir. (21.8) düsturunda periodik vuruğun qarşısındakı a əmsalı rəqsin amplitudası, kosinusun arqumenti isə fəzası adlanır; α-fazasının başlanğıc qiymətidir və aydındır ki, zamanın başlanğıcının seçilməsindən asılıdır. w-rəqsin dövrü tezliyi adlanır; nəzəri fizikada ona adətən sadəcə olaraq tezlik deyirlər, bir də həmin qaydaya əməl edəcəyik.

Rəqsin tezliyi hərəkətin başlanğıc şərtlərindən asılı deyil və rəqsin əsas xarakteristikasıdır. (21.6) düsturundan görünür ki, tezlik mexaniki sistemin xarakterindən asılıdır. Qeyd edık ki, tezliyin bu xassə rəqsin kiçik rəqs olması ilə əlaqədardır və yüksək tərtibdən olan həddləri nəzərə aldıqda aradan qalxır. Riyazi nöqteyi-nəzərdən bu xassə potensial enejinin koordinatın kvadratik asılı olmasından irəli gəlir.

Kiçik rəqs edən sistemin enerjisi

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+w^2x^2\right)$$

və ya (21.8)-i nəzərə alsaq.

$$E=\frac{1}{2}mw^2a^2 \tag{21.10}$$

şəklində olur. O rəqsin amplitudunun kvadratı ilə mütənasibdir.

Rəqs edən sistemin koordinatının asılılığını bir çox hallarda kompleks ifadənin həqiqi hissəsi kimi göstərmək

$$x=\mathrm{Re}\left\{Ae^{iwt}\right\} \tag{21.11}$$

daha əlverişli olur. Burada A kompleks sabitdir. Onu

$$A=ae^{i\alpha} \tag{21.12}$$

Şəklində yazsaq (21.8) düsturunu alırıq. A sabitinə kompleks amplitud deyirlər. Onun modulu adi amplituda ilə arqumenti isə başlanğıc faza ilə üst-üstə düşür. Eksponensial vuruqlardan istifadə etmək, triqonometrik funksiyalardan daha əlverişlidir, çünki onları diferensialladıqda formaları dəyişmir. Bu zaman onlar üzərində yalnız xətti əməliyyatlar apardıqda (toplama, sabitə vurmaq, diferensiallama və inteqrallama) həqiqi hissə alma işarəsini, ümumiyyətlə almaq olar, və yalnız axır nəticədə həqiqi hissəni almaq olar.

Məsələlər.

1. Rəqsin ampıitudunu və başlanğıc fazanın koordinat və sürətin x_0 və v_0 başlanğıc qiymətlərlə ifadə edin.

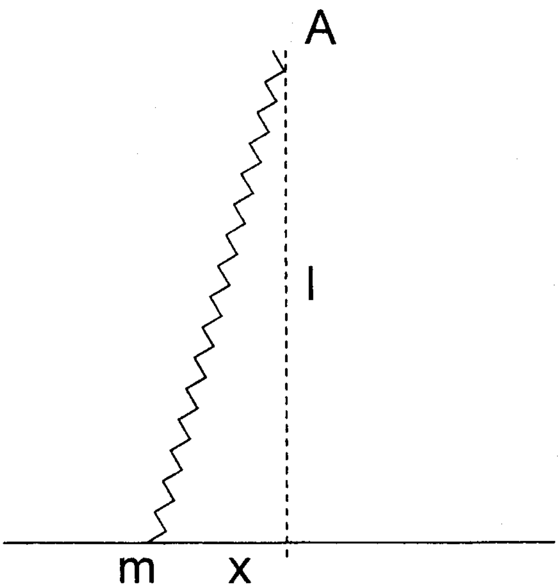
Caxab:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}}, \qquad tg\alpha = -\frac{v_0}{wx_0}$$

2. Atomların müxtəlif izotoplarından təşgil olunmuş ikiatomlu molekulların rəqsləri nisbətini təyin edin: atomların kütlələri uyğun olaraq: m_1, m_2 və m_1', m_2'

Həlli: İzotop atomlar eyni cür qarşılıqla təsirdə olduqlarından $k = k'$. Kinetik enerjinin m əmsalı gətirilmiş kütlə olur. Buradan (21.6)-ya uyğun olaraq alırıq

$$\frac{w'}{w} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}$$



Şəkil 22

3. m kütləli nöqtə düzxətt boyunca hərəkət edə bilir. Maddi nöqtə bir ucu A nöqtəsində olan yaya birləşdirilmişdir. A nöqtəsi düz xəttəd l məsafəsindədir. Yayın uzunluğu l-dir. O F qüvvəsi ilə dartılmışdır (şəkil 22), m zərrəciyinin rəqsləri tezliyini tapın.

Həlli: Yayın potensial enerjisi (yüksək tərtibdən kiçik hədlər dəqiqliyi ilə) F qüvvəsilə yayın δl uzanması hasilinə bərabərdir. $x << l$ olduqda

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}$$

Yəni $U = \frac{Fx^2}{2l}$. Kinetik enerji $m\dot{x}^2/2$ olduğundan

$$w = \sqrt{\frac{F}{ml}}$$

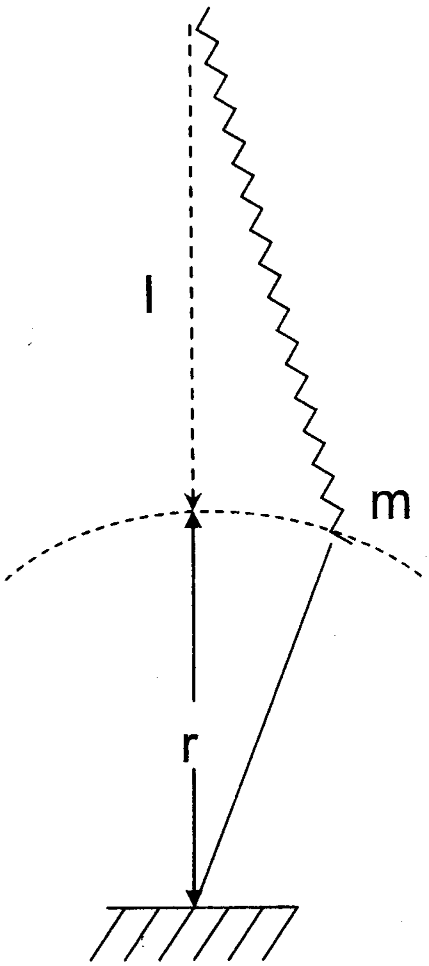
4. Məsələ 3-də şərtlər daxilində m nöqtəsi r radiusu çevrə boyunca hərəkət edir (şəkil 23).

Həlli: Baxdığımız halda ($\varphi << 1$ olarsa) yayın uzanması

$$\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2$$

Kinetik enerji isə $T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$. Buradan

$$w = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}$$



Şəkil 23

5. Şəkil 2-də göstərilən asqı nöqtəsi (m_1 kütləsi) üfüqi istiqamətdə hərəkət edə bilən rəqqasın rəqs tezliyini təyin edin.

Həlli: $\varphi << 1$ olduqda §14-də 2-ci məsələsində alınan düsturdan istifadə edərək alırıq ki,

$$T = \frac{m_1 m_2 l^2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\varphi}^2, \quad T = \frac{m_2 g l}{2}\varphi^2$$

Buradan

$$w = \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}}$$

6. Ağırlıq sahəsində olan əyri boyunca yönəldikdə rəqsin tezliyinin amplitudadan asılı olmayan əyrinin formasını təyin edin.

Həlli: Qoyulan şərtləri ödəyən əyri elə olmalıdır ki, onun üzəri ilə hərəkət zamanı zərrəciyin potensial enerjisi $U = \frac{ks^2}{2}$ şəklində olsun. Burada s tarazlıq nöqtəsindən hesablanmış uzunluqdur. Bu zaman kinetik enerji $T = \frac{m\dot{s}^2}{2}$ olacaq (m-zərrəciyin kütləsidir) və S-in başlanğıc qiymətindən asılı olmayaraq $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. lakin ağırlıq sahəsində $U = mgy$ (burada y şaqulı koordinatdır). Ona görə $\frac{ks^2}{2} = mgy$, və ya $y = \frac{w^2}{2g}s^2$. Digər tərəfdən $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Buradan isə

$$x=\int\sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2-1}dy=\int\sqrt{\frac{g}{2w^2y}-1}dy$$

İnteqrallamanı $y=\frac{g}{4w^2}(1-\cos\xi)$ əvəzlənməsini etdikdən sonra aparmaq daha əlverişlidir. Onda alırıq ki,

$$x=\frac{g}{4w^2}(\xi+\sin\xi)$$

Bu iki bərabərliklər axtaqdığımız əyrinin tənliyini parametrik şəkildə verirş Bu əyri sikloida əyrisidir.

§ 22 Məcburi rəqslər

İndi isə dəyişən xarici qüvvə təsir edən sistemin rəqsləri öyrənək. Belə rəqslərə, əvvəlki paraqrafda baxdığımız və sərbəst rəqslər adlandırdığımızdan fərqli olaraq məcburi rəqslər deyilir. Əvvəldə olduğu kimi rəqslərin kiçik olması fərz olunur. Buna görə də xarici sahə kifayət qədər zəyifdir. Əks halda o böyük x yerdəyişməsi meydana gətirildi.

Bu halda sistem məxsusi potensial enerji $\frac{1}{2}kx^2$-ı ilə yanaşı xarici sahəni təsiri ilə əlaqədar olan $U_0(x,t)$ potensial enerjiyə də malik olur. Bu əlavə potensial enerjini kiçik x-in üstlərinə görə ayırsaq alırıq ki,

$$U_e(x,t)\cong U_e(0,t)+x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Birinci hədd yalnız zamandan asılıdır onu görədə onu Laqranj funksiyasında nəzərə almamaq olar. (Başqa bir funksiyanın zamana görə tam diferensialı kimi). İkinci héddə $-\frac{\partial U_e}{\partial x}$ ifadəsi tarazlıq nöqtəsində sistemə təsir edən və zamanın müəyyən funksiyası olan xarici "qüvvə"-dir. Onu F(t) ilə işarə edək. Beləliklə potensial enerjiyə - F(t)x həddi əlavə olunur və Laqranj funksiyası

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}=xF(t) \qquad (22.1)$$

şəklini alır. Buna uyğun hərəkət tənliyi

$$m\ddot{x}+kx=F(t)$$

və ya

$$\ddot{x}+w^2x=\frac{1}{m}F(t) \qquad (22.2)$$

olur. Burada yenə də sərbəst rəqslərin w tezliyini daxil etdik.

Məlum olduğu kimi sabit əmsalı qeyribircins diferensial tənliyin ümumi həlli bircins tənliyin ümumi həlli ilə qeyribircins tənliyinə məxsusi həlləri cəminə bərabərdir: $x=x_0+x_1$, x_0-əvvəlki paraqrafda aldığımız bircins tənliyin həlli, x_n-isə qeyri bircins tənliyin xüsusi həllidir.

Məcburedici qüvvənin zamanın γ tezlikli periodik funksiyası olduğu xüsusi əhəmiyyətə malik olan hala baxaq

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta) \tag{22.3}$$

(22.2) tənliyinin xüsusi həllini $x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$ şəklində axtarmaq. Bu həlli tənlikdə yerinə yazsaq alırıq ki, $b = f/m(w^2 - \gamma^2)$; bircins tənliyin həllini əlavə etdikdən sonra alınır ki,

$$x = a\cos(wt + \alpha) + \frac{f}{m(w^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta) \tag{22.4}$$

a və α sabitləri başlanğıc şərtlərindən tapılır.

Beləliklə sistem periodik məcburedici qüvvənin təsiri altında iki növ hərəkətdə iştirak edir. w–tezlikli və γ-tezlikli rəqslər.

(22.4) həlli rezonans halında $w = \gamma$ tətbir edilə bilməz. Hərəkət tənliyinin bu halda ümumi həllini tapmaq üçün (22.4) həllini sabitləri çevirməyə uğrayaraq aşağıdakı kimi yenidən yazaq

$$x = a\cos(wt + \alpha) + \frac{f}{m(w^2 - \gamma^2)}\left[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(wt + \beta)\right]$$

$\gamma \to w$ olduqda ikinci hədd 0/0 şəklində qeyri müəyyənlik verir. Bunu Lopital qaydası ilə açdıqdan sonra alırıq ki,

$$x = a\cos(wt + \alpha) + \frac{f}{2mw}t\sin(wt + \beta) \tag{22.5}$$

Beləliklə görürük ki, rezonans halında rəqsin amplitudu zamandan xətti asılı olaraq artır (Bu artma rəqsin kiçik ola bilməyəcəyi və bununla da yuxarıda şərh olunan nəzəriyyənin tətbiq edilə bilməyəcəyi hala qədər davam edir).

$\gamma = w + \varepsilon$ (ε-kiçik kəmiyyətdir) olduğu zaman kiçik rəqslərin necə olduğuna baxaq. Ümumi həlli kompleks şəkildə aşağıdakı kimi yazaq

$$x = Ae^{iwt} + Be^{i(w+s)t} = \left(A + Be^{ist}\right)e^{iwt} \tag{22.6}$$

$A + Be^{ist}$ həddinin e^{iwt} bir periodu $2\pi/w$ müddətində az dəyişdiyini nəzərə alsaq onda rezonans yaxınlığında hərəkətə dəyişən amplitudlu kiçik rəqs kimi baxa bilərik[3].

Axırıncısı C ilə işarə edək. Onda

$$C = \left|A + Be^{ist}\right|$$

A və B-in yerinə uyğun olaraq $ae^{i\alpha}$ və $be^{i\beta}$ yazsaq alırıq ki,

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha) \tag{22.7}$$

Beləliklə rəqsin amplitudası

$$|a - b| \le C \le a + b$$

[3] Rəqsin fazasındakı "sabit" də dəyişir.

intervalında ε tezliyi ilə periodik olaraq rəqs edir. Bu döyünmə hadisəsi adlanır.

(22.2) hərəkət tənliyi F(t) məcburiedici qüvvənin ixtiyari formasında da ümumi şəkildə inteqrallana bilər.

Bunu asanlaşdırmaq xatirinə əvvəlcədən tənliyi

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+iwx)-iw(\dot{x}+iwx)=\frac{1}{m}F(t)$$

və ya

$$\frac{d\xi}{dt}-iw\xi=\frac{1}{m}F(t) \tag{22.8}$$

burada

$$\xi=\dot{x}+iwx \tag{22.9}$$

kompleks dəyişəni daxil edilmişdir. (22.8) tənliyi artıq iki tərtibli deyil, birtərtiblidir. Əgər sağ tərəf onun həlli $\xi=Ae^{iwt}$ şəklində (A sabit) olardı. Ümumi qaydaya əsasən qeyribircins tənliyi həllini $\xi=A(t)e^{iwt}$ şəklində axtarıb $A(t)$ üçün

$$\dot{A}(t)=\frac{1}{m}F(t)e^{-iwt}$$

tənliyini alırıq. Alınan ifadəni inteqrallamaqla (22.9) tənliyinin həllini

$$\xi=e^{iwt}\left\{\int_0^t\frac{1}{m}F(t)e^{-iwt}dt+\xi_0\right\} \tag{22.10}$$

formasında alırıq. Buradakı ξ_0 inteqrallama sabiti ξ-nin zamanın $t=0$ anındakı qiymətinə bərabər olması şərtindən seçilir. Bu ifadə axtardığımız ümumi həlldir. $x(t)$ funksiyası (22.10) düsturunun xəyali hissəsinin iw-ya nisbətinə bərabərdir[4].

Aydındır ki, məcburi rəqs edən sistemin enerjisi saxlanmır. Sistem xarici qüvvənin mənbəyindən enerji alır. Qüvvənin təsir etdiyi zaman müddətində ($-\infty$-dan ∞-a qədər) aldığı tam enerjini hesablayaq. Bu zaman enerjini başlanğıc qiymət sıfıra bərabər götürülür. (22.10) düsturunu inteqralın aşağı sərhəddini 0-ın yerinə $-\infty$ götürərək və $\xi(-\infty)=0$ seçərək inteqrllasaq $t\to\infty$ anında

$$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-iwt}dt\right|^2$$

olduğunu alırıq. Digər tərəfdən sistemin enerjisi

$$E=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+w^2x^2\right)=\frac{m}{2}|\xi|^2 \tag{22.11}$$

düsturu ilə təyin olunur. -nin ifadəsini burada yerinə yazsaq.

$$E=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-iwt}dt\right|^2 \tag{22.12}$$

[4] Aydındır ki, bu zaman F(t)-funksiyasını həqiqi formada yazmaq lazımdır.

düsturunu alırıq. Göründüyü kimi enerji F(t) qüvvəsinin Furye komponentinin modulunun kvadratı ilə təyin olunur. Bu zaman tezlik məxsusi rəqsin tezliyinə bərabər olur.

Xüsusi halda xarici qüvvə yalnız kiçik zaman müddətində ($\frac{1}{w}$-ya nisbətən) təsir etdikdə e^{-iwt} götürmək olar. Onda

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt\right)^2.$$

Belə nəticə əvvəlcədən aydındır. Bu ifadə qüvvənin kiçik zaman müddətində sistemə kifayət qədər yerdərişmə vermədən ona $\int Fdt$ impulsu verdiyini göstərir.

Məsələlər.

1. Aşağıdakı hallar üçün sistemin F(t) qüvvəsinin təsiri ilə meydana çıxan məcburi rəqsini, əgər sistem $t = 0$ zamanında tarazlıq halında sükunətdə olarsa, tapın:

a) $F = const = F_0$

Cavab: $x = \frac{F_0}{mw^2}(1 - \cos wt)$ sabit qüvvənin təsiri rəqsin baş verdiyi tarazlıq nöqtəsinin dəyişdirir.

b) $F = at$

Cavab: $x = \frac{a}{mw^3}(wt - \sin wt)$

c) $F = F_0 e^{-\alpha t}$

Cavab: $x = \frac{F_0}{m(w^2 + \alpha^2)}(e^{-\alpha t} - \cos wt + \frac{\alpha}{w}\sin wt)$

d) $F = F_0 e^{-\alpha t}\cos\beta t$

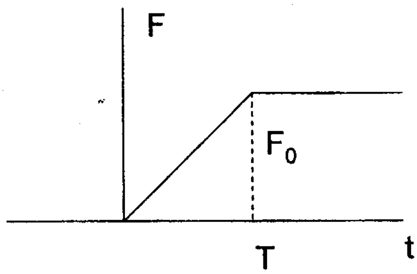
Cavab:

$$x = \frac{F_0}{m\left[(w^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\right]} *$$

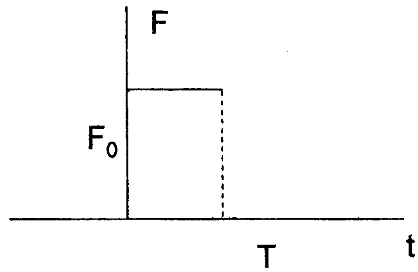
$$* \left\{-(w^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos wt + \frac{\alpha}{w}(w^2 + \alpha^2 + \beta^2)\sin wt + e^{-\alpha t}\left[(w^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t\right]\right\}$$

(məsələləri həll edən zaman qüvvəni kompleks formada $F = F_0 e^{(-\alpha + i\beta)t}$ kimi yazmaq daha əlverişlidir).

2. $F=0$ $t<0$, $F={F_0 t}/{T}$ $at<T$ olduqda və $F=F_0$ $t>T$ olduqda (şəkil 24)



Şəkil 24



Şəkil 25

qanunu ilə dəyişən xarici qüvvənin təsiri ilə baş verən rəqsin yekun amplitudunu təyin edin. ($t=0$ anına qədər sistem tarazlıq vəziyyətində sükunətdədir)

Həlli: Zamanı $0<t<T$ intervalında, başlanğıc sərtini ödəyən

$$x=\frac{F_0}{mTw^3}(wt-\sin wt)$$

$t>T$ olduqda həlli

$$x=c_1\cos w(t-T)+c_2\sin w(t-T)+\frac{F_0}{mw^2}$$

şəklində axtaraq. x və $\dot{x}$-nin $t=T$ olduqda kəsilməzlik şərtindən alırıq ki,

$$c_1=-\frac{F_0}{mTw^3}\sin wT,\quad c_2=\frac{F_0}{mTw^3}(1-\cos wT)$$

Bu halda rəqsin amplitudası

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\frac{2F_0}{mTw^3}\sin\frac{wT}{2}$$

olur. Qeyd edək ki, F_0 qüvvəsi gec "təsir edirsə" (vklyucayetsya) amplituda o qədər kiçik olur (yəni T nə qədər böyük olursa).

3. F_0 sabit qüvvəsi məhdud T zaman müddətində (şəkil 25) təsir etdiyi halda məsələ 2-də baxılan suallara cavab tapmalı.

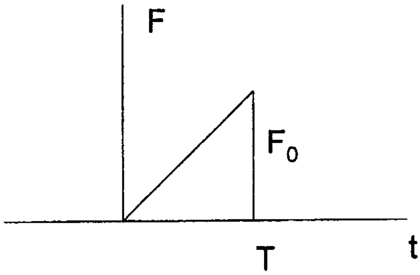
Həlli: Məsələnin həllini ikinci məsələdəki kimi tapa bilərik. Lakin (20.10) düsturunda istifadə etmək daha asandır. $t>T$ oduqda $x=0$ nöqtəsi ətrafında sərbəst rəqslər alınır. Bu zaman

$$\xi=\frac{F_0}{m}e^{iwt}\int_0^T e^{-iwt}dt=\frac{F_0}{iwm}(1-e^{-iwt})e^{iwt}$$

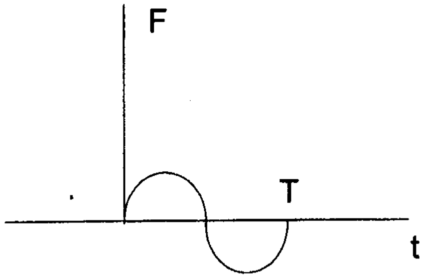
olur. $|\xi|^2=a^2w^2$ düsturuna uyğun olaraq rəqsin amplitudunu verir. Nəticədə alırıq ki,

$$a=\frac{2F_0}{mw^2}\sin\frac{wT}{2}$$

4. Eyni məsələni F qüvvəsinin 0-dan T-kimi $F = {F_0 t}/{T}$ qanunu ilə dəyişərkən (şəkil 26) həll edin.



Şəkil 26



Şəkil 27

Həlli: Eyni qayda ilə tapırıq ki,

$$a = \frac{F_0}{Tmw^3}\sqrt{w^2T^2 - 2wT\sin wT + 2(1-\cos wT)}$$

5. Eyni məsələni qüvvənin 0-dan $T = \frac{2\pi}{w}$-ya qədər zaman müddətində $F = F_0 \sin wt$ (şəkil 27) qanunu ilə dəyişdiyi halda həll edin.

Həlli:

$$F(t) = F_0 \sin wt = \frac{F_0}{2i}\left(e^{iwt} - e^{-iwt}\right)$$

ifadəsini (22.10) düsturunda yerinə yazaraq 0-dan T-yə kimi inteqrallasaq alırıq ki,

$$a = \frac{F_0 \pi}{mw^2}$$

§ 23 Çox sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistemin rəqsləri

Çox sərbəstlik dərəcəsinə (s) malik sistemin sərbəst rəqsləri nəzəriyyəsi §21-də baxdığımız birölçülü rəqslərinki kimi qurulur.

Tutaq ki, sistemin U potensial enerjisi q_i ümumiləşmiş koordinatların funksiyası kimi $q_i = q_{i0}$ $(i = 1,2,\ldots s)$ nöqtəsində minimum qiymət alır. Kiçik

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{23.1}$$

yerdəyişməsini daxil edib potensial enerjini onun üstlərinə görə sıraya ayırıb ikinci tərtibdən sonsuz kiçik kəmiyyətlə kifayətlənsək onu müsbət təyin olunmuş

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k \tag{23.2}$$

kvadratik formakimi yaza bilərik. Burada da potensial enerjinin onun minimum qiymətindən hesablayırıq. k_{ik} və k_{ki} əmsalları (23.2) düsturuna eyni $x_i x_k$ hasillərinin əmsalları kimi daxil olurlar, onları i,k indekslərinə görə simmetrik

$$k_{ik} = k_{ki}$$

hesab etmək olar.

Ümumi halda

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k$$

şəklində olan (bax (5.6)) kinetik enerjidəki a_{ik} əmsallarında $q_i = q_{i0}$ qəbul edib $a_{ik}(q_{i0}) = m_{ik}$ işarələnməsini etsək

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \qquad (23.3)$$

müsbət təyin olunmuş kvadratik forma şəklində yaza bilərik. m_{ik} əmsallarını da indekslərə görə simmetrik

$$m_{ik} = m_{ki}$$

şəklində qəbul edə bilərik.

Beləliklə sərbəst kiçik rəqs edən sistemin Laqranj funksiyasını

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k\right) \qquad (23.4)$$

kimi yaza bilərik.

İndi isə Laqranj tənliyini quraq. Tənliyə daxil olan törəmələri tapmaq üçün Laqranj funksiyasının tam diferensialını yazaq

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_i dx_k - k_{ik}x_k dx_i\right)$$

Cəmin qiyməti cəmləmə indekslərinin yerindən asılı olmadığına görə birinci və üçüncü həddə i və k indekslərinin yerini dəyişib m_{ik} və k_{ik} əmsallarının simmetrikliyinin nəzərə alsaq tapırıq ki,

$$dL = \sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_k dx_i\right)$$

Buradan görünür ki,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k\,, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k$$

Ona görə də Laqranj tənlikləri

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0 \qquad (23.5)$$

formasında yazılır. Bu tənliklər s dənə xətti bircins sabit əmsalı tənliklər sistemindən ibarətdir. Ümumi qayda üzrə həmin tənliklər sisteminin

$$x_k = A_k e^{iwt} \qquad (23.6)$$

şəklində axtarırıq. Burada A_k -hələlik qeyrimüəyyən əmsallardır. Bu ifadəsi (23.5) sistemində yerinə yazıb e^{iwt} -yə ixtisar etdikdən sonra A_k əmsalları üçün

$$\sum_k\left(-w^2 m_{ik} + k_{ik}\right)A_k = 0 \qquad (23.7)$$

ifadəsini alırıq. Bu sistem tənliklərin sıfırdan fərqli həlli olması üçün

$$\left|k_{ik} - w^2 m_{ik}\right| = 0 \qquad (23.8)$$

determinantı sıfıra bərabər olmalıdır.

(23.8) tənliyi w^2-nəzərən s-tərtibdən tənlikdir. Bu tənlik xarakteristik tənlik adlanır. Həmin tənliyin ümumi halda s-dənə müxtəlif həqiqi müsbət w_α^2 $(\alpha = 1,2,\ldots s)$ həlləri vardır (xüsusi hallarda bu həllərin bir neçəsi üst-üstə düşə bilər). Belə təyin olunmuş w_α-kəmiyyətlərinə sistemin məxsusi tezlikləri deyilir.

(23.8) tənliyinin köklərinin həqiqi və müsbət olması fiziki mülahizədən də aydındır. Doğrudan da, w_α-nın xəyali hissəsinin olması x_k koordinatlarının zamandan asılılığında (deməli $\dot{x}_k$-nində) eksponensial olaraq artan və ya azalan vuruğun olmasına gətirib çıxarardı. Lakin baxdığımız halda belə həddin olması mümkün deyil, çünki belə həddin olması zaman keçdikcə tam enerjinin $E = U + T$ dəyişməsinə səbəb ola bilərdi, bu isə enerjinin saxlanması qanuna ziddir.

Bunu riyazi yolla da isbat etmək olar. (23.7) tənliyini A_i^*-ya vurub i-yə görə cəmləsək alarıq ki,

$$\sum_{i,k}\left(-w^2 m_{ik} + k_{ik}\right)A_i^* A_k = 0$$

Buradan isə

$$w^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}$$

Burada sürət və məxrəcdə olan kvadratik formaların həqiqiliyi m_{ik} və k_{ik} əmsallarının həqiqi və simmetrikliklərindən irəli gəlir. Doğrudan da

$$\left(\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k\right)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*$$

onlar həqiqi ədədlərdirlər. Deməli w^2-da həqiqidirlər[5].

-tezliklərinin tapdıqdan sonra onların hər birini (23.7) düsturunda yerinə yazsaq həmin tezliyə uyğun olan əmsallarını tapa bilərik Əgər -tezliklərinin hamısı müxtəlif olarsa, onda məlum olduğu kimi, A_k əmsalları (23.8) determinantlarının w-nin -ilə əvəzlənmiş minoruna mütənasib olur. Həmin minoru $\Delta_{k\alpha}$-ilə işarə etsək, onda (23.5) tənliyinin xüsusi həlli

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{iw_\alpha t}$$

---

[5] əmsallarına görə düzəldilmiş kvadratik formanın müsbət təyinliyi onların (23.2) formasından dəyişənlərin əqiqi olduğu halda aydındır A_k əmsalları kompleks olduqda onları $a_k + ib_k$ aşgar şəkildə yazsaq və yenədə əmsallarının simmetrikliyini nəzərə alsaq

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i - ib_i)(a_k + ib_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_{i,k} k_{ik} b_i b_k$$

olar. Deməli iki müsbət təyin olunmuş kvadratik formanın cəminə bərabər olar.

şəkilndə olacaqdır. Burada C_α ixtiyari kompleks sabitlərdir. Ümumi həll isə xüsusi həllərin cəminə (s-dənə) bərabərdir. Həqiqi hissəyə keçərək həmin həlləri

$$x_k = R_e\left\{\sum_{\alpha=1}^{s}\Delta_{k\alpha}C_\alpha e^{iw_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha \tag{23.9}$$

şəklində yaza bilərik. Burada

$$\Theta_\alpha = R_e\left\{C_\alpha e^{iw_\alpha t}\right\} \tag{23.10}$$

əvəzlənməsi edilmişdir.

Beləliklə görürük ki, hər bir koordinatın zamana görə dəyişməsi s-dənə sadə periodik rəqslərin xətti kombinasiyasından ibarətdir. Hər bir həddin tezliyi məlum amplitud və fazaları ixtiyaridir.

Təbiidir ki, elə ümumiləşmiş koordinatlar süçmək olarmı ki, həmin kordinatların hər biri yalnız bir sadə rəqs etsin sualı meydana çıxır. (23.9) formulasının forması bu məsələni həll etməyin yolunu göstərir.

Doğrudanda, (23.9) ifadəsini ∂s-dənə məlum olmayan Θ_α dəyişənlərindən asılı tənliklər sistemi kimi baxıb həll edərək onları $x_1, x_2 \ldots x_s$ koordinatları ilə ifadə edə bilərik. Deməli Θ_α dəyişənlərinə yeni ümumiləşmiş koordinatlar kimi baxa bilərik. Bu koordinatlar normal koordinatlar, onların etdikləri sadə periodik rəqslər isə normal rəqslər adlanır. Normal koordinatlar

$$\ddot{\Theta}_\alpha + w_\alpha^2\Theta_\alpha = 0 \tag{23.11}$$

tənliklərini ödəyirlər. Deməli normal koordinatlara nəzərən yazılmış tənliklər s dənə bir-birindən asılı olmayan tənliklər sistemindən ibarət olur. Normal koordinatın təcili yalnız həmin koordinatdan asılı olur, ona görə də onun zamandan asılılığını tapmaq üçün onun və ona uyğun olan sürətin başlanğıc ondakı qiymətini bilmək kifayətdir.

Başqa sözlə desək sistemin normal koordinatları tamamilə asılı deyillər.

Deyilənlərdən aydındır ki, normal koordinatlarda yazılmış Laqranj funksiyası hər biri yalnız bir w_α tezliyinə uyğun gələn birölçülü rəqslərin ifadəsini verən həddlərin cəmindən ibarət, yəni aşağıdakı

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{\Theta}_\alpha^2 + w_\alpha^2\dot{\Theta}_\alpha^2\right) \tag{23.12}$$

şəkildə olur. Burada m_α-müsbət sabitlərdir.

Riyazi nöqteyi-nəzərdən, bu (23.9) çevirmələri vasitəsilə həm kinetik enerjisinə uyğun olan (23.3) və həm də potensial enerjiyə uyğun olan (23.2) kvadratik formalarını eyni zamanda dioqonal şəklə gətirmişik.

Adətən normal koordinatları elə seçirlər ki, Laqranj funksiyasında sürətlərin əmsalları vahidə bərabər olsun. Bunun üçün

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\Theta_\alpha \tag{23.13}$$

əvəzlənməsini etmək kifayətdir. Onda

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\dot{Q}_\alpha^2 + w_\alpha^2 Q_\alpha^2\right)$$

Xarakteristik tənliyin kökləri arasında eyni köklər olduğu halda da yuxarıda şərh olunanlar az dəyişir. (23.9) və (23.10) hərəkət inteqrallarının ümumi forması (s-dənə sayda) dəyişməz qalır. Yalnız fərq ondan ibarət olur ki, eyni köklərə uyğun olan $\Delta_{k\alpha}$ əmsalları determinantın minorları olmurlar. Məlumdur ki, bu zaman həmin minorlar sıfır olurlar[6].

Hər bir eyni tezliyə (və ya deyilən kimi cırlaşmış) cırlaşma üstünə uyğun olaraq o qədər normal koordinat qarşı durur, lakin həmin koordinatların seçimi birqiymətli olmur.

Kinetik və potensial enerjiyə eyni w_α-ya uyğun olan həddlər eyni qanunla çevrilən $\sum\dot{Q}_\alpha^2$ və $\sum Q_\alpha^2$ şəklində daxil olduqlarından onların cəmləri invariant saxlayan istənilən xətti çevirməyə məruz qoymaq olar.

Sabit xarici sahədə olan bir maddi nöqtənin üçölçülü rəqslərini normal şəkilə salmaq çox asandır. Dekart koordinat sisteminin başlanğıcını U(x,y,z) potensial enerjini minimum qiymət aldığı nöqtədə seçək. Onda potensial enerji x, y, z koordinatlarının kvadratik funksiyası, kimetik enerji isə

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

(m-zərrəciyin kütləsidir) isə koordinat oxlarının istiqamətlənməsinin seçilməsindən asılı olmur. Ona görə də uyğun fırlanma vasitəsilə yalnız potensial enerjini diaqonal şəkilə gətirmək lazımdır. Onda

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\left(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2\right) \tag{23.14}$$

olur və buna görəqə x, y, z oxları istiqamətində baş verən rəqslər normal rəqslər olurlar.

$$w_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \qquad w_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \qquad w_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$$

xüsusi halda mərkəsi-simmetrik sahədə ($k_1 = k_2 = k_3$ $U = \frac{kr^2}{2}$) hər üç tezliklər üst-üstə düşürlər (bax məsələ 3).

Normal koordinatlardan istifadə etməklə çox sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistemin məcburi rəqsləri məsələsini birölçülü məcburi rəqslər məsələsinə gətirmək olur. Sistemin Laqranj funksiyası ona təsir edən dəyişən xarici qüvvələri nəzərə almaqla

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k \tag{23.15}$$

[6] Ümumi hallda zamandan asılı eksponensial həddlərlə yanaşı üstlü həddlərin olmaması da "kompleks rəqslər "in olmamasını təsdiq edən fiziki mülahizələrin nəticəsidir. Belə həddlərin olması enerjinin saxlanması qanuna zidd olardı.

şəklində yazılır. Burada L_0 sərbəst rəqslərin Laqranj funksiyasıdır. x_k koordinatları əvəzinə normal koordinatları yazsaq alırıq ki,

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha \left(\dot{Q}_\alpha^2 - w_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) + \sum_\alpha f_\alpha(t) Q_\alpha \qquad (23.16)$$

burada

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t)\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}$$

işarələnməsi edilmişdir. Uyğun olaraq hərəkət tənlikləri

$$\ddot{Q}_\alpha + w_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \qquad (23.17)$$

yalnız bir dənə $Q_\alpha(t)$ naməlum funksiyasından asılı olacaqdır.

Məsələlər.

1.Laqranj funksiyası

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{w_0^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha xy$$

olan iki sərbəstlik dərəcəli sistemin rəqslərini təyin edin ($-\alpha xy$ qarşılıqlı təsirdə olan iki eyni w_0 tezlikli sistem)

Həlli: Hərəkət tənlikləri

$$\ddot{x} + w_0^2 x = \alpha y, \qquad \ddot{y} + w_0^2 y = \alpha x$$

(23.6) həllini yerinə yazsaq alınır ki,

$$A_x(w_0^2 - w^2) = \alpha A_y \qquad A_y(w_0^2 - w^2) = \alpha A_x \qquad (1)$$

xarakteristik tənlik $(w_0^2 - w^2)^2 = \alpha^2$. Buradan

$$w_1^2 = w_0^2 - \alpha, \qquad w_2^2 = w_0^2 + \alpha$$

$w = w_1$ olduqda (1) tənliyi $A_x = A_y$ verir, $w = w_2$ olduqda isə $A_x = -A_y$ alınır. Ona görə də

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

($1/\sqrt{2}$ əmsalları teksdə göstərilən normallaşmaya görə seçilibdir). $\alpha \ll w_0^2$ (zəif əlaqə) olduqda alırıq ki,

$$w_1 \approx w_0 - \frac{\alpha}{2w_0}, \quad w_2 \approx w_0 + \frac{\alpha}{2w_0}$$

Bu halda x, y koordinatlarının dəyişməsi iki bir-birinə yaxın tezlikli rəqslərin toplanmasından ibarət olur. Daha doğrusu $w_2 - w_1 = \frac{\alpha}{w_0}$ tezliyi ilə baş verən döyünmədən ibarət olur (bax §22). Bu halda x koordinatının amplitudu maksimum olarkən y-in ki, minimum və əksinə olur.

2. İkiqat müstəvi rəqqasın (şəkil 1) kiçik rəqslərini təyin edin.

Həlli: Kiçik rəqslər üçün ($\varphi_1 << 1, \varphi_2 << 1$) §5 məsələ 1-də tapılmış Laqranj funksiyası

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2$$

formasını alır. Hərəkət tənlikləri

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0$$

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_1 = 0$$

(23.6)-nı nəzərə aldıqdan sonra alırıq ki,

$$A_1 (m_1 + m_2)\left(g - l_1 w^2\right) - A_2 w^2 m_2 l_2 = 0$$

$$- A_1 l_1 w^2 + A_2 \left(g - l_2 w^2\right) = 0$$

xarakteristik tənliyin kökləri

$$w_{1,2}^2 = \frac{g}{2 m_1 l_1 l_2} \{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)\left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4 m_1 l_1 l_2\right]}\}$$

$m_1 \to \infty$ olduqda tezliklər $\sqrt{g/l_1}$ və $\sqrt{g/l_2}$ -lərə yaxınlaşırlar. Bu da iki asılı olmayan rəqqasların tezliyidir.

2. Zərrəciyin $U(r) = \frac{kr^2}{2}$ sahəsində (fəza ossilyatoru) hərəkət trayektoriyasını tapın.

Həlli: İxtiyari mərkəzi sahədə olduğu kimi hərəkət bir müstəvi üzərində baş verir. Həmin müstəvini xy müstəvisi seçək. x, y koordinatları eyni $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ tezlikli sadə rəqs edirlər.

$$x = a \cos(wt + \alpha), \qquad y = b \cos(wt + \beta)$$

və ya

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = b \cos(\varphi + \delta) = b \cos\delta \cos\varphi - b \sin\delta \sin\varphi$$

burada $\varphi = wt + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$ əvəzlənməsi edilmişdir. Bu tənliklərdən $\cos\varphi$ və $\sin\varphi$ -ni təyin edib, onların kvadratları cəmini tapsaq alırıq ki,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\delta = \sin^2\delta$$

Bu isə mərkəzi koordinat başlanğıcından olan ellipsdir. $\delta = 0$ olduqdan trayektoriya düzxətt parçalarına çevrilir (cırlaşır).

§ 24 Molekulların rəqsləri

Əgər xarici sahədə olmayan, bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan zərrəciklər sisteminə baxırıqsa, onda sistemin sərbəstlik dərəcələrinin hamısı rəqsi xarakter daşımır. Belə sistemlərin tipik nümayəndəli molekuladır.

Atomların tarazlıq nöqtəsi ətrafında rəqsi hərəkətindən başqa molekula bütöv bir cisim kimi irəliləmə və fırlanma hərəkəti də edə bilər. İrəliləmə hərəkətinə üç sərbəstlik dərəcəsi uyğundur. Bu qədər də ümumi halda fırlanma sərbəstlik dərəcəsi vardır. Beləliklə n-atomlu molekulun rəqsi hərəkətinə dənə uyğun gəlir. Bütün atomları bir düzxətt üzrə paylanmış molekullar istisna olunur. Həmin düzxətt ətrafında danışmaq mənasız olduğundan, bu halda fırlanma sərbəstlik dərəcələri sayı 2-yə bərabər olur və rəqsi sərbəstlik dərəcələrin sayı -yə bərabər olur.

Molekulların rəqslərinə aid mexaniki məsələni həll etdikdə məsələnin əvvəlindəcə irəliləmə və fırlanma sərbəstlik dərəcələrini kənarlaşdırmaq üçün molekulun tam impulsunun sıfıra bərabər olmasını qəbul etmək kifayətdir. Bu şərt molekulun ətalət mərkəzinin tərpənməz olduğuna ekvivalent olduğundan, onda ətalət mərkəzi koordinatlarının sabit olması kimi ifadə edə bilərik.

Yazaraq (burada $\vec{r}_{a0}$ a-cı atomun tarazlıq nöqtəsinin radius-vektoru $\vec{u}_a$-isə həmin nöqtədən meyl göstərir). Həmin şərti

$$\sum m_a r_a = const \equiv \sum m_a r_{a0}$$

və ya

$$\sum m_a u_a = 0 \tag{24.1}$$

formasından yaza bilərik.

Molekulun fırlanmasını aradan qaldırmaq üçün onun impuls momentini sıfır götürmək lazımdır. İmpuls momentinin hər hansı bir ifadənin zamana görə tam diferensialı şəklində yazıla bilmədiyindən onu həmin funksiyanın sıfıra bərabərliyi kimi ifadə edə bilmərik. Lakin sonsuz kiçik rəqslər istisna olunur. Doğrudan da yenə də $\vec{r}_a = \vec{r}_{a0} + \vec{u}_a$ yazıb, ikinci tərtivdən kiçik həddlərə kifayətlənsək impuls momentini

$$M = \sum m_a [\vec{r}_a \vec{v}_a] \cong \sum m_a [\vec{r}_{a0} \dot{\vec{u}}_a] = \frac{d}{dt} \sum m_a [\vec{r}_{a0} \vec{u}_a]$$

kimi yaza bilərik. Bu cür yaxınlaşmada onun yox olması şərti

$$\sum m_a [\vec{r}_{a0} \vec{u}_a] = 0 \tag{24.2}$$

şəklində olacaqdır (bu halda koordinat başlanğısı ixtiyari seçilə bilər).

Molekulun normal rəqsləri onu təşgil edən atomların yerləşmə simmetriyasına əsaslanaraq, atomların tarazlıq nöqtəsi ətrafında hərəkətlərinin xarakterinə əsasən təsnif (klassifikasiya) etmək olar. Bu məqsədlə qrup nəzəriyyəsi adlanan ümumi metoddan istifadə olunur. Qrup nəzəriyyəsi bu kursun başqa tomunda şərh edilmişdir[7]. Burada isə yalnız bəri sadə misallara baxacağıq.

---

[7] "kvant mexanikası" bax fəsil XII

Molekulu təşgil edən n atomların hamısı bir mütəvi üzərində olarsa, onda atomları həmin müstəvidə saxlayan normal rəqsləri, atomları müstəvidən çıxaran normal rəqslərdən seçmək olar. Hər ikisinin sayını asanlıqla tapmaq olur. Müstəvi üzrə hərəkət üçün dənə sərbəstlik dərəcəsi lazım olduğudan, atomları müstəvidən çıxarmayan normal rəqslərin sayı -ə bərabər olacaq. Qalan sərbəstlik dərəcələrinin sayı atomları müstəvidən çıxaran normal rəqslərə aid olacaqdır.

Xətti molekullar olduqda isə atomları xətt üzərində saxlayan uzununa rəqsləri, onları düzxəttdən çıxaran rəqsəri ayırmaq olar. Cəmi n atomlu düzxəttdə saxlayan sərbəstlik dərəcəsinini sayı n dənə olduğundan və onlardan biri irəliləmə hərəkətinə aid olduğundan, onda atomları düzxətt üzərində saxlayan normal rəqslərin sayı n-1 dənə olacaqdır. Digər tərəfdən xətti molekulun rəqsi hərəkət üçün cəmi dənə sərbəstlik dərəcəsi vardır. Deməli atomları düzxəttdən çıxaran normal koordinatların sayı -ə bərabərdir. Lakin həmin koordinatlara aid cəmi dənə müxtəlif tezliklər var. Çünki həmin rəqslər iki növ bir-birindən asılı olmayan üsulla baş verir. Həmin rəqslər molekulun oxundan keçən və bir-birinə perpendikulyar olan iki müstəvilər üzrə baş verir. Simmetriya mülahizəsindən aydındır ki, bu cür normal rəqslərin hər ikisi eyni tezliyə malik olacaqlar.

Məsələlər[8].

1. Üçatomlu xətti simmetrik ABA molekulun (şəkil 28) rəqslərinin tezliklərini tapın (molekul potensial enerjisinin yalnız A-B və B-A məsafəsindən və ABA bucağından) asılı olması qəbul olunur.

Həlli: (24.1) düsturuna əsasən atomların uzununa x_1, x_2, x_3 yerdəyişmələri

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0$$

münasibətilə əlaqəlidirlər. Bundan istifadə edərək molekulun uzununa rəqsləri üçün Laqranj funksiyası

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2} *$$
$$* \left[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2\right]$$

kimi olacaq. Bundan sonra yeni $Q_a = x_1 + x_2$ və $Q_s = x_1 - x_2$ koordinatlarını daxil edərək alırıq ki,

$$L = \frac{m_A \mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1 \mu^2}{4m_B^2}Q_a^2 + \frac{k_1}{4}Q_s^2$$

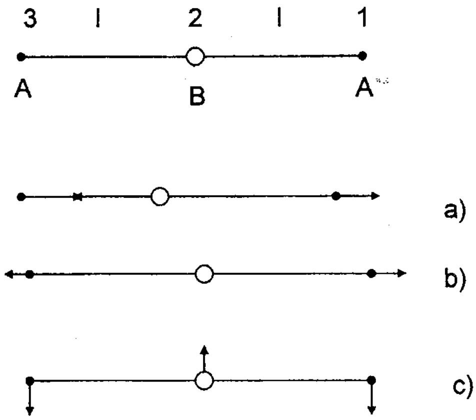
Buradan $\mu = 2m_A + m_B$ molekulun kütləsidir.

---

[8] Daha mürəkkəb molekulların rəqslərinin hesablanmasını aşağıdakı kitablardan tapmaq olar. M.V.Voltenşteyn, M.A. Elyaşeviç, V.N.Stepanov. "Kolebaniya molekul". Qostexuz. 1949. Q.Qersberq. "Kolebatelnıye i vraşatelnıye spektorı mnoqoatomnıx molekul".M.1949

Buradan görünür ki, Q_a və Q_s koordinatları normal koordinatlardır. Q_a koordinatı molekulun ortasına nəzərən antisimmetrik ($x_1 = x_2$, şəkil 28a,) rəqslərinə uyğun gəlir. Onun tezliyi

$$w_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}}$$



Şəkil 28

Q_s koordinatı simmetrik ($x_1 = -x_2$, şəkil 28,b) rəqslərə uyğundur. Onun tezliyi

$$w_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}$$

Atomların eninə yerdəyişmələri, y_1, y_2, y_3 (24.1) və (24.2) düsturlarına əsasən

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0\,,\quad y_1 = y_3$$

münasibətilə əlaqəlidirlər (şəkil 28 c, əyilmənin simm rəqsi). Molekulun əyilməsinin potensial enerjinin $k_2 l^2 \delta^2/2$ şəklində yazaq (burada $\delta - ABA$ bucağının π-dən olan fəeqidir). O yerdəyişmə vasitəsilə belə ifadə olunur:

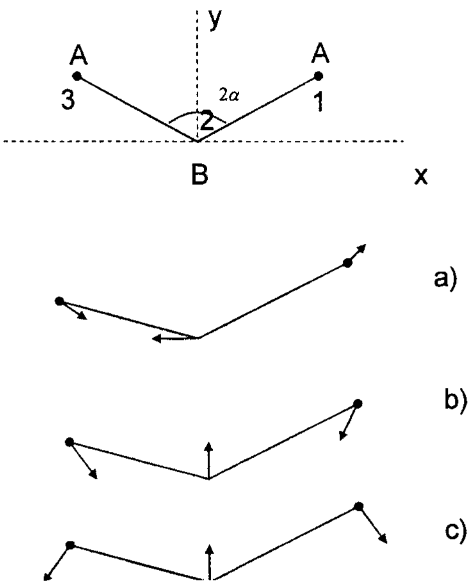
$$\delta = \frac{1}{l}\left[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)\right]$$

y_1, y_2, y_3 yerdəyişmələrini δ-ilə ifadə edərək eninə rəqsinin Laqranj funsiyasını

$$L = \frac{m_A}{2}\left(\dot{y}_1^2 - \dot{y}_3^2\right) + \frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2 - \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2 = \frac{m_A m_B}{4\mu} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

şəklində yaza bilirik. Burada

$$w_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2 \mu}{m_A m_B}}$$



2. Həmin şeyləri üçbucaq formalı ABA (şəkil 29) molekulu üçün

Həlli: (24.1) və (24.2) tənliklərindən atomların $\vec{u}$ yerdəyişmələrini x və y oxları üzrə komponentləri (şəkil 29) aşağıdakı kimi əlaqəlidirlər:

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0$$
$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0$$
$$\sin\alpha(y_1 - y_3) - \cos\alpha(x_1 + x_3) = 0$$

$A-B$ və $B-A$ məsafələrinin dəyişmələri δl_1 və δl_2 $\vec{u}_1-\vec{u}_2$ və $\vec{u}_3-\vec{u}_2$ vektorlarının AB və BA üzrə proyeksiyalarında n alınır:

$$\delta l_1=(x_1-x_2)\sin\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha$$

$$\delta l_2=-(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha$$

ABA bucağının dəyişməsi isə həmin vektorların AB və BA parcalarına perpendikulyar olan istiqamətlərə görə proyeksiyaları vasitəsilə ifadə olunur.

$$\delta l=\frac{1}{l}\left[(x_1-x_2)\cos\alpha-(y_1-y_2)\sin\alpha\right]+\frac{1}{l}\left[-(x_3-x_2)\cos\alpha-(y_3-y_2)\sin\alpha\right]$$

Molekulun Laqranj funsiyası

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{u}_1^2+\dot{u}_2^2)+\frac{m_B}{2}\dot{u}_2^2-\frac{k_1}{2}(\delta l_1^2+\delta l_2^2)-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

Yeni $Q_1=x_1+x_3$, $Q_2=x_1-x_3$ və $q_{s2}=y_1+y_2$ koordinatlarını daxil edək. $\vec{u}$ vektorunun komponentləri həmin koordinatlara belə ifadə olunurlar:

$$x_1=\frac{1}{2}(Q_a+q_{s1}),\ x_3=\frac{1}{2}(Q_a-q_{s1}),\ x_2=-\frac{m_A}{m_B}Q_a$$

$$y_1=\frac{1}{2}(q_{s2}+Q_a ctg\alpha),\ y_3=\frac{1}{2}(q_{s2}-Q_a ctg\alpha),\ y_2=-\frac{m_A}{m_B}q_{s2}$$

Hesablamadan sonra Laqranj funsiyası üçün

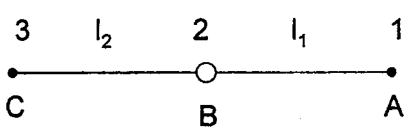
$$L=\frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2+\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2-Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)-$$

$$-\frac{q_{s1}^2}{4}\left(k_1\sin^2\alpha+2k_2\cos^2\alpha\right)-q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}\left(k_1\cos^2\alpha+2k_2\sin^2\alpha\right)+q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2-k_1)\sin\alpha\cos\alpha$$

ifadəsini alırıq. Buradan görünür ki, Q_a koordinatı

$$w_a^2=\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)$$

tezlikli normal koordinatdır. w_a tezliyi y oxuna nəzərən antisimmetrik ($x_1=x_2, y_1=-y_2$, şəkil 29, a) tezlikdir. q_{s1}, q_{s2} koordinatları isə iki rəqsə (Y oxuna nəzərən simmetrik: $x_1=-x_3, y_1=y_3$, şəkil 29,b,c) uyğun olan koordinatlardır. Onlara uyğun olan tezliklər (w_{s1} və w_{s2})



Şəkil 30

$$w^4 - w^2 = \left[\frac{k_1}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right)+\frac{2k_2}{m_A}\left(1+\frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right]+\frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2}=0$$

xarakteristik tənliyin kökləri ilə təyin olunur. $2\alpha=\pi$ olduğu halda bu tezliklərin hamısı məsələ 1-də tapılan tezliklərlə üst-üstə düşürlər.

3. Eyni şeyləri qeyri simmetrik xətti ABC molekula üçün (şəkil 30).

Həlli: Atomların uzununa (x) və eninə (y) yerdəyişmələri

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0, \qquad m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0 .$$

$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3$$

ifadələri ilə əlaqəlidirlər. Dartılma və əyilmə potensial enerjilərini

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2 + \frac{k_1}{2}(\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

şəklində yazaq $(2l = l_1 + l_2)$. Məsələ 1-də aparılan hesablamalara oxşar hesablamalar eninə rəqslərin tezliyi üçün

$$w_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C}+\frac{l_2^2}{m_A}+\frac{4l^2}{m_B}\right)$$

ifadəsini, w_{l1}, w_{l2} uzununa rəqslərin tezlikləri üçün

$$w^4 - w^2 = \left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C}=0$$

kvadrat tənliyin köklərini verir.

§ 25 Sönən rəqslər

Indiyə kimi bir hərəkətin boşluqa baş verdiyini və ya mühitin hərəkətə təsirini nəzərə almamaq mümkün olduğunu fəzz edirik. Həqiqətdə isə cisim mühitdə hərəkət etdiyi zaman, mühit ona müqavimət göstərir və hərəkəti azaltmağa çalışır. Bu zaman hərəkət edən cismin enerjisi istiliyə çevrilir və ya dissipasiya olunur.

Belə şəraitdə hərəkət prosesi artıq təmiz mexaniki proses olmur və bunun öyrənilməsi mühitin hərəkətini , həm mühitin həm də cismin daxili istilik halını nəzərə almağı tələb edir. Bu halda, məsələ, artıq hərəkət edən cismin təcilinin yalnız koordinat və sürətlərin funksiyası olduğunu təsdiq etmək mümkün deyil. Yəni hərəkət tənliyinin mexanikada olduğu kimi olduğunu təsdiq etmək olmur. Beləliklə cismin mühitdəki hərəkəti artıq müxanikanın məsələsi olmur.

Lakin müəyyən hallarda cismin mühitdə hərəkətini mexanikanın hərəkət tənliklərinə müəyyən həddlər əlavə etməklə öyrənmək olur. Bura teezliklərləri mühitdə gedən dissipativ proseslərin tezliklərinə nisbətən kiçik olan rəqsi hərəkətlər daxildir. Bu şərt ödənilərsə onda cismə yalnız sürətindən (verilmiş bircins mühit üçün) asılı olan sürtünmə qüvvə təsir edir.

Əgər bu şərt kifayət qədər kiçik olarsa onda sütrünmə qüvvəsini onun üstlərinə görə sıraya ayırmaq olar. Sükunətdə olan cismə sürtünmə qüvvəsi təsir etmədiyindən bu sıranın sıfırıncı həddi sıfıra bərabər olacaq və birinci sıfırdan fərqli hədd sütərlə mütənasib olacaqdır. Beləliklə birölçülü kiçik rəqslər edən sistemə təsir edən qüvvəsini

$$f_{sür} = -\alpha\dot{x}$$

şəklində yaza bilərik. Burada α müsbət əmsaldır, mənfi işarəsi isə sürtünmə qüvvəsinin sürətin əksinə təsir etdiyini göstərir. Bu qüvvəni hərəkət tənliyinin ((21.4) ilə müqaisə et) sağ tərəfinə əlavə edərək.

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \qquad (25.1)$$

tənlitini alırıq. Bu tənliyi m-ə bölüb

$$\frac{k}{m} = w_0^2, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda \qquad (25.2)$$

əvəzlənmələrini w_0 sürtünmə olmadıqda sərbəst rəqslərin tezliyidir. λ-kəmiyyəti isə sönmə əmsalı adlanır[9].

Beləliklə

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + w_0^2 x = 0 \qquad (25.3)$$

tənliyini alırıq. Sabit əmsallı xətti diferensial tənliklərin ümumi qaydasına əsasən tənliyin həllini $x = e^{rt}$ şəklində axtarıb, r üçün aşağıdakı

$$r^2 + 2\lambda r + w_0^2 = 0$$

xarakteristik tənliyi alırıq.

(25.3) tənliyinin ümumi həlli

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$$

kimidir.

Burada bir neçə halı fərqləndirmək lazımdır. Əgər $\lambda < w_0$ olarsa r üçüncü iki kompleks qoşma qiymət alırıq. Bu halda hərəkət tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı

$$x = \mathrm{Re}\left\{A\exp\left(-\lambda t + it\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}\right)\right\}$$

ifadə olunur. Burada A ixtiyari kompleks sabitdir. Başqa cür həlli

[9] λT hasilinə bərabər (ölçüsüz) ədəd ($T = \frac{2\pi}{w}$ perioddur) sönmənin loqarifmik dekrementi adlanır.

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(wt+\alpha) \qquad w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2} \tag{25.4}$$

şəklində yazmaq olar. Burada a və α həqiqi sabitlərdir. Bu düsturlar vasitəsilə ifadə olunan hərəkət sönən rəqslər adlanır. Bu ifadəyə eksponensial azalan amplitudalı harmonik rəqs kimi baxa bilərik. Amplitudanın azalma sürəti λ-parametri ilə təyin olunur. Rəqsin w tezliyi, sürtünmə olmadıqda baş verən sərbəst rəqslərin tezliyindən azdır; $\lambda << w_0$ olduqda w ilə w_0 fərqi ikinci tərtibdən sonsuz kiçikdir. Sürtünmə olduqda tezliyin azalmasını əvvəlcədən də görmək olardı, cünki sürtünmə ümumiyyətlə hərəkəti ləngidir.

Əgər $\lambda << w_0$ olarsa onda $2\pi/w$ bir period müddətində rəqsin amplitudası təxminən dəyişmir. Bu halda koordinat və sürətin kvadratlarının bir period müddətində orta qiymətlərinə baxmaq müəyyən məna kəsb edir. Bu ortalama zamanı $e^{-\lambda t}$ əmsalının sabit qaldığını qəbul edə bilərik.

Aydındır ki, belə orta kvadratik həddlər $e^{-2\lambda t}$-lə mütənasib olurlar. Ona görədə sistemin enerjisi orta hesabla

$$E = E_0 e^{-2\lambda t} \tag{25.5}$$

qanunu ilə azalır. E_0-enerjinin başlanğıc qiymətidir.

İndi tutaq ki, $\lambda > w_0$. Onda r_i-in hər iki qiyməti həqiqi və mənfidir.

Həllin ümumi forması

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + w_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + w_0^2})t} \tag{25.6}$$

Görünür ki, sürtünmənin kifayət qədər böyük olduğu zaman baş verən hərəkət $|x|$ azalmasından obarət olur. Yəni ($t \to \infty$ olduqda) asimptotik olaraq tarazlıq nöqtəsinə yaxınlaşmaqdan ibarətdir. Bu cür hərəkət aperiodik sönmə adlanır. Nəhayət xüsusi halda $\lambda = w_0$ olduqda xarakteristik tənlik yalnız bir kökə (ikiqat kökə) $r = -\lambda$-ya malik olur. Məlum olduğu kimi bu halda diferensial tənliyin həlli

$$x = (c_1 + c_2)e^{-\lambda t} \tag{25.7}$$

şəklində yazılır. Bu aperiodik sönmənin xüsusi halıdır. Bu da rəqsi xarakter daşımır.

Cox sərbəstlik dərəcəsinə malik sistemlər üçün x_i koordinata uyğun olan ümumiləşmiş sürtünmə qüvvəsi sürətlərin

$$f_{isür} = -\sum_k a_{ik}\dot{x}_k \tag{25.8}$$

şəklində xətti funksiyası olurlar.

Mexaniki nöqteyi nəzərdən α_{ik} əmsallarının i,k əmsallarına görə simmetriyası barədə bir söz demək olmaz. Statistik fizika üsulları ilə göstərmək olar ki[1], həmişə

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{25.9}$$

Buna görə də (25.8) düsturu (25.11) kvadratik

[1] "Statistik fizika" bax § 123

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \qquad (25.11)$$

formasının

$$f_{swr}=-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \qquad (25.10)$$

törəməsi kimi yazıla bilər. (25.11) funksiyası dissipativ funksiya adlanır.

(25.10) qüvvəsi Laqranj tənliyinin sağ tərəfinə əlavə olunmalıdır.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \qquad (25.12)$$

Dissipativ funksiya özlüyündə vacib fiziki mənaya malikdirş Bu funksiya vasitəsilə sistemdə enerjinin dissipasiyası intensivliyi təyin olunur.

Bunu təstiq etmək üçün mexaniki enerjinin zamana görə tam törəməsini hesablamaq kifayətdir.

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-L\right)=\sum_i \dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)=-\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$$

F-funksiyası sürətlərin kvadratik funksiyası olduğundan, bircins funksiyalar üçün Eyler teoremini tətbiq edərək yuxarıdakı ifadənin sağ tərəfinin $2F$-ə bərabər olduğunu görərik. Beləliklə

$$\frac{dE}{dt}=-2F \qquad (25.13)$$

yəni enerjinin dəyişmə sürəti dissipativ funksiyanın iki misli ilə təyin olunur. Dissipativ proseslər enerjini azaldıqlarından, həmişə $F>0$ olmalıdır, yəni (25.11) kvadratik forması müsbət olmalıdır.

Sürtünmə olduqda kiçik rəqslərin tənlikləri (25.5) tənliklərinin sağ tərəfinə (25.8) qüvvələrini əlavə etməklə alınır.

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=-\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k \qquad (25.14)$$

Bu tənliklərdə $x_k=A_ke^{rt}$ yazıb e^{rt}-yə ixtisar etsək, A_k əmsalları üçün xətti cəbri tənliklərini

$$\sum_k\left(m_{ik}r^2+\alpha_{ik}r+k_{ik}\right)A_k=0 \qquad (25.15)$$

alırıq. Bu sistemin determinantını sıfıra bərabər edib r dəyişmələrini tapmaq üçün

$$\left|m_{ik}r^2+\alpha_{ik}r+k_{ik}\right|=0 \qquad (25.16)$$

xarakteristik tənliyini alırıq. Bu tənlik r-yə görə 2s tərtibdən cəbri tənlikdir. Bu tənlikdə əmsalların hamısı həqiqi olduğundan tənliyin kökləri ya həqiqi ya da kompleks qoşma olacaqdır. Bu zaman həqiqi köklərin hamısı mənfi, kompleks köklərin isə həqiqi hissələri mənfi ədədlərdir. Əks halda koordinat və sürətlər və onlarla yanaşı sistemin enerjisi zamana görə eksponensial olaraq artardı. Ancaq dissipativ qüvvələr olduqda sistemin enerjisi azalmalıdır.

§ 26 Sürtünmə olduqda məcburi rəqslər

Sürtünmə olduqda məcburi rəqslərin tədqiqi, § 22-də baxdığımız sürtünmə olmadıqda məcburi rəqslərin tədqiqinə oxşardır. Burada xüsusi hala məcburedici qüvvənin periodik funksiya olduğu hala müfəssəl (geniş) baxacayiq. Bu hal xüsusi əhəmiyyətə malikdir.

(25.1) tənliyinin sağ tərəfinə $f\cos\gamma t$ -periodik qüvvəni əlavə edib, m-ə ixtisar etdikdən sonra hərəkət tənliyini

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+w_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t \tag{26.1}$$

şəklində yaza bilərik. Bu tənliyin həllini kompleks şəkildə axtarmaq daha əlverişli olduğundan $\cos\gamma t$ -nin yerinə $e^{i\gamma t}$ yazaq

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+w_0^2x=\frac{f}{m}e^{i\gamma t}$$

tənliyin xüsusi həllini $x=Be^{i\gamma t}$ şəklində axtarıb

$$B=\frac{f}{m\left(w_0^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma\right)} \tag{26.2}$$

ifadəsini alırıq. B əmsalını $be^{i\delta}$ şəklində yazaraq b və δ -ni tapırıq

$$b=\frac{f}{m\sqrt{\left(w_0^2-\gamma^2\right)^2+4\lambda^2\gamma^2}},\qquad tg\delta=\frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-w_0^2} \tag{26.3}$$

Nəhayət $Be^{i\gamma t}=be^{i(\gamma t+\delta)}$-nin həqiqi hissəsini taparaq (26.1) tənliyinin xüsusi həllini tapırıq. Buna bircins tənliyin ümumi həllini əlavə edərək (aydınlıq naminə $w_0>\lambda$ halı üçün) nəhayət alırıq ki,

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(wt+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta) \tag{26.4}$$

Birinci hədd zaman kecdikcə eksponensial olaraq azaldığından kifayət qədər zaman keçdikdən sonra yalnız ikinci hədd

$$x=b\cos(\gamma t+\delta) \tag{26.5}$$

qalır. b amplitudu üçün yazılmış (26.3) ifadəsi γ tezliyinin w_0-a yaxınlaşdıqda artmasına baxmayara, sürtünmə olmadığı haldakı kimi sonsuz qiymət almır.

Məcburedici qüvvəni verilmiş f amplitudasında, rəqsin amplitudası $\gamma=\sqrt{w_0^2-2\lambda^2}$ qiymətində maksimum olur, $\lambda<<w_0$ olduqda bu qismət w_0-dan ikinci tərtibdən kicik həddlə fərqlənir.

Rezonans oblastında baxaq $\gamma=w_0+\varepsilon$ götürək (ε-kiçik əlavədir), həmdə fərz edək ki, $\lambda<<w_0$. Onda (26.2) düsturunda təxmini olaraq

$$\gamma^2-w_0^2=(\gamma+w_0)(\gamma-w_0)\approx 2w_0\varepsilon,\qquad 2i\lambda\gamma\approx 2i\lambda w_0$$

Ona görə də

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)w_0} \tag{26.6}$$

və ya

$$b = \frac{f}{2mw_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} \qquad tg\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{26.7}$$

Rəqslər məcburedici qüvvə arasındakı δ fazalar fərqinin məcburedici qüvvənin γ tezliyinin dəyişdiyi zaman dəyişməsinin xarakterik xüsusiyətini qeyd edək. Bu fərq həmişə mənfidir, yəni rəqs həmişə məcburedici qüvvəyə nəzərən "geri qalır". Rezonansdan uzaqda $\gamma < w_0$ olduğu tərəfdən δ fərqi sıfıra, $\gamma > w_0$ tərəfdən isə $-\pi$-yə yaxınlaşır. δ-nin 0-dan π -yə qədər dəyişməsi tezliyin qısa oblastında (eni $\sim\lambda$) w_0-a yaxın olan tezliklərdə baş verir. $\gamma = w_0$-olduqda fazalar fərqi $-\pi/2$-dən keçir. Qeyd edək ki, məcburi rəqsin tezliyinin $\gamma = w_0$ olduqda π -yə qədər dəyişməsi sürtünmə olmadığı halda sıçrayışı baş verir (22.4 ifadəsindən ikinci hədd işarəsini dəyişir). Sürtunmənin nəzərə alınması bu sıçrayışı yox edir.

Qərarlaşmış hərəkət halında halında, sistemin (26.5) qanunu ilə məcburi rəqs etdiyi zaman, onun enerjisi dəyişməz qalır. Bu zaman sistem müntəzəm olaraq (xarici qüvvə mənbəyindən) enerji udur. Həmin enerji sürtünmə nəticəsində dissipasiya olunur.

Sistemin orta hesabla vahid zamanda udduğu enerjinin xarici qüvvənin tezliyindən asıllığını $I(\gamma)$-ilə işarə edək. (25.13) tənliyində alınır ki,

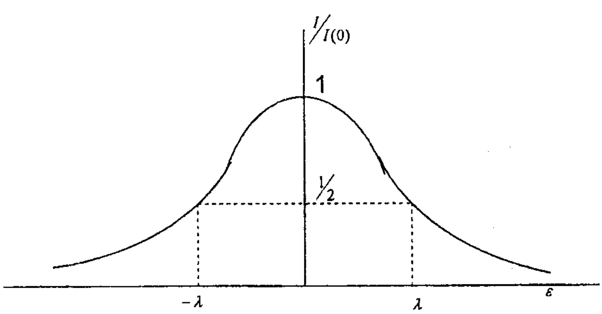
$$I(\gamma) = 2\overline{F}$$

burada $\vec{F}$ dissipativ funksiyanı bir period müddətindənki orta qiymətidir. Birölçülü hərəkət üçün (25.11) ifadəsi $F = \alpha\dot{x}^2/2 = \lambda m\dot{x}^2$ olur. (26.5)-düsturunun burada yerinə yazsaq alırıq ki,

$$F = \lambda m b^2\gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$$

sinus kvadratının orta qiyməti $\frac{1}{2}$-yə bərabərdir. Ona görə də

$$I(\gamma) = \lambda m b^2\gamma^2 \tag{26.8}$$



Şəkil 31

Rezonans yaxınlığında, amplitudanın (26.7)-qiymətini yerinə yazsaq

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2} \tag{26.9}$$

udulmanın tezlikdən bu növ asılılığına dispersiya asılılığı deyilir. Rezonans əyrisində (şəkil 31). $I(\varepsilon)$-nin maksimal qismətindən iki dəfə azalmış qiymətinə qədər dəyişdiyi intervala rezonans əyrisinin yarım eni deyilir. (26.9) düsturundan görünür ki, bu halda həmin en sönmə əmsal λ-ilə üst-üstə düşür. Maksimum hündürlüyü isə

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda},$$

λ-ilə tərs mütənasibdir.

Beləliklə, sönmə əmsalı azaldıqca rezonans əyrisi dar və hündür olur. Yeni onun maksimum daha iti olur. Rezonans əyrisi altında qalan sahə isə dəyişmir. Bu sahə

$$\int_0^\infty I(\gamma)d\gamma=\int_{-w_0}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon$$

inteqralı vasitəsilə ifadə olunur.

$I(\varepsilon)$ əyrisinin $|\varepsilon|$-nun artması zamanı çox tez azaldığından $|\varepsilon|$-nun böyük qiymətləri o qədər də əhəmiyyətli olmur. Ona görə də $I(\varepsilon)$-nın (26.9) ifadısini inteqrallayarkən inteqralın aşağı sərhəddinin $-\infty$ götürmək olar. Onda

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^\infty\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2}=\frac{\pi f^2}{4m} \tag{26.10}$$

Məsələ

Sürtünmə olduqda $f=f_0e^{\alpha t}\cos\gamma t$ qüvvəsinin təsiri ilə baş verən məcburi rəqsləri təyin edin.

Həlli: Hərəkət tənliyin kompleks şəkildə

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+w_0^2x=\frac{f_0}{m}e^{\alpha t+i\gamma t}$$

həll edək və sonra həqiqi hissəni ayıraq. Nəticədə alırıq ki,

$$x=be^{\alpha t}\cos(\gamma t+\delta)$$

$$b=\frac{f_0}{m\sqrt{\left(w_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda\right)^2+4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}}$$

$$tg\delta=\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{w_0^2-\gamma^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}$$

§ 27 Parametrik rezonans

Elə qapalı olmayan sistemlər var ki, xarici təsir onların parametrlərinin zaman keçdikcə dəyişməsinə səbəb olur[1]. Birölçülü sistemin parametrləri (21.3) Laqranj funksiyasına daxil olan m və k kəmiyyətlərdir. Onlar zamandan asılı olduqları halda hərəkət tənliyi

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x})+kx=0 \tag{27.1}$$

şəklində yazılır. t dəyişəninin əvəzinə τ parametrini $d\tau={dt}/{m(t)}$ ifadəsi ilə daxil etsək hərəkət tənliyi

[1] Belə sistemlərə ən sadə misal asqı nöqtəsi şaquli istiqamətdə periodik hərəkət edə bilən rəqqasdır (bax məsələ 3)

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+mkx=0$$

şəklini alır. Ona görə də ümumiliyi pozmadan

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w^2(t)x=0 \qquad (27.2)$$

formasında olan tənliklərə baxa bilərik. Bu tənlik (27.1) tənliyindən m=const olsa alınar.

$w(t)$ funksiyası məsələnin şərtindən təyin olunur. Tutaq ki, bu funksiya γ tezlikli ($T=2\pi/\gamma$ periodlu) periodik funksiyadır. Bu $w(t+t)=w(t)$ olması demekdir. Ona görə də (27.2) tənliyi $t\to t+T$ çevirməsinə nəzərən invariantdır. Buradan nəticə olaraq alınır ki, əgər x(t) tənliyin həlli olacaqdır. Başqa sözlə əgər $x_1(t)$ və $x_2(t)$ ifadələri (27.2) tənliyinin bir birindən asılı olmayan həlləridirsə, onda onlar $t\to t+T$ çevirməsi zamanı öz aralarında xətti olaraq çevrilməlidirlər. Bu zaman x_1 və x_2-ni elə seçmək olar ki, onların bu çevirmə zamanı dəyişməsi hər hansı sabitə hasilindən ibarət olsun.

$$x_1(t+T)=\mu_1x_1(t),\ x_2(t+T)=\mu_2x_2(t)$$

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\prod\nolimits_1(t), \qquad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\prod\nolimits_2(t) \qquad (27.3)$$

Burada $\prod_1(t)$ və $\prod_2(t)$-zamanın periodik (T-periodlu) funksiyalarıdır. Buraya daxil olan μ_1 və μ_2 sabitləri müəyyən şərti ödəməlidirlər. Doğrudan da

$$\ddot{x}_1+w^2(t)x_1=0,\ \ddot{x}_2+w^2(t)x_2=0$$

tənliklərini uyğun olaraq x_1 və x_2-ə vurub, tərəf-tərəfə çıxsaq alırıq ki,

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\frac{d}{dt}(\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2)=0$$

və ya

$$\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2=const \qquad (27.4)$$

(27.3) şəklində təyin olunmuş $x_1(t)$ və $x_2(t)$ funksiyaları arqumentlərini t-dən T-yə dəyişdikdə (27.4) tənliyinin sol tərəfi $\mu_1\mu_2$ vurulur. Ona görə də aydındır ki, (27.4) invariant qalması

$$\mu_1\mu_2=1 \qquad (27.5)$$

olmasını tələb edir. $\mu_1\mu_2$ sabitləri haqqında başqa nəticələri (27.2) tənliyinin əmsallarının həqiqi olmasından istifadə etməklə almaq olar. Əgər $x(t)$ belə tənliyin hər hansı inteqralıdırsa, onda $x^*(t)$ kompleks qoşma funksiya da tənliyin həlli olacaqdır. Bu isə o demekdir ki, μ_1, μ_2 cütü $\mu^*_1\mu^*_2$ cütü ilə üst-üstə düşməlidir. Başqa sözlə ya $\mu_1=\mu^*_2$ olmalıdır, ya da μ_1, μ_2 hər ikisi həqiqi olmalıdır. Birinci halda (27.5)-i nəzərə almaqla alınır ki, $\mu_1=1/\mu_1^*$ və ya $|\mu_1|^2=|\mu_2|^2=1$, μ_1, μ_2 sabitlərinin modulları vahidə bərabərdir.

İkinci halda (27.2) tənliyinin iki asılı olmayan həlləri

$$x_1(t)=\mu^{t/T}\prod_1(t),\qquad x_2(t)=\mu^{-t/T}\prod_2(t) \tag{27.6}$$

şəklində olurlar. Burada μ əmsalı vahiddən fərqi müsbət və ya mənfi sabitdir. Bu funksiyalardan biri (birinci və ya ikinci $|\mu|>1$ və ya $|\mu|<1$ olduqda) zamana görə eksponensial olaraq artır. Bu isə sistemin sükunət halının (x=0 tarazlıq nöqtəsində) dayanıqsız olması deməkdir. Bu haldan kifayət qədər kiçik meyl x-in yerdəyişməsinin zamana görə tez artması səbəb olur. Bu hadisə parametrik rezonans adlanır.

Ona diqqət yetirilməlidir ki, x və $\dot{x}$-nin başlanğıc andakı qiymətləri dəqiq olaraq sıfırdırsa onda onlar sıfır olaraq qalacaqlar. Bu isə adi rezonansdan fərqlənir (§22). Adi rezonans halında yerdəyişmənin zamana görə artması (t-yə mütənasib olaraq) x və $\dot{x}$-nin sıfır başlanğıc qiymətlərində də baş verir.

Parametrik rezonansın, çox əhəmiyyətli halda $w(t)$ funksiyasının w_0 sabit kəmiyyətindən az fərqləndiyi halda meydana gəlmə şərtini tapaq. Tutaq ki, $w(t)$ sadə periodik

$$w^2(t)=w_0^2(1+h\cos\gamma t) \tag{27.7}$$

funksiyadır. Burada $h\ll 1$-dir. (h-ı müsbət hesab edə bilərik. Bunu zamanın başlanğıcını seçməklə əldə etmək olar). Aşağıda göstərəcəyik ki, parametrik rezonans $w(t)$ funksiyası $2w_0$-a yaxın olduqda daha intensiv sürətdə meydana gəlir. Ona görə də $\lambda=2w_0+\varepsilon$ qəbul edək. $\varepsilon\ll w_0$.

Hərəkət tənliyi[1]

$$\ddot{x}+w_0^2\left[1+h\cos(2w_0+\varepsilon)t\right]x=0 \tag{27.8}$$

$$x=a(t)\cos\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t \tag{27.9}$$

şəklində axtaraq. Burada $a(t)$ və $b(t)$ (sin və cos əmsallarına nisbət) yavaş dəyişən funksiyalardır. Həllin bu forması aydındır ki, dəqiq deyil. Həqiqətdə isə $x(t)$ funksiyasına tezliyi $w_0+\varepsilon/2$ tezliyindən ($2w_0+\varepsilon$)-inin tam üstü dəfə fərqlənən həddlər də daxil olmalıdır. Lakin həmin həddlər h-a görə yüksək tərtibdən həddlərdir və birinci yaxınlaşmada onları nəzərə almaya bilərik (bax məsələ 1).

(27.9) ifadəsini (27.8) də yerinə yazaq və hesablamanı ε-nun birinci tərtibi dəqiqliyilə aparaq. Bu zaman $\dot{a}=\varepsilon a$, $\dot{b}=\varepsilon b$ (bu fərziyyənin rezonans hal üçün doğruluğuna nəticədən inana bilərik) olduğuna qəbul edək. Triqonometrik buruqları cəmə cevirmək lazımdır.

$$\cos\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cos(2w_0+\varepsilon)t=\frac{1}{2}\cos\left(3w_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

və s. yuxarıda deyilənlərə uyğun olaraq $3\left(w_0+\varepsilon/2\right)$ tezlikli həddləri atsaq alırıq ki,

[1] Bu şəkildə (γ və h ixtiyarıdır) yazılmış tənliklər ritazi fizikada Matye tənlikləri adlanərlar.

$$-\left(2\dot{a}+b\varepsilon+\frac{hw_0}{2}b\right)w_0\sin\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left(2\dot{b}-a\varepsilon+\frac{hw_0}{2}a\right)w_0\cos\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0$$

Bu bərabərliyin ödənilməsi sin və cos vuruqlarının hamısının eyni zamanda sıfır bərabər olmasını tələb edir. Buradan isə $a(t)$ və $b(t)$ funksiyalsrı üçün iki dənə xətti diferensial tənliklərlər sistemini alırıq. Ümumi qaydaya əsasən həlləri e^{st} yə mütənasib şəkildə axtarırıq. Onda

$$sa+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{hw_0}{2}\right)b=0$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{hw_0}{2}\right)a-sb=0$$

və bu iki cəbri tənliklərin ödənilməsi üçün

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{hw_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right] \qquad (27.10)$$

ifadəsini verir.

Parametrik rezonansın meydana çıxması şərti s-in həqiqi olması yəni $s^2>0$[1]. Beləliklə parametrik rezonans

$$-\frac{hw_0}{2}<\varepsilon<\frac{hw_0}{2} \qquad (27.11)$$

$2w_0$ tezliyi ətrafında intervalında meydana çıxır[2]. Bu intervalın eni h-la mütənasibdir. Həmin intervalda baş verən gücləndirmə əmsalı da o tərtibdədir.

Parametrik rezonans sistemin parametrinin dəyişmə tezliyi γ-nin $2w_0/n$-ə yaxın (n-istənilən tam ədəddir) olduğu halda sa baş verir. Bu zaman rəqslərin ğüclənmə əmsalının aralması müşahidə olunur.

Parametrik rezonans hadisəsi sistemdə zəyif sürtünmə olduqda da baş verir. Ancaq bu halda dayanıqsızlıq oblastı bir az daralır. § 25-də gördük ki, sürtünmə rəqs amplitudasını $e^{-\lambda t}$ qanunu ilə sönməsinə səbəb olur. Ona görə parametrik rezonans zamanı rəqsin güclənməsi $e^{(s-\lambda)t}$ qanunu ilə baş verir (sürtünmə olmadığı halda məsələnin həllindən alınan $s>0$), dayanıqsızlıq oblastı isə $s-\lambda=0$ şərtindən tapılır. Beləliklə (27.10) ifadəsindən alınan s-dən istifadə edərək rezonans oblastı üçün (27.11) əvəzinə

$$-\sqrt{\left(\frac{hw_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{hw_0}{2}\right)^2-4\lambda^2} \qquad (27.12)$$

---

[1] (27.6) düsturundan μ s-lə $\mu=-e^{-s\pi/w_0}$ şərtilə əlaqəlidir. (t-ni $t+\dfrac{2\pi}{2w_0}$ çevrilməsi zamanı (27.9) işarəsini dəyişir).

[2] Əgər yalnız rezonans oblastının sərhəddi ilə (sahənin daxilində s üçün ifadə ilə maraqlanmadan) maraqlansaq, onda sərhəddə s=0 olduğundan istifadə edərək hesablamanı sadələşdirmək olar. Yəni (27.9) düsturunda a və b sabitdirlər; bu zaman dərhal $\varepsilon=\pm hw_0/2$ ifadəsini alırıq ki, bu da (27.11) sərhəddinə uyğun gəlir.

bərabərsizliyini alırıq.

Diqqəti ona yönəldək ki, bu zaman rezonans istənilən kiçik h amplitudasında deyil, yalnız müəyyən h_k ("noroq") sərhəddindən sonra baş verir (27.12) düsturu üçün bu sərhədd

$$h_k = \frac{4\lambda}{w_0}$$

Göstərmək olar ki, $2w_0/n$ yaxınlığındakı rezonans üçün h_k sərhəddi $\lambda^{1/n}$-lə mütənasibdir, yəni n-artdıqca artır.

Məsələlər.

1. $\gamma = 2w_0$ ətrafında rezonans zamanı dayanıqsızlıq oblastını h^2 dəqiqliyi ilə təyin edin.

Həlli: (27.8) tənliyinin həllini

$$x = a_0 \cos\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_0 \sin\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = a_1 \cos 3\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + b_1 \sin 3\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

şəklində axtaraq. Burada (27.9) ifadəsindən fərqli olaraq L-a görə növbəti tərtibdən həddlər nəzərə alınmışdır. Yalnız dayanıqsızlıq oblastının sərhəddi ilə maraqlandığımızdan a_0, b_0, a_1, b_1 əmsallarını sabit hesab edəcəyik (səh. 107-də edilən qeydə uyğun olaraq). Triqonometrik funksiyaların hasilini (27.8) düsturunda yerinə yararkən onların cəmləri kimi yazıb, $5\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tezliklərinə malik olan həddləri ataraq alırıq ki,

$$\left[-a_0\left(w_0\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{hw_0^2}{2}a_0 + \frac{hw_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = \left[-b_0\left(w_0\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - \frac{hw_0^2}{2}b_0 + \frac{hw_0^2}{2}b_1\right] *$$

$$* \sin\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + + \left[\frac{hw_0^2}{2}a_0 - 8w_0^2 a_1\right]\cos 3\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \left[\frac{hw_0^2}{2}b_0 - 8w_0^2 b_1\right]\sin 3\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0$$

$w_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ tezlikli haddlərdə h-in 1-ci və 2-ci dərəcəsilə mütənasib olan həddir, $3\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tezlikli həddlərdə isə birinci tərtibdən olan həddlər saxlanmışdır. Kvadrat mötərizələrin icərisindəki hər bir hədd ayrı-ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdırlar. Axırıncı iki həddən alırıq ki,

$$a_1 = \frac{h}{16}a_0, \; b_1 = \frac{h}{16}b_0$$

bundan sonra əvvəlinci iki həddən alırıq ki,

$$w_0\varepsilon \pm \frac{hw_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2 w_0^2}{32} = 0$$

Bu tənliyin h^2 dəqiqliyi ilə həll etdikdə axtardığımız

$$\varepsilon = \pm\frac{hw_0}{2} - \frac{1}{32}h^2 w_0 = 0$$

sərhəd qiymətini alırıq.

2. $\gamma = w_0$ ətrafında rezonans zamanı dayanıqsızlıq oblastının sərhəddini təyin edin.

Həlli: $\gamma = w_0 + \varepsilon$ alıb

$$\ddot{x} + w_0^2\left[1 + h\cos(w_0 + \varepsilon)t\right]x = 0$$

hərəkət tənliyini alırıq. Axtardığımız sərhəd qiyməti $\varepsilon \sim h^2$ olduğunu nəzərə alaraq həlli

$$x = a_0\cos(w_0 + \varepsilon)t + b_0\sin(w_0 + \varepsilon)t + a_1\cos 2(w_0 + \varepsilon)t + b_1\sin 2(w_0 + \varepsilon)t + c_1$$

şəklində axtaraq. Burada birinci iki tərtibdən həddlər nəzərə alınmışdır. Dayanıqsızlıq oblastın sərhəddini təyin etmək üçün yenə də əmsalları sabit qəbul edib alırıq ki,

$$\left[-2w_0\varepsilon a_0 + \frac{hw_0^2}{2}a_1 + hw_0^2 c_1\right]\cos(w_0 + \varepsilon)t + \left[-2w_0\varepsilon b_0 + \frac{hw_0^2}{2}b_1\right]\sin(w_0 + \varepsilon)t +$$
$$+\left[-3w_0^2 a_1 + \frac{hw_0^2}{2}a_0\right]\cos 2(w_0 + \varepsilon)t + \left[-3w_0^2 b_1 + \frac{hw_0^2}{2}b_0\right]\sin 2(w_0 + \varepsilon)t +$$
$$\left[c_1 w_0^2 + \frac{hw_0^2}{2}a_0\right] = 0$$

buradan tapırıq ki,

$$a_1 = \frac{h}{6}a_0, \qquad b_1 = \frac{h}{6}b_0, \qquad c_1 = \frac{h}{6}a_0$$

və sonra dayanıqsızlıq oblastının iki

$$\varepsilon = -\frac{5}{24}h^2 w_0, \qquad \varepsilon = -\frac{1}{24}h^2 w_0$$

sərhəddini alırıq.

1. Asqı nöqtəsi şaquli istiqamətdə rəqs edən müstəvi rəqqasın kiçik rəqsləri zamanı parametrik rezonansın yaranma şərtini tapın.

Həlli: § 5 məsələ 3 c)-də tapılmış Laqranj funksiyasından kiçik rəqslər üçün $(\varphi << 1)$

$$\ddot{\varphi} + w_0^2\left(1 + 4\frac{a}{l}\cos(2w_0 + \varepsilon)t\right)\varphi = 0$$

hərəkət tənliyini yazırıq (burada $w_0^2 = g/l$). Buradan görünük ki, mətndə daxil edilən h parametrinin rolunu $4a/l$ nisbəti oynayır. Onda (27.11) şərti

$$|\varepsilon| < \frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}$$

şəklini alır.

§ 28 Anharmonik rəqslər

Yuxarıda şərh olunan kiçik rəqslər nəzəriyyəsi sistemin kinetik və poyensial enerjilərini koordinat və sürətlərə nəzərən sıraya ayırıb yalnız ikinci tərtibdən olan hədlərlə kifayətlənməyə əsaslanır. Bu halda hərəkət tənlikləri xətti olurlar, ona görə də xətt rəqslərdən danışılırdı. Bu növ yaxınlaşmanın rəqs amplitudanın kifayət qədər kiçik olduğu halda tamamilə qanunu olmasına baxmayaraq, növbəti yaxınlaşmanı nəzərə almaq (anharmonik və ya qeyrixətti adlanan rəqsləri) hərəkəti zəyif lakin keyfiyyətcə yeni xüssusiyyətlərinin meydana çıxmasına səbəb olur.

Laqranj funksiyasını üçüncü tərtibdən olan hədlərə qədər sıraya ayıraq. Bu halda potensial enerjidə x_i koordinatının üçüncü tərtibdən olan həddlər, kinetik enerjidə $\dot{x}_k\dot{x}_i x_e$ kimi həddlər meydana çıxır, bunun əvvəlki (23.3) istifadəsində fərqlənməsi $a_{ik}(q)$ funksiyasının ayrılışında x-in birinci tərtib kifayətlənməkdən irəli gəlir. Beləliklə Laqranj funksiyası

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}\left(n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l\right)-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}\left(l_{ikl}x_ix_kx_l\right) \tag{28.1}$$

şəklində olur. Burada n_{ikl}, l_{ikl}-yeni sabit əmsallardır.

Əgər ixtiyari x_i koordinatlarında Q_α normal koordinatlarla (xətti yaxınlaşma) keçsək, bu çevirmələrin xətti çevirmələrin xətti olduğundan (28.1) cəmində üçüncü və dördüncü hədd analojı cəmlərə çeviriləcəklər. Alınan ifadədə x_i və $\dot{x}_i$ dəyişmələrinin yerinə Q_α və $\dot{Q}_\alpha$ dəyişənləri olacaqdır. Bu cəmlərdəki əmsalları $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ və $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ ilə işarə etsək Laqranj funksiyası

$$L=\frac{1}{2}\sum\left(\dot{Q}_\alpha^2-w_\alpha^2Q_\alpha^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \tag{28.2}$$

formasını alacaqdır.

Bu Laqranj funksiyasından alınan Laqranj tənliklərini təfsilatı ilə yazmayacağıq. Əsas məsələ oldur ki, həmin tənliklər

$$\ddot{Q}_\alpha+w_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q}) \tag{28.3}$$

şəklində olurlar. Burada f_α-funksiyası Q_α və $\dot{Q}_\alpha$ -nın ikinci tərtibdən bircins funksiyalarıdır.

Ardıcıl yaxınlaşma metodunu tətbiq edərək bu tənliklərin həllərini

$$Q_\alpha=Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)} \tag{28.4}$$

şəklində axtaraq. Burada $Q_\alpha^{(2)}<<Q_\alpha^{(1)}$ və $Q_\alpha^{(1)}$ "həyacanlaşmamış "

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)}+w_\alpha^{(2)}Q_\alpha^{(1)}=0$$

tənliyini ödəyir və adi harmonik

$$Q_\alpha^{(1)}=a_\alpha\cos\left(w_\alpha t+\alpha_\alpha\right) \tag{28.5}$$

rəqslərindən ibarətdir.

(28.3) tənliyinin sağ tərəfində növbəti yaxınlaşmada yalnız ikinci tərtibdən olan həddləri saxlamaqla $Q_\alpha^{(2)}$ koordinatı üçün

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + w_0^2 Q_\alpha^{(2)} = f_a(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)} \ddot{Q}^{(1)}) \qquad (28.6)$$

tənliyini alırıq. Burada sağ tərəfdə (28.5) düsturunu yerinə yazmalıyıq. Nəticədə sağ tərəfi sadə periodik funksiyaların cəmi kimi göstərilə bilən xətti qeyribircins tənlikər alırıq. Məsələn

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(w_\alpha t + \alpha_\alpha)\cos(w_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{\cos[(w_\alpha + w_\alpha)t + a_\alpha + a_\beta] + \cos[(w_\alpha - w_\alpha)t + a_\alpha - a_\beta]\}$$

Beləliklə (28.6) tənliklərinin sağ tərəflərində sistemin məxsusi tezliklərinin cəmi və fərqi ilə ifadə olunan həddlər alınır. Tənliklərin həllini həmin növ periodik funksiyalar şəklində axtarmaq lazımdır. Beləliklə, biz ikinci yaxınlaşmada sistemin w_α normal rəqsləri üzərinə

$$w_\alpha \pm w_\beta \qquad (28.7)$$

tezlikli əlavə rəqslərin meydana çıxdığını görürük (bu həm də $2w_0$ və 0 tezlikli rəqslərin sıfırtezlikli rəqs sabit sürüşməyə uyğundur).

Bu rəqslər kombinasiyon rəqslər adlanırlar. Kombinasiya rəqslərinin amplitudları normal rəqslərin $a_\alpha a_\beta$ (və ya a_α^2) amplitudları hasili ilə mütənasibdirlər.

Növbəti yaxınlaşmalarda daha yüksək tərtibli həddləri nəzərə alarkən, kombinasyon tezliklər arasında normal w_α $(w_\alpha + w_\beta - w_\beta)$ tezlikli rəqslərə də rast gəlinir. Yuxarıda təsvir olunan metodun tətbiqi zamanı hərəkət tənliyinin sağ tərəfində rezonans həddlər olurlar. Həmin həddlər zamanı görə artan amplitudalı həddləri meydana gətirirlər. Bununla bərabər fiziki olaraq aydındır ki, qapalı sistemdə xarici enerji mənbəyinin olmadığı halda rəqslərin intensivlinin öz-özünə artması mümkün deyil.

Həqiqətdə isə, yüksək tərtibli həddləri nəzərə aldıqda w_α əsas tezliklərinin, onların "həyacanlaşmamış" haldakı potensial enerjinin kvadratik həddlərinin əmsalları $w_\alpha^{(0)}$, tezliklərinə nisbətən dəyişməsinə baş verir. Həllərdə artan hədlərin əmələ gəlməsi isə

$$\cos(w_\alpha^{(0)} + \Delta w_\alpha)t \approx \cos w_\alpha^{(0)} t - t\Delta w_\alpha \sin w_\alpha^{(0)} t$$

tipli ayrılışın nəticəsidir. Bu ayrılış t zamanının kifayət qədər böyük qiymətlərinə qanuni deyil.

Ona gorə də növbəti yaxınlaşmaya başlayarkən ardıcıl yaxınlaşma metodu elə dəyişdirilməlidir ki, həlldəki periodik vuruqlar əvvəldən tezliklərin dəqiq düzgün qiymətlərini alsınlar. Tezliklərin dəyişməsi isə tənliklərin həllərini rezonans həddlərin olmaması şərtindən tapdığımız zaman əmələ gəlir.

Həmin metodu birölçülü anharmonik rəqslər misalında nümayiş etdirək. Bunun üçün Laqranj funksiyasını

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{mw_0^2}{2}x^2-\frac{m\alpha}{3}x^3-\frac{m\beta}{4}x^4 \qquad (28.8)$$

formasında yazaq. Buna uyğun hərəkət tənliyi

$$\ddot{x}+w_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3 \qquad (28.9)$$

şəklində yazılır.

Tənliyin həllini

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$$

ardıcıl yaxınlaşma sırası kimi axtaraq. Burada

$$x^{(1)}=a\cos wt \qquad (28.10)$$

w-tezliyin dəqiq qiymətidir. Onu da

$$w=w_0+w^{(1)}+w^{(2)}+\ldots$$

sıra şəklində axtaracağıq ($x^{(1)}$-də başlanğıc fazanı zamanın başlanğıc anını seçməklə həmişə sıfır götürmək olar). Bu zaman hərəkət tənliyinin (28.9) formada yazılışı çox da əlverişli deyil, çünki (28.10) ifadəsini yerinə yazdıqda onun sol tərəfi sıfır olmur. Ona görə həmin tənliyi ekvivalent formada

$$\frac{w_0^2}{w^2}\ddot{x}+w_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{w_0^2}{w^2}\right)\ddot{x} \qquad (28.11)$$

şəklində yazaq.

Burada $x=x^{(1)}+x^{(2)}$, $w=w_0+w^{(1)}$ yazıb ikinci tərtibdən kiçik olan həddləri atsaq $x^{(3)}$ üçün

$$\ddot{x}^{(2)}+w_0^2x^{(2)}=-\alpha a^2\cos^2 wt+2w_0w^{(1)}a\cos wt=-\frac{\alpha a^2}{2}-\frac{\alpha a^2}{2}\cos 2wt+2w_0w^{(1)}a\cos wt$$

tənliyini alırıq. Alınan ifadənin sağ tərəfində rezonans həddin olmaması şərti $w^{(1)}=0$ verir. Bu da paraqrafların əvvəlində şərh edilən ikinci yaxınlaşmanın tapılması metoduna uyğun gəlir.

Bundan sonra qeyribircins tənliyi adi qayda üzrə həll edib alırıq ki,

$$x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2w_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6w_0^2}\cos 2wt \qquad (28.12)$$

bundan sonra (28.11) tənliyində $x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$, $w=w_0+w^{(2)}$ yazıb $x^{(3)}$ üçün

$$\ddot{x}^{(3)}+w_0^2x^{(3)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}-\beta x^{(1)3}+2w_0w^{(2)}x^{(1)}$$

tənliyini, və ya sağ tərəfə (28.10) və (28.12) ifadələrinin yazıb sadə çevrilmədən sonra alırıq ki,

$$\ddot{x}^{(3)}+w_0^2x^{(3)}=-a^3\left[\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{6w_0^2}\right]\cos 3wt+a\left[2w_0w^{(2)}+\frac{5\alpha^2a^2}{6w_0^2}-\frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos wt$$

$\cos wt$ rezonans həddinin əmsalını sıfıra bərabər edərək əsas tezliyə əlavəni

$$w^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8w_0} - \frac{5\alpha^2}{12w_0^3} \right) a^2 \tag{28.13}$$

tapırıq. Bu rəqsin amplitudunun kvadratı ilə mütənasibdir. Üçüncü tərtibdən kombinasyon rəqs

$$x^{(2)} = \frac{a^2}{16w_0^2} \left(\frac{a^2}{3w_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3wt \tag{28.14}$$

formasında alınır.

§ 29 Qeyrixəttli rəqslərdə rezonans

Sistemin məcburi rəqsləri zamanı anharmonik həddlərin nəzərə alınması rezonans hadisəsinin çox mühüm yeni xüsusiyyətlərini meydana çıxarır.

(28.9) tənliyinin sağ tərəfinə γ tezlikli periodik xarici qüvvəni əlavə etdikdə

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + w_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \tag{29.1}$$

tənliyini alırıq. Burada λ sönmə əmsalı sürtünmə qüvvəsi də əlavə olunmuşdur (gələcəkdə onun kiçik olduğunu qəbul edəcəyik). Ciddi desək, sərbəst rəqs tənliyində qeyriətti həddləri aldıqda, məcburedici qüvvənin amplitudasında yüksək tərtibli həddərdə nəzərə alınmalıdır. Bu həddlər x yerdəyişməsinin onlarda asılılığını nəzərə alır. Biz bu hadisəni keyfiyət xarakterini dəyişmir. Tutaq ki,

$$\gamma = w_0 + \varepsilon$$

(ε-kiçikdir), yəni adi rezonans halına yaxınıq. Onda əgər aşağıdakı mülahizələrdən istifadə etsək baş verən hərəkətin xarakterini aydınlaşdırmaq üçün (29.1) tənliyini birbaşa tədqiqi etməyə ehtiyac qalmır.

Xətti yaxınlaşmada məcburi rəqslərin b amplitudasının xarici qüvvənin f amplitudu və γ tənliyindən rezonans yaxınlıgında (26.7) tənliyi ilə verilir. Onu

$$b^2 = \left(\varepsilon^2 + \lambda^2\right) = \frac{f^2}{4m^2 w_0^2} \tag{29.2}$$

şəklində yaza bilərik.

Rəqslərin qeyrixəttiliy onların məxsusi tezliklərinin amplitudadan asılığına gətirir. Onu

$$w_0 + \chi b^2 \tag{29.3}$$

kimi yazaq. Buradakı λ sabiti qeyrixəttilik əmsalından aşğar şəkildə ifadə olunur. (bax (28.13)). Buna uyğun olaraq (29.2) düsturunda (daha dəqiq $\gamma - w_0$-kiçik olduqda) w_0 -ı $w_0 + \chi b^2$ ilə əvəz edirik.

Nəticə də

$$b^2\left[(\varepsilon-\chi b^2)^2+\lambda^2\right]=\frac{f^2}{4m^2w_0^2} \qquad (29.4)$$

tənliyini alırıq ($\varepsilon=\gamma-w_0$), və ya

$$\varepsilon=\chi b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2mw_0 b}\right)^2-\lambda^2}$$

(29.4) tənliyi b^2-na görə kub tənlikdir. Həmin tənliyin həqiqi kökləri məcburi rəqslərin amplitudunu təyin edirlər.

Xarici qüvvənin amplitudu məlum olduqda məcburi rəqslərin amplitudunun xarici qüvvənin tezliyindən asılılığına baxaq.

f-in kifayət qədər kiçik qiymətində b amplitudu da kiçik olur. Ona görə də (29.4) ifadəsində b-nin 2-dən yüksək üstlərini nəzərə almamaq olar, onda $b(\varepsilon)$ üçün (29.2) düsturunu alırıq. Bu asılılıq şəkil 32, a-da $\varepsilon=0$ nöqtəsində maksimuma malik simmetrik əyri kimi göstərilmişdir. f qüvvəsi artdıqca əyri deformasiya olunur, lakin öz xarakterini saxlayır (bircə maksimum nöqtəsi) (şəkil 32, b). Maksimum nöqtəsi $\chi>0$ olduqda ε-nun müsbət qiymətlərinə doğru yerini dəyişir. Bu zaman (29.4) tənliyinin köklərindən yalnız biri həqiqidir. Lakin $f=f_k$ (onu aşağıda təyin edəcəyik) qiymətindən başlayaraq əyrinin xarakteri dəyişir. $f>f_k$-nın hər bir qiymətində tezliyin müəyyən oblastında (29.4) tənliyinin üç dənə həqiqi həlli olur. Bu halda (şəkil 32, c) əyrisinin BCDE hissəsi uyğun gəlir. Həmin oblastın sərhəddi D cə C nöqtələrində $\frac{db}{d\varepsilon}=\infty$ şərtindən təyin olunur. (29.4) tənliyini ε-na görə differensalladıqda alırıq ki,

$$\frac{db}{d\varepsilon}=\frac{-\varepsilon b+\chi b^3}{\varepsilon^2+\lambda^2-4\chi\varepsilon b^2+3\chi^2 b^4}$$

Ona görə də D və C nöqtələrinin vəziyyəti

$$\varepsilon^2-4\chi b^2\varepsilon+3\chi^2 b^4+\lambda^2=0 \qquad (29.5)$$

tənliyi ilə (29.4) tənliklərinin birlikdə həllindən alınır. ε-nun uyğun həlləri hər ikisi müsbətdir $\varepsilon>0$. Amplitudanın ən böyük qiyməti $\frac{db}{d\varepsilon}=0$ nöqtəsində alınır. Bu zaman $\varepsilon=\chi b^2$ və (29.4) tənliyindən alırıq ki,

$$b_{\max}=\frac{f}{2mw_0\lambda} \qquad (29.6)$$

Maksimumun bu qiyməti (29.2) tənliyindən alınanla üst-üstə düşür. Göstərmək olar ki, (burada onun üzərində dayanacağıq[1]) (29.4) tənliyinin həqiqi köklərindən ortancısı (yəni şəkil 32, c-də qırıq xəttlə göstərilən CD hissəsi) sistemin dayanıqsız

---

[1] Isbatını , məsələn, N.N. Boqolyubov, Y.A.Mitropolski. "Asimptotiçeskiye metodı v teorii nelineynıx kolebamiy" Fizmatqiz, 1958 kitabında tapmaq olar.

rəqslərinə uyğun gəlir. Bu halda olan sistemə, istənilən sonsuz kiçik təsir sistemi ya az və ya çox olan köklərə uyğun tezliklərə rəqs etməyə çevirir (yəni BC və ya DC hissələrinə). Beləliklə, sistemin real rəqslərinə ABC və ya DEF hissələri uyğun gəlir. Bu halda ən əhəmiyyətli xüsusiyyət iki müxtəlif amplitudalı rəqslərin baş verdiyi oblastın olmasıdır. Beləliklə, məcburedici qüvvənin tezliyinin ardıcıl artması zamanı məcburi rəqslərin amplitudu ABC xətti üzrə artır. C nöqtəsində amplituda qırılır və sıçrayışla E nöqtəsinə uyğun olan qiymətə keçir və sonra (tezliyin sonrakı artımı zamanı) əyrinin EF hissəsi üzrə dəyişəcəkdir. Əgər yenə də tezliyi azaltsaq onda məcburi rəqslərin amplitudu FD əyrisi üzrə dəyişəcək, D nöqtəsində sıçrayışla B-yə qədər artacaq və sonra BA xətti üzrə azalacaqdır.

f_k-in qiymətini tapmaq üçün görürük ki, f_k (29.5) kvadratı tənliyinin (b^2-na uyğun) hər iki kökünün üst-üstə düşdüyü zaman f-in aldığı qiymətdir: $f = f_k$ olduqda CD-hissəsi bir nöqtəyə (dönmə nöqtəsinə çevrilir) (29.5) tənliyinin diskriminantını sıfıra bərabər alırıq ki $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$; tənliyin uyğun həlli $\chi b^2 = {2\varepsilon}/{3}\ \varepsilon$ və b-nin bu qiymətlərini (29.4)-də yerinə yazsaq

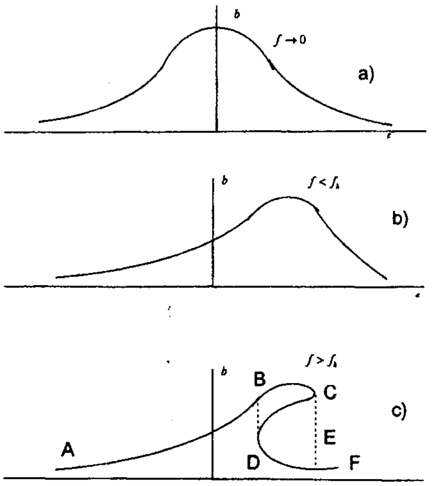
$$f_k^2 = \frac{32m^2 w_0^2 \lambda^3}{3\sqrt{3}|\chi|} \tag{29.7}$$

ifadəsini alırıq.

Rəqslərin qeyrixəttli $\gamma \approx w_0$ olduqda rezonans hadisələrinin xarakterinin dəyişməsi ilə yanaşı, yəni w_0-a yaxın tezlikli rezonansların meydana çıxmasına səbəb olur. Həmin rezonanslar tezlikləri w_0 tezliyindən kifayət qədər fərqlənən xarici qüvvələr tərəfindən yaradılır.

Tutaq ki, xarici qüvvənin tezliyi $\gamma \approx {w_0}/{2}$, yəni

$$\gamma = \frac{w_0}{2} + \varepsilon$$



Şəkil 32

Birinci xətti yaxınlaşmada həmin qüvvə sistemdə həmin tezlikli və amplitudası qüvvənin amplitudası ilə mütənasib olan rəqs

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3mw_0^2}\cos\left(\frac{w_0}{2} + \varepsilon\right)t$$

yaradır ((22.4) düsturuna uyğun olaraq). Ancaq ikinci yaxınlaşmada qeyrixətti həddləri nəzərə aldıqda, bu rəqslər (29.1) hərəkət tənliyinin sağ tərəfində $2\gamma \approx w_0$ tezlikli həddi əmələ gətirir. Məhz $x^{(1)}$-i

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + w_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \alpha x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2}$$

tezliyində yerinə yazıb, iki qat arqumentin kosinusunun daxil edib və sağ tərəfdə yalniz rezonans həddləri saxlasaq alırıq ki,

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + w_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2 w_0^4}\cos(w_0 + 2\varepsilon)t \qquad (29.8)$$

Bu tənlik (29.1) tənliyindən f qüvvəsinin əvəzinə f^2-lə mütənasib olan həddi dayanması ilə fərqlənir. Bu o demekdir ki, yuxarıda baxdığımız xarakterli rezonans $\gamma \approx w_0$ tezliyində alınır. Lakin bu halda rezonansın intensivliyi az olur. $b(\varepsilon)$ asılılığını almaq üçün (29.4) düsturunda f-in yerinə $-8\alpha f^2 / 9mw_0^2$ və ε yerinə 2ε yazmaq lazımdır

$$b^2\left[(2\varepsilon - \chi b^2)^2 + \lambda^2\right] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4 w_0^{10}} \qquad (29.9)$$

İndi tutaq ki, xarici qüvvənin tezliyi

$$\gamma = 2w_0 + \varepsilon$$

Birinci yaxınlaşmada

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3mw_0^2}\cos(2w_0 + \varepsilon)t$$

(29.1) tənliyində $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ yazsaq əvvəlki haldan fərqli olaraq rezonans xarakterli xarici qüvvə verən həddlər ala bilmirik. Lakin $x^{(1)}x^{(2)}$ hasili ilə mütənasib olan üçüncü tərtibli hədlərdən parametrik tipli rezonans əmələ gəlir. Əgər bütün qeyrixəttli hədlərdən yalnız həmin həddi saxlasaq onda $x^{(2)}$ üçüncü

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + w_0^2 x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

və ya

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + w_0^2\left[1 - \frac{2\alpha f}{3mw_0^4}\cos(2w_0 + \varepsilon)t\right]x^{(2)} = 0 \qquad (29.10)$$

tənliyini alırıq, yəni artıq bildiyimiz kimi (sürtünməni nəzərə almaqla) müəyyən tezlik intervalında rəqsin dayanıqsızlığına gətirən (27.8) tipli tənliyi alırıq.

Lakin rəqsin yekun amplitudunu təyin etmək üçün bu tənlik kifayət deyil. Yekun amplitudun təyini qeyrixəttiliklə əlaqəlidir. Bu qeyri-xəttiliy nəzərə almaq üçün hərəkət tənliyində həmdə $x^{(2)}$ görə qeyrixətti həddləridə saxlamaq lazımdır.

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + w_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = \frac{2\alpha f}{3mw_0^2}\cos(2w_0 + \varepsilon)t x^{(2)} \qquad (29.11)$$

Aşağıdakı vəziyyəti nəzərə almaqla bu məsələni tədqiq etmək çox asanlaşır. (28.11) tənliyinin sağ tərəfində

$$x^{(2)} = b\cos\left[\left(w_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \delta\right]$$

yazaq. Burada b-rezonans rəqsinin axtardığımız amplitudadır, δ-gələcəkdə o qədər də mühüm olmayan sabit faza fərqidir. Və iki periodun vuruqların iki kosinusun

$$\frac{\alpha f b}{3mw_0^2}\cos\left[\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\delta\right]$$

həddini alırıq. Bu hədd sistemin w_0-tezliyinə görə rezonans xarakterlidir. Ona görə də yenə məsələ paraqrafın əvvəlində baxdığımız qeyri-xətti sistemdə rezonans məsələsinə gətirilir. Fərq yalnız ondan ibarətdir ki, xarici qüvvə rolunu $\alpha f b/3w_0^2$ həddi oynayır (ε yerində $\varepsilon/2$ durur). (24.9) düsturunda bu əvəzləməni etdikdə alırıq

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\chi b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2w_0^6}$$

Bu tənlik b-yə görə həll etsək amplituda üçün aşağıdaki mümkün olan qiymətləri tapırıq

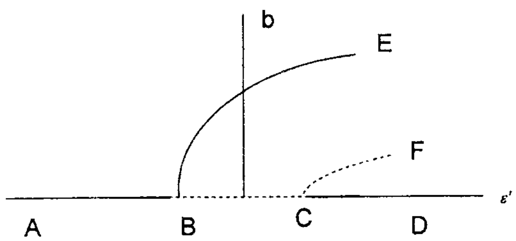
$$b=0 \tag{29.12}$$

$$b^2=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6mw_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right] \tag{29.13}$$

$$b^2=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6mw_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right] \tag{29.14}$$

Şəkil 33-dən alınan b-nin ε-dan asılılığı göstərilmişdir. ($\chi>0$ olduqda, $\chi<0$ olduqda isə əyrilər əks istiqamətdə yönəlmiş olurlar). B və C nöqtələri

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3mw_0^3}\right)^2-4\lambda^2}$$



Şəkil 33

qiymətlərinə uyğun gəlirlər. B nöqtəsindən sol tərəfdə $b=0$; yəni rezonans yoxdur və $\approx w_0$ tezlikli rəqs meydana gəlmir. B və C arasındakı intervalda iki kök vardır: $b=0$ şəkil 33-də BC parçası və (29.13) ifadəsi (BE budağı). Nəhayət C nöqtəsindən sağ tərəfdə (29.12)-(29.14) köklərinin hamısı. Lakin bu qiymətlərin hamısı dayanıqlı rəqsi rejimə uyğun deyil. $b=0$ qiyməti BC[1] hissəsindən dayanıqsızdır və həmdə isbat etmək olar ki, (29.14) kökünə uyğun olan rejim həmişə dayanıqsızdır

[1] Bu interval (27.12) parametrik rezonansa uyğun gəlir. Həmdə (29.10) ifadəsini (27.8)-lə müqayisəsində alırıq ki, $|h|=2\alpha f/3mw_0^4$. Baxdığımız hadisənin olmasının mümkünlüyü

(qalan iki rejimin ortasında qalan). Şəkildə 33-də b-nin dayanıqsız qiymətləri qırıq xəttlərlə göstərilmişdir.

Xarici qüvvə tezliyinin tədricən azaldığı halda əvvəlcə "sükunətdə" olan[1] sistemin özünü aparmasını müşahidə edək. C nöqtəsinə çatana qədər $b=0$ qalır. Sonra bu hal "pozulur" və sistem EB budağına keçir. ε-nun sonrakı azalması zamanı rəqsin amplitudu azdır və B nöqtəsində sıfır olur. Tezliyin əksinə artması zaman rəqsin amplitudu BE[2] əyrisi boyunca artır. Buradan görünür ki, $b(\varepsilon)$ asılılığı (29.4) tənliyində f-in əvəzinə $3b^2\beta/32w_0^2$ və əvəzinə $\varepsilon/3$ yazdıqda alınır

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\chi b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{9\beta^2 f^2}{2^{12}m^2w_0^6}b^4\equiv Ab^4$$

Bu tənliyin kökləri, $b=0$

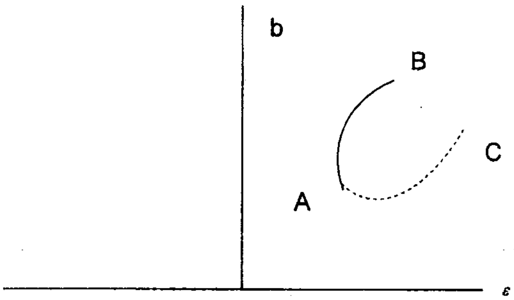
$$b^2=\frac{\varepsilon}{3\chi}+\frac{A}{2\chi^2}\pm\frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\chi}+\frac{A^2}{4\chi^2}-\lambda^2}$$

Şəkil 34-də ($\chi>0$ olduqda) $b(\varepsilon)$ asılılığı verilmişdir. Dayanıqlı hala yalnız $b=0$ nöqtəsi (absis oxu) və AB budağı uyğun gəlir. A nöqtəsinə

$$\varepsilon_k=\frac{3(4\chi^2\lambda^2-A)}{4\chi A}\quad b_k^2=\frac{4\chi^2\lambda^2+A^2}{4\chi^2 A}$$

qiymətləri uyğun gəlir. Rəqs rejimi yalnız $\varepsilon>\varepsilon_k$ olduqda yaranır. Bu zaman $b>b_k$ olmalıdır. $b=0$ halı həmişə dayanıqlı olduğundan rəqsin yaranması üçün başlanğıc "itələmə" lazımdır.

Alınmış düsturlar yalnız kiçik ε-larda doğrudur. ε-nun kiçik olması λ-nın kiçikliyi ilə təyin olunur. Bu zaman qüvvənin amplitudu $A\sim\lambda$ şərtini ödəyir.



Şəkil 34

$$\left|\frac{2\alpha f}{3mw_0^2}\right|>4\lambda$$

şərti isə $h>h_k$ şərtinə uyğundur.

[1] Yada salaq ki, biz burada yalnız rezonans rəqslərinə baxırıq. Onların olmaması sistemin sükunətdə olması demək deyil. Sistemdə zəyif γ tezlikli məcburi rəqslər yaranır.

[2] Lakin yadda saxlamaq lazımdır ki, alınmış bütün formalar b amplitudanın və ε-nun kifayət qədər kiçik qaldıqları halda doğrudurlar. Həqiqətdə BE və CF əyriləri bir nöqtədə birləşərək qurtarırlar. O nöqtəyə çatdıqda rəqs rejimi pozulur və $b=0$ olur.

§ 30 Tez ossilyasiya edən sahədə hərəkət

Eyni zamanda sabit U sahəsində və

$$f = f_1 \cos wt + f_2 \sin wt \qquad (30.1)$$

böyük w tezliyi ilə (f_1 və f_2 funksiyaları yalnız koordinatdan asılıdırlar) zaman görə dəyişən f qüvvəsinin təsiri altında olan zərrəciyin hərəkətinə baxaq. Burada “böyük” sözü altında $w >> 1/T$ şərtini ödəyən tezliklər nəzərdə tutulur. T zərrəciyin yalnız v sahəsində hərəkətinin periodudur. f qüvvəsi U sahəsində təsir edən qüvvəyə nisbətən heç də zəyif hesab olunmur. Lakin həmin qüvvənin təsiri ilə baş verən zərrəciyin rəqsi yerdəyişməsini kiçik hesab edəcəyik (bu yerdəyişməni aşağıda ξ-ilə işarə edəcəyik).

Hesablamaları sadələşdirmək üçün hələlik bir ölçülü sahədə (yalnız bir x fəza koordinatından asılı olan) hərəkətə baxaq. Onda zərrəciyin hərəkət tənliyi[1]

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f \qquad (30.2)$$

şəklində yazılacaqdır.

Zərrəciyə təsir edən sahənin xarakterinə görə, əvvəlcədən məlumdur ki, zərrəciyin hərəkəti hər hansı müntəzəm trayektoriya üzrə yerdəyişmədən və eyni zamanda onun ətrafında yaranan kiçik ossilyasiyalardan ibarət olacaqdır. Buna uyğun olaraq, $x(t)$-ni

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \qquad (30.3)$$

cəmi şəklində yazaq. Burada $\xi(t)$ qeyd olunan ossilyasıyadır.

$\xi(t)$ funksiyasının $2\pi/w$ müddətində orta qiyməti sıfır olur, $x(t)$ funksiyası isə həmin müddətdə çox az dəyişir. Onda orta qiyməti hərifin üstündə kiçik xəttlə işarə etsək alırıq ki, $\bar{x} = X(t)$. Yəni $X(t)$ tez-tez ossilyaisyaya görə ortalanmış müntəzəm hərəkəti təsvir edir. Həmin funksiyanı təyin edən tənliyi çıxaraq[2]. (30.3) ifadəsini (30.2)-də yerinə yazaq və ξ-nın üstlərinə görə sıraya ayırıb ξ-nın birinci tərtibi ilə mütənasib həddlərlə kifayətlənsək

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X,t) + \xi\frac{df}{dX} \qquad (30.4)$$

tənliyini alırıq. Bu tənlikdə müxtəlif xarakterli – həm ossilyasiya həm də hamar həddlər vardır. Aydındır ki, həmin həddlər ayrı-ayrı qruplarda qarşılıqlı ixtisar olunmalıdırlar. Ossilyasiya edən həddlər üçün

$$m\ddot{\xi} = f(X,t) \qquad (30.5)$$

[1] x-koordinatı dekart koordinatı olması məcburi deyil. Buna uyğun olaraq m mütləq kütlə və sabit olması da vacib deyil. Bu şərtlər (30.2) tənliyində də ödənilir. Bu şərtlər yekun nəticəni dəyişdirmir (aşağıya bax)

[2] m-in x-dən asılı olduğu halda bir qədər uzun hesablama aparmaqla asanlıqla görmək olar ki, (30.7) və (30.8) düsturları bu halda da doğrudurlar.

tənliyini yazmaq kifayətdir Qalan həddlərə kiçik vuruqlar daxil olur. Ona görə də yuxarıda yazılandan kiçik olurlar. ($\ddot{\xi}$-yə gəldikdə o böyük w^2-ilə mütənasibdir və ona görədə kiçik deyil) (30.5) tənliyində f-i (30.1) kimi seçib inteqrallasaq (bu halda X sabit kimi götürülür) alırıq ki,

$$\xi = -\frac{f}{mw^2} \qquad (30.6)$$

İndi isə (30.4) tənliyini (yuxarıda deyilən mənada) zamana görə ortalayaq. f və ξ funksiyalarının birinci tərtiblərinin orta qiyməti sıfır olduğundan alırıq ki,

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} - \overline{\xi \frac{df}{dX}} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{mw^2}\overline{f\frac{df}{dX}}$$

Bu tənliyə yalnız $X(t)$ daxildir. Yekun olaraq həmin tənliyi

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX} \qquad (30.7)$$

şəklində yazaq. Burada "effektiv potensial enerji"

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2mw^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4mw^2}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \qquad (30.8)$$

şəklində təyin olunur[1].

Bu ifadəni (30.6)-ilə müqayisə etdikdə əlavə (U-ya nəzərən) həddin ossilyasiya hərəkətinin orta kinetik

$$U_{eff} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2} \qquad (30.9)$$

enerjisi olduğunu asanlıqla görə bilərik.

Beləliklə, zərrəciyin ossilyasiyaya nəzərən ortalanmış hərəkəti, zərrəciyə sabit U sahəsindən əlavə, dəyişən sahənin amplitudası kvadratı ilə mütənasib olan sabit sahənin təsir etdiyi sahədə hərəkəti kimi olar. Alınmış nəticələr asanlıqla, q_i koordinatları ilə təsvir olunan istənilən sərbəstlik dərəcəsinə malik sistemə tətbiq oluna bilər. Onda (30.8) effektiv potensial enerji əvəzinə

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2w^2}\sum_{i,k} a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k} \qquad (30.10)$$

ifadəsi alınır. Burada a_{ik}^{-1} (ümumiyyətlə koordinatın funksiyası) ədədləri a_{ik} ədədlərindən düzəldilmiş matrisanın əks matrisasının elementləridir (bax (5.5)).

Məsələlər.

[1] Aşağıda şərh olunan metodun ideyası A.Lkapise (1951) tərəfindən verilmişdir.

1. Asqı nöqtəsi böyük γ ($\gamma >> \sqrt{g/l}$) tezliyi ilə şaquli istiqamətdə rəqs edən rəqqasın dayanıqlı tarazlıq nöqtəsini tapın.

Həlli: § 5-də məsələ 3 c-də alınmış Laqranj funksiyasından görünür ki, dəyişən qüvvə

$$f = -mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi$$

(x koordinatı kimi φ bucağı secilmişdir). Bu səbəbdən də

$$U_{eff} = mgl\left(-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi\right)$$

Dayanıqlı tarazlıq nöqtəsi bu funksiyanın mümkün nöqtəsidir. Asqı yönəlmiş şaquli istiqamət ($\varphi = 0$) həmişə dayanıqlıdır

$$a^2\gamma^2 > 2gl$$

olduqda yuxarı şaquli istiqamət də ($\varphi = \pi$) dayanıqlı olur.

2. Həmin şeyləri asqı nöqtəsi üfüqi rəqslər edən rəqqas üçün

Həlli: § 5-də məsələ 3 b-də alınmış Laqranj funksiyasından tapırıq ki,

$$f = mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi$$

və sonra

$$U_{eff} = mgl\left[-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right]$$

Əgər $a^2\gamma^2 < 2gl$ olarsa onda $\varphi = 0$ nöqtəsi dayanıqlıdır. Əgər $a^2\gamma^2 > 2gl$ olarsa onda dayanıqlı tarazlığa

$$\cos\varphi = \frac{2gl}{a^2\gamma^2}$$

VI FƏSİL

BƏRK CİSMİN HƏRƏKƏTİ

§ 31 Bucaq sürəti

Mexanikada bərk cismə, aralarındakı məsafə sabit qalan maddi nöqtələr sistemi kimi tərif vermək olar. Aydındır ki, təbiətdə mövcud olan sistemlər bu şərti yalnız təxmini ödəyirlər. Bərk cisimlərin əksəriyəti adi şəraitdə öz forma və ölçülərini o qədər az dəyişirlər ki, bərk cisimlərin hərəkət qanunlarını öyrənərkən bu dəyişmələri nəzərə almaya bilərik.

Gələcək şərhlərimizdə bir çox hallarda bərk cisimlərə maddi nöqtələrin diskret çoxluğu kimi baxacağıq. Bununla çıxarışların bəziləri sadələşir. Ancaq, bu heç bir vəchlə bərk cisimlərə sərt mühüt kimi baxmağa zidd deyil. Bərk cisimlərə səlt mühit kimi baxdıqda onların daxili quruluşu bizi maraqlandırmır. Diskret nöqtələr üzrə cəmləmə aparılan düsturlardan, səlt mühit üçün yazılan düsturlara keçmək üçün zərraciklərin m kütləsini ρdV kütləsilə əvəz edib cismin bütün həcmi üzrə inteqrallamaq lazımdır (burada ρ kütlə sıxlığı, dV-həcm elementidir).

Bərk cismin hərəkətini öyrənmək üçün iki koordinat sistemi seçilir: "tərpənməz", yəni inersial XYZ sistemi və tərpənən (hərəkət edən) $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ koordinat sistemi seçilir. Tərpənən koordinat sistemi bərk cisimlə möhkəm birləşmiş və bütün hərəkətlərdə onunla birlikdə hərəkət etdiyini qəbul edirik. Hərəkət edən koordinat sisteminin başlanğıcını bərk cismin ətalət mərkəzində seçmək daha əlverişlidir.

Bərk cismin tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən vəziyyəti tərpənən koordinat sisteminin vəziyyəti ilə birqiymətli təyin olunur. Tutaq ki, $\vec{R}$ radius-vektoru tərpənən koordinat sisteminin başlanğıc O-nu göstərir (şəkil 35). Həmin koordinat sistemini tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən istiqamətlənməsi üç dənə asılı olmayan bucaqlar vasitəsilə verilir. Beləliklə, $\vec{R}$ radius-vertorunun komponentlərilə birlikdə 6 koordinat alırıq. Beləliklə istənilən bərk cisim 6 sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistem olur.

Bərk cismin ixtiyari sonsuz kiçik yerdəyişməsinə baxaq. Onu iki hissənin cəmi kimi göstərmək olar. Onlardan biri bərk cismi özünə paralel sonsuz kiçik köçürmədən ibarətdir. Bunun nəticəsində bərk cismin ətalət mərkəzi əvvəlki vəziyyətdən son vəziyyətə keçir. Bu zaman tərpənən koordinat sisteminin oxlarının istiqamətləri dəyişmir. İkinci hissə ətalət mərkəzi ətrafında sonsuz kiçik fırlanmadan ibarətdir. Bunun nəticəsində bərk cisim son vəziyyətini alır.

Bərk cismin ixtiyari nöqtəsinin tərpənən koordinat sisteminə nəzərən radius-vektorunu $\vec{r}$-lə işarə edək. Həmin nöqtənin tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən radius-vektorunu $\vec{r}$-lə işarə edək. Onda P nöqtəsinin $\vec{r}$ radius-vektorun yerdəyişməsi $d\vec{r}$ iki hissədən $d\vec{R}$ və $[d\vec{\varphi}\vec{r}]$ yerdəyişməsinin cəmindən ibarət olacaq

$$d\vec{r} = d\vec{R} + [d\vec{\varphi}\vec{r}]$$

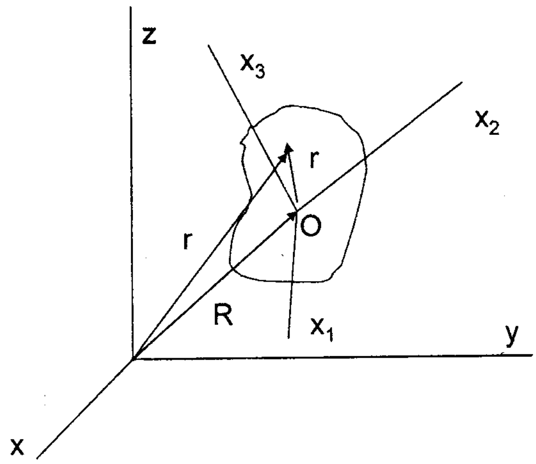
$d\vec{R}$-ətalət mərkəzinin yerdəyişməsi, $[d\vec{\varphi}\vec{r}]$-isə $d\varphi$ bucağı qədər fırlanma zamanı $\vec{r}$ vektorunun dəyişməsidir. Alınan bərabərlik dt-yə bölüb (yerdəyişmənin baş verdiyi dt zaman müddəti)

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}, \qquad \frac{d\vec{R}}{dt}=\vec{V}, \qquad \frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\vec{\Omega} \tag{31.1}$$

əvəzlənmələrini etsək alırıq ki,

$$\vec{v}=\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \tag{31.2}$$

$\vec{V}$-vektoru bərk cismin ətalət mərkəzinin sürətidir. Onu həmdə bərk cismin irəliləmə hərəkəti sürətidə adlandırırlar. $\vec{\Omega}$ vektoru bərk cismin fırlanma hərəkət sürəti adlanır, onun istiqaməti (həmdə $d\vec{\varphi}$-in istiqaməti) fırlanma oxunun istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Beləliklə bərk cismin ixtiyari nöqtəsinin $\vec{v}$ sürəti onun irəliləmə və fırlanma sürətilə ifadə oluna bilər.



Şəkil 35

Qeyd etmək lazımdır ki, (31.2) düsturunu cıxararkən koordinat başlanğıcının cismin ətalət mərkəzində seçilməsi faktından istifadə etmədik. Belə seçimin üstünlüyü sonralar, hərəkət edən cismin enerjisinin hesabladıqda aydın olacaqdır.

İndi isə tutaq ki, cisimlə bağlı olan koordinat başlanğıcı cismin ətalət mərkəzi O nöqtəsində deyil ondan hər hansı $\vec{a}$ məsafəsində olan O' nöqtəsində seçilmişdir. Həmin nöqtənin hərəkət sürətini $\vec{V}'$ fırlanma sürətini $\vec{\Omega}'$-lə işarə edək.

Bərk cismin hər hansı P nöqtəsini seçək. Həmin nöqtənin O' –nöqtəsinə nəzərən radius-vektorunu $\vec{r}'$-lə işarə edək. Onda $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{a}$ olacaq. Bunu (31.2) düsturunda yerinə yazsaq, alırıq ki,

$$\vec{v}=\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{a}\right]+\left[\vec{\Omega}\vec{a}'\right]$$

Digər tərəfdən, $\vec{V}'$ və $\vec{\Omega}'$-in təyinə görə $\vec{v}=\vec{V}'+\left[\vec{\Omega}'\vec{a}\right]$ olmalıdır. Ona görə də alırıq ki,

$$\vec{v}'=\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{a}\right], \qquad \vec{\Omega}'=\vec{\Omega} \tag{31.3}$$

Bu bərabərliklərdən ikincisi çox vacibdir. Buradan görünür ki, bərk cisimlə möhkəm başlı olan sistemin fırlanma bucaq sürəti həmin koordinat sistemindən tamamilə asələ deyil. Belə sistemlərin hamısı zamanın verilmiş anında bir-birinə paralel olan axlar ətrafında ədədi qiymətcə bir-birinə bərabər olan $\vec{\Omega}$ bucaq sürətilə fırlanırlar. Bu hal $\vec{\Omega}$ -nı bərk cismin fırlanma bucaq sürəti adlandırmaqla imkan verir. İrəliləmə hərəkətinin sürəti isə belə "mütləq" xarakterə malik deyil.

(31.3) tənliklərinin birincisindən görünür ki, əgər $\vec{V}$ və $\vec{\Omega}$ (verilmiş zaman anında) koordinat başlanğıcının hər hansı seçimində bir-birinə perdendikulyardırlarsa, onda onlar (yəni $\vec{V}'$ və $\vec{\Omega}'$) da koordinat başlanğıcının istənilən seçimində perdendikulyar olacaqlar. (31.2) düsturundan görünür ki, bu halda bərk cismin bütün nöqtələrinin $\vec{v}$ sürəti bir müstəvi üzərində $\vec{\Omega}$-vektoruna perdendikulyar olan müstəvi üzərində olacaqlar. Bu zaman elə O'[1] koordinat başlanğıcı seçmək olarki, $\vec{V}'$ sürəti sıfır olsun, yəni bərk cismin hərəkəti O' nöqtəsindən keçən ox ətrafında baş verən təmiz fırlanma (verilmiş anda) hərəkətindən ibarət olsun. Bu ox bərk cismin ani fırlanma oxu adlanır[2]. Bərk cismin hərəkəti zamanı $\vec{\Omega}$ -bucaq sürəti, ümumiyyətlə, həm qiymətcə həmdə istiqamətcə dəyişir.

§ 32 Ətalət tenzoru

Bərk cismin kinetik enerjisini hesablamaq üçün ona maddi nöqtələrdən təşkil olunmuş diskret sistem kimi baxırıq və yazırıq ki,

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}$$

burada cəmləmə bərk cismi təşgil edən bütün nöqtələr üzrə aparılır. Burada və gələcəkdə düsturları sadələşdirmək üçün nöqtələrin indekslərini yazmayacağıq.

Bu düsturda (31.2) –ni yerinə yazsaq alırıq ki,

$$T=\sum\frac{m}{2}\left(\vec{V}+\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\right)^2=\sum\frac{m}{2}V^2+\sum m\vec{V}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]+\sum\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2$$

$\vec{V}$ və $\vec{\Omega}$ sürətləri bütün zərrəciklər üçün eyni olduğundan birinci həddə $V^2/2$ cəmdən kənara çıxarıla bilir. $\sum m$ isə cismin kütləsini verir. Onu μ ilə işarə edək. İkinici həddi

$$\sum m\vec{V}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]=\sum m\vec{r}\left[\vec{V}\vec{\Omega}\right]=\left[\vec{V}\vec{\Omega}\right]\sum m\vec{r}$$

kimi yazırıq. Buradan görünür ki, əgər koordinat başlanğıcı ətalət mərkəzində seçilibsə onda bu hədd sıfır olar, çünki $\sum m\vec{r}=0$. Nəhayət üçüncü həddə vektorun hasilinin kvadratını açaraq alırıq ki,

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2r^2-\left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right\} \qquad (32.1)$$

---

[1] Bu ox bərk cismin həcmindən kənarda da ola bilər.

[2] Ümumi halda $\vec{V}$ və $\vec{\Omega}$ vektorlarının perpendikulyar olmadıqları halda, koordinat başlanğıcını elə seçmək olar ki, $\vec{V}$ və $\vec{\Omega}$ paralel olsunlar, yəni hərəkət (verilmiş anda) bir ox ətrafında fırlanmadan və həmin ox istiqamətində irəliləmə hərəkətindən ibarət olsun.

Beləliklə, bərk cismin kinetik enerjisini iki həddin cəmi şəklində ifadə oluna bilir. (32.1) ifadəsindəki birinci hədd bərk cismin irəliləmə hərəkətinin kinetik enerjisidir. Bu hədd bərk cismin bütün kütləsinin ətalət mərkəzində toplandığı halda olan kinetik enerji kimidir. İkinci hədd ətalət mərkəzindən keçən ox ətrafında $\vec{\Omega}$ bucaq sürətilə fırlanmanın kinetik enerjisidir. Qeyd edək ki, kinetik enerjinin bu cür iki hissəyə ayrılması cisimlə möhkəm bağlanmış koordinat sisteminin başlanğıcının cismin ətalət mərkəzində seçilməsinin nəticəsidir.

Fırlanma hərəkətinin kinetik enerjisini tenzor işarələmələrində, yəni $\vec{r}$ və $\vec{\Omega}$ vektorlarının x_i, Ω_i komponentlərində yenidən yazaq[3]. Onda alırıq ki,

$$T_{fr} = \frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\} = \frac{1}{2}\sum m\{\Omega_i x_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\} = \frac{1}{2}\Omega_i \Omega_k \sum m\{x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}$$

Burada $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$ eyniliyindən istifadə edilmişdir. δ_{ik} isə (komponentləri $i = k$ olduqda vahidə, $i \neq k$ olduqda sıfır olan) vahid tenzordur. I_{ik} tenzorunu

$$I_{ik} = \sum m\{x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\} \tag{32.2}$$

daxil edərək bərk cismin kinetik enerjisini

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i \Omega_k \tag{32.3}$$

şəkildə yaza bilərik.

Bərk cismin Laqranj funksiyasını (32.3) dən potensial enerjini çıxmaqla

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\Omega_i \Omega_k - U \tag{32.4}$$

şəklində yazırıq. Potensial enerji ümumiyyətlə bərk cismin vəziyyətini təyin edən altı dəyişmələrdən asılı funksiyadır. Bunlar ətalət mərkəzinin üç X,Y,Z koordinatları və tərpənən koordinat oxlarının tərpənməz oxlara nəzərən istiqamətlənməsini təyin edən üç dənə bucaqdan ibarət olurlar.

I_{ik} tenzoru bərk cismin ətalət momenti tenzoru və ya sadəcə olaraq cismin ətalət tenzoru adlanır. (32.2) təyinindən göründüyü kimi i simmetrik tenzordur, yəni

$$I_{ik} = I_{ki} \tag{32.5}$$

Əyanilər üçün onun komponentləri aşağıdakı cədvəl formasında yazaq:

$$I_{ik}' = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \tag{32.6}$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} komponentlərinə uyğun oxlara nəzərən ətalət momentləri adlanırlar.

Aydındır ki, ətalət tenzoru additivdir-cismin ətalət tenzoru ayrı-ayrı hissələrin ətalət tenzorları cəminə bərabərdir.

---

[3] Bu fəsildə i, k, l hərifləri 1,2,3 qiymətlər alan tenzor indeksləri göstərilir. Bu zaman məlum cəmləmə qaydasına görə cəmləmə işarəsi yazılmır və iki dəfə təkrar olunan indekslər 1,2,3 qiymətlərinə görə cəmləmə aparılır. Məsələ, $A_i B_i = \vec{A}\vec{B}$; $A_i^2 = A_i A_i = \vec{A}^2$ və s. Aydındır ki, lal inkedsləri ixtiyari olaraq dəyişmək olar (yalnız bu şərtlə ki, onlar verilmiş ifadədəki başqa indekslərlə üst-üstə düşməsin).

Bərk cismə səlt mühit kimi baxsaq onda (32.2) düsturunda cəmləmə əməliyatı cismin həcmi boyunca inteqrallama ilə əvəz olunur və ətalət tenzoru

$$I_{ik} \int \rho\left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) dV \tag{32.7}$$

şəklində yazılır.

Hərbir ikinci tərtibdən simmetrik tenzor kimi ətalət tenzoru da x_1, x_2, x_3 oxlarının istiqamətlərini seçməklə diaqonal şəklə gətirilə bilər. Lakin istiqamətlər baş ətalət oxları, ətalət tenzorunun həmin istiqamət üzrə komponentlərinə baş ətalət momentləri deyilir.

x_1, x_2, x_3 oxlarının belə istiqamətləndirilməsi zamanı bərk cismin fırlanma kinetik enerjisi ən sadə şəkil alır.

$$T_{fr} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) \tag{32.8}$$

Baş ətalət momentinin hər biri qalan ikisinin cəmindən böyük ola bilməz. Məsələ

$$I_1 + I_2 = \sum m\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2\right) \geq \sum m\left(x_1^2 + x_2^2\right) = I_3 \tag{32.9}$$

Baş ətalət momentlərinin hər üçü müxtəlif olan cismə asimmetrik fırfıra deyilir.

Baş ətalət momentlərinin ikisi bir-birinə bərabər $I_1 = I_2 \neq I_3$ olan cismə simmetrik fırfıra deyilir. Bu halda x_1, x_2 müstəvisi üzrə baş ətalət oxlarının istiqaməti seçimi ixtiyaridir.

Baş ətalət momentlərinin hər üçü bir-birinə bərabər olan cismə kürəvi fırfıra deyilir. Bu halda baş ətalət oxlarının seçilməsi ixtiyaridir. Onda üçün bir-birinə perpendikulyar olan ixtiyari üç istiqamət seçmək olar.

Bərk cismin hər-hansı simmetriyaya malik olduqda baş ətalət oxlarının tapılması çox asanlaşır; aydındır ki, bu halda ətalət mərkəzinin vəziyyəti və baş ətalət oxlarının istiqaməti həmin simmetriyaya malik olmalıdırlar.

Məsələ, əgər cisim simmetriya müstəvisinə malikdirsə onda ətalət mərkəzi həmin müstəvi üzərində olmalıdır. Baş ətalət oxlarının ikisi həmin müstəvi üzərində üçüncüsü isə bunlara perpendikulyar olmalıdır. Belə sistemə misal olaraq biz müstəvi üzərində paylanmış maddi nöqtələr sistemini göstərmək olar. Bu halda baş ətalət momentləri arasında sadə münasibət yaranır. Əgər sistemin müstəvisini x_1, x_2 müstəvisi seçsək, onda

$$I_1 = \sum m x_2^2, \qquad I_2 = \sum m x_1^2, \qquad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2)$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{32.10}$$

ifadələri alınır.

Əgər cisim hər hansı tərtibli simmetriya oxuna malikdirsə onda ətalət mərkəzi həmin ox üzərində olacaqdır. Baş ətalət oxlarından biri isə həmin oxla üst-üstə düşür. Qalan ikisi isə ona perpendikulyar olurlar. Bu zaman simmetriya oxu ikidən yuxarı tərtiblidirsə onda cisim simmetrik fırfıra olur. Doğrudan da simmetriya oxuna perpendikulyar olan baş ətalət oxlarının hər birini 180°-dən fərqli bucaq qədər fırlatmaq olar, yəni həmin oxların seçilməsi birqiymətli olmur. Bu isə yalnız simmetrik fırfıra halında mümkündür.

Birdüz xətt boyunca düzülmüş maddi nöqtələr xüsusi haldır. Bu xətti x_3 oxu kimi seçsək, onda bütün nöqtələr üçün $x_1 = x_2 = 0$ olacaq. Ona görə baş ətalət momentlərinin ikisi üst-üstə düşür, üçüncü isə sıfır olur.

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0 \tag{32.11}$$

Belə sistemə rotator deyilir. İxtiyari cismə nəzərən rotatorun xarakterik xüsusiyyəti onun yalnız iki dənə fırlanma sərbəstlik dərəcəsinin olmasındadır. Bu sərbəstlik dərəcələri x_1 və x_2 oxları ətrafında fırlanmaya uyğun gəlir.

Nəhayət ətalət tenzorunun hesablanmasına aid bir şeyi qeyd edək. Bir ətalət tenzorunu başlanğıcı sistemin ətalət məekəzində olan koordinat sisteminə görə təyin etdiyimizə baxmayaraq (yalnız belə təyinetmə zamanı (32.3) düsturu doğrudur) bəzən onu əvvəlcə başqa bir O' başlanğıcına nəzərən hesablamaq daha əlverişli olur

$$I'_{ik} = \sum m\left(x_l'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k\right)$$

Əgər O və O' nöqtələri arasındakı məsafə $\vec{a}$-vektoru ilə təyin olunursa onda $\vec{r} = \vec{r}' = a$, $x_i = x'_i + a_i$; həmdə $\sum m\vec{r} = 0$ olduğunu nəzərən alsaq onda

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\left(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k\right) \tag{32.12}$$

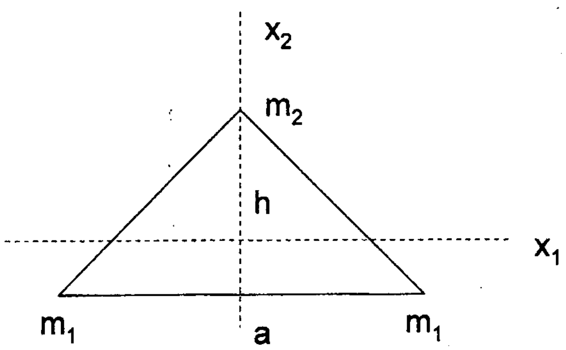
ifadəsi alınır. Bu düstur vasitəsilə I'_{ik}-i bilərək I_{ik} tenzorunu asan tapmaq olar.

Məsələlər.

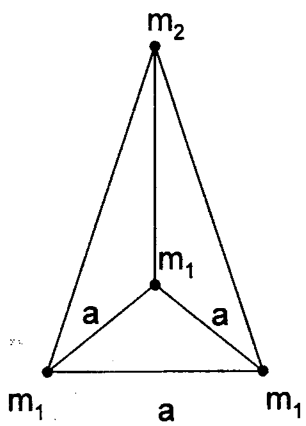
1. Bir-birindən sabit məsafədə yerləşmiş atomlardan təşgil olunmuş molekulun baş ətalət momentini aşağıdakı hallarda təyin edin: a) bir düz xətt üzrə düzülmüş atomlardan ibarət molekula

Cavab:

$$I_1 = I_2 = I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu}\sum_{a \neq b} m_a m_b l_{ab}^2, \qquad I_3 = 0$$



Şəkil 36



Şəkil 37

m_a atomların kütlələri, l_{ab} a və b atomları arasındaki məsafə, cəmləmə molekulda olan cüt atomlar üzrə aparılır (həmdə a və b-nin hər bir cüt qiymətlərə cəmə yalnız bir dəfə daxil olur).

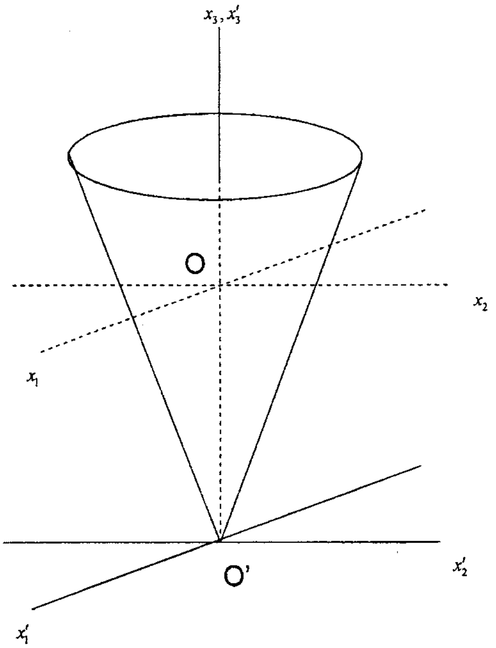
İki atomlu atom üçün cəm bir həddən ibarət olur. Bu hədd əvvəlcədən məlumdur və gətirilmiş kütlənin atomlar arasındakı məsafənin kvadratı bərabərdir:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

b) bərabər yanlı üçbucaq şəklində (şəkil 36) olan üç atomlu molekula:

Cavab: ətalət mərkəzi üçbucağın hündürlüyü üzərində üçbucağın oturacağından $x_2 = \frac{m_2 h}{\mu}$ məsafədə yerləşir. Ətalət momentləri

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \qquad I_3 = I_1 + I_2$$



Şəkil 38

c) Düzgün üçbucaqlı piramidanın təpələrində (şəkil 37) yerləşdirilmiş atomlardan ibarət 4 atomlu molekula

Cavab: ətalət mərkəzi piramidanın hündürlüyü üzərində onun oturacağından $x_3 = \frac{m_2 h}{\mu}$ məsafəsində yerləşir. Ətalət momentləri

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1 a^2}{2}$$

$$I_3 = m_1 a^2$$

$m_1 = m_2$ olduqda $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ olur və tetraedrik molekula alınır. Onun ətalət momentləri

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2$$

2. Bircins sələt cisimlərin baş ətalət momentlərini tapın.

a) nazik l uzunluqlu çubuq:

Cavab: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2$, $I_3 = 0$ (çubuğun qalınlığı nəzərə alınmır)

b) R radiuslu kürə

Cavab: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$

($I_1 = I_2 = I_3 = 2\rho\int r^2 dV$ inteqralını hesablamaq lazımdlr).

c) R radiuslu və h hündürlüklü çevrənin silindir

Cavab: $I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$, $\quad I_3 = \frac{\mu}{2}R^2$ (x_3-silindrin oxudur).

d) Tilləri a, b, c olan düzbucaqlı parallepiped

Cavab: $I_1 = \frac{\mu}{12}\left(b^2 + c^2\right)$, $I_2 = \frac{\mu}{12}\left(c^2 + a^2\right)$, $I_3 = \frac{\mu}{12}\left(a^2 + b^2\right)$,

(x_1, x_2, x_3-oxları a, b, c tillərinə paralleldilər).

e) əsasının radiusu R, hündürlüyü h olan çevrəvi konus (şəkil 38).

Həlli: Əvvəlcə I'_{ik} tenzorunu başlanğıcları konusun təpəsində olan (şəkil 38) oxlara nəzərən hesablayaq. Hesablama silindrik koordinatlarda asan hesablanır və alınır ki,

$$I'_1 = I'_2 = \frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right), \qquad I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2$$

Sadə hesablama göstərir ki, ətalət mərkəzi konusun oxu üzərində təpədən $a = \frac{3h}{4}$ məsafədədir. (32.13) düsturuna əsasən alınır ki,

$$I_1 = I_2 = I'_1 - \mu a^2 = \frac{3}{10}\mu\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \qquad I_3 = I'_3 = \frac{3}{10}\mu R^2$$

f) yarım oxları a, b, c olan üçoxlu ellipsoid

Həlli: Ətalət mərkəzi ellipsin mərkəzi, baş ətalət oxları isə ellipsin oxları ilə üst-üstə düşü. Ellipsoidin hərkəzinə görə inteqrallamanı $x = a\xi$, $y = b\eta$ və $z = c\zeta$ çevrilməsi vasitəsilə kürənin həcminə görə inteqrallamaya götürmək olur. Bu çevirmə ellipsoidin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tənliyini, vahid radiuslu sferanın

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

tənliyinə çevirir.

Beləliklə x oxuna nəzərən ətalət moment üçün alırıq ki,

$$I_1 = \rho\iiint\left(y^2 + z^2\right)dxdydz = \rho abc\iiint\left(b^2\eta^2 + c^2\zeta^2\right)d\xi d\eta d\zeta = abc\frac{1}{2}I'\left(b^2 + c^2\right)$$

Burada I'_1 vahid radiuslu kürənin ətalət momentidir. Ellipsin həcminin $4\pi abc/3$ olduğunu bilərək ətalət momentlərini

$$I_1 = \frac{\mu}{5}\left(b^2 + c^2\right), \qquad I_2 = \frac{\mu}{5}\left(a^2 + c^2\right), \qquad I_3 = \frac{\mu}{5}\left(a^2 + b^2\right)$$

tapılır.

3. Fiziki rəqqasın kiçik rəqslərinin tezliyini təyin edin (üfüqi ox ətrafında yellənən bərk cisim).

Həlli: Tutaq ki, rəqqasın ətalət mərkəsindən fırlanma oxuna qədər olan məsafə l, α, β, γ isə onun baş ətalət oxlarının fırlanma oxu ilə əmələ gətirdikləri bucaqlardır. Şaquli istiqamətlə ətalət mərkəzindən fırlanma oxuna endirilən perdendikulyar arasında qalan bucağı φ ilə işarə edək. Ətalət mərkəzinin sürəti

$v = l\dot{\varphi}$, bucaq sürətinin baş ətalət oxlarına proyeksiyaları $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$ və $\dot{\varphi}\cos\gamma$. φ bucağını kiçik hesab edərək potensial enerjini

$$U = \mu g l(1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu g l \varphi^2$$

ona görə də Laqranj funksiyası

$$L = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma\right)\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu g l^2}{2}\varphi^2$$

Buradan rəqsin tezliyi üçün

$$w^2 = \frac{\mu g l}{\mu l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}$$

4. Şəkil 39-da göstərilən sistemin kinetik enerjisini tapın. OA və AB parçaları l uzunluqlu nazik bircins çubuqlardır. Onlar A nöqtəsində şarnirlə birləşmişlər. OA çubuğu O nöqtəsi ətrafında şəkil müstəvisində fırlanır. AB çubuğunun B nöqtəsi ox üzrə sürüşür.

Həlli: OA çubuğunun ətalət mərkəzinin (çubuğun ortasındadır) sürəti $l\dot{\varphi}/2$ bərabərdir φ AOB bucağıdır. Ona görə OA çubuğunun kinetik enerjisi

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ- bircins çubuğun kütləsidir). AB çubuğunun ətalət mərkəzinin dekart koordainatları $x = \frac{3l}{2}\cos\varphi$, $y = \frac{l}{2}\sin\varphi$-dir. Bu çubuğun da fırlanma sürəti $\dot{\varphi}$ olduğundan onun kinetik enerjisi

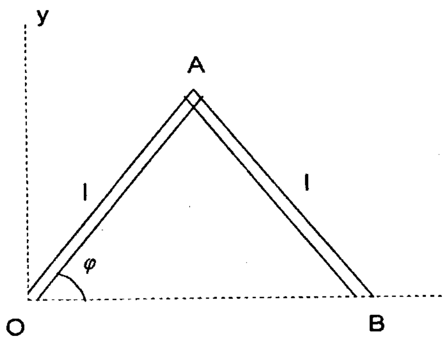
$$T_2 = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu l^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

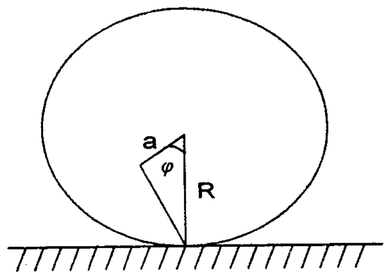
Sistemin tam kinetik enerjisi

$$T = \frac{\mu l^2}{3}(1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

(məsələ 2, a nəticəsinə əsasən $I = \mu l^2/12$ yerinə yazılıb).

5. Radius R olan silindir müstəvi üzərində diyirlənir. Onun kinetik enerjisini tapın. Silindirin kütləsi elə paylanmışdır, onun baş ətalət oxlarından biri silindrik oxuna paralel olub ondan a məsafəsindədir. Həmin baş oxa nəzərən ətalət momenti I-dir.





Şəkil 39 Şəkil 40

Həlli: Şaquli, ağırlıq mərkəzində silindrin oxuna çəkilmiş perpendikulyar arasındakı bucağı φ-lə işarə edək (şəkil 40). Hər an silindrin hərəkətinə anifırlanma oxu ətrafında təmir fırlanma hərəkəti kimi baxmaq olar. Ani fırlanma oxu silindrin tərpənməz müstəviyə toxunduğu xəttlə üst-üstə düşür. Fırlanmanın bucaq sürəti $\dot{\varphi}$-dir (Bütün parallel fırlanma oxlarına nəzərən fırlanma bucaq sürəti eynidir). Ətalət mərkəzi ani fırlanma oxundan $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$ məsafəsində olur. Ona görə də onun sürəti $V=\dot{\varphi}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$. Silindrin tam kinetik enerjisi

$$T=\frac{\mu}{2}\left(a^2+R^2-2aR\cos\varphi\right)+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

6. R radiuslu silindrik səth üzrə diyirlənən a radiuslu bircins silindrin kinetik enerjisini tapın (şəkil 41).

Həlli: Hər iki silindrin mərkəzlərini birləşdirən xətlə şaquli arasındakı bucağı φ-ilə işarə edək. Diyirlənən silindrin ətalət mərkəzi oxun üzərində olacaq və onun sürəti $V=\dot{\varphi}(R-a)$. Bucaq sürətini ani fırlanma oxu ətrafında baş verən təmiz fırlanma sürəti kimi təyin edək. Ani fırlanma oxu silindrlərin toxunma xətti ilə üst-üstə düşür. Ona görə də

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot{\varphi}\frac{R-a}{a}$$

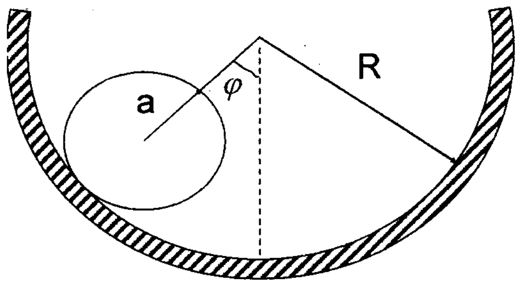
Əgər I_3 -silindrin oxuna nəzərən ətalət momentidirsə, onda

$$T=\frac{\mu}{2}(R-a)^2\dot{\varphi}^2+\frac{I_3}{2}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2=\frac{3}{4}\mu(R-a)^2\dot{\varphi}^2$$

(I_3 -a-cı v məsələsində götürülür)

7. Müstəvi üzrə diyirlənən biricns konusun kinetik enerjisini tapın.

Həlli: konusun müstəvi ilə toxunduğu OA xətti ilə hər hansı sabit istiqamət arasındakı bucağı θ-ilə işarə edək (şəkil 42). Ətalət mərkəzi konusun oxu üzərindədir. Onun sürəti $V = a\cos\alpha\dot{\theta}$-dir. Burada 2α-konusun açılma bucağıdır, a isə ətalət mərkəzinin təpədən olan məsafədir. Bucaq sürətini ani OA oxu ətrafında baş verən fırlanma (təmiz) sürəti kimi hesablayırıq



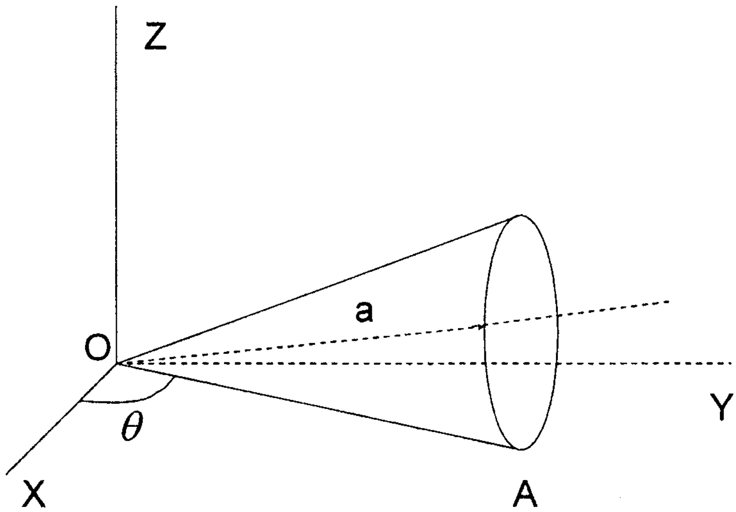
Şəkil 41

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta}ctg\alpha$$

Baş ətalət oxlarından biri konusun oxu ilə üst-üstə düşür (x_3 oxu). Digər baş ətalət oxu (x_2) konusun oxuna və OA xəttinə perpendikulyar seçək. Onda Ω vektorunun (OA xəttinə parallel) baş ətalət oxları üzrə proyeksiyalı $\Omega\sin\alpha$, 0, $\Omega\cos\alpha$ olacaq. Nəticədə axtardığımız kinetik enerjini

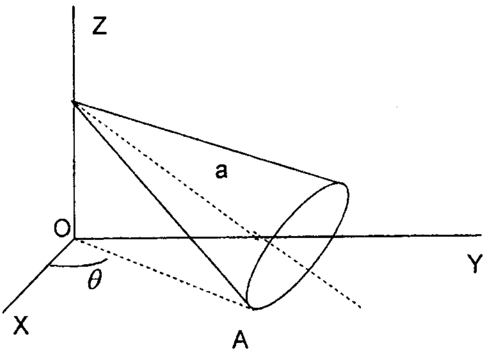
$$T = \frac{\mu a^2}{2}\cos^2\alpha\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\cos^2\alpha\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2 = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

şəklində tapırıq (h-konusun hündürlüyü, I_1, I_2, a isə ($2a$) məsələsindən götürülür).



Şəkil 42

8. Oturacağı müstəvi üzrə diyirlənən təpəsi isə tərpənməz olaraq müstəvidən konusun oturacağının radiusu qədər məsafədə olan bircins konusun kinetik enerjisini tapın (konusun oxu müstəviyə paralleldir).



Şəkil 43

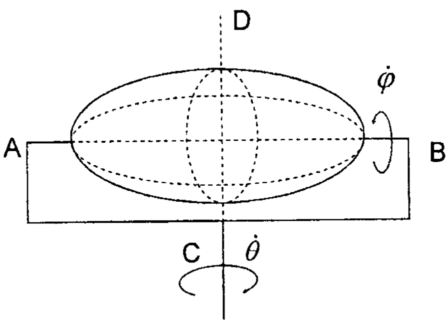
Həlli: Müstəvidəki sabit istiqamətlə konusun oxunun həmin müstəviyə proyeksiysı arasındakı bucağı θ ilə işarə edək (şəkil 43). Onda Ətalət mərkəzinin sürəti $V = a\dot{\theta}$ (işarələr məsələ 7-də kimidir). Ani fırlanma oxu konusun OA –yan tilidir. OA xətti konusun müstəviyə toxunduğu nöqtəyə qədər çəkilmişdir. Ətalət mərkəzi bu oxdan $a\sin\alpha$ məsafəsindədir. Ona görə

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \frac{\theta}{\sin\alpha}$$

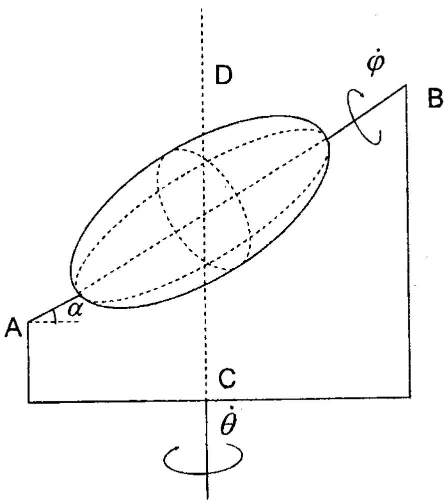
$\vec{\Omega}$ vektorunun baş ətalət oxlarına proyeksiyası (x_3 oxu konusun oxuna və OA xəttinə perdendikulyardır). $\Omega\sin\alpha = \dot{\theta}$, 0, $\Omega\cos\alpha = \dot{\theta}ctg\alpha$. Ona görə kinetik enerji

$$T = \frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2 ctg^2\alpha = \frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 5\right)$$

9. Bir oxu (AB şəkil 44) ətrafında fırlanan bircins üçoxlu ellipsoid kinetik enerjini tapın. AB oxu ona perpendikulyar olan və ellipsoidin mərkəzindən keçən CD ətrafında fırlanır.



Şəkil 44



Şəkil 45

Həlli: CD ətrafında fırlanma bucağını θ, AB-ətrafında fırlanma bucağını φ-ilə işarə edək. Bu bucaq CD ilə AB xəttinə perpendikulyar olan x_1 ətalət oxu arasındakı bucaqdır. Onda Ω-nın ətalət oxlarına proyeksiyaları $\dot{\theta}\cos\varphi$, $\dot{\theta}\sin\varphi$, $\dot{\varphi}$

olacaqlar (həmdə x_3 oxu AB –ilə üst-üstə düşür). Ellipsin mərkəzi ilə üst-üstə düşən ətalət mərkəzi tərpənmədiyinə görə kinetik enerji

$$T=\frac{1}{2}\left(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2$$

10. AB oxu maili olduğu və ellipsoid həmin oxa nəzərən simmetrik olduğu halda (şəkil 45) həmin məsələni həll edin.

Həlli: Ω-nın AB oxuna və ona perpendikulyar olan digər iki baş ətalət oxlarına (bunları ixtiyari seçmə olur) proyeksiyaları. $\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi$, $\dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi$, $\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha$

Kinetik enerji isə

$$T=\frac{I_1}{2}\cos\alpha\dot{\theta}^2+\frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha)^2$$

§ 33 Bərk cismin impuls momenti

Bildiyimiz kimi sistemin impuls momentinin qiyməti onun hansı nöqtəyə görə təyin olunmasından asılıdır. Bərk cisim mexaniksında belə nöqtə olaraq hərəkət edən koordinat sisteminin başlanğıcını, yəni bərk cismin ətalət mərkəzini seçmək daha əlverişlidir. Gələcəkdə $\vec{M}$ momentini bu formada təyin olunmuş hesab edəcəyik.

(9.6) düsturuna əsasən koordinat başlanğıcını cismin ətalət mərkəzində seçdikdə onun $\vec{M}$ momenti "məxsusi" momentlə üst-üstə düşür. Bu moment yalnız zərraciklərin ətalət mərkəzinə nəzərən hərəkətləri ilə təyin olunur. Başqa sözlə desək $\vec{M}=\sum m[\vec{r}\vec{v}]$ düsturunda $\vec{v}$-nın yerinə $[\vec{\Omega}\vec{r}]$ yazmaq lazımdır.

$$\vec{M}=\sum m\left[\vec{r}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\right]=\sum m\left\{r^2\vec{\Omega}-\vec{r}\left(\vec{r}\vec{\Omega}\right)\right\}$$

və ya tenzor işarələmərində

$$\vec{M}=\sum m\left\{x_l^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k\right\}=\Omega_k\sum m\left\{x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k\right\}$$

Nəhayət ətalət tenzorunun (32.2) düsturunu nəzərə alsaq

$$M_i=I_{ik}\Omega_k \tag{33.1}$$

olduğunu görürük.

Əgər x_1, x_2, x_3 oxları cismin baş ətalət oxları istiqamətində yönəlmiş olarlarsa onda

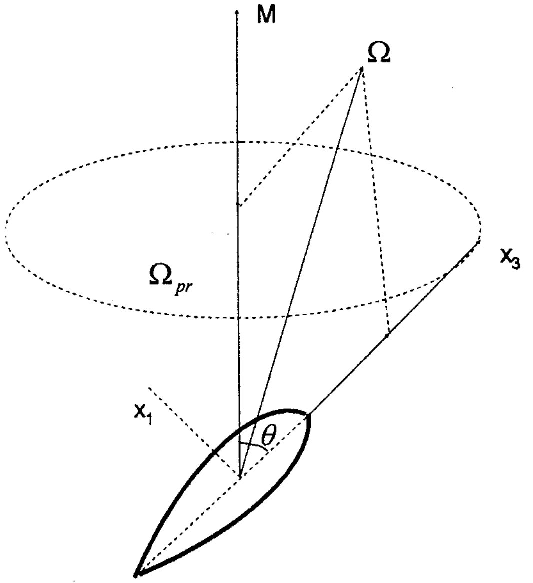
$$M_1=I_1\Omega_1,\quad M_2=I_2\Omega_2,\quad M_3=I_3\Omega_3 \tag{33.2}$$

Xüsusilə, kürəvi fırfıra üçün

$$\vec{M}=I\vec{\Omega} \tag{33.3}$$

yəni moment vektoru bucaq sürəti vektoru ilə mütənasibdir və onunla eyni istiqamətə malik olur.

Ümumi halda ixtiyari cisim üçün $\vec{M}$ vektoru istiqamətcə $\vec{\Omega}$ vektoru ilə üst-üstə düşmür. Yalnız bərk cisim hər hansı baş ətalət oxları ətrafında fırlandıqda $\vec{M}$ və $\vec{\Omega}$ eyni istiqamətdə olurlar.



Şəkil 46

Heç bir xarici qüvvə təsir etməyən cismin sərbəst hərəkətinə baxaq. O qədər də maraq kəsb etməyən bərabər sürətli düzxəttli hərəkətin olmadığını qəbul edək, yəni söhbət bərk cismin sərbəst fırlanmasından gedir.

Sərbəst fırlanan istənilən qapalı sistemi impuls momenti sabitdir. Kürəvi fırfıra üçün $\vec{M} = const$ olması $\vec{\Omega} = const$ deməkdir. Bu isə sərbəst kürəvi fırfıranın ümumi halı sabit ox ətrafında müntəzəm fırlanmadan ibarətdir.

Rotator halı da çox sadədir. Burada da $\vec{M} = I\vec{\Omega}$ olur. Həmdə $\vec{\Omega}$ rotatorun oxuna perpendikulyardır. Ona görə də rotatorun sərbəst fırlanması bir müstəvi üzrə fırlanmadan, həmin müstəviyə perpendikulyar olan istiqamətdə fırlanmadan ibarətdir.

İmpuls momentinin saxlanması qanunu, daha mürəkkəb hərəkəti, simmetrik fırfıranın sərbəst hərəkətini də təyin etmək üçün kifayətdir. Simmetrik fırfıranın x_1, x_2 başəfalət oxlarının (fırfıranın simmetriya oxuna x_3 perpendikulyar) istiqamətlərinin seçilməsinin ixtiyari olmasından istifadə edərək x_2 oxunun istiqamətini sabit $\vec{M}$ vektoru ilə x_3 oxunun ani əmələ gətirdiyi müstəviyə perpendikulyar seçək. Onda $M_2 = 0$ və buna (32.2) düsturuna görə $\Omega_2 = 0$ olur. Bu isə o deməkdir ki, hər an $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$ və fırfıranın oxu eyni bir müstəvi üzərində olurlar (şəkil 46). Buradan isə çıxır ki, fırfıranın oxu üzərində olan bütün nöqtələrin $\vec{v} = [\vec{\Omega}\vec{r}]$ sürətləri hər an göstərilən müstəviyə perpendikulyar olurlar. Başqa sözlə fırfıranın oxu $\vec{M}$ istiqamətinə nəzərən müntəzəm olaraq fırlanır və çevrəvi konus cızır (aşağıya bax). (Buna fırfıranın requlyar (müntəzəm) presesiyası deyilir). Presesiya ilə yanaşı fırfıra öz oxu ətrafında bərabərsürətlə fırlanır. Hər iki fırlanmanın bucaq sürətlərini M-in qiyməti və $\vec{M}$ -istiqamətlə fırfıranın oxu arasında qalan θ bucağı ilə ifadə etmək olar. Fırfıranın öz oxu ətrafında bucaq sürəti Ω_3. $\vec{\Omega}$ vektorunun həmin oxa proyeksiyasından ibarətdir.

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta \qquad (33.4)$$

Presesiya bucaq sürəti Ω_{pr}-ni təyin etmək üçün $\vec{\Omega}$ vektorunu paralleloqram qaydası ilə x_3 oxu və $\vec{M}$ istiqamətində toplananlara ayırmaq lazımdır. Onlardan birincisi fırfıranın oxunun yerini dəyişmir, ona görə də ikinci toplanan axtardığımız presesiya bucaq sürətini verir. Şəkil 46-dan görünür ki, $\sin\theta\Omega_{pr} = \Omega_1$, $\Omega_1 = M_1/I_1 = M\sin\theta/I_1$

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1} \tag{33.5}$$

§ 34 Bərk cismin hərəkət tənlikləri

Bərk cismin sərbəstlik dərəcəsinin sayı 6 olduğundan hərəkət tənliklərinin (asılı olmayan) sayı altı olmalıdır. Həmin tənlikləri impils və impuls momentinin zamana görə törəmələrini təyin edən ifadələr kimi yazmaq olar.

Bu tənliklərdən birincisini sistemi təşğil edən zərrəciklərin hər biri üçün yazılmış $\dot{\vec{P}} = \vec{f}$ tənliyinin bütün zərrəciklər üzrə toplamaqla almaq olur. Burada $\vec{P}$ zərrəciyin impuls $\vec{f}$ isə təsir edən qüvvədir. Cismin

$$\vec{P} = \sum \vec{P} = \mu\vec{V}$$

– tam impulsunu və təsir edən qüvvəni $\vec{F} = \sum f$ daxil edərək alırıq ki,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{34.1}$$

qüvvəsini hər bir zərrəciyə təsir edən qüvvələrin, o cümlədən cismin başqa zərrəcikləri tərəfindən təsir edən qüvvələrin cəmi kimi təyin etdik. Lakin faktiki $\vec{F}$ qüvvəsinə yalnız zərrəciyə daxil olur. Cismin zərrəciklərinin qarşılıqlı təsiri qarşılıqlı olaraq ixtisar olunurlar. Doğrudanda xarici qüvvə olmadıqda sistemin impuls saxlanır. Deməli $\vec{F} = 0$ olmalıdır.

Əgər U cismin xarici sahədəki potensial enerjisidirsə, onda $\vec{F}$ qüvvəsi U-nu ətalət mərkəzi koordinatına görə törəməsi kimi təyin edilə bilər

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} \tag{34.2}$$

Doğrudan da cismin düzxəttli $\delta\vec{R}$ yerdəyişməsi zamanı bütün zərrəcikləri $\vec{r}$ radius-vektorları eyni qədər dəyişir və potensial enerjinin dəyişməsini

$$\delta U = \sum \frac{\partial v}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} = \delta\vec{R}\sum\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\delta\vec{R}\sum\vec{f} = -\vec{F}\delta\vec{R}$$

şəklində yaza bilərik.

Bununla əlaqədar qeyd edək ki, (34.1) tənliyini ətalət mərkəzinin koordinatlarına nəzərən yazılmış

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

Laqranj tənliyi kimi də (32.4) Laqranj funksiyasından almaq olar.

İmpuls momentinin $\vec{M}$ zamana görə törəməsi kimi təyin olunan ikinci tənliklərin alınmasını keçək. Çıxarılışın sadəliyi üçün "tərpənməz" (ətalət) koordinat sistemi seçmək daha əlverişlidir. Bu hesablama sistemində baxdığımız onda ətalət mərkəzinin sükunətdə olur. Bu cür alınan tənlik Qalileyin nisbilik prinsipinə görə istənilən inersial hesablama sistemində doğru olacaq.

Alırıq ki,

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt}\sum\left[\vec{r}\vec{P}\right] = \sum\left[\dot{\vec{r}}\vec{P}\right] + \sum\left[\vec{r}\dot{\vec{P}}\right]$$

Hesablama sistemini yuxarıda deyildiyi kimi seçdiyimizə görə $(\vec{V}=0)$. $\dot{\vec{r}}$-nın baxdığımız andakı qiyməti $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$ sürətlə üst-üstə düşür. $\vec{v}$ və $\vec{P}=m\vec{v}$ vektorları eyni istiqadətdə olduqlarından $\left[\dot{\vec{r}}\vec{P}\right]=0$ olur.

Burada $\dot{\vec{P}}$-nı $\vec{f}$-lə ifadə edib, nəhayət alırıq ki,

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K} \tag{34.3}$$

Burada

$$\vec{K} = \sum\left[\vec{r}\vec{f}\right] \tag{34.4}$$

$\left[\vec{r}\vec{f}\right]$ qüvvə momenti adlanır. Yəni $\vec{K}$ cismə təsir edən bütün qüvvələrin momentidir. $\vec{F}$ qüvvəsində olduğu kimi (34.4) düsturunda da faktiki olaraq yalnız xarici qüvvələr nəzərə alınmalıdır. İmpuls momentinin saxlanması qanununa uyğun olaraq qapalı sistemin daxili qüvvələrin momentləri cəmi sıfıra bərabər olur.

Impuls momenti kimi qüvvə momentində, ümumiyyətlə, koordinat başlangıcının seçilməsindən asılı olur. (34.3) və (34.4) ifadələrində momentlər cismin ətalət mərkəzinə nəzərən təyin olunmuşlar.

Koordinat başlanğıcının $\vec{a}$ məsafəsi qədər köçürdük də yeni $\vec{r}'$ radius vektorları köhnə $\vec{r}$ radius-vektorlarla $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{a}$ düsturu ilə əlaqəlidirlər. Ona görə

$$\vec{K} = \sum\left[\vec{r}\vec{f}\right] = \sum\left[\vec{r}'\vec{f}\right] + \sum\left[\vec{a}\vec{f}\right]$$

və ya

$$\vec{K} = \vec{K}' + \left[\vec{a}\vec{F}\right] \tag{34.5}$$

Buradan görünür ki, tam qüvvə $\vec{F}=0$ olduqda momentin qiyməti koordinat başlanğıcının seçilməsindən asılı olmur (Bu halda deyirlər ki, cismə cüt qüvvə tətbiq olunub).

(34.3) tənliyinə "fırlanma koordinat"larına nəzərən yazılmış

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial\vec{\varphi}}$$

Laqranj tənliyi kimi baxa bilərik. Doğrudan da (32.4) Laqranj funksiyasını $\vec{\Omega}$ vektorunun komponentlərinə görə diferensiallasaq alırıq ki,

$$\frac{\partial L}{\partial\Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i$$

Cismi hər hansı sonsuz kiçik $\delta\varphi$ bucağı qədər döndərdikdə potensial enerjinin δU dəyişməsi isə bərabərdir.

$$\delta U = -\sum \vec{f}\delta\vec{r} = -\sum \vec{f}\left[\delta\vec{\varphi}\vec{r}\right] = -\delta\varphi\sum\left[\vec{r}\vec{f}\right] = -\vec{K}\delta\vec{\varphi}$$

Buradan isə

$$\vec{K} = -\frac{\partial U}{\partial\vec{\varphi}} \qquad (34.6)$$

Yəni

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial\vec{\varphi}} = \vec{K}$$

Tutaq ki, $\vec{K}$ və $\vec{F}$ vektorları bir-birinə perpendikulyardır. Bu halda elə bir $\vec{a}$ vektoru tapmaq olar ki, (34.5) düsturunda $\vec{K}' = 0$ olsun. Onda

$$\vec{K} = \left[\vec{a}\vec{F}\right] \qquad (34.7)$$

olacaq. Bu halda $\vec{a}$ vektorunun seçimi birqiymətli deyil: ona $\vec{F}$ vektoruna parallel olan ixtiyari vektoru əlavə etdikdə (34.7) ifadəsi dəyişmir. Bu isə o demekdir ki, $\vec{K}' = 0$ şərti hərəkət edən koordinat sistemində bir nöqtəni deyil bir xətti təyin edir. Buna misal bircins sahəsi misal göstərmək olar. Bu sahədə maddi nöqtəyə təsir edən qüvvə $\vec{f} = e\vec{E}$ şəklində olur. Burada $\vec{E}$ sahəni xarakterizə edən sabit vektor, e isə zərrəciyin verilmiş sahəyə nəzərən xassəsini göstərən kəmiyyətdir[4]. Bu halda alırıq ki,

$$\vec{F} = \vec{E}\sum e, \qquad \vec{K} = \left[\sum e\vec{r}\vec{E}\right]$$

$\sum e \neq 0$ qəbul edərək

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum e\vec{r}}{\sum e} \qquad (34.8)$$

vektorunu təyin edək. Onda tam moment üçün

$$\vec{K} = \left[\vec{r}_0\vec{F}\right] \qquad (34.9)$$

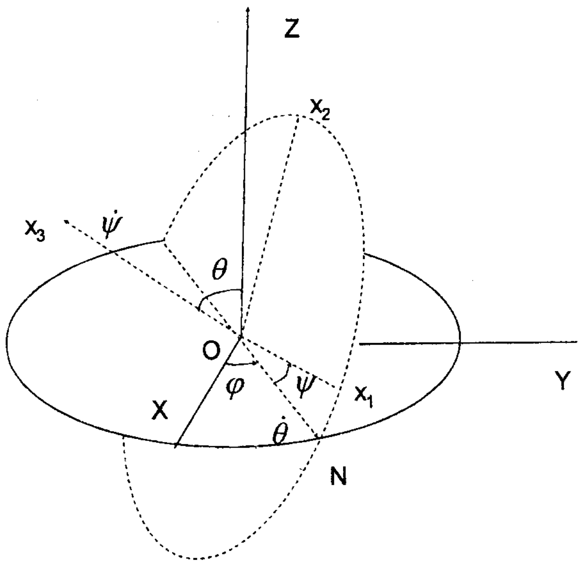
düsturunu alırıq. Beləliklə, cisim bircins sahədə hərəkət etdikdə sahənin təsiri "radius vektoru" (34.8) olan nöqtəyə tətbiq olunmuş, $\vec{F}$ qüvvəsinin təsirinə gətirilir. Həmin nöqtənin vəziyyəti bütünlükdə cismin xassəsinsən asılı olur. Məsələ, ağırlıq sahəsində həmin nöqtə cismin ətalət mərkəzi ilə üst-üstə düşür.

---

[4] Məsələ, bircins elektrik sahəsində $\vec{E}$ sahənin intensivliyi, e isə zərrəciyin yüküdür. Bircins ağırlıq sahəsində $\vec{E}$ ağırlıq qüvvəsinin təcili $\vec{g}$, e isə zərrəciyin kütləsidir.

§ 35 Eyler bucaqları

Artıq qeyd etdiyimiz kimi bərk cismin hərəkətini təsvir etmək üçün onun ətalət mərkəzinin üç koordinatlarından və hərəkət edən koordinat sistemi x_1, x_2, x_3 oxlarının, tərpənməz koordinat sistemi X, Y, Z oxlarına nəzərən istiqamətlərini təyin edən üç dənə ixtiyari bucaqlardan istifadə etmək olur. Belə bucaqlar alaraq, çox halda sərfəli olan Eyler bucaqları deyilən bucaqlardan istifadə edirlər.



Şəkil 47

İndi biri yalnız koordinat oxları arasında qalan bucaqlar maraqlandırdığına görə hər iki koordinat sisteminin başlanğıcını eyni nöqtədə götürək (şəkil 47).

Hərəkət edən $x_1 x_2$ müstəvisi tərpənməz XY müstəvisini bir xətt üzrə kəsir (şəkil 47-də ON xətti). Bu xətt düyət ün xətti adlanır. Aydındır ki, bu xətt həm Z oxuna həm də x_3 oxuna perpendikulyardır. Onun müsbət istiqamətini elə seçək ki, o $[\bar{z}\bar{x}_3]$ vektoru hasilin istiqaməti ilə üst-üstə düşür ($\bar{z}, \bar{x}_3$ vahid vektorları z və x_3 oxları üzrə yönəlmişdir). x_1, x_2, x_3 oxlarının X,Y,Z oxlarına nəzəriyətini təyin etmək üçün aşağıdakı bucaqları seçək. z və x_3 oxları arasındakı θ bucağı, X və N oxları arasındakı φ bucağı, N xətti ilə x_1 oxu arasındakı ψ bucağı. φ və ψ bucaqları vint qaydası ilə təyin olunur və z və x_3 oxları ətrafında fırlanmanı verir. θ bucağı 0-dan π-yə kimi, φ və ψ bucaqları 0-dan 2π-yə kimi dəyişirlər[5].

İndi isə $\bar{\Omega}$ bucaq sürəti vektorunun x_1, x_2, x_3 oxları üzrə komponentlərini Eyler bucaqları və onların zamana görə törəmələri ilə ifadə edək. Bunun üçün $\dot{\bar{\theta}}, \dot{\bar{\varphi}}, \dot{\bar{\psi}}$ bucaq sürətlərini həmin oxlar üzrə proyeksiyalayaq. $\dot{\bar{\theta}}$ bucaq sürət ON düyün xətti boyunca yönəlmişdir. Ona görə onun x_1, x_2, x_3 oxları üzrə proyeksiyaları $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$, $\dot{\theta}_3 = 0$ olacaqlar. $\dot{\bar{\varphi}}$ bucaq sürəti z oxu üzrə yönəlmişdir. Ona görə onun x_3 oxu üzrə proyeksiyası $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$ və $x_1 x_2$ müstəvisinə proyeksiyası isə $\dot{\varphi}\sin\theta$ olur. Axırıncı $x_1 x_2$ oxları üzrə proyeksiyalasaq alırıq ki,

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

---

[5] θ və $\varphi - \pi/2$ bucaqları x_3 oxunun X,Y,Z oxlarına nəzərən polyar azimut bucaqlarıdırlar. Eyni zamanda θ və $\pi/2 - \psi$ bucaqları isə uyğun olaraq z oxunun x_1, x_2, x_3 oxlarına nəzərən polyar və azimut bucaqlarıdırlar.

Nəhayət $\dot{\psi}$ sürəti x_3 oxu üzrə yönəlmişdir. Hər bir ox üzrə proyeksiyaları bir yerə yığsaq yekun olaraq alırıq ki,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \qquad (35.1)$$

Əgər x_1, x_2, x_3 oxları bərk cismin baş ətalət oxları üzrə yönəlmişlərsə, onda bərk cismin fırlanma kinetik enerjisinin Eyler bucaqlarından asılılığını tapmaq üçün (35.1) düsturunu (32.8)-də yerinə yazmaq lazımdır. Simmetrik fırfıra üçün ($I_1 = I_2 \neq I_3$) alırıq ki,

$$T_{fr} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \qquad (35.2)$$

Qeyd edək ki, həmin ifadəni daha sadə yolla, x_1x_2 oxlarının istiqamətini simmetrik fırfıra üçün ixtiyariliyindən istifadə edərək almaq olar. Hesab etsək ki, x_1 oxu ON xətti ilə üst-üstə düşür onda $\psi = 0$ olur və alırıq ki,

$$\Omega_1 = \dot{\theta}, \qquad \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \qquad (35.3)$$

Eyler bucaqlarının tıtbiqinin nümunəsi kimi onların vasitəsilə artıq bizə məlum olan sərbəst simmetrik fırfıranın hərəkətini təyin edək.

Tərpənməz koordinat sisteminin Z oxunu fırfıranın sabit $\vec{M}$ momenti istiqamətində seçək. Tərpənən koordinat sisteminin x_3 oxu baxdığımız halda düz xətti ilə üst-üstə düşür. Onda (35.3) düsturununköməyi ilə $\vec{M}$ vektorunun komponentləri üçün alırıq ki,

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot{\theta}, \qquad M_2 = I_1\Omega_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta, \qquad M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

Digər tərəfdən x_1 oxu (düyün xətti) Z oxu perpendikulyar olduğundan alırıq ki,

$$M_1 = 0, \qquad M_2 = M\sin\theta, \qquad M_3 = M\cos\theta$$

Bu ifadələri bir-birinə bərabərləşdirərək aşağıdakı tənlikləri alırıq

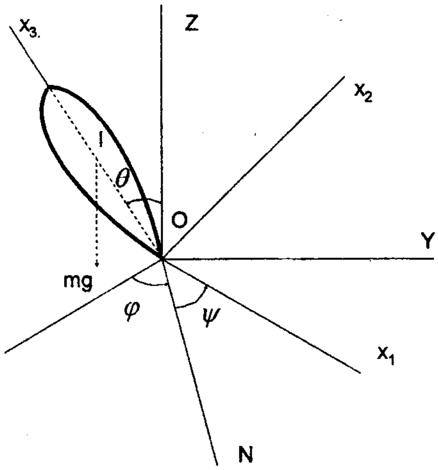
$$\dot{\theta} = 0, \quad I_1\dot{\varphi} = M, \quad I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta \qquad (35.4)$$

Bu tənliklərin birincisindən alırıq ki, $\theta = const$, yəni fırfıranın oxunun $\vec{M}$ istiqamətinə meyl sabit qalır. İkinci tənlik presesiya bucaq sürətini ((33.5) tənliyinə uyğun olaraq) $\dot{\varphi} = \mu/I_A$. Nəhayət üçüncü tənlik fırfıranın öz oxu ətrafında fırlanma bucaq sürətini təyin edir.

$$\Omega_3 = \frac{m\cos\theta}{I_3}$$

Məsələlər.

1.Aşağı nöqtəsi tərpənməyən ağır simmetrik fırfıra məsələsini kvadraturaya gətirin (şəkil 48).



Şəkil 48

Həlli: Tərpənən və tərpənməz koordinat sistemlərinin hər ikisinin başlanğıcını tərpənməyən nöqtədə z oxu isə şaquli istiqamətdə seçək (şəkil 48). Ağırlıq sahəsində fırfıranın Laqranj funksiyası

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - \mu g l\cos\theta$$

(μ-fırfıranın kütləsi, l isə ən aşağı nöqtədən ətalət mərkəzinə qədər olan məsafədir). φ və ψ koordinatları dövrü dövrüdürlər. Ona görə

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) = const \equiv M_3 \tag{1}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \left(I_1'\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = const \equiv M_z \tag{2}$$

hərəkət inteqrallarını alırıq (burada $I_1' = I_1 + \mu l^2$ işarələnməsi qəbul edilmişdir. P_ψ və P_φ kəmiyyətləri O nöqtəsinə nəzərən təyin olunmuş fırlanma momentinin uyğun olaraq x_3 və Z oxları üzrə komponentləridir). Bundan əlavə enerji də saxlanılır

$$E = \frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + \mu g l\cos\theta \tag{3}$$

(1) və iki tənliklərindən alırıq ki,

$$\dot\varphi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta} \tag{4}$$

$$\dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta\frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta} \tag{5}$$

Bu bərabərliklər vasitəsilə $\dot\varphi$ və $\dot\psi$ dəyişənlərini (3) enerji düsturundan xaric etsək alırıq ki,

$$E' = \frac{I_1'}{2}\dot\theta^2 + U_{ef}(\theta)$$

Burada

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l, \quad U_{ef}(\theta) = \frac{\left(M_z - M_3\cos\theta\right)^2}{2I_1'\sin^2\theta} - \mu g l\left(1 - \cos\theta\right) \tag{6}$$

işarələmələri qəbul olunmuşdur.

$\dot{\theta}$-ni buradan təyin edib, dəyişmələrə ayıraraq, alırıq ki,

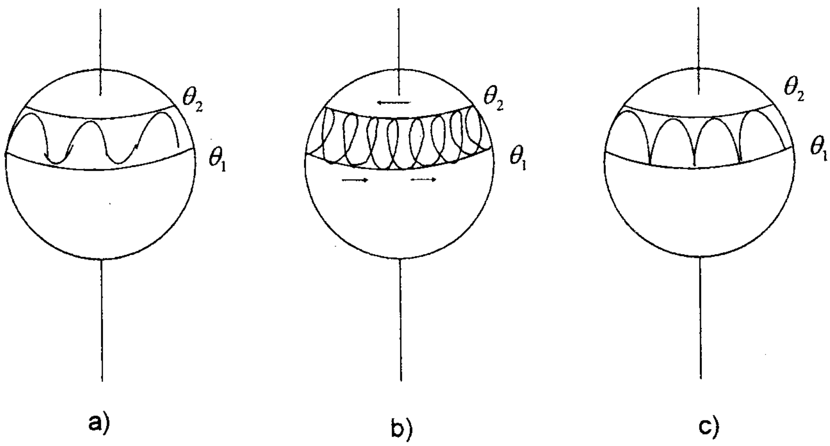
$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}(E' - U_{ef}(\theta))}} \qquad (7)$$

(inteqral-elliptikdir). Bundan sonra φ və ψ bucaqları θ-bucağının funksiyaları kimi (4) və (5) düsturlarından kvadratura şəklində təyin olunurlar.

Hərəkət zamanı θ bucağının dəyişmə oblastı $E' \geq U_{ef}(\theta)$ şərtindən təyin olunur. $U_{ef}(\theta)$ funksiyası ($M_3 \neq M_z$ olduqda). $\theta = 0$ və $\theta = \pi$ qiymətlərində $+\infty$-a yaxınlaşır, həmin qiymətlər arasında isə minimumda keçir. Ona görə də $E' = U_{ef}(\theta)$ tənliyi iki kökə malikdir. Həmin köklər fırfıranın oxunun şaquli istiqamətdən meylini təmin edən θ_1 və θ_2 bucaqlarını verir. θ bucağının θ_1-dən θ-yə qədər dəyişdiyi zaman $\dot{\varphi}$-nın işarəsi $M_z - M_3 \cos\theta$ fərqinin işarəsinin dəyişib dəyişməməsindən asılı olaraq, ya dəyişir yada dəyişmir.

Birinici halda fırfıranın oxu rəqs edərək (nutasiya deyirlər) monoton şəkildə şaquli istiqamət ətrafında presesiya edir (şəkil 49,a, buradakı xətt fırfıra oxunun sfera üzərində çəkə biləcəyi xətti göstərir). İkinci halda presesiyanın istiqaməti sərhəd çevrələrində bir-birinin əksinədir. Bu zaman fırfıra şaquli istiqamət ətrafında həlqə cızaraq yerini dəyişir (şəkil 49,b). Nəhayət, əgər θ_1 və θ_2 qiymətlərindən biri $M_z - M_3 \cos\theta$ fərqinin sıfırı ilə üst-üstə düşərsə, onda $\dot{\varphi}$ və $\dot{\psi}$ eyni zamanda sıfır olurlar və fırfıranın oxu əyri cızır (şəkil 49, c).

2. Fırfıranın şaquli ox ətrafında fırlanmasının dayanıqlı olma şərtini tapın.



Şəkil 49

Həlli: $\theta = 0$ olduqda x_3 və Z oxları üst-üstə düşür. Bu zaman $M_z = M_3$, $E' = 0$ olur. Bu ox ətrafında fırlanma $\theta = 0$ qiymət $U_{ef}(\theta)$ funksiyasının minimum nöqtəsi olduğu halda dayanıqlı olacaq. θ-nın kiçik qiymətlərində

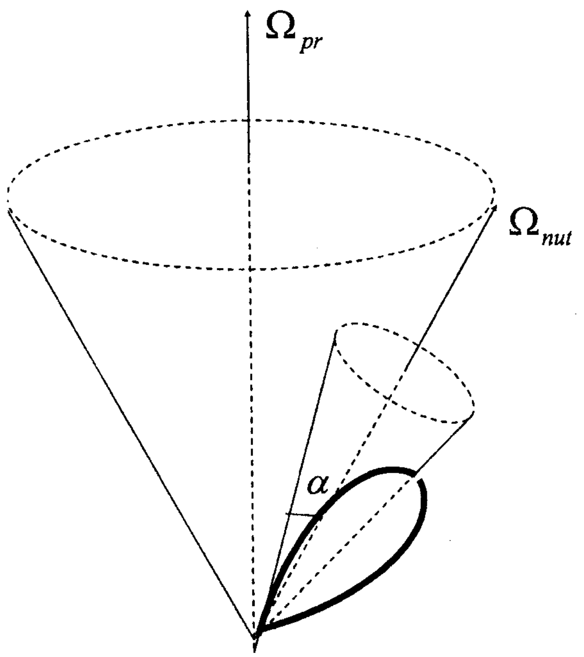
$$U_{eff} \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2} \right) \theta^2$$

olur və buradan da $M_3^2 > 4I_1'\mu gl$ və ya

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1'\mu gl}{I_3^2}$$

şərtini alırıq.

3. Fırfıranın məxsusi fırlanma kinetik enerjisi, ağırlıq qüvvəsi sahəsindəki enerjidən böyük olduğu halda ("sürətli" fırfıra) hərəkətini təyin edin.



Şəkil 50

Həlli: Birinci yaxınlaşmada, ağırlıq sahəsini nəzərə almasaq fırfıranın oxunun $\vec{M}$ vektoru ətrafında requlyar (sərbəst) presesiyalı baş verir (baxdığımız halda fırfıranın nutasiyasına səbəb olur). (33.5) düsturuna uyğun olaraq

$$\vec{\Omega}_{nut} = \frac{\vec{M}}{I_1'} \tag{1}$$

bucaq sürətilə baş verir.

Növbəti yaxınlaşmada $\vec{M}$ momentinin şaquli istiqamət ətrafında yavaş presesiyası başlayır (şəkil 50). Həmin presesiyanın bucaq sürətini təyin etmək üçün (34.3) hərəkət tənliyini

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$$

nutasiya perioduna görə ortalayaq. Fırfıraya təsir edən ağırlıq qüvvəsi momenti $\vec{K} = \mu l[\vec{n}_3\vec{g}]$ ($\vec{n}_3$ firfıranın oxu üzrə vahid vektorudur). Simmetriya mülahizələrindən aydındır ki, $\vec{K}$-nın nutasiya konusu üzrə ortası $\vec{n}_3$ vektorunu onun $\vec{M}$ üzrə proyeksiyası $\cos\alpha\frac{\vec{M}}{M}$ ilə əvəz olunmasına gətirir (α-bucağı $\vec{M}$ lə fırfıranın) oxu arasındakı bucaqdır.

Beləliklə alırıq ki,

$$\overline{\frac{d\vec{M}}{dt}} = -\cos\alpha\frac{\mu l}{M}\left[\vec{g}\vec{M}\right]$$

Bu göstərir ki, $\vec{M}$ vektoru $\vec{g}$ (şaquli) istiqaməti ətrafında

$$\overline{\vec{\Omega}_{pr}} = -\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\vec{g}$$

sürətilə presesiya edir (bu Ω_{nut} sürətinə nisbətən kiçikdir).

Baxdığımız yaxınlaşmada (1) və (2) düsturlarına daxil olan $\vec{M}$ və α kəmiyyətləri sabitdirlər (hərəkət sabitləri oladıqlarına baxmayaraq). Həmin dəqiqliklə onları dəqiq saxlanılan E və M_3 kəmiyyətləri ilə

$$M_3 = M\cos\alpha$$

$$E \approx \frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3} + \frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right)$$

münasibətlərilə əlaqəlidirlər.

§ 36 Eyler tənlikləri

§ 34-də yazılmış hərəkət tənlikləri tərpənməz koordinat sisteminə aiddir: (34.1) və (34.3) tənliklərində $\frac{d\vec{P}}{dt}$ və $\frac{d\vec{M}}{dt}$ törəmələri $\vec{P}$ və $\vec{M}$ vektorlarının həmin sistemə nəzərən dəyişmələridir. Bununla bərabər, bərk cismin fırlanma momenti $\vec{M}$-lə bucaq sürəti komponentləri arasında əlaqə hərəkət edən koordinat sistemində koordinat oxları baş ətalət oxları istiqamətində yönəldiyi halda ən sadə şəkil alır. Bu əlaqədən istifadə etmək üçün hərəkət tənliklərini əvvəlcə hərəkət edən sistemin x_1, x_2, x_3 koordinatlarına nəzərən yazmaq lazımdır.

Tutaq ki, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ hər hansı $\vec{A}$ vektorunun tərpənməz koordinat sisteminə görə dəyişməsidir. Əgər $\vec{A}$ vektoru fırlanan koordinat sisteminə nəzərən dəyişmirsə, onda onun tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən dəyişməsi

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right]$$

olacaq (bax § 9-a, orada göstərilmişdir ki, (91) və (92) ifadələri ixtiyari vektor üçün doğrudur). Ümumi halda bu bərabərliyin sağ tərəfinə $\vec{A}$ vektorunun hərəkət edən koordinat sisteminə nəzərən dəyişməsini əlavə etmək lazımdır. Həmin sürəti $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ ilə işarə etsək alırıq ki,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] \tag{36.1}$$

Bu ümumi düsturun köməyilə (34.1) və (34.3) tənliklərini birbaşa

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{P}\right] = \vec{F}, \qquad \frac{d'\vec{M}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = \vec{K} \tag{36.2}$$

şəklində yaza bilərik. Zamana görə diferensiallama burada hərəkət edən sistemində aparıldığından

$$\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ldots, \qquad \left(\frac{d'\vec{M}}{dt}\right)_1 = \frac{dM_1}{dt}, \ldots,$$

şəklində yazmaqla hərəkət tənliklərini hərəkət edən koordinat sistemində yaza bilərik. Burada 1,2,3 indeksləri x_1, x_2, x_3 oxları üzrə komponentləri göstərirlər. Bu zaman $\vec{P}$-ni $\mu\vec{V}$ ilə işarə edərək alırıq

$$\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2 V_3-\Omega_3 V_2\right)=F_1$$
$$\mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3 V_1-\Omega_1 V_3\right)=F_2 \qquad (36.3)$$
$$\mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1 V_2-\Omega_2 V_1\right)=F_3$$

x_1, x_2, x_3 oxlarının istiqamətini baş ətalət oxları istiqamətində seçilmiş hesab etsək, (36.2) tənliklərinin ikincisində $M_1 = I_1\Omega_1$ və s. yazıb alırıq ki,

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=K_1$$
$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=K_2 \qquad (36.5)$$
$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=K_3$$

(36.4) tənlikləri Eyler tənlikləri adlanır. Sərbəst fırlanma halında $\vec{K}=0$ olur və Eyler tənlikləri

$$\frac{d\Omega_1}{dt}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3=0$$
$$\frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1=0 \qquad (36.5)$$
$$\frac{d\Omega_3}{dt}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2=0$$

şəklini alırlar.

Misal olaraq, həmin tənlikləri əvvəldə baxdığımız simmetrik fırfıranın sərbəst fırlanmasına tətbiq edək. Üçüncü tənlikdə $I_1 = I_2$ olduğundan alırıq ki, $\dot{\Omega}_3 = 0$ və ya $\Omega_3 = const$. Bundan sonra birinci iki tənlikləri

$$\dot{\Omega}_1=-\omega\Omega_2, \qquad \dot{\Omega}_2=\omega\Omega_1$$

şəklində yaza bilərik. Burada

$$w=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1} \qquad (36.6)$$

işarələməsi edilmişdir. İkinci tənliyi i-yə vurub birinci ilə toplasaq

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1+i\Omega_2)=iw(\Omega_1+i\Omega_2)$$

tənliyini alırıq. Buradan isə

$$\Omega_1+i\Omega_2=Ae^{iwt}$$

alınır (burada A sabitdir). Onu həqiqi hesab etmək olar (bu zamanın başlanğıcının seçilməsində əldə olunur). Onda yaza bilərik ki,

$$\Omega_1 = A\cos wt, \qquad \Omega_2 = A\sin wt \tag{36.7}$$

Bu nəticə göstərir ki, bucaq sürətinin fırfıranın oxuna perpendikulyar olan müstəviyə proyeksiyası həmin müstəvi üzrə w bucaq sürətilə fırlanır (bu zaman onun qiyməti $\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=A$ dəyişmiş). Bucaq sürətini fırfıranın onu üzrə Ω_3 proyeksiyasında sabit olduğundan $\vec{\Omega}$ bucaq sürəti vektorunun fırfıranın oxu ətrafında sabit ∞ bucaq sürətilə fırlandığı nəticəsində gəlirik. $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$ olduğundan (fırfıranın oxuna nəzərən) $\vec{M}$ vektorunun da eyni hərəkət etdiyini görürük.

Aydındır ki, alınan bu vəziyyət fırfıranın §§33,35-ci baxdığımız, tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən etdiyi eyni hərəkətin başqa aspektidir. Xüsusi halda $\vec{M}$ vektorunun (şəkil 48-də Z oxu) x_3 oxu ətrafında fırlanmasının bucaq sürəti, Eyler bucaqları dilində, $\dot{\psi}$ bucaq sürətilə üst-üstə düşür. (35.4) tənliyinin köməyilə alırıq ki,

$$\dot{\psi} = \frac{M\cos\theta}{I_3} - \dot{\varphi}\cos\theta = M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)$$

və ya

$$-\dot{\psi} = \Omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

Bu da (36.6) düsturu ilə uyğundur.

§ 37 Asimmetrik fırfıra

Eyler tənlikləri daha mürəkkəb məsələyə, üç ətalət momentinin üçüdə fərqli olan asimmetrik fırfıranın sərbəst hərəkəti məsələsinə tətbiq edək. Aydınlıq üçün

$$I_3 > I_2 > I_1 \tag{37.1}$$

olduğunu qəbul edək.

Eyler rənliklərinin iki inteqralı əvvəlcədən məlumdur. Onlar enerjinin və impuls momentinin saxlanması qanunları vasitəsilə verilirlər və

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E$$
$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = M^2 \tag{37.2}$$

şəklində yazılırlar. Burada E və M momentinin ədədi qiyməti verilmiş sabitlərdir. Bu bərabərliklər $\vec{M}$ vektorunun komponentlərilə ifadə olunduqda

$$\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3} = 2E \tag{37.3}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \qquad (37.4)$$

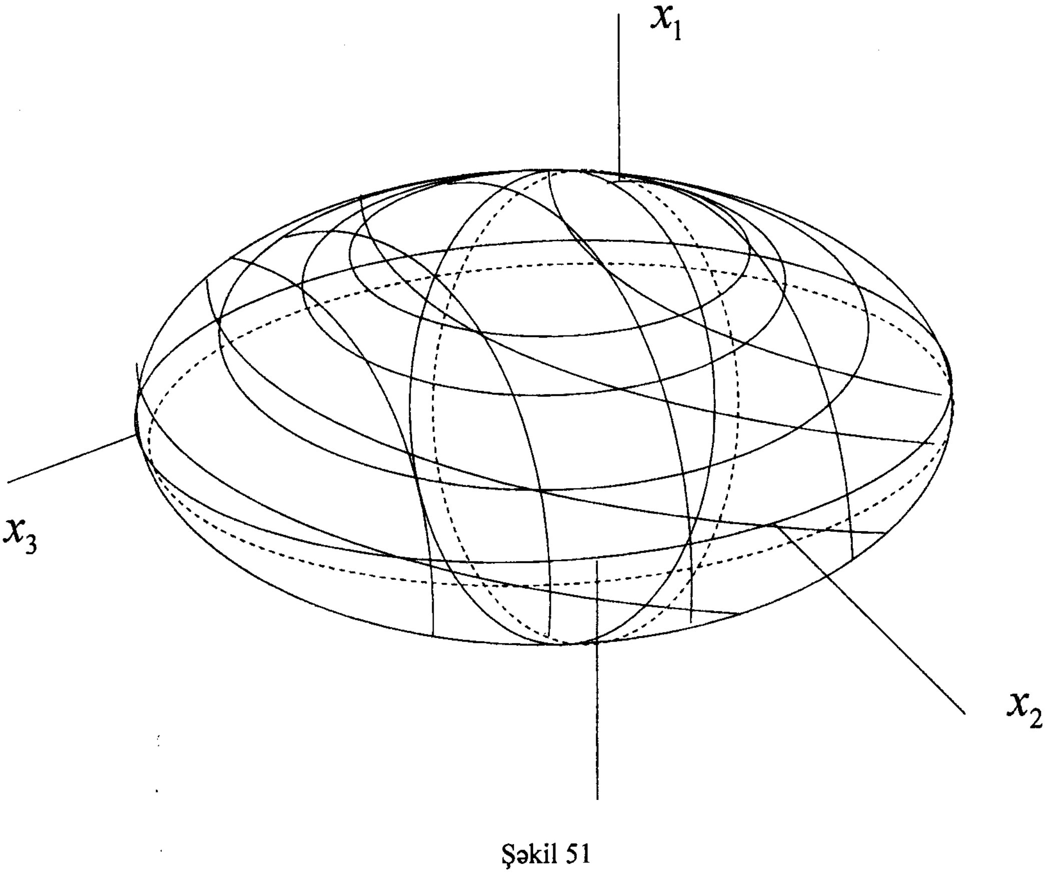
şəklində olurlar.

Artıq bu ifadələrdən fırfıranın hərəkətinin xarakteri barədə bəzi nəticələrə gəlmək olur. Bunun üçün (37.3) və (37.4) tənliklərinin həndəsi olaraq M_1, M_2, M_3 oxlarında $\sqrt{2EI_1}, \sqrt{2EI_2}, \sqrt{2EI_3}$ yarımoxlu ellipsoidin səthi tənlikləri və M radiuslu sferanın tənlikləridir. $\vec{M}$ vektoru fırfıranın ətalət oxlarına nəzərən yerini dəyişdikcə onun ucu həmin səthlərin kəsişdiyi xəttlər üzrə hərəkət edir (şəkil 51-də ellipsin səthinin müxtəlif radiuslu sferalarla kəsişmə xəttləri göstərilmişdir).

Kəsişmə xəttlərinin olması

$$2EI_1 < M^2 < 2EI_3 \qquad (37.5)$$

şərtindən görünür. $\vec{M}$ vektorunun üçünün[1] "trayektoriyasının" xarakterinin



Şəkil 51

dəyişməsini M-in qiymətinin dəyişməsini izləyək (E enerjinin verilmiş qiymətində) M^2 $2EI_1$-dən azca çox olduqda sfera ellipsoidi ellipsin iki qütblərinə yaxın olan, x_1 oxunu mühazirə edən, iki qapalı xətt üzrə kəsir ($M^2 \to 2EI_1$ olduqda

[1] $\vec{\Omega}$ vektorunun üçünün cızdığı analoji əyri polodiya adlanır.

bu əyrilər nöqtəyə yığılırlar). M^2 artdıqca əyrilər genişlənirlər və $M^2 = 2EI_2$ olduqda iki müstəvi əyriyə (ellipslərə) çevrilirlər. Həmin ellipslər ellipsoidin x_2 oxu üzərində olan qütbündə bir-birilə kəsişirlər. M^2-nın daha da artması zamanı yenə də iki dənə qapalı əyri alınır. Bu əyrilər indi x_3 qütbünü mühasirəyə alır: $M^2 - 2EI_3$ olduqda onlar nöqtəyə dönürlər.

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, trayektoriyaların qapalı olması $\vec{M}$ vektorunun fırfıranın cismə nəzərən yerdəyişməsinin periodik olmasını göstərir. Bir period müddətində $\vec{M}$ vektoru bir konusvarı səth cızır və öz əvvəlki vəziyyətinə qayıdır.

Daha sonra, ellipsin müxtəlif polyuslarına yaxın olan trayektoriyaların mühüm fərqli xarakterlərini qeyd edək. x_1 və x_3 oxları yaxınlığında trayektoriyalar bütünlükdə polyuslar ətrafında olurlar. x_2 oxu üzərində olan polyuslar yaxınlığında keçən trayektoriyalar isə sonrakı hərəkətləri zamanı həmin nöqtələrdən kifayət qədər uzaqlaşırlar. Bu fərq, fırfıranın müxtəlif ətalət oxları ətarfında fırlanmasını müxtəlif xarakterli dayanıqlığa malik olmasına uyğun gəlir. Ətalət momentlərinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərinə uyğun olan x_1 və x_2 oxları ətrafında baş verən fırlanmalar dayanıqlıdırlar. Yəni kiçik meyletmə zamanı fırfıra yenə əvvəlki trayektoriyaya yaxın olan trayektoriya üzrə hərəkət edəcəkdir. x_2 oxu ətrafında fırlanma isə dayanıqsızdır, kiçik meyletmə kifayətdir ki, fırfıranı əvvəlki vəziyyətindən uzaq vəziyyətə gətirsin.

$\vec{\Omega}$-nın komponentlərinin (və ya ona mütənasib olan $\vec{M}$-in) zamandan asılılığını tapmaq üçün (36.5) Eyler tənliyinə müraciət edək. (37.2) və (37.3) tənliklərindən Ω_2-ni Ω_1 və Ω_3-ün funksiyası kimi tapaq

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{I_1(I_3 - I_1)}\left\{(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2\right\}$$

$$\Omega_3^2 = \frac{1}{I_3(I_3 - I_1)}\left\{(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2\right\} \tag{37.6}$$

və bunu (36.5) tənliklərinin ikincisində yerinə yazsaq alırıq ki,

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3 = \frac{1}{I_2\sqrt{I_1 I_3}}\left\{\left[(2EI_3 - M^2) - I_2(I_3 - I_2)\Omega_2^2\right]\left[(M^2 - 2EI_1) - I_2(I_2 - I_1)\Omega_2^2\right]\right\}^{1/2} \tag{37.7}$$

Bu tənlikdə dəyişənləri ayırıb inteqrallasaq $t(\Omega_2)$ asılılığın elliptik inteqral şəklində alarıq. Həmin inteqralı çevirərkən, aydınlıq üçün

$$M^2 > 2EI_2$$

götürək (əks halda aşağıda alınan ifadələrin hamısında 1 və 3 indekslərinin yerini dəyişmək lazımdır). t və Ω_2 dəyişənlərinin yerinə yeni

$$\tau = t\sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad s = \Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{2EI_3 - M^2}} \tag{37.8}$$

dəyişənlərini və müsbət $k^2 < 1$ parametrini

$$k^2 = \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - M^2)}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)} \tag{37.9}$$

parametrini daxil edək. Onda alırıq ki,

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}$$

(zamanın başlanğıcını $\Omega_2 = 0$ olan haldan seçirik). Məlum olduğu kimi həmin inteqralı çevirəndə Yakobinin elliptik inteqrallarından biri alınır.

$$a = sn\tau$$

bununlada Ω_2-nin zamandan asılılığı təyin olunur. $\Omega_1(t)$ və $\Omega_3(t)$ funksiyaları $\Omega_2(t)$-dən (37.6) düsturu vasitəsi ilə ifadə olunur. Qalan başqa iki elliptik funksiyalarının təyinindən

$$cn\tau = \sqrt{1 - sn^2\tau}, \qquad dn\tau = \sqrt{1 - k^2 sn^2\tau}$$

istifadə edərək nəhayət aşağıdakı düsturları alırıq

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}}\, cn\tau$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}}\, sn\tau \tag{37.10}$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}}\, dn\tau$$

(37.10) funksiyaları periodikdirlər. Onların τ-ya görə periodları $4k$-dır. Burada K birinci növ tam elliptik inteqralldır.

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \tag{37.11}$$

Zamana görə period isə

$$T = 4K\sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(M^2 - 2EI_1)}}\, cn\tau \tag{37.12}$$

ifadəsilə təyin olunur.

Bu zaman müddətində $\vec{\Omega}$ vektoru fırfıranın oxuna nəzərən əvvəlki vəziyyətinə qayıdır (fırfıranın özü isə tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən əvvəlki vəziyyətinə qayıtmır – aşağıya bax).

$I_1 = I_2$ olduqda, aydındır ki, (37.10) düsturu simmetrik fırfıra üçün əvvəlki paraqrafda alınan düstura keçir. Doğrudan da $I_1 \to I_2$ olduqda $K^2 \to 0$ olur və elliptik funksiya dövrü (çevrəvi) funksiyalara cırlzşır

$$sn\tau \to \sin\tau, \qquad cn\tau \to \cos\tau, \qquad dn\tau \to 1$$

və bir (36.7) düsturlarına qayıdırıq.

$M^2 = 2EI_3$ olduqda $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = const$, yəni $\vec{\Omega}$ vektoru həmişə x_3 ətalət oxu üzrə yönəlmişdir. Bu fırfıranın x_3 oxu ətrafında müntəzəm fırlanmasına uyğun gəlir. Analojı olaraq $M^2 = 2EI_1$ olduqda (bu zaman $\tau \equiv 0$) x_1 oxu ətrafında müntəzəm fırlanma alırıq.

İndi isə fırfıranın fəzada mütləq hərəkətinin (x,y,z tərpənməz koordinat sisteminə nəzərən) zamandan asılılığını təyin etməyə keçək. Bunun üçün fırfıranın x_1, x_2, x_3 oxları ilə tərpənməz koordinat sistemi x,y,z oxları arasında qalan Eyler bucaqlarını daxil edək. Bu zaman Z oxunu sabit $\vec{M}$ vektoru üzrə istiqamətləndirək. Z oxunun x_1, x_2, x_3 oxlarına nisbətən polyar bucağı və azimutu uyğun olaraq θ və $\pi/2 - \psi$-olduqdan (bax səh. 141) onda $\vec{M}$ vektorunu x_1, x_2, x_3 oxlarına proyeksiyalasaq alırıq ki,

$$\begin{aligned} M\sin\theta\sin\psi &= M_1 = I_1\Omega_1 \\ M\sin\theta\cos\psi &= M_2 = I_2\Omega_2 \\ M\cos\theta &= M_3 = I_3\Omega_3 \end{aligned} \qquad (37.13)$$

Buradan isə

$$\cos\theta = \frac{I_3\Omega_3}{M}, \qquad tg\psi = \frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2} \qquad (37.14)$$

və (37.10) düsturundan istifadə edərək alırıq ki,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{I_3(M^2 - 2EI_1)}{M^2(I_3 - I_1)}}dn\tau$$

$$tg\psi = \sqrt{\frac{I_1(I_3 - I_2)cn\tau}{I_2(I_3 - I_1)sn\tau}} \qquad (37.15)$$

bununla da θ və ψ bucaqlarının zamandan asılılığı təyin olunur. Bu funksiyalar $\vec{\Omega}$ vektorunun komponentlərilə birlikdə (37.12) perioduna bərabər periodik funksiyalardır. φ bucağı (37.13) düsturuna daxil olmur. Onu hesablamaq üçün (35.1) düsturuna müraciət etmək lazımdır. Həmin düsdur $\vec{\Omega}$ vektorunun komponentləri Eyler bucaqlarının zamana görə törəmələri vasitəsilə ifadə edir.

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$

tənliklərindən $\dot{\theta}$-ni kənarlaşdırsaq alırıq ki,

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_1\sin\psi + \Omega_2\cos\psi}{\sin\theta}$$

Bundan sonra (37.13) düsturundan istifadə edərək alırıq ki,

$$\frac{d\varphi}{dt}=M\frac{I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2} \tag{37.16}$$

Buradan $\varphi(t)$ funksiyası kvadratura vasitəsilə təyin olunur, ancaq inteqralaltı funksiyaya elliptik funksiyanı mürəkkəb şəkildə daxil olur. Kifayət qədər uzun çevirmələr vasitəsilə həmin inteqral teta-funksiya adlanan funksiya vasitəsilə ifadə olunur, hesablama aparmadan[1] yalnız axırıncı nəticəni veririk.

$\varphi(t)$ funksiyası (additiv sabit dəqiqliyi ilə) iki həddin cəmi şəklində

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t) \tag{37.17}$$

yazıla bilər. Bunlardan biri

$$e^{2i\varphi_1(t)}=\frac{v_{01}\left(\frac{2t}{T}-i\alpha\right)}{v_{01}\left(\frac{2t}{T}+i\alpha\right)} \tag{37.18}$$

düsturu vasitəsilə ifadə olunur. Burada v_{01}-teta-funksiya, α isə

$$sn(i2\alpha K)=i\sqrt{\frac{I_3\left(M^2-2EI_1\right)}{I_1\left(2EI_3-M^2\right)}} \tag{37.19}$$

ifadəsi ilə təyin olunan həqiqi sabitdir (K və T (37.11) və (37.12) ifadələrindən). (37.18) ifadəsinin sağ tərəfindəki $T/2$ periodlu, periodik funksiyadır. Yəni T müddətində 2π-yə qədər dəyişir. (37.17) düsturundakı ikinci

$$\varphi_2(t)=2\pi\frac{t}{T'},\qquad \frac{1}{T'}=\frac{M}{2\pi I_1}-\frac{i}{\pi T}\frac{v'_{01}(i\alpha)}{v_{01}(i\alpha)} \tag{37.20}$$

düsturu vasitəsilə təyin olunur. Bu funksiya T' müddətində 2π-yə qədər dəyişir. Beləliklə φ bucağı üzrə hərəkət iki periodik dəyişmənin cəmindən ibarətdir. Bu periodlardan biri (T), ψ və θ bucaqlarının periodları ilə üst-üstə düşür, ikinci isə (T') birinci ilə müqaisə edilən deyil. Axırıncı vəziyyət göstərirki fırfıra, ciddi desək, hərəkəti zamanı heç vaxt əvvəlki vəziyyətə qayıtmır.

Məsələlər.

1. x_3 ətalət oxuna yaxın olan ox ətrafında fırfıranın sərbəst fırlanmasını təyin edin.

Həlli: Tutaq ki, $\vec{M}$ vektorunun istiqamətinə x_3 (və ya x_1) oxu yaxındır. Onda M_1 və M_2 komponentləri kiçik $M_3\approx M$(birinci tərtibdən dəqiqliklə) olacaq. Həmin dəqiqliklə (36.5) Eyler tənliklərinin birinci ikisi

[1] Onları E.T Uitteker "Analitiçeskaya dinamika " ONTİ, 1937

$$\frac{dM_1}{dt}=\left(1-\frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0 M_2,\quad \frac{dM_2}{dt}=\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\Omega_0 M_1$$

yazılır (burada $\Omega_0 = M/I_3$ əvəzlənməsi edilmişdir). Ümumi qaydaya uyğun olaraq M_1 və M_2 üçün həlli e^{iwt} şəklində axtaraq. Onda w tezliyi üçün

$$w=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)} \tag{1}$$

ifadəsini alırıq. M_1 və M_2 üçün isə alırıq ki,

$$M_1 = Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos wt,\qquad M_2 = Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin wt \tag{2}$$

burada a ixtiyari kiçik sabitdir. Bu tənliklər vasitəsilə $\vec{M}$ vektorun fırfıraya nəzərən hərəkəti təyin olunur. Şəkil 51-də $\vec{M}$ vektorunun ucu (w tezliyi ilə) x_3 oxu üzərindəki qütb ətrafında kiçik ellips cızır.

Fırfıranın fəzada mütləq hərəkətini təyin etmək üçün Eyler bucaqlarını daxil edək. Baxdığımız halda x_3 oxu ilə Z oxu arasındakı θ bucağı kiçikdir və (37.14) düsturuna əsasən

$$tg\psi=\frac{M_1}{M_2}$$

$$\theta^2\approx 2(1-\cos\theta)=2\left(1-\frac{M_3}{M}\right)\approx\frac{M_1^2+M_2^2}{M^2}$$

Bunları (2) də yerinə yazsaq allırıq

$$tg\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}ctgwt$$

$$\theta^2=a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2 wt+\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\sin^2 wt\right] \tag{3}$$

φ-bucağını təyin etmək üçün (35.1) düsturunun üçüncüsünə əsasən görürük ki, $\theta \ll 1$ olduqda

$$\Omega_0\approx\Omega_3\approx\dot{\psi}+\dot{\varphi}$$

Ona görə

$$\varphi=\Omega_0 t-\psi \tag{4}$$

(inteqrallama sabiti nəzərə alınmır).

Fırfıranın hərəkətinin xarakteri barədə əyani təsəvvür almaq üçün onun üç ətalət oxlarının istiqamətlərinin necə dəyişdiklərini izləmək lazımdır (o oxlar üzrə yönəlmiş vahid vektorlarını $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$ ilə işarə edək). $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ vektorları XY müstəvisində Ω_0 tezliyi ilə bərabərsürətlə fırlanır. Bu rəqslər bu vektorların Z komponentləri ilə təyin olunur. Həmin komponentlər

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos wt$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin wt$$

ifadələr vasitəsilə təyin olunurlar. Həmin dəqiqliklə $\vec{n}_3$ vektoru üçün alırıq ki,

$$n_{3x} \approx \theta\sin\varphi, \qquad n_{3y} \approx -\theta\cos\varphi, \qquad n_{3z} \approx 1$$

$\vec{n}_3$ vektorunun X,Y,Z oxlarına nəzərən polyar bucağı və azimutu θ və $\varphi - \pi/2$-yə bərabərdirlər (baz səh. 141). Bundan sonra (37.13) düsturundan istifadə edərək yazırıq.

$$n_{3x} = \theta\sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta\sin\Omega_0 t\cos\psi - \theta\cos\Omega_0 t\sin\psi =$$

$$= \frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t - \frac{M_1}{M}\sin\Omega_0 t = a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\Omega_0 t\sin wt -$$

$$- a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\Omega_0 t\cos wt$$

və ya nəhayət

$$n_{3x} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos(\Omega_0 + w)t + \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos(\Omega_0 - w)t$$

Analojı yolla

$$n_{3y} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin(\Omega_0 + w)t + \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\sin(\Omega_0 - w)t$$

Buradan görünür ki, $\vec{n}_3$ vektorunun hərəkəti z oxu ətrafında baş verən $(\Omega_0 \pm w)$ tezlikli iki fırlanma hərəkətinin üst-üstə gəlməsindən əmələ gələn hərəkətdir.

2. $M^2 = 2EI_2$ olduğu halda fırfıranın sərbəst fırlanmasını təyin edin.

Həlli: Bu halda şəkil 51 $\vec{M}$ vektorunun ucunun x_2 oxundan keçən qütb ətrafında cızdığı əyri uyğun gəlir.

(37.3) tənliyi

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - s^2, \quad \tau = t\sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3}}\Omega_0, \qquad s = \frac{\Omega_2}{\Omega_0}$$

formasını alır (burada $\Omega_0 = M/I_2 = \frac{2E}{M}$ işarəsi qəbul olunub). Bu ifadəni inteqrallayıb və sonra (37.6) düsturundan istifadə etsək.

$$\Omega_1 = \Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_3 - I_2)}{I_1(I_3 - I_1)}}\frac{1}{ch\tau}$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 th\tau$$
$$\Omega_3 = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \frac{1}{ch\tau}$$

ifadələrini alırıq.

Fırfıranın mütləq hərəkətini təyin etmək üçün aşağıdakı kimi Eyler bucaqlarını təyin edirik. Z oxu ($\vec{M}$ vektoru) ilə x_2 oxu arasındakı (x_3-lə yox) bucaq θ, $\vec{\Omega}$ vektorunun komponentləri ilə Eyler bucaqlarını əlaqələndirən (37.14) və (17.16) düsturlarında bu halda $123 \to 312$ dövrü yerdəyişmə aparmaq lazımdır. Bundan sonra həmin düsturlara (1) ifadəsini daxil etsək

$$\cos\theta = th\tau, \qquad \varphi = \Omega_0 t + const, \qquad tg\psi = \sqrt{\frac{I_3(I_2 - I_1)}{I_1(I_3 - I_2)}}$$

ifadəsini alırıq.

Aldığımız görünür ki, $\vec{\Omega}$ vektoru asimptotik ($t \to \infty$) olaraq x_2 oxuna, eyni zamanda x_2 oxu da asimptotik olaraq tərpənməz z oxuna yaxınlaşırlar.

§ 38 Bərk cisimlərin toxunması

(34.1) və (34.3) tənliklərindən göründüyü kimi bərk cismin tarazlıq şərtini ona təsir edən qüvvələrin və qüvvə momentlərinin sıfıra bərabər

$$\vec{F} = \sum \vec{f} = 0$$
$$\vec{K} = \sum [\vec{r}\vec{f}] = 0 \tag{38.1}$$

olması şərti kimi də ifadə etmək olar. Burada cəmləmə bütün təsir edən qüvvələrə görə aparılır, $\vec{r}$ isə qüvvələrin "tətbiq nöqtələri"nin radius-vektorlarıdır. Bu zaman qüvvə momentlərinin təyin olunduğu nöqtə (koordinat başlanğıcı) ixtiyari seçilə bilər. $\vec{F} = 0$ olduqda $\vec{K}$ koordinat başlanğıcının seçilməsindən asılı olmur (bax (34.5)).

Əgər bir-birinə toxunan bərk cisimlərə baxırıqsa, onda (38.1) tarazlıq şərti toxunan cisimlərin hər biri üçün ayrılıqda ödənilməlidir. Bu zaman baxdığımız cismə təsir edən qüvvələr içərisində toxunan cisimlərin təsir qüvvəsi də daxil edilməlidirlər. Bu qüvvələr cisimlərin toxunma nöqtələrinə tətbiq olunmuşlar və reaksiya qüvvələri adlanırlar. Aydındır ki, hər iki toxunan cisim üçün reaksiya qüvvələri qiymətcə bərabər, istiqamətcə bir-birinin əksinə yönəlmiş olur.

Ümumi halda reaksiya qüvvəlrinin həm qiyməti, həm də istiqaməti (38.1) tənliklərinin hamısını bütün cisimlər üçün birlikdə həll etməklə tapılır. Lakin bəzi hallarda reaksiya qüvvələrinin istiqaməti məsələnin şərti ilə verilir. Məsələ əgər iki cisim bir-birinin səthində sərbəst sürüşmə bilirlərsə, onda aydındır ki, reaksiya qüvvəsi həmin səthə normal istiqamətdə yönəlmiş olacaqdır.

Əgər toxunan cisimlər bir-birinə nisbətən hərəkət edirlərsə onda reaksiya qüvvələri ilə yanaşı dissipativ xarakterli sürtünmə qüvvələrində yaranır.

Toxunan cisimlərin iki növ hərəkətləri –sürüşmə və diyirlənmə ola bilir. Sürüşmə hərəkəti zamanı reaksiya qüvvəsi toxunan səthlərə perpendikulyar, sürtünmə qüvvəsi isə həmin səthlərə toxunan istiqamətində yönəlmiş olurlar.

Təmiz diyirlənmə hərəkəti toxunan nöqtəsində hərəkətin olmaması ilə xarakterikdir. Başqa sözlə desək diyirlənən cisim hər bir anda toxunan nöqtəsinə bərkidilmiş kimi olur. Bu halda reaksiya qüvvəsinin istiqaməti ixtiyaridir, yəni mütləq toxunan səthlərə normal deyil. Sürtünmə isə diyirlənməyə mane olmaq istəyən əlavə moment kimi meydana çıxır.

Əgər sürüşmə halında sürtünmə kiçikdirsə və onu nəzərə almamaq mümkündürsə onda cisimlərin səthləri tam hamar səth adlanır.

Əksinə, əgər səthin xassəsi yalnız təmiz diyirlənməyə imkan verirsə (sürüşməsiz) və diyirlənmə zamanı sürtünməni nəzərə almamaq mümkündürsə onda səth mütləq kələkötürlü səth adlanır.

Hər iki halda cisim hərəkəti məsələsinə sürtünmə qüvvəsi aşgar şəkildə daxil olmur, ona görə də məsələ tam mexaniki məsələ olur. Əgər sürtünmənin konkret xassəsi hərəkət üçün vacibdirsə, onda məsələ təmiz mexaniki proses olmur (§ 25-lə müqaisə et).

Toxunma onların sərbəstlik dərəcələri sayını sərbəst hərəkət halındakına nisbətən azaldır. İndiyə kimi bu növ məsələlərə baxarkən bunu həqiqi sərbəstlik dərəcələrinə uyğun olan koordinatları seçməklə həll edirdik. Cisim diyirlənməsi zamanı belə koordinatların seçmə mümkün olmaya bilər.

Cisimlərin diyirlənməsi zamanı hərəkət üzərinə qoyulan şərt toxunma nöqtəsində sürətin sıfır olmasıdır (məsələ cismin tərpənməz səth üzrə diyirlənməsi zamanı toxunma nöqtəsinin sürəti sıfır olmalıdır ümumi halda bu şərt əlaqə tənliyi)

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0 \qquad (38.2)$$

vasitəsilə ifadə olunur. Burada $c_{\alpha i}$ əmsalı yalnız koordinat funksiyasıdır (α indeksi əlaqə tənliklərini nömrələyir). Əgər tənliyin sol tərəfi hər hansı funksiyanın zamana görə tam diferensialı deyilsə bu tənliklər inteqrallana bilmirlər. Başqa sözlə desək, bu tənliklər yalnız koordinatlar arasında münasibətlər şəklində ifadə oluna bilmirlər. Buna görə də cismin vəziyyətini həqiqi sərbəstlik dərəcələrinə uyğun olan koordinatlar vasitəsilə ifadə etmək olmur. Belə əlaqələrə qeyri-holonom əlaqələr (yalnız koordinatları əlaqələndirən holonom əlaqələrin əksinə olaraq) adlanır.

Məsələ, kürənin müstəvi səth üzrə diyirlənməsinə baxaq. Həmişə olduğu kimi kürənin irəliləmə hərəkətinin sürətini (ətalət mərkəzinin sürətini) $\vec{V}$ ilə fırlanma hərəkətinin bucaq sürətini isə $\vec{\Omega}$ işarə etdək. Kürənin müstəviyə toxunma nöqtəsinin sürəti ümumi $\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$ düsturunda $\vec{r} = -a\vec{n}$ yazdıqda alınır (a kürənin radiusu, $\vec{n}$ diyirlənmə müstəvisinə toxunma nöqtəsində çəkilmiş normal istiqamətində vahid vektorudur). Axtardığımız əlaqə toxunma nöqtəsində sürüşmənin olmaması şərti, yəni

$$\vec{V} = \alpha[\vec{\Omega}\vec{n}] = 0 \qquad (38.3)$$

tənliyi ilə ifadə olunur. Bu tənlik inteqrallanan olmata da bilər. $\vec{V}$ sürətinin kürənin mərkəzinin radius vektorunun zamana görə tam diferensialı olmasına baxmayaraq $\vec{\Omega}$ bucaq sürəti, ümumi halda, hər hansı koordinatın zamana görə tam diferensialı deyil. Beləliklə, (38.3) əlaqəsi qeyri-holonom[1] əlaqədir.

Qeyri-holonom əlaqələrdən koordinatların sayını azaltmaq üçün istifadə etmək mümkün olmur, onda belə əlaqələr olduqda hamısı asılı olmayan koordinatlardan istifadə etmək lazım olur. Laqranj tənliklərini qurmaq üçün yenə də ən kiçik təsir prinsipinə müraciət edək.

(38.2) şəklində əlaqələrin olması koordinatların variasiyaları üzərinə müəyyən məhdudiyyət qoyur. Doğrudanda həmin tənlikləri δt vursaq olırıq ki, koordinat δq_i variasiyaları asılı olmayan deyillər, və

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i = 0 \tag{38.4}$$

münasibətini ödəyirlər. Təsir inteqralını variasıyaladıqda bunu nəzərə almaq lazımdır. Əsas Laqranj metoduna görə şərti ekstremumları tapmaq üçün təsirin variasiyasına

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

qeyrimələum λ_α əmsallarına vurulmuş (38.4) ifadəsini əlavə edib bundan sonra inteqralın sıfıra bərabər olmasını tələb etmək lazımdır. Bundan sonra δq_i variasiyalarının hamısını qeyriasılı hesab etmək olar və

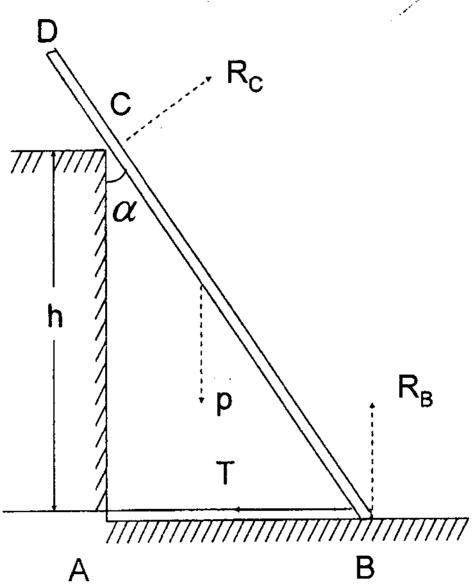
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i} \tag{38.5}$$

tənliyini alırıq. Bu tənliklər (38.2) tənlikləri ilə birlikdə qeyrimələum q_i və λ_α kəmiyyətlərini təyin etmək üçün lazım olan tam tənliklər sistemini əmələ gətirirlər. Şərt olunan metodda reaksiya qüvvələri ümumiyyətlə iştirak etmirlər; cisimlərin toxunması əlaqə tənlikləri vasitəsilə nəzərə alınır. Lakin Laqranj tənliklərinin qurulmasının başqa metodu da var. Bu metodda toxunan cisimlərin Laqranj tənliklərinə reaksiya qüvvələri aşgar şəkildə daxil olurlar. Bu metodun məğzi (d'Alamber prinsipi deyirən prinsipin əsasını təşgil edən) ondan ibarətdir ki, toxunan cisimlərin hər biri üçün

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{f}, \qquad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum \left[\vec{r}\vec{f}\right] \tag{38.6}$$

---

[1] Qeyd edək ki, bu cür əlaqə sülündir üçün holonom olardı. Bu halda fırlanma oxu öz istiqamətini dəyişmir. Ona görə də $\Omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ ifadəsi silindrin fırlanma bucağı φ -nin zamana görə tam diferensialı olur. Bu halda (38.3) münasibəti inteqrallanır və ətalət mərkəzi koordinatı ilə φ bucağı arasında əlaqə yaradır.



Şəkil 52

tənlikləri yazılır. Bu zaman təsir edən $\vec{f}$ qüvvələrinə reaksiya qüvvələri də daxil olurlar. Həmin qüvvələr əvvəlcədən məlum deyillər. Həmin qüvvələr hərəkətlə birlikdə tənlikləri həll etməklə tapılırlar. Bu metod eyni dərəcədə həm holonom həm də qeyri-holonom əlaqələr olduqda tətbiq oluna bilir.

Məsələlər.

1. $\vec{F}$ və $\vec{K}$ xarici qüvvə və qüvvə momentinin təsiri ilə müstəvi üzrə diyirlənən kürənin hərəkət tənliyini d'Alamber prinsipindən istifadə edərək tapın.

Həlli: Əlaqə tənliyi (38.3) artıq mətndə yazılıbdır. Reaksiya qüvvəsini (onu $\vec{R}$-lə işarə edək) daxil edərək ($\vec{R}$-qüvvəsi kürənin müstəviyə toxunma nöqtəsinə tətbiq edilmişdir) daxil edərək (38.6) hərəkət tənliyini yazaq

$$\mu\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}+\vec{R} \tag{1}$$

$$I\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=\vec{K}-\alpha\left[\vec{n}\vec{R}\right] \tag{2}$$

(burada $\vec{P}=\mu\vec{V}$ və kürəvi fırfıra üçün $M=I\vec{\Omega}$ olduğundan istifadə edilmişdir). (38.3) əlaqə tənliyini zamana görə diferensiallasaq alırıq ki,

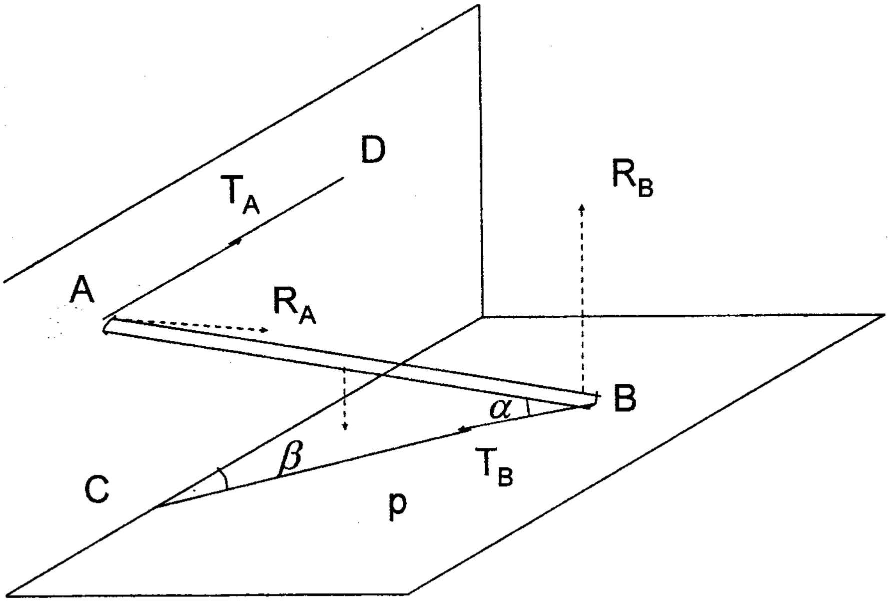
$$\dot{\vec{V}}=a\left[\dot{\vec{\Omega}}\vec{n}\right]$$

Bunu (1) tənliyində yerinə yazıb, (2) tənliyinin köməyilə $\dot{\Omega}$-ni kənarlaşdırsaq

$$\frac{I}{a\mu}\left(\vec{F}+\vec{R}\right)=\left[\vec{K}\vec{n}\right]-a\vec{R}+a\vec{n}\left(\vec{n}\vec{R}\right)$$

tənliyini alarıq. Bu tənlik $\vec{F}$ və $\vec{K}$ vektorlarını əlaqələndirir. Bu tənliyi komponentlərdə yazıb $I=\frac{2}{5}\mu a^2$ (bax §32, məsələ 2,b) olduğunu nəzərə alsaq tapırıq ki,

$$R_x=\frac{5}{7a}K_y-\frac{2}{7}F_x,\ R_y=-\frac{5}{7a}K_x-\frac{2}{7}F_y,\ R_z=-F_z$$



Şəkil 53

(x,y müstəvisi diyirlənmə müstəvisi kimi seçilmişdir). Nəhayət bu ifadələri (1) – düsturunda yerinə yazsaq onda yalnız xarici qüvvə və momentdən asılı olan hərəkət tənliyini alırıq.

$$\frac{dV_x}{dt}=\frac{5}{7\mu}\left(F_x+\frac{K_y}{a}\right),\quad \frac{dV_y}{dt}=\frac{5}{7\mu}\left(F_y-\frac{K_x}{a}\right)$$

Bucaq sürətinin Ω_x,Ω_y komponentləri (38.3) əlaqə tənliyinin köməyi ilə V_x,V_y vasitəsilə ifadə olunurlar. Ω_3 üçün

$$\frac{2}{5}\mu a^2\frac{d\Omega_z}{dt}=K_z$$

tənliyini alırıq ((2) tənliyinin Z komponenti).

2. Çəkisi P və uzunluğu l olan bircins çubuq divara söykənmişdir (şəkil 52). Onun aşağı ucu B, AB ipi ilə saxlanılır. Dayağın reaksiyasını və ipin gərilməsini tapın.

Həlli: Çubuğun çəkisi onun ortasına tətbiq olunmuş və şaquli istiqamətdə aşağı yönəlmiş P qüvvəsidir R_B və R_C reaksiya qüvvələri uyğun olaraq şaquli istiqamətdə yuxarı və çubuğa perpendikulyar istiqamətdə yönəlmişlər. İpin gərginliyi T B-dən A-ya yönəlmişdir. Tarazlıq tənliklərinin həlli

$$R_C=\frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha,\qquad R_B=P-R_C\sin\alpha,\qquad T=R_C\cos\alpha$$

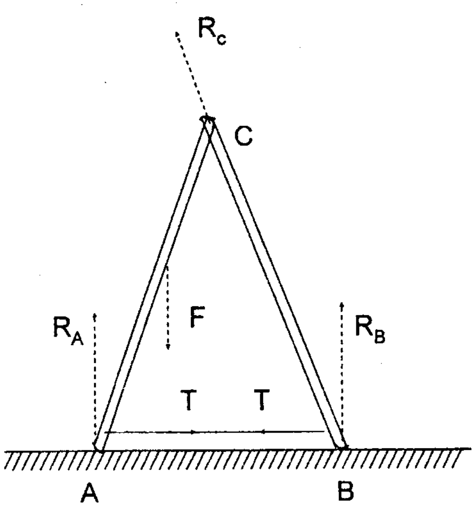
şəklində yazılır.

3. P çəkili AB çubuğu ucları ilə üfiqi və şaquli müstəvilərə söykənib (şəkil 53) və bu vəziyyətdə iki AD və BC üfiqi iplər vasitəsilə saxlanılır. BC ipi AB çubuğu ilə (şaquli) bir müstəvidə AB yerləşmişdir. Dayaqların reaksiyası və iplərin gərginliyini təyin edin.

Həlli: İplərin T_A və T_B gərginlikləri A-dan D-yə və B-dən C-yə yönəlmişlər. R_A və R_B reaksiyaları uyğun müstəvilərə perpendikulyardırlar. Tarazlıq tənliklərinin həlli

$$R_B = P\,,\ T_B = \frac{P}{2} ctg\alpha\,,\ R_A = T_B \sin\beta\,,$$
$$T_A = T_B \cos\beta$$

ifadələrini verir.



Şəkil 54

4. l uzunluğu iki çubuq yuxarı ucda şarnir vasitəsilə aşağıda isə AB ipi ilə birləşmişdir. Çubuqlardan birinin ortasına F qüvvəsi tətbiq olunub (çubuqların çəkiləri nəzərə alınmır). Reaksiya qüvvəsini tapın.

Həlii: İpin T gərilməsi A-dan B-yə doğru, B nöqtəsində isə B-dən A-ya təsir edir. A və B nöqtələrində R_A və R_B reaksiya qüvvələri dayaq müstəvilərinə perpendikulyardır. AC çubuğuna təsir edən şarnirdəki reaksiya qüvvəsini R_C-ilə işarə edək. Onda BC çubuğuna - R_C reaksiya qüvvəsi təsir edər. BC çubuğuna təsir edən qüvvə momentləri R_B, T və R_C cəminin sıfıra bərabər olması şərti, $\vec{R}_C$ vektorunun BC istiqamətində yönəldiyi nəticəsini verir. Qalan tarazlıq şərtləri (hər iki çubuğun) aşağıdakı ifadələri verirlər.

$$R_A = \frac{3}{4}F\,,\ R_B = \frac{F}{4}\,,\ R_C = \frac{F}{4\sin\alpha}\,,\ T = \frac{1}{4}Fctg\alpha$$

α -CAB bucağıdır.

§ 39 Qeyri ətalət hesablama sistemində hərəkət

İndiyə kimi bia istənilən mexaniki sistemin hərəkətinə baxarkən onu ətalət sisteminə nəzərən etdik. Yalnız ətalət hesablama sistemində, məsələn, maddi nöqtənin xarici sahədə Laqranj funksiyası

$$L_0 = \frac{m\vec{v}_0^{\,2}}{2} - U \tag{39.1}$$

və uyğun olaraq Laqranj tənliyi

$$m\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

şəklində olurlar (bu paraqrafda ətalət sistemində olan kəmiyyətləri o indeksi ilə işarə edəcəyik). İndi isə maddi nöqtənin hərəkət tənliyinin qeyri-ətalət hesablama sistemində hansı formada olduğu məsələsinə baxaq. Bu məsələni həl etdikdə də ən kiçik təsir prinsipindən başlayacağıq. Həmin prinsipin tətbiqi hesablama sisteminin seçilməsindən asılı deyil və buna uyğun olaraq

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \qquad (39.2)$$

Laqranj tənliyi öz formasını saxlayır. Lakin Laqranj funksiyası artıq (39.1) formasında olmur. Onu tapmaq üçün L_0 Laqranj funksiyasını müəyyən çevirmələrəməruz qoymalıyıq.

Həmin çevirməni iki etapda aparaq. Əvvəlcə K_0 ətalət hesablama sisteminə nəzərən $\vec{V}(t)$ sürətilə irəliləmə hərəkəti edən K' sisteminə nəzərən keçək. Zərrəciyin K_0 və K' sistemlərindəki $\vec{v}_0$ və $\vec{v}'$ sürətləri

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t) \qquad (39.3)$$

düsturu ilə əlaqəlidirlər. Bu ifadəni (39.1) düsturunda yerinə yazsaq K' sistemində Laqranj funksiyasını

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U$$

alırıq. $V^2(t)$ zamanın aşgar funksiyasıdır. Ona görə onu başqa bir funksiyanın zamana görə tam diferensial şəklində yazmaq olar. Bu səbəbdən də üçüncü həddi atmaq olar. Sonra $\vec{V} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, $\vec{r}'$ zərrəciyin K' sistemində radius-vektorudur. Ona görə də

$$m\vec{V}(t)\vec{v}' = m\vec{V}\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\vec{r}'\right) - m\vec{r}'\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Bu ifadəni Laqranj funksiyasında yerinə yazıb, yenə də zamanın tam diferensialı həddləri atsaq alırıq ki,

$$L' = \frac{mv'^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r}' - U \qquad (39.4)$$

burada $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ K' sisteminin irəliləmə hərəkəti təcilidir.

(39.4) funksiyası vasitəsilə Laqranj tənliyini qursaq alırıq ki,

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t) \qquad (39.5)$$

Görürük ki, sistemin təcillə irəliləmə hərəkəti hərəkət tənliyinə təsiri nöqteyi-nəzərdən bircins qüvvə sahəsinin yaranmasına ekvivalentdir. Bu zaman sahədə zərrəciyə təsir edən qüvvə zərrəciyin kütləsinin $\vec{W}$ təcilinə hasilinə bərabər təcilin əks istiqamətinə yönəlmiş olur.

İndi yeni bir K hesablama sistemini daxil edək. K sistemi K'-lə eyni başlanğıca malikdir və ona nisbətən $\vec{\Omega}(t)$ bucaq sürətilə fırlanır. K_0 ətalət hesablama sisteminə nisbətən K sistemi həm irəliləmə, həm də fırlanma hərəkəti edir. Zərrəciyin K' sisteminə nəzərən $\vec{v}'$ sürəti onun K sistemində $\vec{v}$ sürətilə onun K sisteminlə birlikdə $[\vec{\Omega}\vec{r}]$ fırlanma sürətinin cəmindən ibarət olur:

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}]$$

($\vec{r}$ və $\vec{r}'$ radius vektorları K və K' sistemlərində üst-üstə düşür). Bu ifadəni (39.4) Laqranj funksiyasında yerinə yazdıqda alırıq ki,

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U \tag{39.6}$$

Bu zərrəciyin ixtiyari qeyri-ətalət hesablama sistemində Laqranj funksiyasını ümumi formasıdır. Qeyd edək ki, hesablama sisteminin fırlanması Laqranj funksiyasında tamamilə xüsusi növ həddin – zərrəciyin sürətilə mütənasib olan həddin meydana gəlməsinə səbəb olur.

Laqranj tənliyinə daxil olan törəmələri hesablamaq üçün onun tam diferensialını yazaq

$$dL = m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + m\vec{v}[\vec{\Omega}d\vec{r}] + m[\vec{\Omega}\vec{r}][\vec{\Omega}d\vec{r}] - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial r}d\vec{r}$$

$$= m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + md\vec{r}[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}\vec{r}]\vec{\Omega}]d\vec{r} - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r}$$

$d\vec{v}$ və $d\vec{r}$ diferensiallarının daxil olduğu həddləri yiğaraq tapırıq ki,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\Omega}\vec{r}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}\vec{r}]\vec{\Omega}] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Bu ifadələri (39.2)-də yerinə yazsaq axtardığımız

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]] \tag{39.7}$$

hərəkət tənliyini alarıq.

Görürük ki, hesablama sisteminin fırlanması səbəbindən yaranan "ətalət qüvvə"ləri üç hissədən ibarətdir. $m[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}]$ qüvvəsi fırlanmanın qeyri müntəzəmliyi ilə əlaqədardır, qalan ikisi isə bərabərsürətli fırlanma zamanı da yaranırlar. $2m[\vec{v}\vec{\Omega}]$ qüvvəsi Koriolis qüvvəsi adlanır. İndiyə kimi baxdığımız (qeyri dissipativ) qüvvələrdən fərqli olaraq bu qüvvə zərrəciyin sürətindən asılıdır. $m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]]$ - mərkəzəqaçma qüvvəsi adlanır. Bu qüvvə $\vec{r}$ və $\vec{\Omega}$-nın olduqları müstəvi üzərində olub fırlanma oxuna perpendikulyardır (yəni $\vec{\Omega}$-nın istiqamətinə) və fırlanma oxundan kənara istiqamətlənmişdir; mərkəzəqaçma qüvvəsi qitmətcə $m\rho\Omega^2$-na bərabərdir. ρ-fırlanma oxundan olan məsafədir.

Bərabərsürətli fırlanma hərəkəti edən, irəliləmə hərəkəti etməyən sistemə baxaq. (39.6) və (39.7) ifadələrində $\vec{\Omega} = const$, $\vec{W} = 0$ yazaraq alırıq ki, Laqranj funksiyası

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - U \tag{39.8}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + 2m\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right] + m\left[\vec{\Omega}\left[\vec{r}\vec{\Omega}\right]\right] \tag{39.9}$$

hərəkət tənliyini alırıq.

Bu halda həm də enerji hesablayaq

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \tag{39.10}$$

ifadəsini $E = \vec{p}\vec{v} - L$ düsturunda yerinə yazıb

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 + U \tag{39.11}$$

düsturunu alırıq. Diqqət edək ki, enerjinin ifadəsinə sürətdən xətti asılı olan hədd daxil deyil. Hesablama sisteminin fırlanması enerjinin ifadəsinə yalnız koordinatdan asılı olan həddin əlavə olmasına gətirir. Həmin hədd bucaq sürətinin kvadratı ilə mütənasibdir. Bu əlavə potensial enerji $-\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2$ mərkəzəqaçma enerji – adlanır.

Zərrəciyin bərabərsürətlə fırlanan koordinat sistemindəki $\vec{v}$ sürəti onun K_0 ətalət koordinat sistemindəki $\vec{v}_0$ sürətilə

$$\vec{v}_0 = \vec{v} + \left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] \tag{39.12}$$

düsturu ilə əlaqədardır. Buna görə də onun K sistemində ki, $\vec{P}$ (39.10) impulsu onun K_0 sistemindəki $\vec{P}_0 = m\vec{v}_0$ impulsu ilə üst-üstə düşür. Bununla bərabər $\vec{M}_0 = \left[\vec{r}\vec{P}_0\right]$ və $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{P}\right]$ impulslarında bərabər olurlar. K və K_0 sistemindəki enerjilər isə müxtəlifdir. (39.12)-dən $\vec{v}$ sürətini (39.11)-də yerinə yazdıqda

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - mv_0\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + U = \frac{mv_0^2}{2} + U - m\left[\vec{r}\vec{v}_0\right]\vec{\Omega}$$

ifadəsini alırıq. Birinci iki hədd K_0 sistemindəki E_0 enerjisidir. Buraya impuls momentini daxil etsək

$$E = E_0 - \vec{M}\vec{\Omega} \tag{39.13}$$

ifadəsini alırıq.

Bu düstur vasitəsilə bərabərsürətlə fırlanan koordinat sisteminə keçdikdə enerjinin çevrilməsini alırıq. Bu düstur bir zərrəcik üçün aldıq. Buna baxmayaraq həmin düsturu çox zərrəciklərdən təşgil olunmuş sistem üçün də ala bilərik. Həmin düstur (39.13) düsturu ilə üst-üstə düşəcək.

Məsələlər.

1. Sərbəst düşən cismin Yerin fırlanması nəticəsindən şaquli aralanma meylini tapın (fırlanma bucaq sürətini kiçik qəbul edin).

Həlli: Ağırlıq sahəsində $U=-m\vec{g}\vec{r}$, $\vec{g}$-ağırlıq qüvvəsinin təcilidir. (39.9) tənliyində mərkəzəqaçma qüvvəsini ($\vec{\Omega}^2$ ilə mütənasib) nəzərə almayaraq hərəkət tənliyini

$$\dot{\vec{v}}=2\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right]+\vec{g} \tag{1}$$

şəklində alırıq. Həmin tənliyi ardıcıl yaxınlaşma metodu ilə həll edək. Bunun üçün $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ şəklində yazaq. Burada $\vec{v}_1$, $\dot{\vec{v}}_1=\vec{g}$ tənliyinin həllidir. Yəni $\vec{v}_1=\vec{g}t+\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0$-başlanğıc sürətidir). $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ ifadəsini (1) tənliyində yerinə yazıb, tənliyin sağ tərəfində yalnız $\vec{v}_1$-nı saxlamaqla $\vec{v}_2$ üçün

$$\dot{\vec{v}}_2=2\left[\vec{v}_1\vec{\Omega}\right]=2t\left[\vec{g}\vec{\Omega}\right]+2\left[\vec{v}_0\vec{\Omega}\right]$$

tənliyini alırıq. Bu ifadəni inteqrallasaq

$$\vec{r}=h+\vec{v}_0t+\frac{\vec{g}t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\left[\vec{g}\vec{\Omega}\right]+t^2\left[v_0\Omega\right] \tag{2}$$

ifadəsini alarıq. Burada $\vec{h}$ zərrəciyin başlanğıc vəziyyəti vektorudur.

Z oxunu şaquli istiqamətdə yuxarı yönəldək. X oxunu isə meridian üzrə qütbə yönəldək. Onda

$$g_x=g_y=0,\qquad g_z=-g,\qquad \Omega_x=\Omega\cos\lambda,\qquad \Omega_y=0,\qquad \Omega_z=\Omega\sin\lambda$$

burada λ-enlikdir (aydınlıq üçün şimal götürürük). (2)-də $\vec{v}_0=0$ qəbul edib

$$x=0,\ y=-\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda$$

alırıq. Buraya $t\approx\sqrt{\frac{2h}{g}}$ düşmə zamanını qoysaq nəhayət

$$x=0,\ y=-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}g\Omega\cos\lambda$$

ifadəsini alırıq. (y-in mənfi qiyməti meylin şərqə tərəf olduğunu göstərir).

2. Yer səthindən $\vec{v}_0$ sürətilə buraxılmış cismin müstəvidən meylini tapın.

Həlli: xz müstəvisini elə seçək ki, $\vec{v}_0$ sürəti[1] həmin müstəvi üzərində olsun. Başlanğıc hündürlük $h=0$. Birinci məsələdəki (2) düsturundan yana meyl üçün

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x+t^2\left(\Omega_x v_{0z}-\Omega_z v_{0x}\right)$$

və ya $t\approx\frac{2v_0}{g}$ üçün zamanın qoyaraq

$$y=\frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right)$$

alırıq.

[1] Kitabda səhvən sürət sözü əvəzinə müstəvi sözü yazılmışdır (tərcüməçinin qeydi)

3.Rəqqasın kiçik rəqslərinə Yerin fırlanmasının təsirini təyin edin. (Fuko rəqqası).

Həlli: Rəqqasın şaquli istiqamətdə yerdəyişməsini ikinci tərtibdən sonsuz kiçik olduğuna görə nəzərə almasaq cismin hərəkətini üfiqi xy müstəvisində baş verdiyini hesab edə bilərik. Ω^2-ı olan həddləri ataraq hərəkət tənliyini

$$\ddot{x} + w^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \qquad \ddot{y} + w^2 y = -2\Omega_z \dot{x}$$

şəklində yazaq. Burada w rəqqasın yerin fırlanmasını nəzərə almadıqdakı tezliyidir. İkinci tənliyi i-yə vurub birinci ilə toplasaq $\xi = x + iy$ dəyişəni üçün

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + w^2 \xi = 0$$

bir tənlik alırıq. $\Omega_z << w$ olduqda həmin tənliyin həlli

$$\xi = e^{-i\Omega_z t}\left(A_1 e^{iwt} + A_2 e^{-iwt}\right)$$

və ya

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0)$$

şəklində olur. Burada $x_0(t)$ və $y_0(t)$ yerin fırlanmasını nəzərə almadıqda rəqqasın trayektoriyasını verir. Deməli, yerin fırlanması trayektoriyanın şaquli ətrafında Ω_z sürətilə fırlanmasına gətirir.

VII FƏSİL

KANONİK TƏNLİKLƏR

§ 40 Hamilton tənlikləri

Mexanika qanunlarının Laqranj funksiyası (və ondan çıxarılan Laqranj tənlikləri)vasitəsilə şərti sistemin mexaniki halının ümumiləşmiş koordinat və sürətlərlə ifadə olunduğunu qəbul edir. Lakin bu yeganə mümkün olan şərh deyil. Ümumiləşmiş koordinat və impulslara verilən şərh bəzi üstünlüklərə, xüsusən də mexaniki ümumi məsələlərinin tədqiqində malik olur. Bu səbəbdən də mexanikanın bu cür şərhi zamanı hərəkət tənliklərini tapılması məsələsi meydana çıxır.

Bir dəstə asılı olmayan dəyişənlərdən, başqasına keçid, riyaziyyatda Lejandr çevirməsi adlanan çevirmə vasitəsilə aparılır. Baxdığımız halda o aşağıdakından ibarətdir.

Laqranj funksiyasının tam diferensialı onun koordinat və sürətlərinin funksiyası olduğundan

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

belə yazılır. Bu ifadəni $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$-ümumiləşmiş impuls, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{P}_i$ Laqranj tənliyində olduğu kimi

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i \tag{40.1}$$

belə də yazmaq olar.

(40.1) düsturundakı ikinci həddi

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i$$

şəklində yazıb, tam diferensial olan $d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right)$ həddi bərabərliyin sol tərəfinə keçirib və işarələri dəyişdikdən sonra (40.1) dən alırıq ki,

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i$$

Burada diferensial işarəsi altındakı hədd sistemin enerjisidir (bax § 6). Bu enerji koordinat və impulslarda ifadə olunub. Bu ifadə sistemin Hamilton funksiyası adlanır.

$$H(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{40.2}$$

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \tag{40.3}$$

diferensial bərabərliyindən

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{40.4}$$

tənlikləri alınır.

Bu tənliklər q, p dəyişənlərinə nəzərən yazılmış tənliklərdir. Bunlar Hamilton tənlikləri adlanırlar. Bunlar 2S dənə birinci tərtibdən diferensial tənlikləri sistemidir. Bu tənliklər Laqranj metodunda alınan S dənə ikinci tərtibdən diferensial tənliklər sistemini əvəz edir. Bu tənliklərin formal sadəliklərinə və simmetrikliklərinə görə onlara kanonik tənliklər də deyilir.

Hamilton funksiyasının zamana görə tam törəməsi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

Bu ifadə $\dot{p}_i$ və $\dot{q}_i$-nın yerinə (40.4) ifadələrini yazsaq axırıncı iki hədd ixtisar olunur və

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{40.5}$$

olur. Xüsusi halda Hamilton funksiyası zamandan aşgar şəkildə asılı olmazsa $\frac{dH}{dt} = 0$ olur. Bu isə enerjinin saxlanması qanunudur.

$q,\dot{q}$ və q,p dəyişənləri ilə yanaşı sistemin Laqranj və Hamilton funksiyaları başqa parametrlərdən – sistemin özünü və ya təsir edən xarici sahəsi xarakterizə edən parametrlərdən asılı olurlar. Tutaq ki, həmin parametr λ-dır. Həmin parametr dəyişən kəmiyyət kimi baxsaq, onda (40.1) in yerinə alırıq ki,

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

Bundan sonra (40.3)-ün əvəzinə alınır ki,

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

Buradan isə

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q} \tag{40.6}$$

münasibətlərini alırıq. Bu ifadələr Hamilton və Laqranj funksiyalarının həmin parametrə görə məxsusi törəmələrini bir-biri ilə əlaqələndirir, törəmələrin indeksləri göstərir ki, törəmə alarkən bir halda p və q digər halda isə $q,\dot{q}$ kəmiyyətləri sabit kimi götürülür.

Bu nəticə başqa aspektən də təqdim edilə bilər. Tutaq ki, Laqranj funksiyası $L = L_0 + L'$ şəklindədir və L'. Əsas L_0 funksiyasına edilmiş kiçik əlavədir. Bu halda $H = H_0 + H'$ Hamilton funksiyasına edilmiş H' əlavəsi L' -lə

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q} \tag{40.7}$$

tənliyi vasitəsilə əlaqəli olur. Qeyd edək ki, (40.1) ifadəsindən (40.3)-ifadəsinə keçid zamanı dt-lə mütənasib həddi yazmadıq. Çünki, Laqranj funksiyasının zamandan asılılığını göstərən bu hədd, baxdığımız çevirməyə aidiyatı olmayan bir parametr rolunu oynayardı. (40.6) düsturuna analoji olaraq L və H -in zamana görə tam törəmələri

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q} \qquad (40.8)$$

münasibətlərilə əlaqəlidirlər.

Məsələlər.

1.Maddi nöqtənin, dekart, silindrik və sferik koordinatlarda Hamilton funksiyasını yazın.

Cavab: Dekart koordinatlarında (x,y,z)

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + U(x,y,z)$$

r,φ,z silindrik koordinatlarda

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2} + P_z^2\right) + U(x,\varphi,z)$$

r,θ,φ sferik koordinatlarda

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(x,\theta,\varphi)$$

2. Bərabərsürətlə fırlanan sistemdə zərrəciyin Hamilton funksiyasını tapın.

Həlli: (39.11) və (39.10)-dan alırıq

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega}[\vec{r}\vec{p}] + U$$

3.M kütləli bir və m kütləli n zərrəciklərdən təşgil edilmiş (ətalət mərkəzinin hərəkəti nəzərə alınmadığı halda (§13 aid məsələyə bax) sistemin Hamilton funksiyasını yazın.

Həlli: Tam enerji E §13-də aid məsələdəki Laqranj funksiyasında U potensial enerjinin işarəsini dəyişməklə alınır. Ümumiləşmiş impulslar

$$\vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \vec{v}_a - \frac{m^2}{\mu}\sum_a \vec{v}_a$$

Buradan alırıq ki,

$$\sum \vec{p}_a = m\sum \vec{v}_a - \frac{nm^2}{\mu}\sum \vec{v}_a = \frac{mM}{\mu}\sum \vec{v}_a$$

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{p}_a}{m} + \frac{1}{M}\sum \vec{p}_a$$

Bunları E-də yerinə yazdıqda alırıq

$$H = \frac{1}{2m}\sum_a \vec{p}_a^2 + \frac{1}{2M}\left(\sum_a \vec{p}_a\right)^2 + U$$

§ 41 Raus funksiyası

Yeni dəyişənlərə keçərkən, bəzi hallarda koordinatların hamısını deyil, yalnız bəzilərini impulslara çevirmək daha məqsədəuyğun olur. Uyğun çevirmələr əvvəlki paraqrafda etdiyimiz çevirmələrə tamamilə oxşardır.

Yazılışı sadələşdirmək üçün fəzz edək ki, yalnız iki q və ξ koordinatımız vardır. $q,\xi,\dot{q},\dot{\xi}$ dəyişənlərindən $q,\xi,p,\dot{\xi}$ dəyişənlərinə keçək. p dəyişəni q koordinatına uyğun olan ümumiləşmiş impulsdur. $L(q,\xi,\dot{q},\dot{\xi})$ funksiyasının diferensialı

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} = \dot{p}dq + pd\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

Buradan alırıq ki,

$$d(L - p\dot{q}) = \dot{p}dq - \dot{q}dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

İndi

$$R(q,p,\xi,\dot{\xi}) = p\dot{q} - L \qquad (41.1)$$

funksiyasını (Raus funksiyasını) daxil edək. Burada $\dot{q}$ dəyişəni $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\xi}$ ifadəsinin köməyi ilə P dəyişəni ilə əvəz olunubdur. Diferensial

$$dR = -\dot{p}dq + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} \qquad (41.2)$$

Buradan alınır ki,

$$\dot{q} = \frac{\partial R}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial q} \qquad (41.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \qquad (41.4)$$

Axırıncı ifadəni ξ koordinatı üçün yazılmış Laqranj tənliyində yerinə yazsaq

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R}{\partial \xi} \qquad (41.5)$$

tənliyini alırıq.

Beləliklə, Raus funksiyası ξ koordinatına nəzərən Hamilton ((41.3) tənliyi), ξ koordinatına nəzərən isə Laqranj ((41.5) tənliyi) funksiyasıdır. Ümumi təyinata görə sistemin E enerjisi

Bunun Raus funksiyası vasitəsi ilə ifadəsi (41.1) və (41.4) düsturlarını burada yerinə yazmaqla alınır.

$$E = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \tag{41.6}$$

Alınan ifadələrin bir neçə q,ξ dəyişənləri olduğu hal üçün ümumiləşdirilməsi aydındır.

Raus funksiyasının tətbiqi dövrü koordinatlar olduğu halda daha məqsədəuyğundur. Əgər q koordinatı dövrü koordinat olursa, onda Laqranj funksiyası həmin koordinatdan aşgar şəkildə asılı olmur. Bu səbəbdən də Raus funksiyasına da daxil olmur və Raus funksiyası yalnız $p,\xi,\dot{\xi}$ dəyişənlərindən asılı olur. Lakin dövrü koordinata uyğun olan P impulsu sabitdir (bu (41.3) tənliyinin ikincisindən alınır). Bu mənada həmin tənlik yeni heç bir şey vermir. P impulslarını onların sabit qiymətləri ilə əvəz etdikdən sonra (41.5) tənlikləri

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \xi}$$

yalnız ξ koordinatından asılı tənliklərə çevrilirlər. Bununla da koordinatlar tamamilə kənarlaşdırılırlar. Əgər həmin tənliklər həll olunubsa və $\xi(t)$ funksiyaları tapılıbsa, onda onları

$$\dot{q} = \frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial P}$$

tənliyinin sağ tərəfində yerinə yazmaqla $q(t)$ funksiyasını tapa bilərik.

Məsələ

Simmetik fırfıranın $U(\varphi,\theta)$ xarıcı sahısində, ψ dövrü dəyişənini aradan çıxarmaqla (ψ,φ,θ-Eyler bucaqlarıdır) Raus funksiyasını tapın.

Həlli: Laqranj funksiyası

$$L = \frac{I_1'}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - U(\varphi,\theta)$$

(§35 məsələ1 ilə müqaisə et) Raus funksiyası

$$R = p_\psi \dot{\psi} - L = \frac{p_\psi^2}{22I_3} - p_\psi \dot{\varphi}\cos\theta - \frac{I_1'}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + U(\varphi,\theta)$$

Bu ifadədəki birinci hədd sabitdir. Ona görə atıla bilər.

§ 42 Puasson mötərizələri

Tutaq ki, $f(p.q.t)$ koordinat, impuls və zamanın hər hansı funksiyasıdır. Onun zamana görə tam törəməsini yazaq

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)$$

burada $\dot{q}_k$ və $\dot{P}_k$-nın (40.4) Hamilton tənliklərindən ifadələri yazsaq

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\} \tag{42.1}$$

tənliyini alırıq. Burada

$$\{H,f\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial P_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial P_k}\right) \tag{42.2}$$

işarələnməsi qəbul olunmuşdur. (42.2) ifadəsinə H-la f arasında yazılmış Puasson mötərizəsi adlanır.

Bildiyimiz kimi, sistemin hərəkəti zamanı dəyişməz qalan kəmiyyətlərə hərəkət inteqralları deyilir. (42.1) tənliyindən görünür ki, f kəmiyyətinin hərəkət inteqralı olamsı şərtini ($\frac{df}{dt}=0$)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\}=0 \tag{42.3}$$

şəklində ifadə etmək olar. Əgər hərəkət inteqralı zamandan aşgar şəkildə asılı olmasa onda alırıq ki,

$$\{H,f\}=0 \tag{42.4}$$

yəni onun Hamilton funksiyası ilə Puasson mötərizəsi sıfır olmalıdır.

İxtiyari f və g kəmiyyətləri üçün Puasson mötərizəsi (42.2) yə analoji olaraq

$$\{fg\}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) \tag{42.5}$$

formasında təyin olunur. Puasson mötərizələrinin, onların təyinindən asanlıqla çıxarılan aşağıdakı xassələri var. Puasson mötərizəsində funksiyaların yerini dəyişdikdə işarə dəyişir, funksiyalardan biri sabit olarsa mötərizə sıfır olur.

$$\{f,g\}=-\{g,f\} \tag{42.6}$$

$$\{f,c\}=0 \tag{42.7}$$

Sonra

$$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1g\}+\{f_2g\} \tag{42.8}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2 g\} + f_2\{f_1 g\} \tag{42.9}$$

Puasson mötərizəsindən zamana görə xüsusi törəmə alsaq

$$\frac{\partial}{\partial t}\{fg\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t} g\right\} + \left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \tag{42.10}$$

Əgər f və g funksiyalarından biri impuls və koordinatın biri ilə üst-üstə düşərsə, onda

$$\{fq_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \tag{42.11}$$

$$\{fp_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \tag{42.12}$$

alınır. Məsələ (42.11) düsturunu (42.5) düsturunda $g = q_k$ yazsaq alırıq. Bu halda $\frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ki}$, $\frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0$ olduğundan cəmləmə bir həddə bərabər olur.

(42.11) və (42.12) tənliklərindən f funksiyasını xüsusi halda q_i və p_i-yə bərabər qılsaq

$$\{q_i q_k\} = 0, \qquad \{p_i p_k\} = 0 \qquad \{p_i q_k\} = \delta_{ik} \tag{42.13}$$

ifadəsini alırıq.

Üç funksiya arasında təyin olunmuş Puasson mötərizələri arasında

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h(fg)\} = 0 \tag{42.14}$$

münasibət vardır. Buna Yakobi eyniliyi deyilir.

Bunu isbat etmək üçün aşağıdakını qeyd edək. (42.5) düsturuna görə $\{f, g\}$ Puasson mötərizəsi həmin funksiyalarının birinci tərtib törəmələrinin bircins funksiyalarıdır. Ona görə, məsələ, $\{h\{f, g\}\}$ ifadəsi f və g funksiyalarının ikinci tərtib törəmələrinin xətti bircins funksiyasıdır. (42.14) ifadəsinin sol tərəfi birlikdə f, g, h funksiyalarının ikincisi tərtib törəmələrinin xətti biricns funksiyasıdır. f-ın ikinci tərtib törəməsi daxil olan həddləri bir toplayaq. Birinci mötərizəyə belə hədd daxil olmur-0 yalnız f-ın birinci tərtib törəməsindən asılıdır. İkinci və üçüncü həddlərin cəmini D_1 və D_2 diferensial operatorlarını daxil etməklə.

$$D_1(\varphi) = \{g\varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h\varphi\}$$

şəkildə yazaq.

Onda

$$\{g\{hf\}\} + \{h(fg)\} = \{g\{hf\}\} - \{h(gf)\} = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1 D_2 - D_2 D_1) f$$

Ancaq asanlıqla görmək olar ki, xətti diferensial operatorların bu növ kombinasiyaları f-ın ikinci tərtib törəmələrindən asıllı ola bilməzlər. Doğrudan da, xətti diferensial operatorların ümumi forması

$$D_1=\sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k},\quad D_2=\sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

şəklində olur. Burada ξ_k və η_k funksiyaları $x_1, x_2 \ldots$ dəyişənlərinin ixtiyari funksiyalarıdırlar. Onda

$$D_1 D_2=\sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}+\sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$D_2 D_1=\sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}+\sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

və onların hasillərinin fərqi

$$D_1 D_2-D_2 D_1=\sum_{k,l}\left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}-\eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

yenə də birinci tərtib törəmədən asılı olan operatordur. Beləliklə, (42.14) bərabərliyinin sol tərəfindən f-ın ikinci tərtib törəməsi daxil olan həddlərin hamısı ixtisar olunur. Bunun g və h funksiyalarına da aid olduğundan sol tərəf sıfıra bərabər olur.

Puasson mötərizələrinin vacib xassəsi Puasson teoremi adlanır: f və g funksiyaları hərəkət inteqrallarıdırsa, onda onların Puasson mötərizəsidə $\{f, g\}$ hərəkət inteqralıdır.

$$\{fg\}=const \tag{42.15}$$

Bu teoremin isbatı f və g funksiyaları zamandan aşgar şəkildə asılı olmadığı halda çox sadədir. Yakobi eyniliyində $h=H$ yazsaq alırıq ki,

$$\{H\{fg\}\}+\{f\{gH\}\}+\{g\{Hf\}\}=0$$

Buradan görünür ki, əgər $\{Hg\}=0$ və $\{Hf\}=0$ olarsa onda $\{H\{fg\}\}=0$. Bunu da isbat etmək lazım idi.

Əgər f və g inteqralları zamandan aşgar şəkildə asılı olarlarsa, onda (42.1)-dən alırıq ki,

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\}+\{H\{fg\}\}$$

(42.10) düsturundan istifadə édərək və $\{H\{f, g\}\}=0$ həddlərini Yakobi eyniliyinə görə qalan iki həddin cəmi şəklində yazaraq alırıq ki,

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\}+\left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{f\{Hg\}\}-\{g\{Hf\}\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{Hf\}, g\right\}+\left\{f \frac{\partial g}{\partial t}+\{Hg\}\right\}$$

və ya

$$\frac{d}{dt}\{fg\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\}+\left\{f \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \tag{42.16}$$

Buradan isə Puasson teoreminin ümumi halda isbatı aşgardır. Hərəkət inteqrallarının sayı məhdud olduğundan (2S-1, S-sərbəstlik dərəcə sayı). Aydındır ki, Puasson teoremindən istifadə edərək həmişə yeni hərəkət inteqralı alınmayacaq. Bəzi hallarda sadəcə trivial nəticə alına bilər- Puasson mötərizəsi sadəcə olaraq sabit ola bilər. Başqa hallarda alınan ineqral əvvəlki f və g inteqrallarının funksiyası ola bilər. Baxdığımız hallar olmadıqda Puasson teoremi yeni inteqral verir.

Məsələlər.

1.Maddi nöqtənin $\vec{P}$ impulsu və $\vec{M}=[\vec{r}\vec{P}]$ impuls momenti dekart komponentləri arasında Puasson mötərizələrini hesablayın.

Həlli (42.12) düsturu vasitəsilə alırıq ki,

$$\{M_x P_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(yP_z - zP_y) = -P_z$$

və analoji üsulla iki düstur

$$\{M_x P_x\} = 0, \qquad \{M_x P_z\} = P_y$$

Qalan Puasson mötərizələri buradan x, y, z indekslərinin dövrü yerdəyişməsindən alınır.

2. $\vec{M}$ vektoru komponentləri arasındakı Puasson mötərizələrini hesablayın.

Həlli:

$$\{M_x M_y\} = -M_z, \qquad \{M_y M_z\} = -M_x, \qquad \{M_z M_x\} = -M_y$$

3. φ-nin koordinat və impuls ixtiyari skalyar funksiyası olduğu halda $\{\varphi, M_z\} = 0$ olduğunu göstərir.

Həlli: φ skalyar funksiyası $\vec{r}$ və $\vec{P}$ vektorlarının komponentlərindən yalnız r^2, P^2 və $(\vec{r}\vec{P})$ kombinasiyalarından asılı ola bilər. Ona görə də

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (r^2)} 2\vec{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\vec{P}\vec{r})} \vec{P}$$

və analoji olaraq $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{P}}$ üçün yaza bilərik. Tələb olunan ifadə (42.5) düsturu vasitəsilə yuxarıdakı düsturu nəzərə almaqla isbat edilir.

4. $\{\vec{f}, M_z\} = [\vec{f}\vec{n}]$ olduğunu göstərir. $\vec{f}$ koordinat və impulsların vektoru funksiyası, $\vec{n}$ isə z oxu istiqamətində vahid vektordur.

Həlli: İxtiyari $\vec{f}(\vec{r}, \vec{P})$ vektoru $\vec{f} = \vec{r}\varphi_1 + \vec{P}\varphi_2 + [\vec{r}\vec{P}]\varphi_3$ şəklində yazıla bilər. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ -isə skalyar funksiyalarıdır. Axtarılan münasibətləri (42.9), (42.11) və (42.12) düsturları və üçüncü məsələdəki düsturlar vasitəsilə birbaşa hesablama ilə yoxlamaq olar.

§ 43 Təsir koordinatın funksiyası kimi

Ən kiçik təsir prinsipini şərh edərkən

$$S=\int_{t_1}^{t_2} Ldt \tag{43.1}$$

inteqralından istifadə etdik. Burada inteqrallama maddi nöqtənin t_1 və t_2 anında $q^{(1)}$ və $q^{(2)}$ nöqtələrində olduğu trayektoriya üzrə aparılır. Təsir inteqralın variasiyaya uğratdıqda intervalın yaxın trayektoriyalar üzrə qiymətləri $q(t_1)$ və $q(t_2)$ nöqtələrində müqaisə olunurdu. Bu trayektoriyalardan yalnız biri S-intervalını minimum edən trayektoriya həqiqi hərəkətə uyğun gəlirdi.

İndi isə təsir anlayışına başqa mənada baxaq. Daha doğrusu S-kəmiyyətinə həqiqi trayektoriya üzrə hərəkəti xarakterizə edən kəmiyyət kimi baxıb, onun qiymətlərini eyni başlanğıca $q(t_1)=q^{(1)}$ malik olan, lakin t_2 anında müxtəlif nöqtələrdən keçən trayektoriyalar üzrə müqayisə edəcəyik. Başqa sözlə həqiqi trayektoriyalar üzrə təsir inteqralına inteqralın yuxarı sərhəddindəki koordinatın funksiyası kimi baxacağıq.

Bir trayektoriyadan ona yaxın olan digərinə keçdikdə təsirin dəyişməsi (bir sərbəstlik dərəcəsi olduğu halda) (42.5) tənliyin vasitəsilə verilir.

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

Həqiqi hərəkətin trayektoriyası Laqranj tənliyini ödədiyindən buradakı inteqral sıfır olur. Birinci həddə isə aşagı sərhəddə $\delta q(t_1)=0$, yuxarı sərhəddə isə $\delta q(t_2)=\delta q$ işarə edək. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=P$ ilə işarə edib alırıq ki, $\delta S=P\delta q$ və ya ümumi halda istənilən sayda sərbəstlik dərəcəsi olduğu halda

$$\delta S=\sum_i P_i\delta q_i \tag{43.2}$$

Buradan isə alınır ki, təsir funksiyasının koordinata görə məxsusi törəməsi uyğun impulsa bərabərdir:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i \tag{43.3}$$

Analoji olaraq təsir inteqralını zamanın aşgar funksiyası kimi də başa düşmək olar. Bu zaman eyni bir zaman t_1 anında eyni nöqtədən $q^{(1)}$ başlayıb, eyni bir nöqtədə $q^{(2)}$ müxtəlif zaman anlarında $t_2=t$ qurtaran trayektoriyalara baxmaq lazımdır.

Təsir ineqralının təyininə əsasən onun zamana görə tam törəməsi

$$\frac{dS}{dt}=L \tag{43.4}$$

Digər tərəfdən S funksiyasına yuxarıda şərh olunan mənada koordinatı və zamanın funksiyası kimi baxsaq və (43.4) düsturundan istifadə etsək alırıq ki,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i$$

Hər iki ifadəni müqayisə etdikdə

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

olduğunu və ya nəhayət

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \qquad (43.5)$$

tənliyini alırıq.

(43.3) və (43.5) tənliklərini birlikdə

$$dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt \qquad (43.6)$$

(43.1) ifadəsinin yuxarı sərhəddinin koordinat və zamanına görə tam diferensial şəklində yaza bilərik. İndi isə fəzz edək ki, inteqrallamanın həm aşağı sərhəddin həm də yuxarı sərhəddin koordinat və zamanı dəyişir. Aydındır ki, bu halda S-in dəyişməsi aşağı və yuxarı sərhəddəki uyğun dəyişmələrin fərqinə bərabər olacaqdır.

$$dS = \sum_i p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} \qquad (43.7)$$

Bu ifadə özü-özlüyündə göstərir ki, sistemin hərəkəti zamanı olan xarici təsirin xarakterindən asılı olmayaraq onun son vəziyyəti əvvəlki vəziyyətinin ixtiyari funksiyası ola bilməz. Yalnız elə hərəkətlər mümkündür ki, (43.7) tənliyinin sağ tərəfi tam diferensial olsun. Beləliklə, Laqranj funksiyasının konkret formasından asılı mümkün olan hərəkətə məhdudiyyət qoyur. Xüsusi halda, fəzanın bir nöqtəsindən çıxan zərrəciklər dəstəsinin bəzi qanunauyğunlarını (xarici sahənin formasından asılı olmayaraq) təyin etməyin mümkün olduğunu göstərir. Bu qanunauyğunluqların öyrənilməsi həndəsi optikanın mövzusudur[1].

Qeyd etmək lazımdır ki, Laqranj tənliklərini təsir inteqralını (43.6) düsturuna əsasən

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - Hdt \right) \qquad (43.8)$$

formasında yazdıqdan sonra onun minimumluq şərtindən almaq olur. Bu halda koordinat və impulsların variasiyalarını asılı olmayan kəmiyyətlər kimi qəbul

[1] Bax "Teoriya polya" VII fəsil

etməliyik. Yenə də sadəlik yalnız bir koordinatın (və bir impulsun) olduğu halda təsirin variasiyasını yazaq

$$\delta S = \int \delta p dq + p d\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p dt$$

İkinci həddin çevrilməsi (hissə-hissə inteqrallama)

$$\delta S = \int \delta p\left(dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt\right) + p\delta q\Big| - \int \delta q\left(dp + \frac{\partial H}{\partial q}dt\right)$$

ifadəsini verir. Inteqrallama sərhədlərində $\delta q = 0$ qəbul etməliyik. Ona görə inteqrallamada alınan hədd itir. Qalan hədd isə δq və δp variasiyalarının asılı olmadığı zaman ayrı-ayrı həddlərin sıfır olduğu halda alınır

$$dq = \frac{\partial H}{\partial P}dt, \qquad dP = -\frac{\partial H}{\partial q}dt$$

yəni dt-yə böldükdən sonra Hamilton tənliklərini alırıq.

§ 44 Mopertyui prinsipi

Mexaniki sistemin hərəkəti ən kiçik təsir prinsipi vasitəsilə tam həll olunur. Bu prinsipdən alınan hərəkətə tənliyini həll etməklə həm trayektoriyanın formasını həm də maddi nöqtənin trayektoriya üzərində vəziyyətinin zamandan asılılığını təyin etmək olur.

Əgər yalnız trayektoriyanın tapılması kimi dar məsələni həll etməklə kifayətlənsək (məsələnin zamandan asılılığını kənara qoyub), onda məlum olur ki, ən kiçik təsir prinsipinin sadələşdirilmiş formasından istifadə etmək kifayətdir.

Tutaq ki, Laqranj funksiyası və bununla bərabər Hamilton funksiyası zamandan aşgar şəkildə asılı deyil, yəni sistemin enerjisi saxlanır

$$H(p,q) = E = comst$$

Ən kiçik təsir prinsipinə görə təsirin variasiyası zaman və koordinatın başlanğıc və son qiymətlərində sıfıra bərabər olur. Əgər zamanın t son andakı qiymətinin variasiya olunduğunu qəbul etsək (koordinatın verilmiş başlanğıc və son nöqtələrində qiymətlərində) onda alırıq ki, ((43.7)-lə müqayisə et)

$$\delta S = -H\delta t \tag{44.1}$$

İndi isə sistemin bütün virtual hərəkətlərini deyil, yalnız enerjinin saxlanması qanununu ödəyən hərəkətlərini müqayisə edəcəyik. Belə hərəkətlər üçün (44.1) tənliyindən H-funksiyasını sabit E ilə əvəz edə bilərik. Onda alırıq ki,

$$\delta S + E\delta t = 0 \qquad (44.2)$$

Təsir inteqralını (43.8) formasından yazıb yenə də H-i E-ilə əvəz etsək.

$$S = \int \sum_i p_i dq_i - E(t - t_0) \qquad (44.3)$$

olduğunu görərik. Bu ifadədəki birinci həddi

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i \qquad (44.4)$$

çox zaman qisaldılmış təsir adlandırırlar. (44.3) ifadəsini (44.2) yerinə yazsaq alırıq ki,

$$\delta S_0 = 0 \qquad (44.5)$$

Beləliklə, qısaldılmış təsir, hər hansı sonlu nöqtədən ixtiyari zaman anında keçən və enerjinin saxlanması qanunu ödəyən istənilən trayektoriyaya nəzərən minimum qiymət alır. Belə variasiya prinsipindən istifadə etmək üçün əvvəlcədən (44.4) ifadəsində inteqralaltı ifadəni və impulsu q koordinatı və dq diferensialı ilə ifadə etmək lazımdır. Bunun üçün impulsun təyin düsturu

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \qquad (44.6)$$

və enerjinin saxlanması

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E \qquad (44.7)$$

tənliklərindən istifadə etmək lazımdır. Axırıncı tənlikdən dt diferensialını q koordinatı və dq diferensialı ilə ifadə edib. (44.6)-da yerinə yazsaq impulsu q və dq ilə ifadə etmiş olarıq. Burada E parametr rolunu oynayacaq. Bu üsulla alınan ən kiçik təsir prinsipini adətən Mopertyi prinsipi adlandırırlar (Bunun dəqiq ifadəsi Eyler və Laqranj tərəfindən verilməsinə baxmayaraq).

Həmin prinsipi aşgar şəkildə Laqranj funksiyasının kinetik və potensial enerjiləri fərqi şəklində yazılmış adi (5.5) formasından alaq.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i q_k - U(q)$$

Bu zaman impulslar

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q)\dot{q}_k$$

enerji isə

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k + U(q)$$

olurlar. Axırıncı bərabərlikdən alırıq ki,

$$dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik} dq_i dq_k}{2(E-U)}} \tag{44.8}$$

və həmin ifadəni

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{dq_k}{dt} dq_i$$

düsturunda yerinə yazsaq qısaldılmış təsiri

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)\sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k} \tag{44.9}$$

şəklində alırıq.

Xüsusi halda bir maddi nöqtə üçün kinetik enerji

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$$

(burada m-nöqtənin kütləsi, dl-isə trayektoriya elementinin uzunluğu) və trayektoriyanın formasını təyin etmək üçün variasiya prinsipi

$$\delta \int \sqrt{2(E-U)}dl = 0 \tag{44.10}$$

şəklində olur. Burada ineqral fəzanın verilmiş iki nöqtəsi arasında aparılır. Bu formada Yakobi tərəfindən yazılmışdı.

Zərrəciyin sərbəst hərəkəti zamanı $U = 0$ olur və (44.10) tənliyi sadə nəticə verir

$$\delta \int dl = 0$$

yəni zərrəcik ən qısa yolla hərəkət edir-düz xətt boyunca.

Yenə də təsirin (44.3) ifadəsinə qayıdaq və onun variasiyasını həm də E-yə görə aparaq

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E - (t - t_0)\delta E - E\delta t$$

Bunu (44.2) də yerinə yazsaq alırıq ki,

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0 \tag{44.11}$$

(44.9) formasında yazılmış qısaldılmış təsir üçün bu bərabərlik

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik} dq_i dq_k}{2(E-U)}} = t - t_0 \tag{44.12}$$

ifadəsinə gətirir. Bu isə (44.8) tənliyinin inteqralından başqa bir şey deyil. Bu ifadə trayektoriyanın tənliyi ilə birlikdə hərəkəti tam təyin edir.

Məsələ

(44.10) variasiya prinsipindən trayektoriya üçün diferensial tənlik alın.

Həlli: variasiya almaqla

$$\delta\int\sqrt{E-U}dl=-\int\left\{\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\frac{\delta\vec{r}}{2\sqrt{E-U}}dl-\sqrt{E-U}\frac{d\vec{r}}{dl}d\delta\vec{r}\right\}$$

ifadəsini yaza bilərik. İkinci həddə $dl^2=dr^2$ olduğu nəzərə alınmışdır. Ona görə də $dld(\delta l)=drd(\delta r)$. Bu həddə hissə-hissə intqral alıb, inteqral altı ifadədə $\delta\vec{r}$-in əmsalını sıfıra bərabər etməklə trayektoriya üçün

$$2\sqrt{E-U}\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\frac{d\vec{r}}{dl}\right)=-\frac{\partial U}{\partial r}$$

diferensial tənliyini alarıq. Tənliyin sol tərəfində törəməni alıb və $\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$ qüvvəsini daxil etsək tənliyi

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}=\frac{\vec{F}-(\vec{F}t)t}{2(E-U)}$$

şəklində yaza bilərik. Burada $t=\frac{d\vec{r}}{dl}$ trayektoriyaya toxunan vahid vektordur. $\vec{F}-(\vec{F}t)t$ fərqi isə $\vec{F}$ qüvvəsinin trayektoriyaya normal olan $\vec{F}_n$ komponentidir. $\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}=\frac{dt}{dl}$ törəməsi diferensial həndəsədən məlum olduğu kimi $\vec{n}/R$-ə bərabərdir. R trayektoriyanın əyrilik radiusu $\vec{n}$ trayektoriyanı baş normalıdır. E-U fərqinin yerinə $\frac{mv^2}{2}$ yazsaq alırıq ki,

$$\vec{n}\frac{mv^2}{2}=\vec{F}_n$$

Buda əyri trayektoriya üzrə hərəkət zamanı yaranan normal tərilin ifadəsinə uyğundur.

§ 45 Kanonik çevirmələr

Ümumiləşmiş q koordinatlarının seçilməsi birqiymətli deyil. Ümumiləşmiş koordinatlar olaraq sistemin fəzadakı vəziyyətini birqiymətli təyin edən istənilən S dənə kəmiyyət seçilə bilər. Laqranj tənliyinin (26) forması bu seçimdən asılı deyil. Bu mənada deyirələr ki, Laqranj tənlikləri $q_1q_2\dots q_s$ koordinatlarından Q_1,Q_2 keçidə nəzərən invariantdırlar. Yeni Q koordinatları köhnə q koordinatlarının funksiyalarıdır. Bu zaman onları elə seçək ki, həmin əlaqə aşgar şəkildə zamandan da asılı olsun. Yəni söhbət

$$Q_i=Q_i(q,t) \qquad (45.1)$$

şəklindəki çevirmələrdən gedir (bunlara bəzən nöqtəvi çevirmələr də deyirlər).

Aydındır ki, (45.1) çevirmələri zamanı Laqranj tənliklərilə yanaşı Hamilton tənlikləri də (40.4) öz formalarını dəyişmir. Lakin axırıncılar daha geniş çevirmələrə ümumiləşmiş impulsların P ümumiləşmiş koordinatlarla q bərabər eyni hüquqlu asılı olmayan dəyişənlər rolunu oynaması ilə əlaqədardır. Ona görə də çevirmə anlayışı elə genişləndirilməlidir ki, o 2S dənə asılı olmayan kəmiyyətlərin hamısını çevrilməsini əhatə etsin. Yəni köhə p,q dəyişənlərilə yeni Φ, Q dəyişənləri arasında əlaqə yaratsın

$$Q_i = Q_i(p,q,t), \qquad P_i = P_i(p,q,t) \tag{45.2}$$

Mümkün olan çevirmələr sinfinin bu cür genişlənməsi Hamilton metodunun ən mühüm üstünlüklərindən biridir.

Lakin ixtiyari (45.2) çevirmələri zamanı hərəkət tənlikləri öz kanonik formalarını saxlamırlar. İndi isə yeni koordinatlarda tənliklərin

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial \Phi_i}, \qquad \dot{\Phi}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{45.3}$$

formalarını saxlanması üçün çevirmələrin ödədiyi şərtləri tapaq. H'-yeni Hamilton funksiyasıdır. Belə çevirmələrə kanonik çevirmələr deyilir.

Kanonik çevirmələr düsturunu aşağıdakı üsulla almaq olar. §43 axırında göstərdik ki, Hamilton tənliklərinni

$$\delta\int\left(\sum_i p_i dq_i - Hdt\right) = 0 \tag{45.4}$$

şəklində yazılmış ən kiçik təsir prinsipindən alına bilər (bu zaman koordinat və impulsların hamısı asılı olmadan variasiya olunur). Yeni koordinat və impulsların da Hamilton tənliklərini ödəməsi üçün onlardan ən kiçik təsir prinsipi

$$\delta\int\left(\sum_i P_i dQ_i - H'dt\right) = 0 \tag{45.5}$$

ödəməlidirlər. (45.4) və (45.5) ən kiçik təsir prinsipləri yalnız onların inteqralaltı ifadələri bir-birindən p, q, t-dən asılı funksiyanın zamana görə tam diferensialı qədər fərqləndikləri zaman bir-birinə ekvivalentdirlər. Bu halda inteqralların variasiyası zamanı onların fərqi əhəmiyyət kəsb etmir (F funksiyasının inteqrallama sərhəddindəki qiymətlərin fərqi).

Beləliklə

$$\sum p_i dq_i - Hdt = \sum_i P_i dQ_i - H'dt + dF$$

olmalıdır. Hər bir kanonik çevirmə özünün funksiyası ilə xarakterizə olunur. Buna çevirmənin yaradıcı funksiyası deyilir.

Alınan ifadəni

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H)dt \qquad (45.6)$$

şəklində yazsaq, görürük ki,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (45.7)$$

Bu zaman F funksiyasının köhnə və yeni koordinatlardan və zamandan asılı olduğu qəbul olunur: $F = F(q,Q,t)$. F funksiyası məlum olduqda (45.7) ifadələri köhnə (q,p) və yeni (P,Q) dəyişənləri arasında əlaqə yaradır və həmdə yeni Hamilton funksiyasını təyin etmək üçün ifadə verir.

Ola bilər ki, yaradıcı funksiyanı köhnə koordinat q yeni P impulsun funksiyası kimi etmək daha sərfəli olsun. Bu halda kanonik çevirmənin yaradıcı funksiyasını tapmaq üçün (45.6) düsturunda Lejandr çevirməsi aparmaq lazımdır. Yəni həmin ifadəni

$$d(F + \sum P_i Q_i) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt$$

şəklində yazaq. Bu ifadənin sol tərəfində diferensial işarəsi altında olan ifadə q və P dəyişənlərindən asılı yeni yaradıcı funksiyadır. Həmin funksiyanı $\Phi(q,P,t)$ ilə işarə etsək alırıq ki[2],

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \qquad Q_i = -\frac{\partial F}{\partial P_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (45.8)$$

Analoji yolla P, Q və p, p dəyişənlərindən asılı yaradıcı funksiyalara keçmək olar.

Qeyd edək ki, yeni və köhnə Hamilton funksiyaları arasında əlaqə eyni formada olur: $H' - H$ fərqi yaradıcı funksiyanın zamana görə xüsusi törəməsi ilə ifadə olunur. Xüsusi halda yaradıcı funksiya zamandan aşgar şəkildə asılı olmazsa $H' = H$ olur. Başqa sözlə bu halda yeni H' Hamilton funksiyasını almaq üçün köhnə Hamilton funksiyasında p,q dəyişənlərini P,Q dəyişənlərilə ifadə etmək lazımdır.

Kanonik çevirmələrin genişliyi Hamilton metodunda q və p dəyişənlərinin əvvəlki anlayışlarını kifayət qədər zəyiflədir. (45.2) tənliyi P və Q dəyişənlərinin hər birini q və p ilə iafdə etdiyindən. Q dəyişəni əvvəlki kimi təmiz koordinat dəyişəni olmur. İki qrup dəyişənlər arasındakı fərq aradan götürülür. Bu hal $Q_i = p_i$, $P_i = q_i$[3] çevirməsi zamanı özünü əyani olaraq göstərir. Bu çevirmə kanonik tənliklərin formasını dəyişmir, sadəcə olaraq koordinat və impulsların adlarını dəyişdirir.

---

[2] Əgər yaradıcı funksiyanı $\Phi = \sum_i f_i(q,t)P_i$ şəklində seçsək ($f_i(q,t)$ -ixtiyari funksiyadır). Onda çevirməni $Q_i = f_i(q,t)$ şəklində alırıq, yəni yeni koordinatlar yalnız köhnə koordinatların və zamanın funksiyası olur. Bu nöqtəvi çevirmələrdir. Təbii olaraq bu kanonik çevirmələrin xüsusi halı olur.

[3] Bu çevirmənin yaradıcı funksiyası $F = \sum q_i Q_i$ -dır.

Hamilton metodunda p və q dəyişənlərinin adlarının bu cür şərti olduğuna görə onları kanonik qoşma dəyişənlərdə adlandırırlar.

Kanonik qoşmalıq şərtini Puasson mötərizəsi ilə ifadə etmək olar. Bunu üçün əvvəlcə Puasson mötərizələrinin kanonik çevirmələrə nəzərən invariant qaldıqlarını isbat edək.

Tutaq ki, $\{f,g\}_{p,q}$ törəmələrin p və q –yə görə aparıldığı Puasson mötərizəsi $\{f,g\}_{P,Q}$ isə törəmələrin P və Q-yə görə aparıldığı Puasson mötərizəsidir. Onda

$$\{fg\}_{p,q} = \{fg\}_{P,Q} \tag{45.9}$$

Bu münasibətin doğruluğunu kanonik çevirmə vasitəsilə hesablama vasitəsilə göstərmək olar. Lakin hesablamadan istifadə etmədən aşağıdakı mülahizələrdən də istifadə edərək inanmaq olar.

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, (45.7) və (45.8) kanonik çevirmələrdə zaman parametr rolunu oynayır. Ona görə həmin ifadəni f və g kəmiyyətlərinin zamandan aşgar asılı olmadığı halda isbat etsək onda ümumi halda da isbat etmiş oluruq. İndi g kəmiyyətini hər hansı sistemin Hamilton funksiyası olduğunu, tam formal mənada qəbul edək. Onda (42.1) düsturuna görə $\{f,g\}_{p,q} = -\frac{df}{dt}$. Lakin $\frac{df}{dt}$ törəməsi baxdığımız fiktiv sistemin hərəkətinin xarakterindən asılı ola bilməz. Bu səbəbdən də Puasson mötərizəsi bu və ya digər koordinat seçilməsindən asılı ola bilməz.

(42.13) düsturundan və (45.9) teoremindən alırıq ki,

$$\{Q_iQ_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_iP_k\}_{p,q} = 0, \quad \{P_iQ_k\}_{p,q} = \delta_{ik} \tag{45.10}$$

Bu ifadələr Puasson mötərizələri vasitəsilə yazılmış $p,q \to P,Q$ dəyişənlərinə keçidi verən çevirmənin kanonik olması şərtidir.

Maraqlı olar qeyd etsək ki, p,q dəyişənlərinin hərəkət zamanı dəyişənlərinə kanonik çevirmə kimi baxa bilərik. Bu müddəanın mənası aşağıdakıdır. Tutaq ki, q_t və p_t kanonik dəyişənlərin t anındakı qiymətləridir. $q_{t+\tau}$ və $p_{t+\tau}$ onların $t+\tau$ anındakı qiymətləridir. Axırıncılar əvvəlkilərin və τ intervalının parametr kimi funksiyalarıdır.

$$q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau), \qquad p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau)$$

Bu düsturlara q_t və p_t parametrlərindən $q_{t+\tau}$ və $p_{t+\tau}$ dəyişənlərinə çevirmə düsturları kimi baxsaq, onda həmin çevirmə kanonik çevirmə olacaqdır. q_t və $q_{t+\tau}$ nöqtələrindən t və $t+\tau$ anlarında keçən həqiqi trayektoriya üzrə $S(q_{t+\tau}, q_t)$ təsirin $dS = \sum(p_{t+\tau}dq_{t+\tau} - p_t dq_t)$ diferensialının ifadəsindən aydındır ((43.7)-lə müqayisə et). Bu düsturu (45.6) ilə müqayisəsi göstərir ki, S çevirmənin yaradıcı funksiyasıdır.

§ 46 Liuvill teoremi

Mexaniki hadisələrin həndəsi təsviri üçün çox halda faza fəzası adlanan 2S ölçülü fəzadan istifadə edilir. Həmin fəzanın koordinat oxlarında S dənə ümumiləşmiş impulsların qiymətləri qeyd olunur. Bu fəzanın hər bir nöqtəsi mexaniki sistemin bir halına cavab verir. Sistemin hərəkəti zamanı onu göstərən faza nöqtəsi faza fəzasında müəyyən xətt çıxır. Həmin əyri faza trayektoriyası adlanır.

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

diferensialları hasilinə faza fəzasının "həcm elementi" kimi baxmaq olar. İndi faza fəzasının hər hansı oblastı üzrə $\int d\Gamma$-ya baxaq. Bu həmin oblastın həcmini verir. Bu elementik kanonik çevirmələrə nəzərən invariant qaldığını göstərək. Əgər p, q dəyişənlərindən P,Q dəyişənlərinə kanonik çevirmə aparsaq onda p,q və P,Q oblastlarına uyğun olan həcmlər eyni olacaqlar

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s \tag{46.1}$$

Məlum olduğu kimi çox ölçülü intervallarda inteqrallama dəyişənlərinin çevrilməsi

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_s dP_1 \dots dP_s = \int \dots \int Dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$$

$$D = \frac{\partial(Q_1 \dots, Q_s, P_1 \dots, P_s)}{\partial(q_1 \dots, q_s, p_1 \dots, p_s)} \tag{46.2}$$

Burada D çevirmə Yakobianı adlanır. Buna görə də (46.1) teoreminin isbatı, ixtiyari kanonik çevirmənin D yakobianının vahidə bərabər olmasının isbatına gətirilir

$$D = 1 \tag{46.3}$$

Yakobianların məlum xassələrindən istifadə edək. Yakobianların bu xassəsi onlardan kəsirlər kimi istifadə etməyə imkan verir. "sürət" və "məxrəc"-i $\partial(q_1 q_2 \dots q_s, P_1 P_2 \dots P_s)$-yə bölərək alırıq ki,

$$D = \frac{\partial(Q_1 \dots, Q_s, P_1 \dots, P_s)}{\partial(q_1 \dots, q_s, P_1 \dots, P_s)} \Bigg/ \frac{\partial(q_1 \dots, q_s, p_1 \dots, p_s)}{\partial(q_1 \dots, q_s, P_1 \dots, P_s)}$$

Yakobianların digər xassəsinə görə "sürət" və "məxrəc"-ində eyni ifadələr olan yakobian, az dəyişənlərdən asılı yakobianlara çevrilirlər. Bu zaman itən dəyişənlərə görə aparılan diferensiallamalar zamanı eyni sabitə bərabər götürülməlidir. Ona görə

$$D = \left\{ \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_s)}{\partial(q_1, \dots, q_s)} \right\}_{P=const} \Bigg/ \frac{\partial(p_1, \dots, p_s)}{\partial(P_1, \dots, P_s)} \tag{46.4}$$

Bu ifadənin sürətində olan yakobiana baxaq. Təyinə görə bu $\partial Q_i / \partial q_k$ elementlərindən düzəldilmiş s ranqlı determinanta bərabərdir (i-ci sətir cə k-cı sütun elementi). Kanonik çevirməni (45.8) formasındakı $\Phi(q, P)$ yaradıcı funksiya vasitəsilə aparaq.

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}.$$

Eyni qayda ilə (46.4) düsturunun məxrəcdəki determinantı i,k elementi $\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_k \partial P_i}$.

Deməli bu determinantlar sətir və sütunlarının yerlərini dəyişməklə fərqlənirlər. Deməli onlar bərabərdirlər və (46.4) nisbəti vahidə bərabərdir. Bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

İndi isə təsəvvür edək ki, faza fəzasının verilmiş hissəsinin hər bir nöqtəsi baxdığımız mexaniki sistemin hərəkət tənliklərinə uyğun olaraq yerlərini dəyişirlər. Bununla da hər bir hissə yerlərini dəyişəcəklər. Bu zaman onun həcmi dəyişməyəcək

$$\int d\Gamma = const$$

Bu müddəa (Liuvil teoremi adlanan)[4] faza fəzasının həcminin kanonik çevirmələrə nəzərən invariant qalmasından irəli gəlir və p,q dəyişənlərinin hərəkət zamanı dəyişmələrinə kanonik çevirmə zamanı dəyişmə kimi baxa bilməyin nəticəsidir (əvvəlki paraqrafın axırında deyildiyi kimi).

Tamamilə analoji üsulla

$$\int\int\sum_i dq_i dp_i$$

$$\int\int\int\int\sum_{i\neq k} dq_i dp_i dq_k dp_k$$

....

inteqrallarının da kanonik çevirmələrə nəzərən invariant qaldıqlarını isbat etmək olar. Burada inteqrallama faza fəzasının ikiölçülü dörd ölçülü və s. səthləri üzrə aparılır.

§ 47 Hamilton-Yakobi tənlikləri

§43-də koordinat və zamandan asılı təsir anlayışı daxil olundu. Göstərildi ki, bu funksiyanın $S(q,t)$ zamana görə xüsusi törəməsi Hamilton funksiyası ilə

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q,p,t) = 0$$

tənliyi vasitəsilə əlaqəlidir. Onun koordinatlara nəzərən məxsusi törəmələri isə impulslarla üst-üstə düşür. Buna uyğun olaraq Hamilton funksiyasında impulsları $\frac{\partial S}{\partial q}$ xüsusi törəmələrlə əvəz etdikdə, $S(q,t)$ funksiyasının ödədiyi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1,\dots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t) = 0 \qquad (47.1)$$

[4] Bu müddəanı Liuvil teoremi adlandırmaq dəqiqsizlikdir (tərcüməçinin qeydi)

tənliyini alırıq. Bu tənlik birinci tərtibdən xüsusi törəməli diferensial tənlikdir. Bu Hamilton tənliyi adlanır.

Laqranj tənlikləri və kanonik tənliklərlə yanaşı Hamilton-Yakobi də hərəkət tənliklərini inteqrallamanın başqa bir ümumi metodunun əsasını təşgil edir.

Bu metodu şərh etməyə başlarkən, əvvəlcə yada salaq ki, xüsusi törəməli birinci tərtibdən istənilən tənlik ixtiyari funksiyadan asılı ümumi həllə malik olur. Ancaq, mexanikaya tətbiqində Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqral adlanan həlli əsas rol oynayır. Məxsusi törəməli diferensial tənliyin həlli asılı olamayn koordinatların sayı qədər asılı olmayan inteqrallama sabitlərindən asılı olarsa belə həllə tam inteqral deyilir.

Hamilton-Yakobi tənliyində asılı olmayan dəyişənlər koordinatlar və zamandır. Ona görə S sərbəstlik dərəcəsinə malik sistemin Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqralına S+1 dənə asılı olmayan sabitlər daxil olurlar. Bu zaman tənliyə $S(q,t)$ funksiyasının yalnız törəmələri daxil olduğundan ixtiyari sabitlərdən biri tam inteqrala additiv şəkildə daxil olur. Yəni Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqralı

$$S = f(t,q_1,\dots,q_s,\alpha_1,\dots\alpha_s) + A \qquad (47.2)$$

şəklində yazılır. Burada $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s$ və A ixtiyari sabitlərdir[5].

İndi isə Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqralı ilə hərəkət tənliyinin biri maraqlandıran həlli arasındakı əlaqəni aydınlaşdıraq. Bunun üçün $f(t,q,\alpha)$ funksiyası yaradıcı funksiya və $\alpha_1\dots\alpha_s$ sabitlərini yeni impulslar qəbul edərək q, p dəyişənlərindən yeni dəyişənlərə kanonik çevirmə aparaq. Yeni koordinatları $\beta_1\beta_2\dots\beta_s$-lə işarə edək. Yaradıcı funksiya köhnə koordinat və yeni impulslardan asılı olduğundan biz (45.8) düsturundan istifadə etməliyik.

[5] Hamilton-Yakobi tənliyinin ümumi həlli bizə lazım olmasa da, qeyd edək ki, tam inteqral məlum olduqda onu tapmaq olur. Bunun üçün A sabitini qalan sabitlərin ixtiyari funksiyası hesab edərək

$$S = f(t,q_1\dots q_s;\alpha_1\dots\alpha_s) + A(\alpha_1\dots\alpha_s)$$

yazaq. Buradakı α_i sabitlərini koordinat və zamanın funksiyaları kimi

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0$$

tənliyindən tapsaq, onda ümumi inteqralı ixtiyari $A(\alpha_1\dots\alpha_s)$ funksiyasından asılı olaraq tapa bilərik. Doğrudanda bu üsulla tapılan S funksiyası üçün

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$$

Ancaq $\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$ kəmiyyətləri Hamilton-Yakobi tənliyini ödəyirlər, çünki təyin etdiyimizə görə $S(t,q,\alpha)$ funksiyalsrı həmin tənliyin tam inteqralına Ona görə də həmin tənliyin $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ -ifadəsi də ödəyir.

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

f funksiyası Hamilton-Yakobi tənliyini ödədiyindən yeni Hamilton funksiyasının eyniyətlə sıfıra bərabər olduğunu görürük

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Buna görə yeni dəyişənlər üçün kanonik tənliklər $\dot{\alpha}_i = 0$, $\dot{\beta}_i = 0$ şəklində olurlar. Buradan isə alınır ki,

$$\alpha_i = const, \qquad \beta_i = const \tag{47.3}$$

Digər tərəfdən S dənə

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

tənlikləri s dənə q koordinatlarını 2s dənə α, β sabitləri və zamandan asılı funksiya kimi tapmağa imkan verir. Bununla da funksiya ümumi inteqralını tapırıq.

Beləliklə Hamilton-Yakobi metodu ilə mexaniki sistemin hərəkəti məsələsinin həlli aşağıdakı əməliyyatların aparılmasına gətirir. Hamilton-Yakobi tənliyini qururuq və həmin tənliyin (47.2) tam inteqralını tapırıq. Onları α ixtiyarı sabitlərinə görə diferensiallayıb β sabitlərinə bərabər edərək S dənə cəbri tənliklər sistemini

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{47.4}$$

alırıq. Bu tənliyi həll edərək q koordinatını zamanın və iki S dənə ixtiyari sabitlərin funksiyaları kimi tapırıq. Bundan sonra impulsların zamandan asılığını $P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ tənliklərindən tapırıq.

Əgər Hamilton-Yakobi tənliyinin tam olmayan həlli məlumdursa s-dən az inteqrallama sabitlərindən asılı həlli məlumdursa bu halda ümumi həlli tapmaq mümkün olmasa da onunn tapılması asanlaşır. Məsələn, S bir dənə ixtiyari sabitdən asılı olaraq məlumdursa onda

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = const$$

münasibəti $q_1 \ldots q_s$ dəyişmələrini zamanla əlaqələndirən bir dənə tənlik verir.

Hamilton funksiyası zamandan aşgar şəkildə asılı olmadığı halda, yəni sistem konservativ olduqda da Hamilton-Yakobi tənliyi daha sadə şəkil alır. Onda təsirin zamandan asılılığı –Et toplananı ilə təyin olunur.

$$S = S_0(q) - Et \tag{47.5}$$

(bax § 44) və bunu (47.1)-də yerinə qoyduqda $S_0(q)$ qısaldılmış təsir üçün

$$H = \left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s} \right) = E \tag{47.6}$$

Hamilton-Yakobi tənliyini alırıq.

§ 48 Dəyişənlərin ayrılması

Bir çox mühüm (əhəmiyyətli) hallarda Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqralını dəyişmələri ayırma metodu ilə almaq olur. Dəyişənlərə ayırma metodunun məğzi aşağıdakından ibarətdir.

Tutaq ki, hər hansı koordinat – (onu q_1-lə işarə edək) və ona uyğun olan $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ törəməsi Hamilton-Yakobi tənliyinə bir kombinasiya $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ şəklində, hec bir başqa dəyişəndən və zamandan asılı olmayaraq daxil olurlar.

Yəni tənlik

$$\Phi\left\{ q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \right\} = 0 \tag{48.1}$$

şəklində yazılır. Burada q_i koordinatı q_1-dən başqa qalan koordinatları göstərir. Bu halda həlli

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1) \tag{48.2}$$

cəmi şəklində axtaraq. Bu ifadəni (48.1) də yerinə yazsaq

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\} = 0 \tag{48.3}$$

tənliyini alırıq. Tutaq ki, (48.2) həll tapılmışdır. Onda onu (48.3)-də yerinə yazsaq, bu ifadə eyniyətə çevrilir. Həmin eyniyyət q_1 koordinatlarının ixtiyari qiymətində ödənilir. Aydındır ki, q_1 dəyişdikcə yalnız φ-funksiyası dəyişər, ona görə elə (48.3) ifadəsini eyniyyətə çevrilməsi φ funksiyasının sabit olmasını tələb edir. Beləliklə (48.3) tənliyi iki tənliyə

$$\varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \tag{48.4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0 \tag{48.5}$$

ayrılır. Burada α_1 ixtiyari sabitdir. Bu tənliklərdən birincisi adi diferensial tənlikdir. Bu tənliyi inteqrallamaqla $S_1(q_1)$ funksiyasını tapırıq. Bundan sonra, daha az asılı olmayan dəyişənlərdən ibarət (48.5) xüsusi törəməli diferensial tənliyini alırıq.

Əgər bu üsulla koordinatların hamısını və zamanı ayırmaq mümkün olarsa, onda Hamilton-Yakobi tənliyinin tam ineqralının tapılması kvadraturaya gətirilir. Konservativ sistem üçün faktiki olaraq söhbət (47.6) tənliyindən yalnız koordinatların ayılmasından gedir. Tamamilə ayırmadan sonra tənliyin inteqralı

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)t \tag{48.6}$$

şəklində yazılır. Burada S_k funksiyalsrının hər biri yalnız bir koordinatdan asılı olur. Tam enerji E, (47.6) tənliyində $S_0 = \sum S_k$ yazdıkdan sonra $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ sabitlərinin funksiyası kimi tapılır. Ayrılışın xüsusi halı dövrü koordinatın olduğu haldır. Dövrü koordinat q_1 aşgar şəkildə Hamilton funksiyasına və ona görə də Hamilton-Yakobi tənliyinə daxil olmur. Bu halda $\varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ funksiyası sadəcə olaraq $\frac{\partial S}{\partial q_1}$-ə çevrilir, və (48.4) tənliyindən alırıq ki, $S_1 = \alpha_1 q_1$ yəni

$$S = S'(q_i t) + \alpha_1 q_1 \tag{48.7}$$

Bu halda α_1 sabiti dövrü koordinata uyğun olan $P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}$ impulsundan başqa bir sey deyil. Qeyd edək ki, zamanın –Et şəklində konservativ sistem üçün ayrılışda “dövrü” t dəyişəninə görə ayırma metoduna uyğundur.

Beləliklə, baxdığımız hərəkət tənliklərinin inteqrallamanın dövrü koordinatlardan istifadəyə əsaslanan sadələşdirilməsi halları Hamilton-Yakobi tənliklərini ayırma metodu vasitəsilə əhatə olunur. Buraya koordinat dövrü olmadığı halda dəyişənlərə ayırmanın mümkün olduğu hallar da buraya əlavə olunur.

Bütün bunlar hamısı göstərir ki, Hamilton-Yakobi metodu hərəkət tənliyinin ümumi inteqralının tapılmasının ən güclü metodudur.

Hamilton-Yakobi tənliyində dəyişənlərə ayrılmasında əlverişli koordinatın seçilməsi çox mühümdür. Maddi nöqtənin müxtəlif xarici sahələrdə hərəkəti məsələlərində fiziki maraq kəsb edən dəyişənlərə ayırma mümkün olan koordinatlara baxaq

1. **Sferik koordinatlar**. Bu koordinatlarda (r,θ,φ) Hamilton funksiyası

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi)$$

şəklindədir. Bu halda potensial enerji

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}+\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

şəklində olduqda dəyişənlərə ayrılma mümkündür. Burada $a(r)$, $b(\theta)$, $c(\varphi)$ ixtiyari funksiyalardır. Bu ifadədəki axırıncı hədd fiziki maraq kəsb etmədiyindən onu nəzərə almadan

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2} \tag{48.8}$$

şəklində olduğu hala baxaq. Bu zaman S_0 funksiyası üçün yazılmış Hamilton-Yakobi tənliyi

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2+2mb(\theta)\right]+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2=E$$

şəklində olur. Burada φ koordinatının dövrü olduğunu alaraq tənliyin həllini

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(r)+S_2(\theta)$$

axtarsaq onda $S_1(r)$ və $S_2(\theta)$ funksiyaları üçün

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2+2mb(\theta)+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\beta$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{\beta}{2mr^2}=E$$

tənliklərini alırıq. Bu tənlikləri inteqraladıqdan sonra nəhayət alırıq ki,

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}d\theta + \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}dr \tag{48.9}$$

Burada P_4, β, E ixtiyari sabitlərdir. Alınan ifadəni onlara nəzərən diferensiallayıb digər sabitlərə bərabər etməklə hərəkət tənliyinin ümumi həllini tapırıq.

2. **Parabolik koordinatlar**. ρ, φ, z silindrik koordinatlardan ξ, η, φ parabolik koordinatlara keçid

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \qquad \rho = \sqrt{\xi\eta} \tag{48.10}$$

düsturları vasitəsilə aparılır. ξ və η koordinatları 0-dan ∞-a qədər qiymət alırlar. ξ və η-nın sabit olduğu səthlər iki fırlanma parabolik çoxluğundan ibarətdir (öz oxu simmetriya oxudur). (48.10) əlaqəsini

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \tag{48.11}$$

radiusunu daxil etməklə başqa formada da yazmaq olar.

Onda

$$\xi = r + z, \qquad \eta = r - z \tag{48.12}$$

Maddi nöqtənin ξ, η, φ koordinatlarında Laqranj funksiyasını yazaq. (48.10) ifadəsi zamana görə düfferensiallayıb

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - U(\rho, \varphi, z)$$

(silindrik koordinatlarda Laqranj funksiyası) ifadəsində yerinə yazsaq

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot\varphi^2 - U(\xi, \eta, \varphi) \tag{48.13}$$

ifadəsini alırıq. İmpulslar

$$p_\xi = \frac{m}{4\xi}(\xi + \eta)\dot\xi, \qquad p_\eta = \frac{m}{4\eta}(\xi + \eta)\dot\eta, \qquad p_\varphi = m\xi\eta\varphi$$

və Hamilton funksiyası

$$H = \frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi + \eta} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \varphi) \tag{48.14}$$

şəklində alınır.

Bu koordinatlarda dəyişənlərə ayırma mümkün olan fiziki maraq kəsb edən hal

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=\frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r} \qquad (48.15)$$

halıdır.

Burada alınan tənlik

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=E$$

dövrü φ koordinatı $P_\varphi\varphi$ formasında ayrılır. Sonra tənliyi $m(\xi+\eta)$-ya vurub həddləri qruplaşdırdıqdan sonra alırıq

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}+2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=0$$

Həlli

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(\xi)+S_2(\eta)$$

şəklində yazdıqdan sonra iki

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta$$

və bunları inteqralladəqdan sonra

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\beta}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}d\xi+\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{\beta}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}d\eta \qquad (48.16)$$

nəhayət alırıq. Burada $P_\varphi\beta, E$ inteqrallama sabitləridir.

3. **Elliptik koordinatlar**. Bu ξ,η,φ koordinatları

$$\rho=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \qquad z=\sigma\xi\eta \qquad (48.17)$$

düsturları vasitəsilə daxil edilir. σ parametri çevirmə parametridir. ξ koordinatı vahiddən ∞ kimi, η koordinatı isə -1 dən +1-ə kimi dəyişir. Əgər z oxu üzərində götürülmüş $z=\sigma$ və $z=-\sigma$[1] koordinatlı A_1 və A_2 nöqtələri arasında r_1 və r_2 məsafələrini daxil etsək ($r_1=\sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2}$, $r_2=\sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2}$) daha əyani ifadə alınır. (48.17) burada yerinə yazsaq

$$\begin{gathered} r_1=\sigma(\xi-\eta), \quad r_2=\sigma(\xi+\eta) \\ \xi=\frac{r_2+r_1}{2\sigma}, \qquad \eta=\frac{r_2-r_1}{2\sigma} \end{gathered} \tag{48.18}$$

düsturlarını alırıq. Silindrik koordinatlarda yazılmış Laqranj funksiyasının elliptik koordinatlara çevirsək

$$L=\frac{m\sigma^2}{2}\left(\xi^2-\eta^2\right)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot\eta^2}{1-\eta^2}\right)+\frac{m\sigma^2}{2}\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)\dot\varphi^2-U(\xi,\eta,\varphi) \tag{48.19}$$

ifadəsini alırıq. Buradan Hamilton funksiyası üçün

$$\begin{gathered} H=\frac{1}{2m\sigma^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left[\left(\xi^2-1\right)p_\xi^2+\left(1-\eta^2\right)p_\eta^2+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\right]+ \\ +U(\xi,\eta,\varphi) \end{gathered} \tag{48.20}$$

ifadəsini alırıq. Fiziki maraq kəsb edən hal

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2+\eta^2}=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left\{a\left(\frac{r_2+r_1}{2\sigma}\right)+b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right\} \tag{48.21}$$

halıdır $a(\xi)$ və $b(\eta)$-ixtiyari funksiyalardır. Hamilton-Yakobi tənliyindən dəyişənlərə ayırmanın nəticəsi

$$\begin{gathered} S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{\left(\xi^2-1\right)^2}}d\xi+ \\ +\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{\left(1-\eta^2\right)^2}}d\eta \end{gathered} \tag{48.22}$$

---

[1] Sabit ξ xəttləri fokusları A_1 və A_2 nöqtəsində olan

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2}+\frac{\rho^2}{\sigma^2\left(\xi^2-1\right)}=1$$

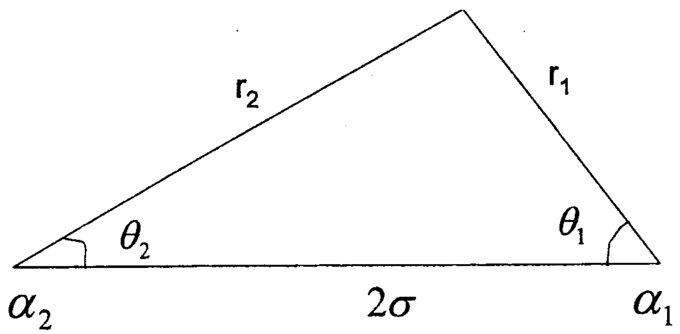
ellipsoidlər ailəsidir. Sabit η əyriləri bunlarla eyni fokusa malikdir.

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2\left(1-\eta^2\right)}=1$$

hiperboloidlərdir.

Məsələlər.

1.Zərrəciyin $U=\frac{\alpha}{r}-Fz$ sahəsindəki hərəkəti üçün Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqralını tapın. (Kulon və bircins sahələrin toplusu). Bu hərəkət üçün xarakterik olan koordinat və impulsun saxlanan funksiyasını təyin edin.



Şəkil 55

Həlli: Bu sahə (48.15) tipli sahədir. Həm də

$$a(\xi)=\alpha-\frac{F}{2}\xi^2,$$

$$b(\eta)=\alpha+\frac{F}{2}\eta^2$$

Hamilton-Yakobi tənliyinin tam inteqralı (48.16) düsturu ilə təyin olunur. $a(\xi)$ və $b(\eta)$ oradakı funksiyalardır. β-sabitinin mənasını aydınlaşdırmaq üçün

$$2\xi p_\xi^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta$$

$$2\eta p_\eta^2+m\eta(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta$$

tənliklərini yazaq. Bu tənlikləri bir-birindən çıxaq və $P_\xi=\frac{\partial S}{\partial \xi}$, $P_\eta=\frac{\partial S}{\partial \eta}$ impulslarını, silindrik koordinatlarda yazılmış $P_\rho=\frac{\partial S}{\partial \rho}$, $P_z=\frac{\partial S}{\partial z}$ impulsları ilə ifadə etsək sadə çevirmə vasitəsilə alırıq

$$\beta=-m\left[\frac{\alpha z}{r}+\frac{p_\rho}{m}\left(zp_\rho-\rho p_z\right)+\frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right]-\frac{m}{2}F\rho^2$$

kvadrat mötərizədəki ifadə təmiz kulon sahəsi üçün spesifik (xarakterik) hərəkət inteqralıdır. ((15.17) vektorunun z komponenti).

2.Həmin əməliyyatı $U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$ sahəsində (iki tərpənməz mərkəzin əmələ gətirdiyi kulon sahəsi: zərrəciklər arasındakı məsafə 2S-dir).

Həlli: Bu sahə (48.21) tiplidir. Həm də

$$a(\xi) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sigma}\xi, \qquad b(\eta) = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sigma}\eta$$

$S(\xi,\eta,\varphi,t)$ təsiri bu ifadələri (48.22) düsturunda yerinə yazmaqla alınır. β sabitinin mənası birinci məsələdə olduğu kimidir. Baxdığımız halda bu ifadənin

$$\beta = \sigma^2\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) - M^2 + 2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1 + \alpha_2\cos\theta_2)$$

saxlandığını göstərir. Burada

$$M^2 = [\vec{r}\vec{p}]^2 = p_\rho^2 z^2 + p_z^2\rho^2 + \frac{r^2 p_\varphi^2}{\rho^2} - 2z\rho p_z p_\rho$$

θ_1 və θ_2 şəkil 55-dəki bucaqdır.

§ 49 Adiabatik invariantlar

Birölçülü finit hərəkət edən və λ-parametri ilə xarakterizə olunan mexaniki sistemə baxaq. λ-parametri sistemin özünü və ya onun olduğu sahəni xarakterizə edə bilər[1].

Fərz edək ki, λ-parametri hər-hansı xarici sahənin təsiri ilə zamana gorə yavaş-yavaş (adiabatik olaraq) dəyişir. Yavaş-yavaş dəyişmə dedikdə λ-parametrinin sistemin hərəkərinin bir periodu T müddətində az dəyişməsi başa düşülür.

$$T\frac{d\lambda}{dt} << \lambda \qquad (49.1)$$

[1] İfadələrin qısalığı üçün fərz edirik ki, yalnız bir dənə belə parametr vardır. Ancaq alınan ifadələrin hamısı ixtiyari sayda parametrlər olan hala ümumiləşdirilə bilər.

λ sabit olsaydı, sistem qapalı olardı və müəyyən $T(E)$ periodu ilə və sabit E enerjisi ilə periodik hərəkət edərdi. λ-parametri dəyişən olduğu halda sistem qapalı olmayacaq və onun enerjisi saxlanmayacaq. Lakin qəbul etdiyimiz kimi λ-parametrinin zəyif dəyişməsi zamanı enerjini $\dot{E}$ dəyişmə sürətidə az olacaq. Əgər həmin sürəti period üzrə ortalasaq və bununla da (tez) rəqsi hamarlasaq, onda bu zaman alınan $\overline{\dot{E}}$ qiyməti sistemin enerjisinin ardəcəl olaraq zəif dəyişməsini göstərəcək. Bu sürət haqqında deyə bilərik ki, o λ parametrinin dəyişmə sürəti $\dot{\lambda}$ ilə mütənasib olacaq. Başqa sözlə desək, bu yuxarıda təyin olunduğu mənada dəyişən E-nin λ parametrinin funksiyası olduğu demekdir. E-nin λ-dan asılılığı E-nin və λ-nin hər-hansı kombinasiyanın sabitliyi şərti kimi ifadə oluna bilər. λ-parametrinin yavaş dəyişməsi ilə müşayət olunan hərəkət zamanı invariant qalan belə kəmiyyətlərə adiabatik invariantlar deyilir.

Tutaq ki, $H(q,p,\lambda)$ λ parametrindən asılı sistemin Hamilton funksiyasıdır. (40.5) düsturuna əsasən sistemin enerjisinin dəyişmə sürəti

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial H}{dt}=\frac{\partial H}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} \tag{49.2}$$

olur. Bu ifadənin sağ tərəfi yavaş dəyişən λ-dəyişənindən və həmdə tez-tez dəyişən q və p dəyişənlərindən asılıdır. Enerjinin sistematik dəyişməsini ayırmaq üçün, yuxarıda deyilənlərə uyğun olaraq (49.2) ifadəsini hərəkətin periodu üzrə ortalaşmaq lazımdır. Bu zaman λ-nın (və ona görə də $\dot{\lambda}$-nın) dəyişməsi az olduğundan $\dot{\lambda}$-nı cəmləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

$$\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{d\lambda}} \tag{49.3}$$

ortalanan $\frac{\partial H}{\partial\lambda}$ ifadəsinə yalnız p və q –nun funksiyası olduğu hesab edilir. λ-dan asılı olmur. Başqa sözlə ortalama λ-parametrinin verilmiş sabit qiymətinə uyğun olan hərəkət üzrə aparılır.

Ortalamanı aşgar şəkildə yazaq

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial\lambda}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial\lambda}dt$$

$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ Hamilton tənliyinə uyğun olaraq yaza bilərik.

$$dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

Bu bərabərliyin köməyi ilə zamana görə inteqrallamanı koordinata görə inteqrallama ilə əvəz edək və hərəkətin periodunun

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p} \tag{49.4}$$

şəklində yazaq. Φ -işarəsi inteqrallamanın koordinatının bir period müddətində tam dəyişməni (irəli və geri) üzrə aparılır[1]. Beləliklə (49.3) düsturu

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} dq}{\oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}} \tag{49.5}$$

formasını alır. Əvvəldə qeyd edildiyi kimi, bu ifadədə inteqrallama hərəkətin λ-nın sabit qaldığı haldakı hərəkət trayektoriyası üzrə aparılmalıdır. Bu trayektoriya boyunca Hamilton funksiyası sabit E qiymət alır, impuls isə q dəyişən koordinatın və iki asılı olmayan sabit parametrlərin E, λ funksiyası olur. Məhz impulsu belə $p(q,E,\lambda)$ funksiyası olduğunu qəbul edərək və $H(p,q,\lambda) = E$ bərabərliyini λ-parametrinə görə diferensiallasaq alırıq ki,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{və ya} \qquad \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

Bu ifadəni yuxarıdakı (49.5) inteqralında yerinə yazıb və aşağıdakı inteqralaltı funksiyanı $\frac{\partial P}{\partial E}$ şəklində yazaraq alarıq ki,

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \qquad \text{və ya} \qquad \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \overline{\frac{dE}{dt}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0$$

---

[1] Əgər sistemin hərəkəti fırlanmadan ibarətdirsə q koordinatı isə φ fırlanma bucağıdırsa onda $d\varphi$ üzrə inteqrallama bir tam dövr üzrə, yəni 0 -dan 2π -yə qədər aparılmalıdır.

Bu bərabərliyi yekun olaraq

$$\frac{\overline{dI}}{dt}=0 \qquad (49.6)$$

formasında yaza bilərik. Burada I ilə

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq \qquad (49.7)$$

inteqralı işarə edilmişdir. Bu inteqral E və λ-nın verilmiş qiymətlərində aparılır. Bu nəticə göstərir ki, I kəmiyyəti baxdığımız yaxınlaşmada λ-parametri dəyişən zaman sabit qalır, təni I adiabatik invariantdır.

I kəmiyyəti sistemin enerjisinin (və λ parametrinin) funksiyasıdır. Bunun enerjiyə nəzərən xüsusi törəməsi hərəkətin periodunu verir. (49.4) düsturuna görə alırıq ki,

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E}=\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq=T \qquad (49.8)$$

və ya başqa formada

$$\frac{\partial E}{\partial I}=w \qquad (49.9)$$

Burada $w={}^{2\pi}\!/_{T}$ sistemin rəqs tezliyidir.

Sistemin faza trayektoriyası anlayışından istifadə edərək (49.7) düsturuna əyani həndəsi məna vermək olar. Baxdığımız halda (bir sərbəstlik dərəcəsi) faza fəzası iki ölçülü p,q koordinat sisteminə gətirilir və periodik hərəkət edən sistemin faza trayektoriyası bu müstəvidə qapalı əyri əmələ gətirir. Bu trayektoriya boyunca aparılan (49.7) inteqralı qapalı əyri daxilində qalan sahəni verir. Bunu sahə üzrə aparılan ikiqat inteqral

$$I=\frac{1}{2\pi}\int dpdq \qquad (49.10)$$

şəklində yazmaq olar.

Nisal olaraq birölçülü ossilyatorun adiabatik invariantını təyin edək. Onun Hamilton funksiyası

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2q^2}{2} \tag{49.11}$$

bərabərdir. Burada w ossilyatorun məxsusi tezliyidir. Faza trayektoriyasının tənliyi

$$H(p,q) = E$$

enerjinin saxlanması qanunudur. Bu yarımoxları $\sqrt{2mE}$ və $\sqrt{2E/mw^2}$ olan ellipsidir. Ellipsin 2π -yə bölünmüş sahəsi

$$I = \frac{E}{w} \tag{49.12}$$

Bu ifadənin adiabatik invariant olması göstərir ki, ossilyatorun parametrinin yavaş dəyişməsi zamanı onun enerjisi tezliyə mütənasib olaraq dəyişir.

§ 50 Kanonik dəyişənlər

İndi tutaq ki, λ parametri sabitdir, yəni sistem qapalıdır. I dəyişənini yeni "impuls" qəbul edərək p,q koordinatlarından kanonik çevirmə aparaq. Bu halda yaradıcı funksiya rolunu q,I dəyişənlərindən asılı təyin olunmuş S_0 qısaldılmış təsir oynayır. Doğrudanda da S_0 funksiyası E-nin müəyyən qiymətində təyin olumuş

$$S_0(q,E;\lambda) = \int p(q,E;\lambda)dq \tag{50.1}$$

kimi ifadə olunur. Qapalı sistem üçün I yalnız sistemin enerjisindən asılı olur. Ona görə S_0 funksiyasını $S_0(q,I,\lambda)$ şəklində seçə bilərik. Bu halda xüsusi törəmə $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_E = P$ ifadəsi $\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)_I$ ifadəsilə üst-üstə düşür. Ona görə də

$$p = \frac{\partial S_0(q,I;\lambda)}{\partial q} \tag{50.2}$$

olur. Bu isə (45.8) kanonik çevirmə düsturunun birincisi ilə üst-üstə düşür. İkinci düstur isə yeni "koordinat " təyin edir. Onu w ilə işarə edək

$$w = \frac{\partial S_0(q, I; \lambda)}{\partial I} \tag{50.3}$$

I və w dəyişmələri kanonik dəyişənlər adlanırlar.. I dəyişəni bununla əlaqədar olaraq təsir dəyişəni w-isə bucaq dəyişəni adlanırlar.

$S_0(q, I, \lambda)$ yaradıcı funksiyası zamandan aşgar şəkildə asılı olmadığından yeni H' Hamilton funksiyası yeni dəyişmələrlə ifadə olunmuş köhnə H funksiyası ilə üst-üstə düşür. Başqa sözlə H' təsir dəyişəni ilə ifadə olunmuş $E(I)$ enerjisidir. Buna uyğun olaraq kanonik dəyişənlər üçün yazılmız Hamilton tənlikləri

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = \frac{dE(I)}{dI} \tag{50.4}$$

formasında yazılırlar.

Birinci tənlikdən, gözlənildiyi kimi, alırıq ki, $I = const$ enerji ilə birlikdə I təsir dəyişənində sabitdir. İkinci tənlikdən isə görürük ki, bucaq dəyişəni zamanın xətti funksiyasıdır.

$$w = \frac{dE}{dI} t + const = w(I)t + const \tag{50.5}$$

Bu rəqsin fazasını ifadə edir.

$S_0(q, I)$ təsir funksiyası q koordinatının çox qiymətli funksiyasıdır. Hər period müddətində o əvvəlki qiymətini almır və

$$\Delta S_0 = 2\pi I \tag{50.6}$$

əlavəsini alır. Bu (50.1) ifadəsindən və həmdə I-nin (49.7) təyinindən də aydındır. Bu müddət ərzində bucaq dəyişəni

$$\Delta w = \Delta\frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}\Delta S_0 = 2\pi \tag{50.7}$$

əlavəsini alır.

Əksinə, əgər bir $F(q,p)$ (və ya onların birqiymətli $F(q,p)$ funksiyalarını) kanonik dəyişənlərlə ifadə etsək onda həmin funksiyalar (I-nın verilmiş qiymətində) w-nın 2π qədər dəyişdiyi zaman öz qiymətlərini dəyişməyəcəklər. Başqa sözlə istənilən $F(q,p)$ birqiymətli funksiya, kanonik dəyişənlərlə ifadə edildikdə, w dəyişəninin 2π periodlu, periodik funksiyası olacaqdır.

Hərəkət tənlikləri qapalı olmayan sistemlər üçün də zamandan asılı λ-parametrli kanonik dəyişənlər vasitəsilə təsvir oluna bilirlər. Bu dəyişənlərə keçid yenə də (50.2)-(50.3) düsturları vasitəsilə, (50.1) S_0 inteqralı yaradıcı funksiya olarkən aparılır. Bu zaman S_0 funksiyası (49.7) formulu ilə təyin olunur I dəyişəni ilə ifadə olunur. (50.1) qeyri-müəyyən inteqralı və (49.7) müəyyən inteqralı bu zaman $\lambda(t)$ funksiyasının müəyyən sabit qiymətə malik olduğu hal üçün hesablanır. Başqa sözlə, $\lambda(t)$ funksiyası sabit λ-ilə əvəz etdikdə alınan əvvəlki $S_0(q,I,\lambda(t))$ funksiyası olur[1].

Yaradıcı funksiyası (λ parametri ilə birlikdə) zamandan aşgar şəkildə asılı olan funksiya olduğundan yeni Hamilton funksiyası artıq əvvəlki ilə üst-üstə düşməyəcək, yəni $E(I)$-ilə üst-üstə düşməyəcək.

Kanonik çevirmənin (45.8) ümumi düsturuna əsasən

$$H' = E(I;\lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I;\lambda) + \Lambda\dot{\lambda} \tag{50.8}$$

burada

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_{q,I} \tag{50.9}$$

işarələməsi edilib. Həm də Λ (λ-ya görə diferensiallanandan sonra) (50.3) düsturu vasitəsilə I və w kəmiyyətlərilə ifadə olunmalıdır.

Bundan sonra Hamilton tənlikləri

[1] Lakin qeyd edək ki, bu yolla təyin olunan S_0 funksiyası artıq zamandan asılı Hamilton funksiyası vasitəsilə təyin olunan həqiqi qısaldılmış təsirlə üst-üstə düşmür.

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I,\lambda} \dot{\lambda} \tag{50.10}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial H'}{\partial I} = w(I;\lambda) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\lambda} \dot{\lambda} \tag{50.11}$$

formasını alırlar. Burada $w = \left(\frac{\partial E}{\partial I}\right)_{\lambda}$ rəqsin tezliyidir. (həmin tezlik yenədə λ-nı sabit götürdüyümüz halda hesablanan tezlikdir).

Məsələ

Tezliyi zamandan asılı olan harmonik ossilyatorun hərəkət tənliyi kanonik dəyişənlərdə yazın (Hamilton funksiyası (49.11)-dir).

Həlli: (50.1)-(50.3) ifadələrində bütün əməliyyatlar λ nın sabit (λ nın rolunu w tezliyi oynayır) qiymətlərində aparılır onda p və q nün w-ilə əlaqəsi sabit tezlikdə olduğu kimi olar. ($w = wt$)

$$q = \sqrt{\frac{2E}{mw^2}} \sin w = \sqrt{\frac{2I}{mw}} \sin w, \qquad p = \sqrt{2Iwm} \cos w$$

Buradan

$$S_0 = \int p dq = \int p \left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,w} dw = 2I \int \cos^2 w dw$$

və sonra

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_{q,I} = \left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_{I} \left(\frac{\partial w}{\partial w}\right)_{q} = \frac{I}{2w} \sin 2w$$

(50.10) və (50.11) tənlikləri aşağıdakı kimi olurlar.

$$\dot{I} = -I \frac{\dot{w}}{w} \cos 2w, \qquad \dot{w} = w + \frac{\dot{w}}{2w} \sin 2w$$

§ 51 Adiabatik invariantın saxlanma dəqiqliyi

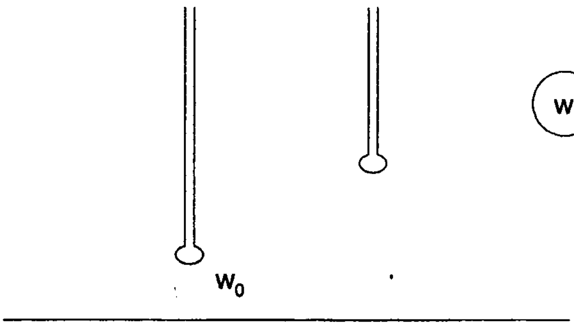
Hərəkət tənliyinin (50.10) forması təsir dəyişəninin adiabatik invariant olduğunu sübut etməyə imkan verir.

$S_0(q,I,\lambda)$ q-nın çoxqiymətli funksiyasıdır, koordinatın başlanğıc qiymətinə qayıtdığı zaman ona $2\pi I$-nın tam hasılı əlavə olunur. (50.9) törəməsi isə birqiymətli funksiyadır, çünki diferensiallama sabit I halında aparılır və S_0-a əlavə həddin törəməsi sıfır olur. İxtiyari birqiymətli funksiyada olduğu kimi Λ funksiyası bucaq dəyişəni w-ilə ifadə olunduqda həmin dəyişənin periodik funksiyası olacaqdır. Periodik Λ funksiyasının $\frac{\partial\Lambda}{\partial w}$ törəməsinin period üzrə orta qiyməti sıfıra bərabərdir. Ona görə də (50.10) tənliyini ortalayaraq və $\dot{\lambda}$-nı ortalama işarəsindən kənara çıxardaraq (λ-nın yavaş dəyişdiyinə görə) alırıq ki,

$$\bar{\dot{I}} = -\overline{\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\right)_I}\,\dot{\lambda} = 0 \qquad (51.1)$$

Bunu da isbat etmək lazım idi.

(50.10) və (50.11) hərəkət tənlikləri adiabatik invariant qalması dəqiqliyi məsələsinə baxmağa imkan verir. Bu sualı aşağıdakı kimi qoyaq: fərz edək ki, $\lambda(t)$-funksiyası $t\to-\infty$ və $t\to+\infty$ olduqda λ_- və λ_+ sabit limitlərə yaxınlaşır. I adiabatik invariantın başlanğıc $t\to-\infty$ andakı I_- qiyməti verilmişdir. Onun $t\to+\infty$ anındakı dəyişməsini $\Delta I = I_+ - I_-$ tapmaq tələb olunur.



Şəkil 56

(50.10) tənliyindən alırıq ki,

$$\Delta I = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\dot{\lambda}\,dt \qquad (51.2)$$

Yuxarıda qeyd edildi ki, Λ-kəmiyyəti w dəyişəninin periodik (period 2π-yə bərabər) funksiyasıdır. Onu Furye sırasına ayıraq

$$\Lambda = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilw} \Lambda_l \tag{51.3}$$

(Λ funksiyası həqiqi olduğundan ayrılış əmsalları $\Lambda_{-l} = \Lambda_l^*$ ifadəsi ilə əlaqəlidirlər). Buradan $\frac{\partial \Lambda}{\partial w}$ törəməsi üçün

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} ile^{ilw} \Lambda_l = 2\operatorname{Re}\sum_{l=1}^{\infty} ile^{ilw} \Lambda_l \tag{51.4}$$

λ-nın kiçik qiymətlərində $\dot{w}$ törəməsi müsbətdir (onun işarəsi w-nın işarəsi ilə eynidir. Bax (50.11)), yəni w zamanın monoton funksiyasıdır. Ona görə də, (51.2) düsturunda dt-yə görə inteqrallanmadan dw-yə görə inteqrallamaya keçdikdə inteqrallama sərhədləri dəyişməz qalırlar.

$$\Delta I = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Lambda}{\partial w} \frac{d\lambda}{dt} \frac{dt}{dw} dw \tag{51.5}$$

Burada (51.4)-ü yerinə yazıb, w dəyişənini formal hesab edərək inteqralı çevirməyə uğradaq. İnteqralaltı ifadənin w-nin həqiqi qiymətlərində məxsusi nöqtələrinin olmadığını qəbul edib, inteqrallama konturunu w-nin həqiqi oxdan yuxarı yarımmüstəviyyə köçürək. Bu zaman kontur “xüsusi” nöqtələrə toxunacaq və onu dövrəyə olaraq şəkil 56-da göstərilən formanı alır. Tutaq ki, w_0 həqiqi oxa yaxın olan məxsusi nöqtədir, başqa sözlə 0 ən az müsbət xəyali hissəyə malik olan nöqtədir. (51.5) inteqralına əsas əlavə bu nöqtə ətrafından gəlir. Həm də (51.4) sırasının hər bir həddi $\exp(-\lim w_k)$ vuruğu olan əlavələri verirlər. Yalnız ən kiçik mənfi üstə malik olan həddlə (yəni $l=1$ olan həddi) kifayətlənsək alırıq ki,

$$\Delta I \backsim \exp(-\operatorname{Im} w_0) \tag{51.6}$$

Tutaq ki, t_0-anı (kompleks ədəd), w_0-xüsusi nöqtəyə uyğun olan zaman anıdır. $w(t_0) = w_0|t_0|$ sistemin parametrinin xarakterik dəyişmə zamanı tərtibindədir. Həmin zamanı τ[1] ilə işarə edək. (51.6) düsturunda üstün tərtibi

[1] Xüsusi hallarda elə ola bilərki (51.4) sırasına $l = 1$ olan hədd daxil olmasın (məs., bu paraqrafın axırında məsələyə bax). Bütün hallarda sıraya daxil olan ən kiçik l-olan həddi götürmək lazımdır. Əgər λ parametrinin

$$\mathrm{Im}\, w_0 \sim \varpi\tau \sim \frac{\tau}{T} \tag{51.7}$$

olacaqdır.

Qəbul etdiyimə görə, $\tau >> T$ olduğundan o üst böyükdür. Beləliklə, $I_+ - I_-$ fərqi sistemin parametrinin dəyişmə sürəti azaldıqca eksponensial olaraq azalır[1]. w_0-ı T/τ-ya görə birinci yaxınlaşmada (yəni yalnız $\sim (T/\tau)^{-1}$ həddlərin üstdə saxlamaqla) təyin etmək üçün (50.11) düsturunda $\dot\lambda$ daxil olan kiçik həddi atmaq olar. Yəni yazmaq olar ki,

$$\frac{dw}{dt} = w(I, \lambda(t)) \tag{51.8}$$

Bu zaman $w(I,\lambda)$ funksiyasında I arqumentinin sabit olduğu qəbul olunur. Deyək ki, I-yə bərabər qəbul olunur.

Onda

$$w_0 = \int^{t_0} w(I, \lambda(t))dt \tag{51.9}$$

(Burada inteqralın aşağı sərhədi olaraq t-nin ixtiyari həqiqi qiymətini götürülə bilər. w_0-nun xəyali hissəsi bu qiymətdən asılı olmur).

(51.5) inteqralı $\dot w$ (51.8) düsturundan (və (51.4) sırasında bir hədd $\frac{\partial \Lambda}{\partial w}$ kimi qəbul edildikdə) təyin olunduqda

$$\Delta I \propto \mathrm{Re} \int i e^{lw} \frac{\dot\lambda dw}{w(I,\lambda)} \tag{51.10}$$

formasını alır.

Buradan görünür ki, (həqiqi oxa yaxın nöqtələri seçərkən) bir-birilə rəqabət aparan xüsusi nöqtələr arasında $\lambda(t)$ və $1/w$ funksiyalarının xüsusi (polyus, budaqlanma nöqtəsi) nöqtələri iştirak edirlər. Bununla əlaqədar olaraq qeyd edək ki, ΔI-nın eksponensial kiçikliyi nəticəsi həmin funksiyaların xüsusi nöqtələrinin olmaması mülahizəsindən irəli gəlir.

Məsələ

---

yavaş olması $\xi = \frac{t}{\tau}$ formula ilə ifadə edilirsə, böyük τ olduqda, onda $t_0 = \tau\xi_0$ olur. Burada ξ_0, $\lambda(\xi)$ funksiyasının τ-dan asılı olmayan xüsusi nöqtəsidir.

[1] Əgər $\lambda(t)$ funksiyasının başlanğıc və son qiymətləri bərabərdirsə ($\lambda_+ = \lambda_-$) onda həm ΔI və onunla bərabər $\Delta E = E_+ - E_-$ (başlanğıc və son enerji) fərqində az olacaqdər. (49.9) əsasən $\Delta E = w\Delta I$ olacaq.

Tezliyi

$$w^2 = w_0^2 \frac{1+ae^{\alpha t}}{1+e^{\alpha t}}$$

qanunu ilə $w_- = w_0$ qiymətlərindən $t=-\infty$ olduqda $w_+ = \sqrt{\alpha} w_0$ $t=\infty$ olduqda qiymətinə qədər ($a>0$ $\alpha \ll w_0$) yavaş dəyişən harmonik ossilyator üçün ΔI-nı qiymətləndirin.

Həlli: λ parametri olaraq w tezliyinin özünü qəbul etsək onda

$$\frac{\dot{\lambda}}{w} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{e^{-\alpha t}+a} - \frac{1}{e^{-\alpha t}+1}\right)$$

olar. Bu funksiya $e^{-\alpha t}=-1$ və $e^{-\alpha t}=-a$ olduqda polyuslara malikdir. $\int wdt$ intervalını hesablandıqdan sonra tapırıq ki, $\operatorname{Im} w_0$-in ən aşağı qiyməti $\alpha t_0 = -\ln(-a)$ polyuslarının birindən meydana çıxır və

$$\operatorname{Im} w_0 = \begin{cases} w_0 \pi/\alpha, a>1 \\ w_0 \pi\sqrt{a}/\alpha, a<1 \end{cases}$$

ifadəsinə bərabərdir. Harmonik ossilyator üçün $\Lambda \propto \sin 2w$ (§50-ə aid məsələyə bax). Ona görə (51.3) sırası iki həddən ($l=\pm 2$) ibarət olur. Ona görə də harmonik ossilyator üçün

$$\Delta I \propto \exp(-2\operatorname{Im} w_0)$$

§ 52 Şərti periodik hərəkət

Finit hərəkət edən (bütün koordinatları üzrə) çox sərbəstlik dərəcəsinə malik qapalı sistemə baxaq. Bu zaman fərz edək ki, məsələ Hamilton-Yakobi metodunda tam dəyişənlərə ayrıla biləndir. Bu o demekdirki qısaldılmış təsir, müəyyən koordinatları seçdikdə

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \qquad (52.1)$$

cəmi şəklində yazıla bilər. Buradakı S_i funksiyalarının hər biri yalnız bir koordinatdan asılıdır.

Ümumiləşmiş impulslar

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = \frac{dS_i}{dq_i}$$

olduğundan S_i funksiyalarının hər biri

$$S_i = \int p_i dq_i \tag{52.2}$$

formasında yazıla bilər.

Bu funksiyalar birqiymətli deyillər. Hərəkət finit hərəkət olduğundan koordinatların hər biri müəyyən sonlu intervalında dəyişə bilərlər. q_i koordinatlarının bu intervalında "irəli" və "geri" dəyişməsi zamanı təsir

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i \tag{52.3}$$

əlavəsini alır.

Burada I_i

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \tag{52.4}$$

inteqralından ibarətdir. İnteqrallama göstərilən intervalda aparılır[1].

Yenədə əvvəlki paraqrafda birölçülü hərəkət üçün apardığımız kanonik çevirməyə analoji çevirmə aparaq. Yeni dəyişənlər "I_i təsir dəyişəni" və

$$w_i = \frac{\partial S_0(q,I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k,I)}{\partial I_i} \tag{52.5}$$

"bucaq" dəyişəni olacaqdır. Burada Yenə də Yaradıcı funksiya I_i dəyişənləri və koordinatların funksiyası kimi ifadə olunmuş təsir funksiyası olacaqdır. Bu dəyişənlərə görə yazılmış hərəkət tərlikləri

$$\dot{I}_i = 0, \; \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

$$I_i = const \tag{52.6}$$

[1] Lakin qeyd edək ki, burada q_i koordinatının mümkün olan intervalda formal dəyişməsindən söhbət gedir. Onun birölçülü hərəkətdə olduğu kimi period müddətində həqiqi dəyişməsində söhbət getmir. Bir çox sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistemin hərəkəti həm ümumi halda həmdə hər bir koordinatın ayrılıqda zamana görə dəyişməsi periodik deyil.

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + const \tag{52.7}$$

ifadələrini verirlər.

(50.7) ifadələrinə analoji olaraq tapırıq ki, q_i koordinatının tam dəyişməsi zamanı ("irəli" və "geri") w_i funksiyası 2π qədər dəyişir

$$\Delta w_i = 2\pi \tag{52.8}$$

Başqa sözlə $w_i(q,I)$ kəmiyyətləri koordinatın birqiymətli olmayan funksiyalarıdır. Onlar koordinatın bir tam dövrü zamanı 2π-nın tam misli qədər dəyişir. Bu xassəsi həmdə $w_i(p,q)$ funksiyasının (p və q ilə ifadə olunmuş) sistemin faza fəzasında xassəsi kimi başa düşmək olar. I_i funksiyalarının özləri p və q dəyişənlərinə nəzərən təyin olunduqda həmin dəyişənlərin birqiymətli funksiyalarıdır. Onda $I_i(p,q)$-ni $w_i(q,I)$-də yerinə yazsaq bir $w_i(p,q)$ funksiyasına alarıq. Həmin funksiya faza fəzasında götürülmüş ixtiyari qapalı əyrini dolandıqda 2π-nın tam misli və ya 0 qədər dəyişər.

Buradan çıxırki, sistemin halının birqiymətli $F(p,q)$[1] funksiyası kanonik dəyişənlərlə ifadə edildikdə bucaq dəyişəninin periodik funksiyasıdır. Periodik hər bir dəyişənə görə 2π-yə bərabərdir. Ona görə belə funksiyanı çoxdan Furye sırasına ayırmaq olar.

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} e^{i(l_1 w_1 + \ldots + l_s w_s)}$$

($l_1, l_2, \ldots l_s$ tam ədədlərdir). Bucaq dəyişəninin zamandan asılılığını burada yerinə yazsaq F funksiyasının zamandan asılılığı

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \ldots l_s} \exp\left\{ it\left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \ldots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right)\right\} \tag{52.9}$$

düsduru ilə təyin olunar.

Bu cəmin hər bir həddi zamanın

$$l_1 w_1 + \ldots + l_s w_s \tag{52.10}$$

tezlikli periodik funksiyası. Bu ifadə

---

[1] Fırlanma koordinatları - φ bucaqları (bax səh. 194) sistemin halı ilə qeyri birqiymətli əlaqəlidirlər, çünki φ bucağının 2π -nın tam hasili ilə fərqlənən qiymətləri sistemin eyni halına uyğun gəlir. Ona görə əgər q koordinatları arasında belə bucaqlar varsa onda onlar $F(q,p)$ funksiyasına yalnız $\sin\varphi$ və ya $\cos\varphi$ şəklində daxil olmalıdır. Bunların sistemin halı ilə əlaqələri birqiymətlidir.

$$w_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} \quad (52.11)$$

əsas tezliyin tam hasillərinin cəmidir. Ancaq (52.10) tezliyinin hər biri digərinin tam hasili (və ya rasional hissəsi) olmadığından cəm periodik funksiya deyil. Bu sistemin q koordinat və p impulslarına da aiddir.

Beləliklə, sistemin hərəkəti ümumən və hər bir koordinat üçün periodik funksiya deyil. Bu o demekdir ki, sistem hər hansı haldan çıxdıqdan sonra sonlu zaman müddətində həmin hala qayıtmayacaq. Lakin təsdiq etmək olarki, kifayət qədər zaman keçdikdən sonra sistem həmin hala kifayət qədər yaxınlaşacaq. Belə hərəkəti bu cür adlandırmağın əsas səbəbi hərəkətin bu xassəsinə əsaslanır.

Müxtəlif xüsusi hallarda iki (və ya çox) əsas tezliklər w_i müqayisə edilə bilən (I_i-nin ixtiyari qiymətlərində) ola bilməz. Bu zaman deyirlər ki, cırlaşma vardır və əgər S dənə tezliklərin hamısı müqayisə edilə biləndirsə onda deyirlər ki, sistemin hərəkəti tamamilə cırlaşmışdır. Aydındır ki, axırıncı halda hərəkət tam periodikdir və beləliklə bütün zərrəciklərin trayektoriyaları qapalıdır.

Cırlaşmanın olması hər şeydən əvvəl sistemin enerjisinin asılı olduğu asılı olmayan kəmiyyətlərin (I_i) sayının azalmasına gətirir.

Tutaq ki, w_1 və w_2 tezlikləri

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} \quad (52.12)$$

ifadəsilə bir-birilə əlaqəlidirlər. Burada n_1 və n_2 tam ədədlərdir. Buradan görünür ki, I_1 və I_2 kəmiyyətləri enerjiyə yalnız $n_2 I_1 + n_1 I_2$ cəmi şəklində daxil olurlar.

Cırlaşmış hərəkətin ən başlıca xüsusiyyəti birqiymətli hərəkət inteqrallarının sayının cırlaşmamış haldakına nisbətən artmasındadır (eyni sərbəstlik dərəcəsi olduğu halda). Axırıncı halda $2S-1$ dənə hərəkət inteqrallarından yalnız S dənəsi birqiymətli hal funksiyalarıdırlar. Onların tam dəstəsi S dənə I_i dəyişənlərindən ibarətdir. Qalan $S-1$ dənə hərəkət inteqrallarını

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i} \quad (52.13)$$

fərqi şəklində yazmaq olur. Bu ifadələrin sabitliyi (52.7) düsturundan birbaşa alınır. Lakin bucaq dəyişənlərinin birqiymətli olmadığından onlar sistemin halını birqiymətli funksiyalar deyillər. Cırlaşma olduqda vəziyyət dəyişir. Yəni (52.12) münasibətinə görə

$$w_1 n_2 - w_2 n_1 \quad (54.14)$$

inteqralın birqiymətli olmasada, onun birqiymətsizliyi 2π-nın tam hasilinin əlavəsindən ibarət olur. Ona görə də həmin kəmiyyətlərin triqonometrik funksiyasını götürmək kifayətdir ki, birqiymətli hərəkət inteqralı alınsın.

Cırlaşmış hərəkətə misal $U=-\alpha/r$ sahəsində hərəkətdir (bu paraqrafa aid məsələyə bax). Məhz bu vəziyyət yeni məxsusi birqiymətli (15.17) hərəkət inteqralının meydana gəlməsinə səbəb olur. Bu inteqral iki (hərəkətə müstəvi hərəkət kimi baxırıq) adi hərəkət inteqralları – impuls M və E enerjidən əlavə yaranır. M və E hərəkət inteqralları istənilən mərkəzi sahə üçün xarakterikdir.

Həm də qeyd edək ki, əlavə birqiymətli inteqralın yaranması cırlaşmış hərəkətin bir xassəsini də meydana çıxarır. Cırlaşmış halda hərəkət tənliyi yalnız bir koordinat sistemində deyil, müxtəlif koordinat sistemlərində dəyişənlərə ayırmanın mümkün olamsına gətirir[1]. Doğrudan da I_i kəmiyyətləri dəyişənlərə ayırmanı mümkün edən koordinatların birqiymətli hərəkət inteqralları olurlar. Lakin cırlaşma olduğu halda birqiymətli hərəkət inteqrallarının sayı S-dən çox olur, ona görə də onların hansının I_i dəyişəni kimi birqiymətli olmur. Misal olaraq yenə də Kepler hərəkətini göstərək. Bu məsələ həm sferik koordinatlarda həm də parabolik koordinatlarda dəyişənlərə ayırmanı mümkün edir.

Əvvəlki paraqrafda təsir dəyişəninin bir ölçülü finit hərəkət zamanı adiabatik invariant olduğu göstərildi. Bu müddəa çox sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistem üçündə qüvvədə qalır. Bunu §51-də şərh olunan metodun bir başa ümumiləşdirməklə isbat etmək olur.

$\lambda(t)$ parametrli çox ölçülü sistemin kanonik dəyişənlərdə yazılmış hərəkət tənlikləri hər bir I_i təsirin dəyişmə sürəti üçün (50.10) ifadəsinə analoji olan

$$\dot{I}_i=-\frac{\partial\Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda} \tag{52.15}$$

ifadəsini verir. Burada yenə də $\Lambda=\left(\frac{\partial S_0}{\partial\lambda}\right)_I$. Bu ifadəni sistemin əsas perioduna nisbətən böyük, ancaq $\lambda(t)$ parametrinin dəyişmə zamanına nisbətən kiçik zaman arasında ortalamaq lazımdır. Bu zaman yenə də $\dot{\lambda}$ ifadəsi ortalama işarəsindən kənara çıxarılır. $\partial\Lambda/\partial w_i$ ifadəsinin orta qiyməti isə λ parametrini hərəkət zamanı sabit qəbul edərək aparılır. Buna görə də hərəkət şərti periodik olur. Onda Λ

[1] Bu halda biz $q_1'=q_1'(q_1)$, $q_2'=q_2'(q_1)$ trivial koordinat çevirmələrinə baxmırıq.

kəmiyyəti w_i bucaq dəyişənlərinin birqiymətli periodik funksiyası olacaq və onun $\partial\Lambda/\partial w_i$ törəməsinin orta qiyməti sıfır olacaq.

Axırda çoxsərbəstlik dərəcəsinə malik qapalı sistemin finit hərəkətinin xarakteri barədə ümumi halda Hamilton-Yakobi tənliyində dəyişənlərə ayrılmanın olmasını qəbul etmədən bəzi qeydləri edək.

Dəyişənlərə ayrıla bilən sistemin əsas xassəsi I_i hərəkət inteqrallarının birqiymətli olmasıdır. Bu halda onların sayı sərbəstli dərəcələrinin sayına bərabər olur. Ümumi halda dəyişənlərə ayrıla bilməyən sistem üçün birqiymətli hərəkət inteqrallarının sayı onların saxlanmasının fəza və zaman izotropik və bircinslilik xassələri ilə məhdudlaşdırılır. Yəni enerjinin, impulsun və impuls momentinin saxlanması ilə məhdudlaşdırılır.

Sistemin faza trayektoriyası birqiymətli hərəkət inteqrallarının verilmiş qiymətləri ilə təyin olunan faza fəzasının oblastından keçir. Faza fəzasında S dənə birqiymətli hərəkət inteqralları olan dəyişənlərə ayrıla bilən sistem üçün həmin şərtlər vasitəsilə S-ölçülü çoxluq (mnoqoobraziye) (hipersəth) yaradır. Kifayət qədər uzun zaman müddətində trayektoriya həmin hipersəthi kifayət qədər sıx doldurur.

Dəyişənlərə ayrıla bilməyən sistem üçün isə, onun az olan birqiymətli inteqrallarının sayı ilə faza trayektoriyası faza fəzasında daha çox ölçülü oblastı (tamamilə və ya birhissəni) doldurur.

Nəhayət, əgər sistemin Hamilton funksiyası dəyişənlərə ayrılmanı mümkün edən funksiyadan yalnız kiçik həddlərlə fərqlənirsə, onda hərəkətin xassəsi də şərtiperiodik hərəkətin xassəsinə çox yaxın olur. Həm də bu yaxınlığın dərəcəsi Hamilton funksiyasındakı əlavə həddlərin yaxınlıq dərəcəsindən daha yüksəkdir.

Məsələ

$U=-\alpha/r$ sahəsində elliptik hərəkət üçün təsir dəyişənini hesablayın.

Həlli: r,φ polyar koordinatlarda hərəkət müstəvisində

$$I_\varphi=\frac{1}{2\lambda}\int_0^{2\pi}p_\varphi d\varphi=M$$

$$I_r=\frac{2}{2\pi}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}dr=-M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

Buradan təsir dəyişəni ilə ifadə olunmuş enerji

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}$$

yalnız $I_r + I_\varphi$ cəmindən asılıdır. Bu isə hərəkətin cırlaşdığını göstərir hər iki əsas tezliklər (φ-yə və r-ə görə) üst-üstə düşür. Trayektoriyanın p və e parametrləri I_r və I_φ dəyişənləri vasitəsilə

$$p = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \qquad e^2 = 1 - \left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi + I_r}\right)^2$$

ifadə olunur. I_r, I_φ dəyişənlərinin adiabatik invariant olduqlarından α koeffisientin və ya m-kütləsinin yavaş dəyişməsi zamanı orbitin eksentrisitetinin dəyişmir, onun ölçüsü isə m və α ilə tərs mütənasib olaraq dəyişir.

"Elm" Redaksiya-Nəşriyyat və Poliqrafiya
Mərkəzi

Direktor:
Ş. Alışanlı

Kompüter tərtibatı:
A. Qabilqızı

Formatı 84x108; 1/16. Həcmi 13 ç.v.
Tirajı 300 Sifariş №10
Qiyməti müqavilə əsasında.