İ. M. NƏCƏFOV

MÜASİR KLASSİK ELEKTRODİNAMİKA

I hissə

Xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi, relyativistik mexanika və mikroskopik elektrodinamika

Dövlət universitetlərinin fizika ixtisası
üzrə bakalavr və magistrləri üçün
dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası
Təhsil Nazirliyinin 10.07.2012-ci il
tarixli 1315 saylı qərarı ilə təsdiq
edilmişdir.

ADİLOĞLU
BAKI – 2012

Elmi redaktor

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, əməkdar elm xadimi, professor **İ. H. Cəfərov**

Rəy verənlər:

- Azərbaycan MEA-nın akademiki **F. M. Həşimzadə**
- Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Ş. M. Nağıyev**

İsmət Məhəmməd oğlu NƏCƏFOV, *fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, Respublikanın əməkdar müəllimi, şöhrət ordenli professor*

Müasir klassik elektrodinamika. I hissə: *Xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi, relyativistik mexanika və mikroskopik elektrodinamika. Dərs vəsaiti.* Bakı, «ADİLOĞLU» nəşriyyatı, 2012, 549s.

Təqdim olunan tədris vəsaitində elektrodinamikanın nəzəri əsasları və onun tətbiqi məsələlərinin tədrisi, müasir tələblərə uyğun olaraq, vahid nöqteyi-nəzərdən və relyativizm əsasında aparılır. Burada nəzəri mexanikadan məlum olan Hamiltonun ən kiçik təsir prinsipi və variasiya üsulları sonsuz sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistemlərə – elektrodinamikaya və digər sahələrə tətbiq edilmiş, sahə tənlikləri və uyğun qanunlar alınmışdır. Mövzuların təhlilində müasir fizikada tətbiq edilən Pauli-Eynşteyn və Byorken-Drell metrikasından istifadə olunmuşdur. Kitabdan istifadə olunan materialların riyazi əsaslarına dair şərhlər və çıxarışlar əlavələrdə verilmişdir.

Bu tədris vəsaiti dövlət universitetlərinin fizika ixtisası üzrə təhsil alan bakalavr və magistrləri üçün nəzərdə tutulsa da, ondan pedaqoji, texniki və mühəndislik ixtisaslarının tələbələri, aspirantlar, elmi işçilər və klassik fizika ilə maraqlanan mütəxəssislər istifadə edə bilərlər.

$\frac{4722110018}{121-2012}$ qrifli nəşr

Maqnit olmasaydı eşqin əsiri,
Çəkməzdi özünə dəmir zənciri.
Kəhrəbanın eşqə düşməsə canı,
Elə cəzb etməzdi quru samanı.
Göyə doğru əgər çox qalxarsa su,
Yenə torpaq olar ən son arzusu.
Kainatda hər şey cəzbə bağlıdır,
Filosoflar bunu eşq adlandırır.

Nizami Gəncəvi
(«Xosrov və Şirin»)

Nobel mükafatı laureatı Dirakın 1956-cı ildə MDU-nun Nəzəri fizika kafedrasının iç divarında yazdığı xatirə qeydi:

«Physical law should have mathematical beauty»

(«Fiziki qanun riyazi cəhətdən qəşəng olmalıdır»)

MÜNDƏRİCAT

ÖN SÖZ

Elektromaqnit sahəsinin klassik nəzəriyyəsi klassik və kvant mexanikası ilə yanaşı fiziklərin yetişdirilməsində əsas nəzəri fənlərindən biridir. Bu nəzəri fənlər müasir təbiətşünaslığın nəzəri əsasını təşkil edir. Nəzəri fənləri ciddi bilmək gələcək ixtisas kurslarının dərindən öyrənilməsi üçün zəruri şərtdir.

Oxuculara təqdim olunan «Müasir klassik elektrodinamika» dərs vəsaiti müasir dövrdə tətbiq olunan iki pilləli tədrisin – bakalavr və magistr pillələrinə uyğun şəkildə universitet tələbələri üçün yazılmışdır. Bununla yanaşı kitabdan Pedaqoji Universitetin, texniki və mühəndis institutlarının tələbələri, aspirantlar və digər elmi işçilər də istifadə edə bilərlər.

Dərs vəsaiti müəllifin uzun müddət Bakı Dövlət Universitetinin fizika fakültəsində «Klassik elektrodinamika» kursundan oxuduğu mühazirələrin təkmilləşdirilməsi və elektrodinamikanın müasir fizikada oynadığı mühüm rolunun nəzərə alınması əsasında yazılmışdır. Kitabın giriş hissəsində təbiətdə mövcud olan 4 növ fundamental qarşılıqlı təsirlər içərisində elektromaqnit qarşılıqlı təsirinin çox geniş və mühüm yer tutması, böyük ingilis fiziki C.K. Maksvellin 1865-ci ildə bütün elektrik, maqnit və optik hadisələri dahiyanə birləşdirərək vahid bir tam olan elektromaqnit sahəsi nəzəriyyəsini yaratması və elektrodinamikanın bütün elm sahələrinə göstərdiyi öz müsbət təsiri qısa şəkildə şərh edilmişdir. Müasir fizikada fundamental qarşılıqlı təsirlərin vahid birləşdirilməsi ideyası məhz Maksvelldən başlayır. İstər klassik, istərsə də kvant elektrodinamikası çox möhkəm təməl üzərində qurulmuşdur. Onların verdiyi nəticələr təcrübədə tam təsdiq olunur. Elektrodinamika yeganə elmdir ki, yarandığı gündən relyativistik təbiətə malikdir, çünki elektromaqnit sahəsi işıq sürətilə yayılır. Ona görə bu fənnin tədrisini Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi əsasında aparmaq məntiqli və məqsədə uyğundur. Eynşteynin nisbilik nəzəriyyəsi cox sınaqlardan çıxmışdır. Axırıncı sınaq 2011-ci ildə İtalyan fiziklərinin nəhəng laboratoriyada apardığı təcrübədə aldığı yanlış nəticə, yəni, «neytrinonun sürəti işıq sürətindən çox böyükdür» müddəası olmuşdur. Bir müddətdən sonra məlum oldu ki, bu təcrübənin aparılmasında ciddi xətaya yol verildiyindən belə səhv nəticə alınmışdır. Beləliklə, Eynşteynin nisbilik nəzəriyyəsi bütün relyativistik fizikanın əsasını təşkil edən yeganə doğru nəzəriyyədir. Kitabda elektrodinamikanın və onun tətbiqlərinin tədrisi vahid nöqteyi-nəzərdən və relyativizm əsasında aparılmışdır.

Kitabda nəzəri mexanikadan məlum olan Hamiltonun ən kiçik (stasionar) təsir prinsipini və variasiya üsullarının sonsuz sərbəstlik dərəcəsinə malik sistemlərə-elektrodinamikaya və digər sahələrə tətbiqi nəticəsində Laqranj tənlikləri və uyğun qanunlar alınmışdır. Tənliklərin relyativistik kovariantlığına və fiziki kəmiyyətlərin transformasiya (çevrilmə) xassələrinə xüsusi fikir verilmişdir. Tənliklərin həllində bəzən Qrin funksiyalarından istifadə olunmuşdur. Klassik elektrodinamikada gecikən və qabaqlayan Qrin funksiyalarının ifadələri alınmış və onlardan kvant sahə nəzəriyyəsində də istifadə olunduğu göstərilmişdir. Relyativistik zərrəciklərin kinematikasına aid müxtəlif toqquşma, səpilmə, udulma, doğulma və şüalanma proseslərinə aid reaksiyalara baxılmışdır. Kitabda müasir fizikada istifadə edilən həm Pauli-Eynşteyn metrikasında (adi 4-ölçülü vektorlar və tenzorlar) və həm də Byorken-Drell metrikasında (ko- və kontravariant vektorlar və tenzorlar) elektrodinamikanın əsas tənlikləri və qanunları ifadə olunmuşdur. Kitabda həmçinin klassik şüalanma nəzəriyyəsinə çox ciddi fikir verilmişdir. Həm relyativistik, həm də qeyri-relyativistik şüalanma prosesləri ətraflı tədqiq olunmuş, çox mühüm və orijinal nəticələr alınmışdır. Nöter teoremi, onun inteqral və diferensial ifadələri araşdırılmış və bütün saxlanma qanunlarının kovariant və qeyri-kovariant şəkilləri alınmışdır.

Kitabda tədris sadədən mürəkkəbə doğru aparılır və anlayışların, təriflərin və riyazi ifadələrin dəqiqliyinə xüsusi fikir verilir. Bakalavr proqramına aid olan hissədə fiziki anlayışların sadə və aşkar şəkildə təhlilinə və riyazi hesablamaların kifayət qədər sadə aparılmasına diqqət verilmişdir. Magistr proqramına daxil olan hissədə, məsələn, klassik elektron nəzəriyyəsinin ziddiyyətləri, Laue teoremi, Puankare təzyiqi; relyativistik və ultrarelyativistik elektronun vahid gecikmə zamanında tam şüalanma intensivliyi; Nöter teoreminin isbatı və s.-də aşkarlıq və əyaniliyi saxlamaqla yanaşı riyazi hesablamalarda müəyyən qədər mürəkkəbliyə yol verilmişdir. Burada məqsəd magistrantları bir qədər sərbəstliyə öyrətməkdir.

Kitabda istifadə olunan riyazi hesablamaları, çevrilmələri, diferensial operatorların təsirini və bəzi əməliyyatları izah edən beş ədəd Əlavə (Ə1-Ə5) verilmişdir. Bu Əlavələrin hər birində mövzuya aid sadə nəzəri məlumat və sonra məsələ və misallar verilir. Burada vektor və tenzor cəbri və analizi, grad, rot, div operatorlarının tərifi və müxtəlif koordinat sistemlərində yazılışı, δ-funksiyanın xassələri və tətbiqi, sahənin Furye sırasına və inteqralına ayrılışı və s. verilmişdir. Oxucular Ə1-Ə5-dən istifadə etsələr kitabı başa düşməkdə çətinlik çəkməzlər.

Vahidlər sistemi olaraq Hevisayd sisteminin nəzəri fizikada, Qauss sisteminin bütün fizikada, BS vahidlərinin elektrotexnikada və mühəndis hesablamalarında əlverişli olduğu qeyd edilmişdir. Ona görə kitabın I fəslində üç təcrübi qanun (Kulon, Faradey və Amper qanunlarını) diferensial şəklə gətirilərək və aksiomatik ümumiləşdirilərək hər üç vahidlər sistemində Maksvell tənlikləri alınmışdır. Müasir dövrün görkəmli fizikləri belə hesab edirlər ki, Qauss sistemi relyativistik fizikaya ən çox uyğun gələn sistemdir. Məşhur amerikan fiziki C.Cekson yazır: «... *BS-dən fərqli olaraq Qauss sistemi nisbilik nəzəriyyəsi və relyativistik elektrodinamikaya tam uyğun olduğuna görə kitabın relyativistik fəsillərini bu sistemdə vermişəm...*» (J.Jackson. Classical elektrodynamics, 1999, 3-rd ed., Preface, p.V).

Yuxarıda deyilənlərə uyğun olaraq dərs vəsaitinin I hissəsi, yəni Eynşteynin nisbilik nəzəriyyəsi, relyativistik mexanika və mikroelektrodinamika Qauss sistemində şərh olunmuşdur. Kitabın II hissəsi, yəni mühitin elektrodinamikası (makroelektrodinamika) hər iki sistemdə verilmişdir. Aydınlıq üçün bir sistemdən digər sistemə keçid düsturları da oxuculara təqdim olunmuşdur. Belə hesab edirəm ki, ali təhsilli fiziklər həm Qauss və həm də BS sistemlərində işləməyi bacarmalıdırlar.

Kitabın I hissəsində relyativistik mexanika və mikroelektrodinamikanı tarixi ənənələri və incəlikləri nəzərə alınmaqla, elmin müasir səviyyəsinə və yeni anlayışlara istinad edilərək və gələcək perspektivlərə diqqət verməklə, bir qədər geniş şəkildə təsvir edilmişdir. Burada müxtəlif təsvir üsullarına və hələlik ədəbiyyatda olmayan bəzi yeni məsələlərə də diqqət verilmişdir. Göstərilmişdir ki, klassik elektrodinamika müasir, canlı və daim inkişafda olan bir elmdir.

Oxuculardan xahiş edirik ki, kitabda rast gəldikləri xətalar və nöqsanlar haqda bizə yazmağı unutmasınlar.

Müəllif

QƏBUL OLUNMUŞ İŞARƏLƏR

Latın əlifbasının kiçik hərfləri i, j, k, l, m və s. 1, 2, 3, qiymətlərini alır. Bəzən həcm elementlərini, səth elementlərini, zərrəciklərin sayını bu hərflərlə işarə etsək, onlar 1, 2, 3, 4, 5, ... *N* qiymətlərini alar. Böyük hərflər A, B, C, D və s. istənilən qiymət ala bilər.

$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ – Hamilton operatorudur, ona qısaca «*nabla*» deyirik.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – Dekart koordinat sisteminin vahid vektorlarıdır (ortlarıdır).

$\vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplas operatorudur.

4-ölçülü Minkovski fəzasında Pauli-Eynşteyn metrikasından istifadə etsək, yunan əlifbasının hərfləri $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \rho, \lambda, \sigma$ və s. 1, 2, 3, 4 qiymətlərini alır. Bu fəzada 4-ölçülü radius vektor və 4-ölçülü impuls belə yazılır:

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict) = (\vec{r}, ict),$$

$$p_\mu = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(p_x, p_y, p_z, \frac{i}{c}\varepsilon\right) = \left(\vec{p}, \frac{i}{c}\varepsilon\right).$$

Relyativistik impuls $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, relyativistik enerji $\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ şəklindədir. Burada m-zərrəciyin (cismin) kütləsi, c-işığın vakuumda sürətidir ($c = 3 \cdot 10^{10}$ sm/san). Adətən $ct = x_0$ yazırıq.

Bu metrikada 4-ölçülü vektorların kvadratı və iki 4-ölçülü vektorun hasili belə yazılır:

$$x_\mu^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_4^2 = \vec{r}^2 + x_4^2 = \vec{r}^2 - x_0^2,$$

$$p_\mu^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = \vec{p}^2 + \vec{p}_4^2 = \vec{p}^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m^2c^2.$$

$$a_\mu b_\mu = \vec{a}\vec{b} + a_4 b_4 = \vec{a}\vec{b} - a_0 b_0,$$

burada $a_4 = ia_0$, $b_4 = ib_0$ götürülmüşdür. 4-ölçülü koordinata görə törəmə $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) = \left(\vec{\nabla}, \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ şəklində yazılır. Bu operatorun kvadratı $\dfrac{\partial^2}{\partial x_\mu{}^2} = \vec{\nabla}^2 + \left(\dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^2 = \vec{\nabla}^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$ – Dalamber operatorudur.

4-ölçülü Minkovski fəzasında Byorken-Drell metrikasından istifadə etsək, kovariant və kontravariant vektorlarla məşğul olmalıyıq və burada da yunan indeksləri 4 qiymət alır: 0, 1, 2, 3.

Məsələn, ko- və kontravariant radius vektorlar belə yazılır:

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2 x_3) = (x_0, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{r}),$$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x, y, z) = (x^0, \vec{r}).$$

Ko- və kontravariant impulsları yazsaq, $p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (p_0, -\vec{p})$, $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ olar. Vektorun kvadratı və ya iki vektorun hasili

$$x^\mu x_\mu = (x_0^2 - \vec{r}^2),\; p_\mu p^\mu = (p_0^2 - \vec{p}^2) = \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{p}^2\right) = m^2 c^2,\; a_\mu b^\mu = (a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b})$$

şəklində yazılır. Bu yazılışlarda

$$x_0 = x^0 = ct,\; x_1 = -x^1,\; x_2 = -x^2,\; x_3 = -x^3$$

kimidir.

Byorken-Drell metrikasında 4-ölçülü koordinata görə törəmə $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla}\right)$, $\partial^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla}\right)$ şəklindədir. Bu iki operatorun hasili $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = -\Box$ olur.

Ko- və kontravektorlar bir-birilə $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ şəklində əlaqədədir. $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ metrik tenzordur ($g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$).

GİRİŞ
ELEKTRODİNAMİKA VƏ ONUN MÜASİR FİZİKADA YERİ

Elektrodinamika anlayışı. Elektrodinamika – elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklərin klassik nəzəriyyəsidir. O, elektromaqnit sahəsinin yaranması, şüalanması, fəzada yayılması, udulması, səpilməsi qanunları ilə, yüklü zərrəciklərin elektromaqnit sahəsində hərəkəti və bu zərrəciklərin bir-birilə və sahə ilə qarşılıqlı təsiri qanunları, eyni zamanda elektromaqnit sahəsinin maddi mühitlə qarşılıqlı təsiri məsələləri və mühitdə baş verən müxtəlif elektromaqnit prosesləri və s. ilə məşğul olur.

Elektrodinamika kursunu şərti olaraq iki hissəyə bölmək olar: 1) Mikroskopik elektrodinamika (mikro el.d.) və 2) Makroskopik elektrodinamika (makro el.d.). Mikro- və makro- yunanca kiçik və böyük deməkdir.

Mikroelektrodinamika vakuumun* və orada yerləşmiş yüklü zərrəciklərin elektrodinamikasıdır. Burada fərz olunur ki, bütün yüklü elementar zərrəciklər nöqtəvidir və yüklər diskret paylanmışdır. Ən kiçik elementar yük elektronun yüküdür (e). Digər yüklər isə onun tam mislilərinə bərabərdir ($\pm n\cdot e$). Burada bəzən seyrəldilmiş mühitlərin elektrodinamikasından da danışmaq mümkündür. Belə ki, seyrəldilmiş mühitin mövcud elektromaqnit sahəsinə göstərdiyi təsir çox kiçikdir və onu nəzərə almamaq olar.

Makroskopik elektrodinamika isə maddi mühitlərdə baş verən elektromaqnit prosesləri ilə məşğul olur. Burada mühitin və yükün diskret (atomistik) quruluşunu nəzərə almayaraq, yükün mühitdə müəyyən sıxlıqla kəsilməz paylandığını fərz etmək olar. Makroelektrodinamikada mühitin mövcud elektromaqnit sahəsinə göstərdiyi təsir çox mühümdür və onunla həmişə hesablaşmaq lazımdır.

Elektrodinamikanın müasir fizikada tutduğu yeri müəyyən etmək üçün fizika elminin tarixinə ötəri səyahət edək. «Naturfəlsəfədən»** başlayaraq müasir dövrə qədər təcrübi və nəzəri fizikanın inkişafı aşağıdakı nəticəyə gətirmişdir: Bizi əhatə edən maddi aləm (Yer, planetlər, Günəş, ulduzlar, canlı və cansız təbiət, bütün cisimlər, hər şey) elementar zərrəciklərdən və onların yaratdığı sahələrdən təşkil edilmişdir. Elementar

---

* *vakuum* – real maddi zərrəciklərin olmadığı fəzadır

**Qədim yunanlarda fizika təbiət haqqında elm adlanırdı. İngiltərədə uzun müddət fizikaya «naturfəlsəfə» deyirdilər və bu ad altında bütün təbiət elmləri birləşirdi. Elmlərin bir-birindən ayrılması, diferensasiyası sonralar baş vermişdi.

zərrəciklərin sayı (növü) 200-dən artıqdır və onlar bir-birilə qarşılıqlı təsirdədir.

Elementar zərrəciklər yükə, kütləyə və digər xarakteristikalarına görə bir-birindən fərqlənir. İlk kəşf olunan zərrəcik elektrondur (1897 il, C. Tomson). Onun yükü mənfidir $e = -4{,}8 \cdot 10^{-10}$ $(SGSE)_q$ $= -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Kl və bu, ən kiçik sərbəst elektrik yüküdür (elementar yükdür). Elektronun anti zərrəciyi olan pozitron (1933 il, Anderson) elektrondan yalnız elektrik yükünün işarəsi ilə fərqlənir: pozitronun yükü müsbətdir və mütləq qiymətcə elektronun yükünə bərabərdir. Adətən elektron və pozitronun yüklərini (və ya özlərini) e^- və e^+ ilə işarə edirlər. Atomların nüvələrini təşkil edən proton (p, 1919, Rezerford) və neytronlara (n, 1932, Çedvik) gəldikdə, protonun yükü müsbətdir və mütləq qiymətcə elektronun yükünə bərabərdir. Neytronun elektrik yükü isə sıfırdır. Digər zərrəciklərə nəzər salsaq müsbət və mənfi yüklü μ-mezonları (μ^+, μ^-) (1938, Anderson); müsbət, mənfi və sıfır yükə malik π-mezonları (π^+, π^-, π^o) (1947, Pauella); müsbət və mənfi yüklü τ-zərrəcikləri (τ^+, τ^-) və s. misal göstərmək olar.

Belə məlum olur ki, sıfırdan fərqli ən kiçik kütləyə malik olan zərrəcik də məhz elektrondur (pozitrondur): $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ q. Digər zərrəciklərin kütlələri kiçik xəta ilə elektronun kütləsinin tam mislilərinə bərabərdir: $m_p = 1836{,}2\,m_e \approx 1836 m_e$, $m_n = 1838{,}7\,m_e \approx 1839 m_e$, $m_\mu = 207 m_e$, $m_\tau = 3500\,m_e$, $m_\pi = 273\,m_e$ və s. Elə zərrəciklər vardır ki, onlar elektrik cəhətdən neytraldır və onların kütləsi də sıfırdır: məsələn, elektron, μ-mezon və τ-mezon neytrinoları (ν_e, ν_μ, ν_τ) və γ-kvant (çox kiçik dalğa uzunluğuna malik elektromaqnit şüalanması) bu növ zərrəciklərdir.

Təbiətdə mövcud olan qüvvələr. Müasir təsəvvürlərə görə təbiətdə 4 növ fundamental qarşılıqlı təsir (qüvvə) mövcuddur: 1) Elektromaqnit qarşılıqlı təsiri (q/t); 2) qravitasiya qarşılıqlı təsiri; 3) güclü (nüvə) qarşılıqlı təsir; 4) zəif qarşılıqlı təsir.

Hər bir qarşılıqlı təsir əsas iki kəmiyyətlə – qarşılıqlı təsir sabiti (və ya əlaqə sabiti) və qarşılıqlı təsir radiusu ilə xarakterizə edilir. Əlaqə sabiti qarşılıqlı təsirin «gücünü», «intensivliyini», qarşılıqlı təsir radiusu isə onun yayılma məsafəsini göstərir.

Elektromaqnit qarşılıqlı təsiri. Məlumdur ki, sükunətdə olan iki nöqtəvi elektrik yükü vakuumda bir-birinə Kulon qüvvəsi (1785 il) ilə təsir edir: $F_k = f\dfrac{e_1 e_2}{r^2}$. f vuruğunun seçilməsi vahidlər sistemini müəyyən edir. $f=1$ – SGS (və ya Gauss), və $f=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ BS və $f=\dfrac{1}{4\pi}$ isə Hevisayd vahidlər sisteminin seçilməsinə uyğun gəlir. Əlaqə sabiti qarşılıqlı təsirdə iştirak edən yüklə (onun kvadratı ilə) təyin olunur. Yük vahidi olaraq elektronun $|e|=4{,}8\cdot10^{-10}$ $(SGSE)_q$ yükünü seçsək və Dünyəvi sabitlər olan işığın vakuumda $c=3\cdot10^{10}$ sm / san yayılma sürətindən və $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}=1{,}05\cdot10^{-27}$ erq.san Plank sabitindən istifadə etsək $\alpha_e=\dfrac{e^2}{\hbar c}\approx\dfrac{1}{137}$ kimi adsız kəmiyyət alarıq. α_e – *elektromaqnit qarşılıqlı təsiri üçün əlaqə sabiti* (və ya qarşılıqlı təsir sabiti) adlanır. Bütün yüklü zərrəciklər bir-biri ilə elektromaqnit qarşılıqlı təsirində olur və bu təsirin əlaqə sabiti $\alpha_e\approx\dfrac{1}{137}$-dir. Elektromaqnit qarşılıqlı təsir radiusu sonsuz böyükdür: $R_e\to\infty$. Çünki Kulon qanununda iki yük arasındakı r məsafəsi istənilən qiymət ala bilər. Zərrəcikləri atomda saxlayan məhz elektromaqnit qüvvələridir. Atomlar arasında və molekullar arasında təsir göstərən qüvvələr də elektromaqnit təbiətlidir. Elastiklik və sürtünmə qüvvələri də elektromaqnit təbiətinə malikdir. Beləliklə makroaləmdə müşahidə olunan bütün qüvvələr əsasən elektromaqnit qüvvələrinə gətirilir (əlbəttə qravitasiya qüvvələrini də unutmamalıyıq).

Qravitasiya qarşılıqlı təsiri. Məlumdur ki, kütləyə malik olan istənilən iki cisim bir-birilə qravitasiya qarşılıqlı təsirində olur. İki nöqtəvi kütlə arasında qravitasiya qarşılıqlı təsir qüvvəsi Nyutonun ümumdünya cazibə qanununa görə aşağıdakı şəkildə yazılır: $F_{qr}=\gamma\dfrac{m_1m_2}{r^2}$. Burada $\gamma=\dfrac{1}{15\cdot10^6}\ \dfrac{dn\cdot sm^2}{q^2}$ – *Nyutonun qravitasiya əmsalı* adlanır. Biz $\sqrt{\gamma}\cdot m_p=\Gamma$ kəmiyyətini daxil etsək, qravitasiya qüvvəsi tamamilə Kulon qüvvəsi şəklində yazılar: $F_{qr}=\dfrac{\Gamma_1\Gamma_2}{r^2}$. Onda Γ qravitasiya «yükü» rolunu oynayacaqdır. Γ-nin ifadəsinə ağır zərrəcik olan protonun kütləsi daxil edilmişdir.

Qravitasiya qarşılıqlı təsiri üçün əlaqə sabitini yazaq: $\alpha_{qr}=\dfrac{\Gamma^2}{\hbar c}\approx.$

$\approx 6\cdot 10^{-39} \approx 10^{-38}$. Qravitasiya qarşılıqlı təsir radiusu da sonsuz böyükdür: $R_{qr} \to \infty$.

Qravitasiya əlaqə sabiti çox kiçik kəmiyyətdir. Bu qarşılıqlı təsir makroaləmdə yalnız kosmik obyektlər üçün mühüm rol oynayır.

Güclü (nüvə) qarşılıqlı təsir. Bu təsir yalnız böyük kütləli elementar zərrəciklər arasında (proton, neytron, π-mezon və s.) mövcud olur. Atomun nüvəsində proton və neytronları tutub saxlayan və nüvələrin dayanıqlığını təmin edən məhz güclü qarşılıqlı təsir qüvvələridir. Güclü qarşılıqlı təsir «yükünə» g desək, məlum olur ki, $\alpha_g = \frac{g^2}{\hbar c} \sim 1 \div 10$. Yəni güclü qarşılıqlı təsir üçün əlaqə sabiti çox böyükdür. Lakin nüvə qarşılıqlı təsiri radiusu çox kiçikdir, yəni nüvənin ölçüsü tərtibindədir: $R_g \sim 10^{-13} sm = 1f$ (Fermi). Bu qüvvələr *qısa radiuslu qüvvələr* adlanır və onların təsiri altında nüvə reaksiyaları baş verir. Güclü qarşılıqlı təsir qüvvələrinin makroskopik təzahür formaları nüvələrdə α-radioaktivlik və nüvə enerjisinin ayrılması proseslərindən ibarətdir.

Zəif qarşılıqlı təsir. Bu qarşılıqlı təsir qeyri-stabil nüvələrin parçalanmasını (β-parçalanma) və qeyri-stabil zərrəciklərin bir-birinə qarşılıqlı çevrilməsini təmin edir. O, əsasən dağıdıcı rol oynayır. Məsələn, nüvənin β-parçalanmasında nüvədəki neytron protona çevrilir və nüvədən elektron və antineytrino ($\tilde{\nu}$) şüalanır $n \to p + e^- + \tilde{\nu}$. Və ya qeyri-stabil μ^--mezon elektrona çevrilir və neytrino-antineytrino şüalanır: $\mu^- \to e^- + \nu + \tilde{\nu}$.

Qeyd edən ki, n və μ-mezon qeyri-stabil zərrəciklərin sərbəst halda yaşama müddətləri $\tau_n = 10^{+3}$san, $\tau_\mu = 2\cdot 10^{-6}$ saniyədir. Zəif qarşılıqlı təsir üçün «yükə» F desək, $\alpha_z = \frac{F^2}{\hbar c} m_p^2 \sim 10^{-5}$ olur. Bu təsir üçün əlaqə sabiti çox kiçikdir. Eyni zamanda zəif qarşılıqlı təsir radiusu da çox kiçikdir: $R_z \sim 10^{-16}$ sm. Zəif qarşılıqlı təsir qüvvələrinin əsas makroskopik təzahür forması β-radioaktivlik proseslərindən ibarətdir. Makro- və mikroaləmdə mövcud olan bütün qarşılıqlı təsirlər bu dörd növ qarşılıqlı təsirə və onların müxtəlif kombinasiyalarına gətirilir. Fundamental qarşılıqlı təsirlər haqqında aparılan hətta bu sadə və səthi mülahizələrdən görünür ki, elektromaqnit qarşılıqlı təsiri təbiətdə həlledici rol oynayır: onun qarşılıqlı təsir radiusu sonsuzdur və əlaqə sabiti isə nüvə qarşılıqlı təsiri istisna olmaqla digərlərindən böyükdür.

Dörd növ qarşılıqlı təsir içərisində elektromaqnit qarşılıqlı təsiri öz təzahür formalarının müxtəlifliyinə və genişliyinə görə mühüm yer tutur. Məhz elektromaqnit qüvvələri hesabına dayanıqlı sistemlər olan atom və molekullar yaranır. Bərk cisimlərdə, mayelərdə və qazlarda hissəciklər arasında cəzbetmə və itələmə qüvvələri, sürtünmə qüvvələri, elastiklik qüvvələri və s. – bütün bunlar elektromaqnit qüvvələrinin müxtəlif təzahür formalarıdır.

Elektromaqnit qarşılıqlı təsiri bizi əhatə edən aləmdə baş verən bütün fiziki, kimyəvi və bioloji proseslərin və hadisələrin əsasını təşkil edir.

Elektrodinamikanın yaranması. XIX əsrin birinci yarısına qədər elektrik, maqnit və işıq hadisələri bir-birindən tamamilə ayrı şəkildə öyrənilirdi və onlar arasında heç bir əlaqə görünmürdü. Böyük elm adamları olan Kulon, Ersted, Amper, Faradey və digərlərinin aldığı fundamental nəticələr də pərakəndə halda idi. Doğrudur, Faradey bu proseslər arasında bir əlaqə olduğunu hiss etməyə çalışırdı, lakin bu bir duyğu olaraq qalırdı. Nəhayət, bu hadisələr arasında sıx əlaqə axtaran böyük ingilis fiziki Ceyms Klerk Maksvell 1865-ci ildə Kulon qanunu, Faradeyin elektromaqnit induksiyası qanunu və düzxətli cərəyanın maqnit sahəsi üçün Amper qanununu aksiomatik ümumiləşdirərək elektromaqnit sahəsi üçün çox fundamental gözəl bir nəzəriyyə verə bildi.

Bu nəzəriyyəyə görə elektrik, maqnit və işıq hadisələri eyni bir qaynağa, kökə, mənbəyə malikdir və onlar vahid bir tam olan elektromaqnit sahəsinin müxtəlif təzahür formalarıdır. Maksvellin elektromaqnit sahəsi üçün aldığı nəzəri nəticə, yəni elektromaqnit dalğalarının varlığı 1888-ci ildə Hertsin təcrübələrində təsdiq edildikdən sonra (Maksvellin vəfatından 10 il sonra) elektrodinamikanın bütün istiqamətlərdə qalibiyyətli yürüşü başlandı və bu yürüş indiyə qədər davam edir.

Elektrodinamikanı elektromaqnit qarşılıqlı təsirin müasir klassik nəzəriyyəsi adlandırmaq daha doğru olardı. Elektrodinamika relyativistik nəzəriyyədir, belə ki, elektromaqnit sahəsi işıq sürətilə yayılır. Yadımıza salaq ki, Nyuton-Qaliley mexanikası qeyri relyativistik mexanika idi. Çunki burada sürətlər işıq sürətindən çox kiçik idi. Əgər zərrəciklərin və cisimlərin sürətləri işıq sürəti ilə müqayisə oluna bilərsə, belə sürətlər relyativistik sürətlər və bu sürətlərlə məşğul olan mexnika *relyativistik mexanika* (və ya fizika) adlanır. Çünki, burada artıq Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi (prinsipi) hökm sürür.

Maksvell göstərdi ki, elektromaqnit sahəsinin mənbəyi elektrik yükləri və cərəyanlardır. Bu sahənin yaranması və hərəkət qanunları xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur və bunlar *Maksvell tənlikləri* adlanır (bəzən bunlara Maksvell-Lorens tənlikləri də deyilir). Elektromaqnit sahəsi fiziki reallıqdır. Yüklü zərrəciklər bir-birilə elektromaqnit sahəsi vasitəsilə qarşılıqlı təsirdə olur. Qarşılıqlı təsir həmişə yaxına təsirdir və o, sonlu sürətlə (işıq sürəti ilə) yayılır. Məsələn, iki yük arasında qarşılıqlı təsir belə baş verir: birinci yük elektromaqnit sahəsi yaradır və bu sahə c sürəti ilə ətraf fəzaya yayılır və ikinci yükün olduğu nöqtəyə çatdıqda ona müəyyən qüvvə ilə təsir edir. Öz növbəsində ikinci yük də elektromaqnit sahəsi yaradır və bu sahə də c sürətilə yayılaraq birinci yükə çatdıqda ona təsir edir. Beləliklə, elektromaqnit sahəsi yüklər arasındakı fəzada müəyyən sıxlıqla kəsilməz paylanır. Elekromaqnit sahəsi enerjiyə, impulsa, kütləyə, impuls momentinə və s. malikdir. Bəzi şəraitdə elektromaqnit sahəsinin bir hissəsi onu yaradan yükdən «qopur» (söz gəlişi), yəni mənbəyi tərk edir və sərbəst mövcud olur. Buna şüalanma sahəsi və ya sərbəst sahə deyilir. Elekromaqnit sahəsi həm maddi mühitdə və həm də vakuumda mövcuddur. Bu, real fiziki sahənin ən mühüm xassəsidir. Elektrodinamika ən dəqiq, ən mükəmməl, tam bir nəzəriyyədir. Elektrodinamikanın tətbiq edilmə oblastında onun həll edə bilmədiyi məsələ yoxdur.

Elektrodinamika qanunlarının bilavasitə tətbiq edildiyi elm və texnika sahələrinin adlarını sadalamaq yerinə düşərdi: 1) elektrotexnika, radiotexnika, radiofizika; 2) elementar zərrəciklər sürətləndiriciləri; 3) müasir astrofizika və radioastronimiya; 4) Günəş, ulduzlar və planetlərin maqnit sahəlri, Günəş ləkələri, Günəş «tufantları»; 5) optika; 6) idarə olunn isilik-nüvə reaksyaları; 7) plazma; 8) lazerlər; 9) tokamaklar 10) nano zərrəciklərin elektrodinamikası və s;

Qarşılıqlı təsirlərin birləşdirilməsi. Qeyd edək ki, kiçik məsafələrdə və böyük enerjilərdə baş verən prosesləri təsvir etmək üçün klassik sahələrdən kvant sahələrinə (yəni klassik nəzəriyyədən kvant nəzəriyyəsinə) keçmək lazımdır (Dirak, Schwinger, Feynman, Dayson, Pauli və s.).

Kvantlanmış sahələr içərisində əsas yeri kvant elektrodinamikası (KED) tutur. Kvant elektrodinamikası elektromaqnit q/t-in kvant nəzəriyyəsidir və bütün fiziki nəzəriyyələr içərisində ən dəqiqidir. KED yeganə nəzəriyyədir ki, onun aldığı nəticələr təcrübədə çox böyük dəqiqliklə təsdiq edilir. Müasir fizikada bütün digər q/t-lər elektromaqnit q/t-nə oxşar şəkildə və onun kimi qurulur. Burada kalibrləşmə sahələrindən və onların simmetriya xassələrindən və simmetriyanın spontan pozulmasından istifadə olunur (ingilis sözləri *calibre* və *gauge* – ölçü, dərəcələmə, çərçivə, kalibr, qəlib, deməkdir və «qəlibləşmə sahələri» termini daha doğru olardı). Belə məlum olur ki, elektromaqnit sahəsi ilk və ən təbii kalibrləşmə sahəsidir. Digər mövcud kalibrləşmə sahələri «elektromaqnit təbiətinə» malikdir, lakin daha mürəkkəbdir. Müxtəlif kalibrləşmə sahələrindən istifadə edərək həm zəif q/t-in və həm də güclü q/t-in müasir kvant nəzəriyyələrini qurmaq mümkün olmuşdur. Güclü q/t-in kvant nəzəriyyəsi *kvant xromodinamikası* (KXD) adlanır.

İndi təbiətin ən mühüm iki qanunu üzərində bir qədər dayanmaq lazımdır: 1) elektrik yükünün saxlanması qanunu; 2) elektrik yükünün kvantlanması qanunu.

Təbiətdə gedən bütün proseslərdə elektrik yükü saxlanır: prosesin əvvəlindəki elektrik yükünün miqdarı prosesin sonunda onun miqdarına bərabərdir. Elektrik yükü heç nədən yarana bilməz və yox ola da bilməz. Verilmiş sistemdə (qapalı) elektrik yükünün miqdarı sabit qalır. Elektrik yükü yalnız cüt şəklində (eyni qədər «+» və eyni qədər «–» yük) «yarana» və cüt şəklində də «yox ola» bilər. Məsələn, iki γ-kvant toqquşaraq elektron-pozitron çütü yarada bilər və ya elektron-pozitron cütü iki, üç və s. sayda γ-kvanta annihilyasiya edə bilər ($\gamma_1+\gamma_2 \to e^- + e^+$, $e^+ + e^- \to \gamma_1 + \gamma_2$ və s.). Elektrik yükü həm də relyativistik invariant kəmiyyətdir.

Elementar zərrəciklər fizikasında aparılan bütün təcrübələr göstərir ki, elektrik yükü kvantlanır və məlum zərrəciklərin yükü sərbəst elementar yük olan elektronun yükünün (e) tam mislilərinə bərabərdir. Qeyd edək ki, kvant xromodinamikasında ağır, massiv zərrəciklər olan p, n, π, K-mezon və s. – hadronların* tərkib hissəsi olan $\pm\frac{1}{3}e$ və $\pm\frac{2}{3}e$ yükünə malik kvarkların varlığı bu qanunları əsla pozmur. Belə ki, yuxarıda söhbət sərbəst elmentar yükdən gedirdi. Hadronların tərkibində olan 2 və ya 3 kvark həmişə bir-birilə bağlı haldadır və hələlik hipotetik zərrəciklərdir. İndiyə qədər aparılan təcrübələrin heç birində sərbəst kvark müşahidə edilməmişdir. Əgər gələcəkdə sərbəst kvark müşahidə edilərsə yenə yuxarıdakı qanunlar öz gücündə qalacaq, lakin elementar yük olaraq $\frac{1}{3}e$ qəbul ediləcək və onun tam misliləri götürüləcəkdir.

Son illərdə bir çox böyük fiziklər Maksvellin atdığı addıma oxşar olaraq müxtəlif nəzəriyyələri birləşdirmək üçün çox çalışmışlar. Nəhayət 1967-ci ildə Weinberg, Salam və Glashow elektromaqnit və zəif q/t-ləri birləşdirərək Universal elektrozəif q/t nəzəriyyəsini qurdular. Bu *Stan-*

* ***hadron*** – *yunanca* böyük, ağır, güclü deməkdir.

dart Model (SM) adlanır və bir ədəd q/t sabiti ilə xarakterizə olunur. Bu istiqaməti davam etdirərək alimlər 80-ci illərdə yəqin etdilər ki, elektromaqnit, zəif və güclü q/t-lərin üçünü də birləşdirən vahid nəzəriyyə qurmaq olar. Bu «Böyük (*Grand*) birləşmə» adlanır və burada üç q/t sabiti çox böyük enejilərdə (10^{15} Gev) birləşərək bir q/t sabitinə çevrilir. Birləşmiş nəzəriyyələrdə fundamental zərrəciklərin sayı 12-dir: 6 lepton* ($e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) və 6 kvark (u, d, s, c, b, t). Digər zərrəciklər və nüvələr bu elementar zərrəciklərdən təşkil edilmişdir. Məlumat üçün deyək ki, hadronlar iki qrupa bölünür: spini 1/2 olan hadronlar (məxsusi hərəkət miqdarı momenti $\hbar/2$ olan) – barionlar və spini 0, 1, 2 və s. olanlar isə (məxsusi hərəkət miqdar momenti $n\hbar$, n=0, 1, 2... olanlar) – *mezonlar* adlanır. Barionlar (p, n və s.), 3 kvarkdan, mezonlar (π, K və s.) isə 2 kvarkdan təşkil olunmuş sayılır. Burada q/t kalibrləşmə sahələri (yəni onların kvantları: fotonlar, qlüonlar, W və Z bozonlar və s.) vasitəsilə verilir (ötürülür).

Belə məlum olur ki, müasir qravitasiya sahəsini də çox mürəkkəb quruluşa malik kalibrləşmə sahəsinə gətirmək mümkündür. Daha dəqiq desək, son zamanlar qravitasiyanın kvant nəzəriyyəsi olan superqravitasiyanı da kalibrləşmə sahələri nəzəriyyəsi vasitəsilə qurmağa müvəffəq olmuşlar. Müasir dövrün nəzəriyyəçi fizikləri dörd qarşılıqlı təsiri (elektromaqnit, qravitasya, güclü və zəif q/t) özündə birləşdirən vahid bir nəzəriyyənin qurulması üzərində çalışırlar. Bu vahid nəzəriyyə «*Supersimlər*» adlanır və o, «Hər şeyin nəzəriyyəsi» olmağa namizəddir.

Deyilənlərdən aydındır ki, bütün bu birləşmələrin əsasını Maksvellin yaratdığı elektrodinamika təşkil edir.

Əlbəttə fiziki nəzəriyyələrin bu növ birləşmələrini həyata keçirmək üçün çox güclü riyazi aparat tələb olunur. Burada hələlik riyazi cəhətdən həll olunmamış çoxlu sayda problemlər mövcuddur.

Qeyd edək ki, gələcəkdə yeni fundamental prinsiplər kəşf oluna bilər və q/t-lərin digər alternativ modelləri yarana bilər (belə ki, hələlik KXD güclü q/t nəzəriyyəsinə ilk namizəddir) və müxtəlif fiziki nəzəriyyələr başqa əsasda birləşə bilər. Lakin bu kəşflər, yeni modellər elektrodinamikanın müasir fizikada həlledici rolunu və yerini nəzərə çarpacaq qədər dəyişdirə bilməz. Çünki həm klassik və həm də kvant elektrodinamikası çox möhkəm təməl üzərində qurulmuşdur.

Elektrodinamika bəşəriyyətə verilmiş ilahi bir bəxşişdir!

---

* ***lepton*** – yunanca kiçik, yüngül deməkdir.

MİKROSKOPİK ELEKTRODİNAMİKA

I FƏSİL
MAKSVELL TƏNLİKLƏRİ TƏCRÜBİ FAKTLARIN AKSİOMATİK ÜMUMİLƏŞDİRİLMƏSİDİR

§1. Elektrik yükünün saxlanması qanunu və kəsilməzlik tənliyi

Girişdə qeyd edildiyi kimi bizi əhatə edən maddi aləm, bütün cisimlər elementar zərrəciklərdən və onların yaratdığı sahələrdən təşkil edilmişdir. Əksər zərrəciklər elektrik yükünə malikdir. Ən kiçik yük elektronun yüküdür ($e = -4{,}8 \cdot 10^{-10} \times (SGSE)_q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Kl). Digər zərrəciklərin yükü müsbət və ya mənfi işarə ilə elektronun yükünün tam mislilərinə ($\pm ne$) bərabərdir. Protonun (p) yükü müsbətdir və mütləq qiymətcə elektronun yükünə bərabərdir. Neytronun (n) elektrik yükü sıfırdır (maqnit momenti isə vardır) və s. Protonlar və neytronlar atomların, molekulların və kristal qəfəslərin müsbət yüklü nüvələrini təşkil edir. Atomlar normal şəraitdə neytraldır və onun nüvəsinin müsbət yükü elektron örtüyünün mənfi yükünə bərabərdir*. Makroskopik cisimlər atomlardan, molekullardan və kristal qəfəslərdən təşkil olunmuşdur. Toqquşma və ya xarici təsir nəticəsində atomlar və molekullar ionlaşa bilər. İonlaşma zamanı atom bir və ya bir neçə (N) elektron itirir və nəticədə yükü $+N|e|$ olan müsbət ion və N sayda mənfi yüklü elektron əmələ gəlir. Atoma bir artıq elektron birləşdikdə o, yükü $-|e|$ olan mənfi iona çevrilir.

Küllü miqdarda təcrübələr göstərir ki, təbiətdə gedən bütün proseslərdə (fiziki, kimyəvi, bioloji və s.) elektrik yükü saxlanır. Prosein əvvəlindəki elektrik yükünün miqdarı prosesin sonundakı miqdarına bərabərdir. Elektrik yükü heç nədən yarana bilməz və yox ola da bilməz. İs-

---

*məsələn, helium (He) atomunun nüvəsi 2 proton və 2 neytrondan təşkil olunmuşdur və nüvənin yükü $+2|e|$-dir. Bu atomun elektron örtüyündə 2 elektron vardır. Helium atomunun nüvəsinə α-zərrəcik deyilir (^4_2He). Oksigen (O) atomunun nüvəsində 8p və 8n vardır və nüvənin yükü $+8|e|$-dir. Bu atomun elektron örtüyü 8 elektrondan təşkil olunmuşdur. Digər atomlar da bu qayda ilə qurulmuşdur. Atomun nüvəsinin yükünü $+Z|e|$ ilə işarə edirlər. Burada Z atomun Mendeleyev cədvəlindəki sıra nömrəsidir (yə'ni nüvədəki protonların sayıdır və ya atomdakı elektronların sayıdır).

tənilən qapalı sistemdə elektrik yükünün miqdarı sabit qalır.

Elektrik yükü yalnız cüt şəklində (eyni qədər «+» və eyni qədər «-» yük) «yarana» və cüt şəklində «yox ola» bilər. Bu, təbiətin ən fundamental qanunlarından biridir və təbiətdə gedən bütün proseslərin istiqamətini müəyyən edir. Bu qanuna riyazi şəkil vermək üçün elektrik yüklərinin mövcud olduğu üç ölçülü fəzaya nəzər salaq. Fərz edək ki, yüklər müəyyən qanunla hərəkət edir. Əgər fəzanın bir hissəsində yük azalırsa bu, həmin hissədən yüklərin kənara çıxması ilə əlaqədardır. Əksinə, fəzanın müəyyən hissəsində yükün artması, kənardan həmin hissəyə yüklərin gəlməsi ilə izah olunur.

Yükün saxlanması qanunu bütün təbiətə, o cümlədən həm mikro-, həm də makroelektrodinamikaya aiddir. Makroelektrodinamikada maddi mühitdən və orada bir-birinə çox yaxın yerləşmiş küllü miqdarda yüklü zərrəciklərdən söhbət gedir. Makroelektrodinamika qanunlarını almaq üçün mühitdə yüklərin mikro paylanmasını fiziki sonsuz kiçik həcm üzrə ortalayırlar (bax: Makroelektroqradinamika). Demək, makroelektrodinamikada yüklərin kəsilməz paylandığını fərz etmək olar. Onda fəzanın $\vec{r}$ radius-vektoru ilə xarakterizə olunan hər hansı nöqtəsi ətrafında üçölçülü ΔV həcm elementini seçsək və t zamanı anında həmin həcm elementində yerləşən yükün miqdarını Δe ilə işarə etsək, yükün həcmi sıxlığı

$$\rho(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} = \frac{de}{dV} \tag{1.1}$$

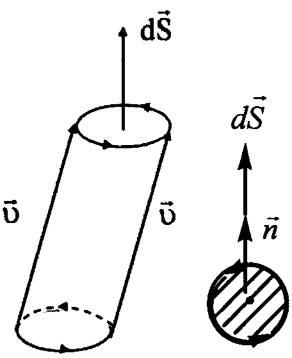
düsturu ilə ifadə olunar. $\rho(\vec{r},t)$ kəmiyyəti t anında $\vec{r}$ -nöqtəsində vahid həcmə düşən yükün miqdarıdır. Onda dV həcm elementində yerləşən yükün miqdarını belə yazmaq olar:

$$de = \rho(\vec{r},t)dV\,. \tag{1.2}$$

Mıkroelektrodinamikada biz vakuumda yerləşən az sayda yüklü zərrəciklərdən, məsələn, ayrı-ayrı elektronlardan, protonlardan, ionlardan, atomlardan və s. təşkil olunmuş sistemlərin elektromaqnit sahəsini öyrənirik. Biz fərz edəcəyik ki, mikroelektrodinamikada yüklər diskretdir və elementar zərrəciklər nöqtəvidir (nöqtəvi yük). Belə məlum olur ki, nöqtəvi yüklərin paylanması üçün də (1.2) düsturu doğrudur, lakin burada yükün sıxlığı Dirakın sinqulyar δ-funksiyası ilə təsvir olunacaqdır (bax: əlavə).

Qeyd yedək ki, yüklər həm də relyativistik invariantdır.

Yüklərin hərəkət etdiyi fəzada çox kiçik dS səth elementi götürək. Fərz edək ki, bu səth elementinin yerləşdiyi kiçik fəza hissəsində orta hesabla yüklərin sıxlığı eynidir (ρ) və yüklərin bü səthi deşib keçdiyi anda sürətləri də eynidir ($\vec{\upsilon}$). Oturacağı dS və doğuranı $\vec{\upsilon}$ olan elementar silindr quraq (şəkil 1.1). Yadımıza salaq ki, konturu böyüncə dolanma istiqaməti verilmiş istənilən elementar səthə bir vektor kimi baxmaq olar. Bu vektorun mütləq qiyməti səthin sahəsinə bərabərdir, istiqaməti isə səthin müsbət normalı böyüncadır (müsbət normal səthin konturunu dolanma istiqaməti ilə sağ yivli burğu təşkil edir): $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ (bax əlavə). Verilmiş t anında bu silindrin daxilindəki yükün miqdarı $dq = \rho dV_{sil} = \rho(\vec{\upsilon} d\vec{S}) = \rho\upsilon_n dS = \rho\upsilon dS\cos\theta$ olacaqdır ($\vec{n}$ ilə $\vec{\upsilon}$ arasındakı bucaq θ-dır). Bu dq yükü vahid zamanda silindrin üst oturacağından keçəcəkdir.



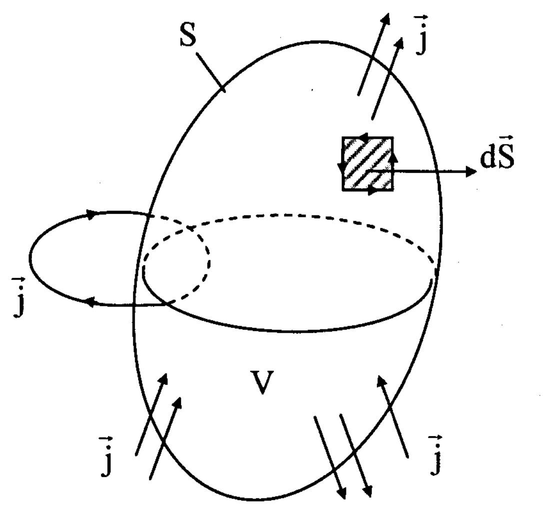
Şəkil 1.1.

Çünki silindrin doğuranı (uzunluğu) yüklərin sürətinə bərabərdir və verilmiş anda silindrin daxilində olan hər bir yük vahid zaman ərzində doğurana paralel $\vec{\upsilon}$ qədər yol gedərək yuxarı oturacaqdan keçir və silindri tərk edir. Onda yüklərin hərəkəti istiqamətinə perpendikulyar qoyulmuş vahid səthdən (dS=1) vahid zamanda keçən elektrik yükünün miqdarı $\rho\upsilon$ olar (bu halda səthin normalı yüklərin sürətinə paralel olacaq ($\theta = 0$) və sürətin normal üzrə proyeksiyası $\upsilon_n = \upsilon\cos\theta = \upsilon$ olacaqdır). Bu kəmiyyəti vektor şəklində yazırlar və ona cərəyan sıxlığı deyirlər: $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho\vec{\upsilon}$. Deməli, cərəyan sıxlığı ədədi qiymətcə yuklərin hərəkəti istiaqmətinə perpendikulyar qoyulmuş vahid səthdən vahid zamanda keçən yükün miqdarına bərabərdir. Onda vahid zamada hər hansı S səthindən keçən yükün miqdarı, yəni cərəyan şiddəti $J = \int\limits_S \vec{j} d\vec{S} = \int\limits_S j_n dS$ düstürü ilə hesablanacaqdır.

Yadımıza salaq ki, hər hansı vektorun ixtiyari səth (qapalı və ya açıq) üzrə inteqralı bu vektorun həmin səthdən keçən *seli* adlanır (bax: əlavə). Onda cərəyan şiddəti $\vec{j}$ vektorunun S səthindən keçən selidir.

Adətən cərəyan xəttləri anlayışından istifadə edirlər. Bu xəttlər elə çəkilir ki, onun hər bir nöqtəsində $\vec{j}$ vektoru bu xəttə toxunan olur. Cərəyan xəttlərinin sıxlığı (və ya sayı) verilmiş fəza hissəsində $\vec{j}$-nin qiyməti ilə mütənasib olmalıdır. Cərəyan istiqaməti olaraq müsbət yükün hərəkət istiqaməti qəbul olunmuşdur.

Elektrik yüklərinin mövcud olduğu və müxtəlif sürətlərlə hərəkət etdiyi fəzada ixtirayi qapalı S səthi götürək və onun daxilində qalan ixtiyari həcmi V ilə işarə edək (şəkil 1.2). Bu həcmin daxilində t anında yerləşən yükün miqdarı $q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t)dV$ olar. Yüklər hərəkət edərək həcmə daxil ola və həcmdən kənara çıxa bilər. Ona görə həcmdəki yükün miqdarı zamandan asılı olacaqdır. Həcmdəki yükün vahid zamanda dəyişməsini hesablayaq: $\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ (α).



Şəkil **1.2**

Digər tərəfdən hərəkət edən yüklər cərəyan ($\vec{j}$) yaradır. Onda vahid zamanda qapalı S səthindən keçən yükün miqdarı: $\oint_S \vec{j}d\vec{S} = \oint_S jdS\cos\theta$ (β) olar (θ burada $\vec{j}$ ilə $d\vec{S}$ arasındakı bucaqdır). Bu ifadə $\gtreqless 0$ ola bilər. Əgər cərəyan həcmdən xaricə çıxarsa ($\vec{j}$ ilə $d\vec{S}$ arasındakı bucaq itidirsə) bu ifadə müsbət və əksinə, cərəyan həcmə daxil olursa ($\vec{j}$ ilə $d\vec{S}$ kor bucaq təşkil edirsə) bu ifadə mənfi olacıqdır. Qeyd edək ki, səth qapalı olduqda müsbət normalı, yəni $d\vec{S} = \vec{n}dS$ vektorunu həmişə həcmdən xaricə yönəlmiş qəbul edirlər. Cərəyan xəttləri qapılı olduqda (β) ifadəsi sıfır olacıqdır. Çünki, qapalı cərəyan xəttləri qapalı S səthini ən azı iki dəfə kəsir və bir dəfə müsbət sel yaradırsa, ikinci dəfə mənfi sel yaradır və bu sellər bir-birini neytrallaşdırır.

Yükün saxlanması qanununa görə (α) və (β) ifadələri qiymətcə bir-birinə bərabər və işarəcə əks olmalıdır:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \vec{j}d\vec{S}. \tag{1.3}$$

Doğrudan da, əgər həcmdə yük artırsa bərabərliyin sol tərəfi müsbətdir. Həcmdə yükün artması kənardan həcmə daxil olan cərəyanın hesabına olur. Cərəyan həcmə daxil olanda $\vec{j}$ və $d\vec{S}$ kor bucaq təşkil edir və $\oint_S \vec{j}d\vec{S} < 0$ olur. Ona görə sağ tərəfdə inteqralın qarşısında «–» işarəsi yazılıb ki, mənfinin mənfiyə hasili müsbət versin və bərabərliyin hər iki tərəfi eyni işarəli olsun. Bu mülahizəni eyni ilə həcmdə yükün azaldığı hal üçün də aparmaq olar. (1.3) bərabərliyi yükün saxlanması qanununun inteqral şəklidir. Bu qanunun diferensial şəklini almaq üçün (1.3) bərabərliyninin sağ tərəfinə Qauss teoremini tətbiq etmək lazımdır (bax: əlavə): $\oint_S \vec{j}d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{j}\,dV$.

Qauss teoremi belə ifadə edilir: hər hansı vektorun qapalı səthdən keçən seli bu vektorun divergensiyasının həmin səthin daxilində qalan həcm üzrə inteqralına bərabərdir. Bu zaman (1.3) ifadəsindən alırıq: $\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_V \mathrm{div}\vec{j}\,dV$ və ya $\int_V \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}\right\}dV = 0$. Bu inteqralın sıfır olmasından və V inteqrallanma həcminin ixtiyariliyindən riyazi nəticə kimi çıxır ki, inteqral altı funksiya sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0. \tag{1.4}$$

Bu dustür yükün saxlanması qanununun diferensial şəklidir. Bu ifadəyə kəsilməzlik tənliyi deyilir. Qeyd edən ki, kəsilməzlik tənliyi yüklərin mövcud olduğu fəzanın hər bir nöqtəsində və istənilən zaman anında ödənməlidir. Fizikada bu tənlik çox mühüm rol oynayır və o, yalnız yük üçün deyil, istənilən saxlanılan kəmiyyət üçün doğrudur.

İndi yüklərin stasionar hərəkət etdiyi xüsusi hala baxaq. Stasionar hərəkətdə hər bir fəza nöqtəsinə verilmiş anda nə qədər yük gəlirsə, həmin anda o qədər də yük həmin fəza nöqtəsini tərk edir, yəni yük heç bir fəza nöqtəsində toplanmır, başqa sözlə yükün fəzada paylanması zamandan asılı olmur: $\frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} = 0$. Bunu kəsilməzlik tənliyində nəzərə alsaq, tənlik aşağıdakı şəklə düşər:

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}) = 0. \tag{1.5}$$

Divergensiyanın tərifindən bilirik ki, (bax: əlavə) hər hansı funksiyanın divergensiyası o funksiyanın mənbəyinin «gücünü», «intensivliyini» xaraktrizə edir. Əgər hər hansı funksiyanın divergensiyası sıfırdırsa, bu funksiyanın mənbəyi yoxdur. Deməк, stasionar (sabit) cərəyanların mənbəyi yoxdur. (1.5) tənliyini hər hansı ixtiyarı V həcmi üzrə inteqrallayaq və Qauss teoremini tətbiq edək:

$$0 = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\, dV = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S}.$$

Buradan görünür ki, stasionar $\vec{j}(\vec{r})$ cərəyanının ixtiyarı qapalı S səthindən keçən seli sıfırdır: $\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0$. Bu yalnız $\vec{j}(\vec{r})$ cərəyan xəttlərinin qapalı xəttlər olduğu halda mümkündür. Belə ki, qapalı $\vec{j}(\vec{r})$ xəttləri qapalı S səthinə daxil oludqda mənfi sel, S-dən xaricə çıxdıqda müsbət sel yaradır və bu sellər bir-birini neytrallaşdırır, nəticədə yekun (tam) sel sıfır olur.

Gələcəkdə biz müxtəlif funküsiyalar (sahələr) üçün yazılmış (1.5) tənliyinə çox yerdə təsadüf edəcəyik. Ona görə (1.5) tənliyindən çıxan nəticəyə ciddi fikir vermək lazımdır: stasionar cərəyanın mənbəyi yoxdur və onun cərəyan xəttləri qapalıdır (və ya xəttlər sonsuzluqda başlayıb sonsuzluqda da qurtarır). Cərəyan xəttləri bir-biri ilə kəsişə bilməz, əks halda $\vec{j}$-nin istiqaməti qeyri-müəyyən olar. Cərəyan xəttlərindən istifadə edərək cərəyan boruları yaratmaq olar.

Elektrik və maqnit kəmiyyətlərinin ölçü vahidləri sistemi. Kitabda istifadə olunan ölçü vahidləri sistemi haqda qısa məlumat verək. Biz əsas etibarilə mütləq Qauss vahidlər sistemindən istifadə edəcəyik. Bu sistemdə elektrik kəmiyyətləri SGSE, maqnit kəmiyyətləri isə SGSM sistemində yazılır. Qauss sistemində Maksvell tənlikləri çox simmetrik yazılır, qanunlar isə təbii şəklə malik olur. Burada vakuum üçün yazılmış Maksvell tənliklərinə yeganə c əmsalı (işığın vakuumda sürəti) daxil olur. Bu, elektromaqnit sahəsinin relyativistik xarakterini aşkar göstərir və tənliklərin kovariant yazılması işini asanlaşdırır. Bu sistemdə proseslərin, qanunların fiziki mahiyyəti çox asan başa düşülür.

Keçən əsrin 60-cı illərindən etibarən elektrotexniki ölçmələri nəzərə alan və təcrübəyə daha yaxın olan Beynəlxalq vahidlər sistemi - BS tətbiq edilməyə başlandı. BS-nin əhəmiyyəti ondadır ki, bu sistemin əsas vahidləri elmin bir sıra sahələrinin praktiki tətbiqində, texnikada və xalq təsərrüfatında müəyyən üstünlüyə malikdir və əlverişlidir.

Lakin BS-nin çatışmayan cəhəti odur ki, fundamental fizikanın bir çox düsturlarını bu sistemdə yazdıqda onlara heç bir fiziki mənası olmayan əmsallar daxil olur və bunlar da fiziki hadisələrin mahiyyətini başa düşməkdə çətinlik yaradır. Bu sistemdə vakuumu heç bir fiziki mənası olmayan iki sabitlə $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\frac{\Phi}{m}$ – elektrik sabiti və $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Hn}{m}$ maqnit sabiti ilə xarakterizə edirlər. ε_0 və μ_0 sabitlərinin yalnız hasili fiziki məna daşıyır: $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, burada c işığın boşluqda yayılma sürətidir.

Biz yeri gəldikdə BS sistemindən istifadə edəcəyik və müqayisə üçün son düstürları bu sistemdə də verəcəyik. Biz bəzən Hevisayd sistemindən də istifadə edəcəyik. Bu, nəzəri fizikada əsas sistemdir. Əsas tənliklərin və fiziki kəmiyyətlərin ölçü vahidlərinin bir sistemdən digərinə keçidini əlavədə verilmiş cədvəlin köməyi ilə çox asanlıqla icra etmək olar.

§2. Kulon qanunu, onun diferensial şəkli və aksiomatik ümumiləşdirilməsi

Kulon qanununa keçməzdən əvvəl elektrodinamika və onun vəzifələri haqda bəzi qeydləri haşiyə şəklində nəzərə çatdırmaq lazımdır.

Elektrodinamika elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklərin nəzəriyyəsi olub, nəzəri fizikanın ən mühüm hissəsidir. Elektromaqnit sahəsi vektori sahədir və o, vakuumda sahənin elektrik $(\vec{E}(\vec{r},t))$ və maqnit $(\vec{H}(\vec{r},t))$ intensivlik vektorları ilə tam təsvir olunur. Elektromaqnit sahəsinin $\vec{E}$ elektrik və $\vec{H}$ maqnit intensivlik vektorları xüsusi törəməli diferensial tənlikləri ödəyir. Bu tənliklər *Maksvell tənlikləri* adlanır.

Fizika ümumiyyətlə təcrübi elmdir və onun inkişafı yüksək səviyyədə aparılan təcrübələrdən çox asılıdır. Sual oluna bilər, bəs onda nəzəri fizikanın, o cümlədən elektrodinamikanın rolu nədən ibarətdir? Elektrodinamikanın qarşısında iki növ məsələ durur:

1) Elektromaqnit sahəsinə aid küllü miqdarda təcrübi faktlar, qanuna-uyğunluqlar, təcrübi kəşflər arasında qarşılıqlı əlaqələri müəyyən etmək, onları kəmiyyət münasibətləri şəklində ümumiləşdirərək bütün təcrübi nəticələri izah edə bilən bir nəzəriyyə qurmaq.

2) Riyazi tədqiqat üsullarını tətbiq edərək yeni fiziki qanunauyğunluqlar tapmaq, fiziki hadisələr arasında hələlik təcrübədə müşahidə edilməmiş yeni qarşılıqlı əlaqələri əvvəlcədən söyləmək və elmi qabaqgörmə əsasında yeni inkişaf yollarını müəyyən etmək.

Tam yəqinliklə deyə bilərik ki, elektrodinamika bu vəzifələrin öhdəsindən müvəffəqiyyətlə gəlir.

Kulon qanununa (1785) görə sükunətdə olan iki nöqtəvi yük arasında təsir göstərən elektrik qüvvəsi vakuumda:

$$\vec{F} = f\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r} \tag{2.1}$$

şəklində yazılır. Burada q_1 sınaq yükü, q – sahəni yaradan əsas yük, $\vec{r}$ q-dən q_1-ə yönəlmiş radius vektor, f isə vahidlər sistemini müəyyən edən əmsaldır. Qauss sistemində f=1, BS sistemində $f = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ və Hevisayd sistemində $f = \dfrac{1}{4\pi}$ olur. Biz hesabatı Qauss sistemində aparacağıq. Sınaq yükünü çox kiçik götürərək q yükünün elektrostatik sahəsinin elektrik intensivliyi vektorunu təyin edək:

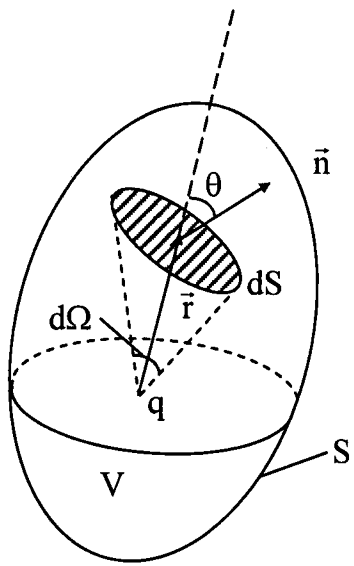
$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_1 \to 0}\frac{\vec{F}}{q_1} = \frac{q\vec{r}}{r^3}. \tag{2.2}$$

Sınaq yükünü çox kiçik götürürük ki, o, əsas yükün (q) sahəsini təhrif etməsin. Elektrostatik sahənin intensivliyi sükunətdə olan vahid müsbət yükə təsir edən qüvvədir.

Adətən sahənin intensivlik xətləri (qüvvə xətləri) anlayışından istifadə edirlər. Bunlar elə xətlərdir ki, onlara hər bir nöqtədə çəkilən toxunan $\vec{E}$ vektoru istiqamətində olur.

Sahədə götürülmüş ixtiyari qapalı S səthindən keçən $\vec{E}$ vektorunun selini hesablayaq (şəkil 2.1):

$$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = q\oint_S \frac{d\vec{S}\vec{r}}{r^3} = q\oint_S \frac{dS(\vec{n}\vec{r})}{r^3} = q\oint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2}.$$



Şəkil **2.1**

Biz q yükünü qapalı səthin daxilindəki V həcmində götürmüşük. Burada $d\vec{S} = dS\vec{n}$ ixtiyari səth elementidir. Onun $\vec{n}$ müsbət normalı q yükündən bu elementə çəkilmiş $\vec{r}$ radius vektoru ilə θ bucağını əmələ gətirir (şəkil 2.1). θ eyni zamanda dS səth elementinin $\vec{r}$-ə perpendikulyar istiqamətə meyl bucağıdır. Onda $dS\cos\theta = dS_\perp$ kəmiyyəti dS-in $\vec{r}$-ə perpendikulyar istiqamətə proyeksiyasıdır, başqa sözlə radiusu r olan sferanın səth elementidir: $dS_\perp = r^2 d\Omega$. Burada $d\Omega$ kəmiyyəti q yükünün yerləşdiyi nöqtədən baxdıqda dS (və ya $dS_\perp$) səth elementinin göründüyü cisim bucağıdır. Bunları nəzərə alsaq $\Phi = q\oint d\Omega = 4\pi q$ olar.

Beləliklə, bir yükün yaratdığı elektrostatik sahə halında

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q \qquad (2.3)$$

olur. Əgər q müsbətdirsə, (2-3)-dən görünür ki, $\vec{E}$-nin seli də müsbətdir

($\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} > 0$). Yəni $\vec{E}$ ilə $d\vec{S}$ arasındakı bucaq itidir və $\vec{E}$ xəttləri V həcmindən xaricə çıxır. Başğa sözlə $\vec{E}$ xəttləri müsbət yükdən xaricə çıxır. Əgər q mənfidirsə, analoji yolla alırıq ki, $\vec{E}$ xəttləri həcmə daxil olur. Yəni $\vec{E}$ xəttləri mənfi yükə daxil olur.

İndi fərz edək ki, ixtiyari qapalı S səthinin daxilindəki V həcmində N sayda elektrik yükü sükunətdədir və onlar elektrostatik sahə yaradır. Bu sahənin selini hesablamaq üçün elektromaqnit sahəsinin ödədiyi superpozisiya prinsipindən istifadə edəcəyik. Bu prinsip çox sayda təcrübələrin nəticəsidir. İstənilən elektromaqnit sahəsi bu prinsipi ödəyir və xüsusi halda elektrostatik sahə üçün də bu prinsip doğrudur.

Yüklər sisteminin yaratdığı elektrik sahəsi (intesivliyi) ayrı-ayrı yüklərin yaratdığı sahələrin intensivliklərinin vektori cəminə bərabərdir:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i .$$

Burada $\vec{E}_i$ i-ci yükün (yəni q_i-nin) yaratdığı sahənin inetsivliyidir. İndi (2.3) ifadəsini i-ci yük üçün yazaq, sonra yüklər üzrə cəm aparaq və nəhayət superpozisiya prinsipini nəzərə alaq:

$$\oint\limits_S \vec{E}_i d\vec{S} = 4\pi q_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \oint\limits_S \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} 4\pi q_i = 4\pi Q,$$

$$\oint\limits_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q. \qquad (2.3')$$

Burada $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ V həcmində yerləşən bütün yüklərin cəmidir, $\vec{E}$ isə bütün yüklərin yaratdığı yekun sahənin intensivliyidir. Yüklərin həcmi sıxlığını daxil edək $Q = \int\limits_V \rho dV$. İndi (2.3') tənliyinin sol tərəfinə Qauss teoremini tətbiq etsək,

$$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{E} dV = 4\pi \int\limits_V \rho dV$$

və ya

$$\int\limits_V \{\mathrm{div}\vec{E} - 4\pi\rho\} dV = 0$$

olar. Burada inreqralanma həcmi ixtiyari olduğundan inteqral altındakı ifadə sıfır olmalıdır:

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}). \qquad (2.4)$$

Bu, Kulon qanununun diferensial şəklidir. Kulon qanunu yalnız sükunətdəki yüklər üçün doğru olduğundan (2.4) tənliyində sahə və yüklərin sıxlığı ancaq koordinatın funksiyasıdır.

İndi fərz edək ki, V həcmindəki yüklər müəyyən qanunla hərəkət edir. Aydındır ki, hərəkət edən yüklərin yaratdığı həm elektrik sahəsi və həm də yüklərin paylanma sıxlığı zamandan asılı olmalıdır: $\vec{E}(\vec{r},t), \rho(\vec{r},t)$. Maksvell aksiom şəkildə qəbul edir ki, (2.4) tənliyi yüklərin ixtiyari qanunla hərəkət etdiyi halda da doğrudur (I aksiom):

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t). \qquad (2.5)$$

Bu, məşhur Maksvell tənliklərindən biridir. Dekart koordinat sistemində $\mathrm{div}\vec{E} = (\vec{\nabla}\vec{E}) \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ şəklində yazılır, burada «nabla» $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ – Hamilton operatorudur.

Divergensiyanın tərifindən (bax: əlavə) bilirik ki, hər hansı sahənin divergensiyası o sahənin mənbəyini xarakterizə edir. Biz (2.5) tənliyini belə ifadə edirik: istənilən halda elektrik sahəsinin mənbəyi elektrik yükləridir.

Əgər BS sistemini seçsək, onda yüxarıda apardığımız hesablamadan aydın olur ki, (2.5) tənliyinin sağ tərəfini $4\pi\varepsilon_0$-a bölməliyik. BS-də (2.5) tənliyi

$$\mathrm{div}\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \qquad (2.5)\ \mathrm{BS}$$

şəklində yazılır. $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\frac{\Phi}{m}$ *vakuum üçün elektrik sabiti* adlanır. Burada yeni $\vec{D}_0 = \varepsilon_0\vec{E}$ vektoru daxil edirlər və ona vakuumda elektrik induksiyası vektoru deyirlər. BS-də vakuumda elektrik sahəsi $\vec{E}$ və $\vec{D}_0$ vektorları ilə xarakterizə olunur (iki ədəd vektor !).

(2.5) tənliyini Hevisayd (Heaviside) sistemində yazmaq üçün, o tənliyin sağ tərəfini 4π-yə bölmək lazımdır:

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t). \qquad (2.5)\ \mathrm{H}$$

Beləliklə, alınmış nəticəni belə ifadə etmək olar. İstənilən elektrik sahəsi mənbəyə malikdir. Onun mənbəyi elektrik yükləridir. Sahənin qüvvə xəttləri müsbət yüklərdən çıxır (başlanır) və mənfi yüklərə daxil olur. Elektrik sahəsi (2.5) tənlikləri ilə təsvir olunur (sərbəst sahə haqda gələcəkdə danışacağıq).

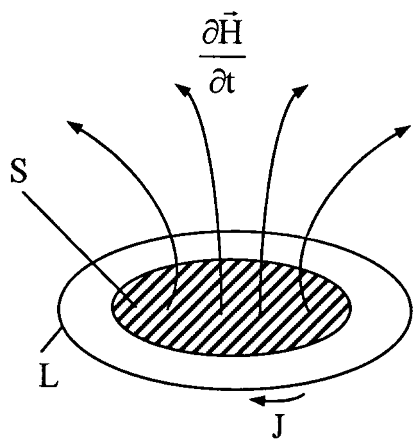
§3. Faradeyin elektromaqnit induksiyası qanununun diferensial şəkli

Faradeyin təcrübələri (1831-ci il) göstərdi ki, ixtiyari qapalı naqil kontur ilə əhatə olunmuş səthdən keçən maqnit seli dəyişdikdə bu konturda elektrik cərəyanı yaranır. Əlbəttə naqildə cərəyanın axmasını konturda induksiyalanan EHQ təmin edir.

Təcrübələrin nəticələrini aşağıdakı riyazi ifadə ilə vermək olar:

$$\varepsilon^{ind} = JR = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = \int_S \vec{H}d\vec{S}. \tag{3.1}$$

Burada J – induksiya cərəyanı, R – naqil konturun müqaviməti, ε^{ind} – konturda induksiyalanan EHQ, Φ – konturla hüdudlanmış səthdən keçən maqnit selidir (şəkil 3.1).



Şəkil **3.1**

Təcrübə göstərir ki, induksiya cərəyanının istiqaməti maqnit selinin artma istiqaməti ilə sol yivli burğu təşkil edir. Məlumdur ki, konturda EHQ müsbət vahid yükün qapalı kontur boyünca hərəkəti zamanı elektrik sahəsinin gördüyü işə bərabərdir: $\varepsilon^{ind} = \oint_L \vec{E}d\vec{\ell}$.

Onda təcrübi (3.1) qanununu belə yazmaq olar:

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{H}d\vec{S}.$$

L konturunun və S səthinin sabit qaldığını fərz edərək yuxarıdakı münasibəti

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (3.2)$$

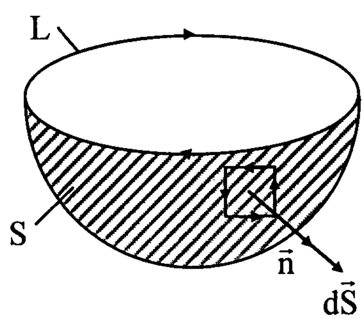
şəklində yazmaq olar. Son ifadəyə ilk götürdüyümüz naqil konturun maddəsinin heç bir xarakteristikası (müqaviməti, keçiriciliyi və s.) daxil olmur. Deməli (3.2) münasibəti istənilən mühitdən (naqil, dielektrik, hətta vakuum) keçən ixtiyari kontur və ona söykənən ixtiyari səth üçün doğrudur. (3.2) münasibətinin belə başa düşülməsi təcrübi faktın özünün ümumiləşdirilməsi deməkdir.

Təcrübədə naqil konturdan istifadə olunması yalnız induksiya cərəyanını aşkar etməyə imkan verirdi. Lakin elektromaqnit induksiyası qanununun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, induksiya cərəyanının aşkar edilib edilməməsindən asılı olmayaraq maqnit selinin dəyişməsi elektrik sahəsini yaradır.

Bu qanunun diferensial şəklini almaq üçün Stoks teoremindən (bax: əlavə) istifadə edək:

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{\ell} = \int\limits_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S}.$$

Stoks teoremi sözlə belə ifadə olunur: hər hansı vektorun ixtiyari qapalı kontur üzrə inteqralı (yəni sirkulyasiyası) bu vektorun rotorunun həmin kontura söykənən ixtiyari səthdən keçən selinə bərabərdir. Konturu dolanma istiqaməti ilə səthin müsbət normalı sağ yivli burğu təşkil edir (şəkil 3.2).



***Şəkil* 3.2**

Qeyd edək ki, eyni bir kontura sonsuz sayda səth söykənə bilər. $\text{rot}\vec{E}$ -nin dekart koordinat sistemində ifadəsi belədir:

$$\text{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla}\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

(3.2) münasibətinin sol tərəfinə Stoks teoremini tətbiq edək

$$\int_S \text{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}d\vec{S}$$

və ya

$$\int_S \left\{\text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right\}d\vec{S} = 0.$$

Bu inteqralda S inteqrallanma səthi ixtiyari olduğundan, inteqral altındakı funksiya sıfır olmalıdır:

$$\text{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}. \qquad (3.3)$$

Bu, *Faradeyin elektromaqnit induksiyası qanununun diferensial şəklidir.*

(3.3) Maksvell tənliklərindən biridir. Tənliyin mənası belədir: *maqnit sahəsinin zamana görə dəyişməsi burulğanlı elektrik sahəsini yaradır.* Mənfi işarəsi göstərir ki, elektromaqnit sahəsinin maqnit intensivliyinin dəyişmə sürəti və elektrik intensivliyi vektoru sol yivli burğu təşkil edir.

Qeyd edək ki, rot, div və s. anlayışlar fizikanin mayelərin hərəkət qanunları ilə məşğul olan bəhsindən – hidrodinamikadan götürülmüşdür (bax: əlavə). Hidrodinamikada burulğanlı hərəkət edən mayedə hissəciklərin sürətinin rotoru sıfırdan fərqlidir. Ona görə *rotoru sıfırdan fərqli olan sahələr* ***burulğanlı sahələr*** adlanır.

İndi Qauss sistemindəki (3.3) tənliyini BS sistemində yazmaq üçün Faradeyin elektromaqnit induksiyası qanununun BS-də ifadəsindən istifadə etməliyik:

$$\varepsilon^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S \mu_0\vec{H}d\vec{S}.$$

Burada $\mu_0\vec{H} = \vec{B}_0$-a vakuumda maqnit sahəsinin induksiya vektoru və

Φ-yə maqnit induksiyası seli deyirlər. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Hn}}{\text{m}}$ vakuum üçün maqnit sabitidir.

Hesablamaları analoji aparsaq, çox asanlıqla

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (3.3)\ \text{BS}$$

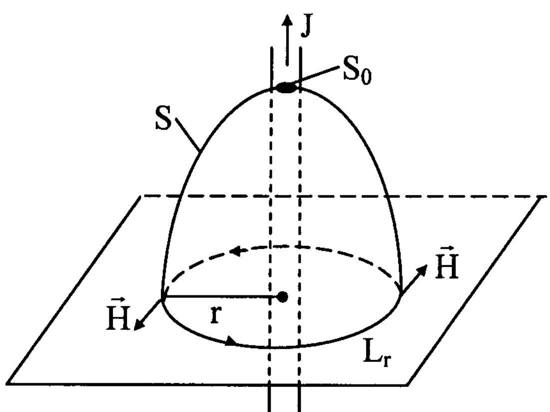
tənliyini alarıq. Bu, BS sistemində yazılmış Maksvell tənliklərindən biridir.

§4. Düzxəttli sabit cərəyanın maqnit sahəsi üçün Amper qanununun diferensial şəkli

Təcrübələr göstərir ki, düzxəttli sabit cərəyanın yaratdığı maqnit sahəsinin intensivlik xəttləri cərəyana perpendikulyar müstəvidə konsentrik çevrələr təşkil edir və intensivliyin qiyməti

$$H = \frac{2J}{cr} \qquad (4.1)$$

düstürü ilə təyin edilir. Burada J – cərəyan şiddəti, r – cərəyan oxundan H-ın təyin edildiyi nöqtəyə çəkilmiş radius, c – işığın yayılma sürətidir. İntensivlik vektoru cərəyan istiqaməti ilə sağ yivli burğu təşkil edir və r radiuslu çevrəyə toxunan istiqamətdə yönəlir (şəkil 4.1).



Şəkil **4.1**

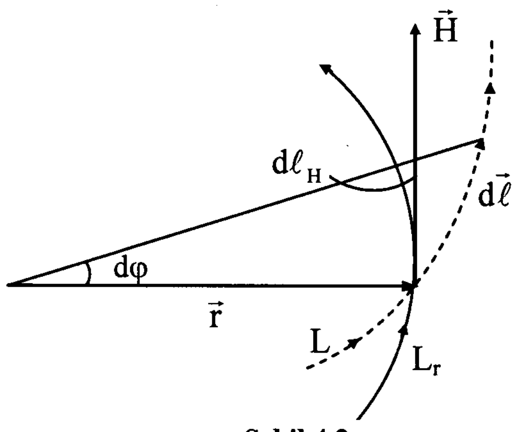
(4.1) ifadəsini $2\pi r$-ə vuraraq, onu $2\pi rH = \frac{4\pi}{c}J$ şəklində yazaq. H çevrə üzərində bütün nöqtələrdə eyni bir qiymət aldığından $2\pi rH = \oint\limits_{L_r} \vec{H}d\vec{\ell}$

yazmaq olar. Burada L_r radiusu r olan çevrənin konturudur. Cərəyan axan naqilin en kəsiyinə S_0 desək $J = \int\limits_{S_0} \vec{j}d\vec{S}$ olar. S_0 səthini L_r çevrəsinə söykənən və cərəyan xəttlərini kəsən ixtiryari S səthi ilə əvəz etmək olar: $J = \int\limits_{S_0} \vec{j}d\vec{S} = \int\limits_{S} \vec{j}d\vec{S}$. Bundan sonra (4.1) aşağıdakı şəklə düşür:

$$\oint\limits_{L_r} \vec{H}d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_{S} \vec{j}d\vec{S}. \tag{4.2}$$

Bu düsturda yeganə məhdudyyət L_r konturunun çevrə şəkilində olmasıdır. Bu məhdudiyyəti aradan qaldırmaq, yəni $\vec{H}$-ın çevrə üzrə sirkulyasiyasını cərəyanı əhatə edən ixtiyari qapalı kontur üzrə inteqralla əvəz etmək olar. Bunun üçün çevrə ilə hər hansı nöqtədə kəsişən ixtiyari qapalı müstəvi L konturu üzrə $\vec{H}$-ın inteqralını hesablayaq (şəkil 4.2, qırıq xətt):

$$\oint\limits_{L} \vec{H}d\vec{\ell} = \oint\limits_{L} Hd\ell_H .$$



Şəkil 4.2

İxtiyari L konturunun $d\vec{\ell}$ elementinin $\vec{H}$ istiqamətində proyeksiyası olan $d\ell_H$ çox kiçik xəta ilə r radiuslu çevrə qövsünün elementi ilə üst-üstə düşür. Onda

$$\oint\limits_{L} \vec{H}d\vec{\ell} = \oint\limits_{L} Hd\ell_H = \oint\limits_{L} \frac{2J}{cr}d\ell_H = \frac{2J}{c}\oint\limits_{L} \frac{d\ell_H}{r} = \frac{2J}{c}\oint d\varphi = \frac{4\pi J}{c}.$$

Bu ifadəni

$$\oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = \frac{4\pi J}{c} \tag{4.3}$$

şəklində yazmaq olar. Bu, düzxəttli sabit cərəyanın maqnit sahəsi üçün Amper qanunudur. Burada L cərəyanı əhatə edən ixtiyari müstəvi konturudur. (4.3) düstürunun ixtiyari fəza konturu üçün də doğru olduğunu asanlıqla göstərmək olar. Doğrudan da $\oint_{L_f} \vec{H}d\vec{\ell}_f$ inteqralının ixtiyari fəza konturu üçün yazıldığını fərz edək və onun uzunluq elementini L-in yerləşdiyi müstəviyə $\perp$ və $\parallel$ olan iki toplanana ayıraq: $d\vec{\ell}_f = d\vec{\ell}_\perp + d\vec{\ell}_\parallel$. $\vec{H}$ vektoru L müstəvisində yerləşdiyinə görə $\vec{H}d\vec{\ell}_\perp = 0$ və $\vec{H}d\vec{\ell}_f = \vec{H}d\vec{\ell}_\perp + {}$ $+\vec{H}d\vec{\ell}_\parallel = \vec{H}d\vec{\ell}_\parallel \equiv \vec{H}d\vec{\ell}$ olar. Yəni $\oint_{L_f} \vec{H}d\vec{\ell}_f = \oint_L \vec{H}d\vec{\ell}$ olur.

Deməli, (4.3) düzxəttli sabit cərəyanın maqnit sahəsi üçün ən ümumi düsturdur və burada L sabit J cərəyanını əhatə edən istənilən qapalı konturdur.

Əgər L konturu J cərəyanını n dəfə dolanmış olsaydı, onda (4.3) tənliyi belə yazılardı:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} n \cdot J. \tag{4.3'}$$

Çunki hər bir dolanma bir ədəd J cərəyanına ekvivalentdir. Əgər dolanmaların sayı sıfırdırsa (yəni, L konturu J cərəyanını əhatə etmirsə) $\oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = 0$ olar.

İndiyə qədər söhbət bir düzxəttli J cərəyanı və onun yaratdığı maqnit sahəsindən gedirdi. Fərz edək ki, bir neçə cərəyandan ibarət düz xəttli cərəyanlar sistem verilmişdir və bu sistemin yaratdığı tam maqnit sahəsini hesablamaq lazımdır. Burada da elektromaqnit (xüsusi halda maqnit) sahəsinin tabe olduğu superpozisiya prinsipindən istifadə edəcəyik. Cərəyanlar sisteminin yaratdığı maqnit sahəsi ayrı-ayrı cərəyanların yaratdığı maqnit sahələrinin vektorı cəminə bərabərdir:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{N} \vec{H}_i .$$

Burada $\vec{H}_i$ – i-ci cərəyanın (yəni J_i-nin) yaratdığı maqnit sahəsinin intensivliyidir. İndi (4.3) ifadəsini i-ci cərəyan üçün yazaq, sonra cərəyanlar üzrə cəm aparaq və nəhayət, superpozisiya prinsipini nəzərə alaq:

$$\oint_L \vec{H}_i d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} J_i,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \oint_L \vec{H}_i d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{N} \frac{4\pi}{c} J_i = \frac{4\pi}{c} J,$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} J. \qquad (4.3a)$$

Burada $J = \sum_{i=1}^{N} J_i$ L konturunun daxilindən keçən bütün düzxəttli sabit cərəyanların cəmidir, $\vec{H}$ isə bütün cərəyanların yaratdığı yekun maqnit sahəsinin intensivliyidir. Cəmdə J_i-nin işarəsi L konturunu dolanma istiqaməti ilə əlaqədardır. Əgər L konturunu dolanma istiqaməti J_i cərəyanı istiqaməti ilə sağ bürğu təşkil edirsə J_i müsbət işarə ilə, sol burğu təşkil edirsə J_i mənfi işarə ilə götürülməlidir. (4.3a) Amper qanununu sözlə ifadə edək: *düzxəttli sabit cərəyanlar sisteminin yaratdığı maqnit sahəsi intensivliyinin hər hansı qapalı kontur üzrə sirkulyasiyası (inteqralı) bu konturla əhatə olunmuş cərəyanların cəbri cəminin* $4\pi/c$*-yə olan hasilinə bərabərdir*. Çox vaxt bu qanuna tam cərəyan qanunu da deyilir.

İndi (4.3) və ya (4.3a) tənliyinin diferensial şəklini alaq. Bunun üçün (4.3a) tənliyinin sol tərəfinə Stoks teoremini tətbiq edək və sağ tərəfində $J = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ yazaq:

$$\int_S \text{rot}\vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Burada S – ixtiyari L konturuna söykənən ixtiyari səthdir. İnteqralları birləşdirsək,

$$\int_S \left\{ \text{rot}\vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right\} d\vec{S} = 0$$

olar. Burada S ixtiyari olduğundan inteqralaltı funksiya sıfır olmalıdır:

$$\text{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \qquad (4.4)$$

Bu, Amper qanununun diferensial şəklidir. Burada $\vec{j}(\vec{r})$ ixtiyari istiqamətə və qiymətə malik sabit keçiricilik cərəyanı sıxlığıdır, $\vec{H}(\vec{r})$, isə belə cərəyanın yaratdığı maqnit sahəsi intensivliyidir. (4.4) tənliyində artıq düzxətli cərəyan anlayışı yoxdur, ixtiyari cərəyan vardır.

§5. Amperin diferensial qanununun aksiomatik ümumiləşdirilməsi və dəyişmə cərəyanı

Əvvəlki §4-də verilmiş Amperin (4.4) diferensial qanunu yalnız stasionar (sabit) cərəyanlar və sabit maqnit sahələri üçün doğrudur.

Əgər cərəyanlar zamana görə dəyişirsə ($\vec{j}(\vec{r},t)$) yəqin onların yaratdığı maqnit sahəsi də zamanın funksiyası olacaqdır ($\vec{H}(\vec{r},t)$). Görəsən bu halda (4.4) tənliyini necə ümumiləşdirmək və nə şəkildə yazmaq lazımdır? İlk ağlabatan odur ki, (4.4) tənliyində $\vec{j}$ və $\vec{H}$-ı zamandan asılı funksiya şəklində götürək:

$$\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t). \tag{5.1}$$

Lakin (4.4) tənliyindən fərqli olaraq (5.1) tənliyində daxili ziddiyət vardır. Bunu yəqin etmək üçün (5.1) tənliyinin hər iki tərəfindən div alaq:

$$\mathrm{div\,rot}\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\vec{j}(r,t).$$

Axırıncı tənliyin sol tərəfi həmişə sıfırdır: $\mathrm{div\,rot}\vec{H}(\vec{r},t)=(\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{H}])=$ $=([\vec{\nabla}\vec{\nabla}]\vec{H})\equiv 0$. Sağ tərəfi isə yalnız stasionar cərəyanlar halında sıfırdır, dəyişən cərəyanlar üçün sıfırdan fərqlidir (bax §1, kəsilməzlik tənliyi):

$$\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r})=0,\quad \mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t)\neq 0.$$

Bu ziddiyyəti aradan götürmək üçün Maksvell çox dahi bir ideya – *dəyişmə cərəyanı* ideyasını irəli sürdü. Dəyişmə cərəyanının varlığı ideyası Maksvellin ən böyük kəşfidir. Bu ideyaya asan yolla gəlmək üçün kəsilməzlik tənliyini yazaq:

$$\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}=0. \tag{1.4}$$

Burada Maksvellin

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r},t)=4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{2.5}$$

tənliyindən istifadə edərək $\frac{\partial\rho(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r},t)$ ifadəsini hesablayaq və bunu kəsilməzlik tənliyində nəzərə alaq:

$$\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t)+\mathrm{div}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}=0,$$

və ya

$$\operatorname{div}\left\{\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\right\}=0. \qquad (5.2)$$

Biz yuxarıda zamana görə törəmə ilə div əməliyyatının yerini dəyişmişik. (5.2) çox mühüm tənlikdir və elektrodinamikada həlledici rol oynayır.

Elektrik, maqnit və işıq hadisələrini dərindən təhlil edən Maksvell bu fikrə gəldi ki, Amperin diferensial qanununu dəyişən cərəyanlar üçün ümumiləşdirərkən (5.1)-in sağ tərəfində $\vec{j}(\vec{r},t)$ deyil $\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$ ifadəsini yazmaq lazımdır:

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{4\pi}{c}\left\{\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\right\}. \qquad (5.3)$$

Maksvell keçiricilik cərəyanı sıxlığına əlavə edilən $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ həddini dəyişmə* cərəyanı sıxlığı adlandırır və onun real varlığını aksiom kimi qəbul edir (II Aksiom). (5.3) ifadəsi Maksvell tənliklərindən biridir və onun elektrodinamikada xüsusi rolu vardır. Bu tənlik çox korrektdir. Tənlikdən görünür ki, keçiricilik cərəyanı və dəyişmə cərəyanı eyni hüquqla burulğanlı maqnit sahəsini yaradır. Bu iki cərəyanın cəminə tam cərəyan sıxlığı deyilir:

$$\vec{j}_t(\vec{r},t)=\vec{j}(\vec{r},t)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}. \qquad (5.4)$$

(5.2) düsturu göstərir ki, tam cərəyanın divergensiyası sıfırdır: $\operatorname{div}\vec{j}_t=0$. Bu, o deməkdir ki, tam cərəyanın mənbəyi yoxdur, yəni tam cərəyan xəttləri qapalı xəttlərdir.

Başqa sözlə keçiricilik cərəyanı xəttlərinin qırıldığı nöqtələrdə onları dəyişmə cərəyanı xəttləri davam etdirməlidir.

Maksvell tənliyinə $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ həddinin əlavə edilməsi elektrik, maqnit və optik hadisələr arasında bir körpü yaratdı və Maksvell tənliklərini

---

*Əksər ədəbiyyatda bu, yerdəyışmə cərəyanı adlanır (*rusca* ток смещения). Bu ad Maksvelldən gəlir. Belə ki, o dövrdə fərz edilirdi ki, elektromaqnit sahəsi efirdə yayılır və efir zərrəciklərinin yerdəyişməsi bu cərəyanı yaradır. Müasir fizikada efir anlayışı yoxdur və onun yerdəyişməsi də yoxdur, lakin sahənin zamana görə dəyişməsi vardır. Dəyişmə cərəyanı termini (istilahı) həqiqətə daha yaxındır.

tamamladı. Gələcəkdə görəcəyik ki, məhz bu həddin hesabına elektromaqnit dalğaları yaranır və onlar xüsusi halda, müəyyən (optik) tezlik intervalında işıq dalğaları ilə üst-üstə düşür.

Maksvell dəyişmə cərəyanının təcrübədə təsdiqinə inanaraq, yazırdı: «*Mənim nəzərimcə kondensatorun boşalması zamanı yaranan cərəyan qapalı dövrə təşkil edir və onu dielektrikin daxilində xüsusi quruluşlu qalvanometrlə izləmək mümkündür. Mən bilmirəm, bunu ediblər ya yox, çunki bəzi təbii texniki səbəblər üzündən nəzəriyyənin bu hissəsi öz təcrübi təsdiqini tapmayıb. Əlbəttə, təcrübə çox çətin və mükəmməl olmalıdır...*».

İndi keçiricilik və dəyişmə cərəyanının oxşar və fərqli cəhətlərinə nəzər salaq.

Bu iki cərəyan maqnit sahəsini yaratmaq nöqteyi-nəzərindən oxşardır, ekvivalentdir. Onlar eyni hüquqla burulğanlı maqnit sahəsini yaradır və onların cərəyan xətləri hər bir nöqtədə maqnit sahəsi qüvvə xətlərinə perpendikulyar müstəvidə yerləşir və maqnit xətləri ilə sağ yivli burğu təşkil edir.

Keçiricilik və dəyişmə cərəyanları təbiətcə bir-birindən kəsgin fərqlənir: 1) keçiricilik cərəyanı elektrik yüklərinin hərəkəti ilə əlaqədardır, dəyişmə cərəyanı isə yüklərin hərəkətindən asılı deyildir; 2) keçiricilik cərəyanı naqil mühitlərdə mövcuddur, dəyişmə cərəyanı isə hər yerdə (naqil, dielektrik, vakuum və s.) mövcuddur; 3) keçiricilik cərəyanı Coul-Lens istiliyinin ayrılması ilə müşayiət olunur, lakin dəyişmə cərəyanı hesabına istilik ayrılmır. Qeyd edək ki, çox yüksək tezliklərdə dispersiya edən dielektriklərdə müəyyən qədər istilik ayrılır, lakin bu, Coul-Lens qanunu ilə deyil, tamamilə başqa qanunla baş verir.

İndi Maksvellin (5.3) tənliyini BS sistemində yazaq. Bunun üçün əvvəlcə düzxəttli sabit cərəyanın yaratdığı maqnit sahəsinin Qauss sistemindəki (4.1) ifadəsini BS sistemində yazaq:

$$B_0 = \mu_0 H = \mu_0 \frac{J}{2\pi r}. \qquad (4.1)\ \text{BS}$$

§4-də etdiyimiz analoji hesablamanı aparsaq, Amper qanununun diferensial şəklinin BS sistemində ifadəsini alarıq:

$$\operatorname{rot}\vec{H}(r) = \vec{j}(r). \qquad (4.4)\ \text{BS}$$

Bu tənliyi dəyişən sahələr üçün ümumiləşdirərkən, biz kəsilməzlik tənliyində $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ kəmiyyətini BS sistemində yazılmış $\operatorname{div}\varepsilon_0\vec{E} = \rho(r,t)$ tənliyindən tapmalıyıq. Onda kəsilməzlik tənliyi aşağıdakı şəklə düşür:

$$\operatorname{div}\left\{\vec{j}(\vec{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\}=0. \tag{5.2) BS}$$

Nəticədə (4.4) BS tənliyində $\vec{H}(\vec{r},t)$ və $\vec{j}(\vec{r},t)$ yazmaq və sonra tənliyin sağ tərəfində $\vec{j}(\vec{r},t)$ -əvəzində $\vec{j}(\vec{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$ götürmək lazımdır:

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{j}(\vec{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}. \tag{5.3) BS}$$

Bu, BS sistemində yazılmış Maksvell tənliklərindən biridir. Bu tənliyin hər tərəfini μ_0-a vuraraq, onu $\operatorname{rot}\vec{B}_0(\vec{r},t)$ üçün yazmaq olar.

§6. Maqnit sahəsinin mənbəyi yoxdur

Bu qanunun riyazi şəklini almaq üçün elektromaqnit induksiyası qanununun diferensial şəklini ifadə edən (3.3) tənliyinin hər iki tərəfinin divergensiyasını hesablayaq:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t)=-\operatorname{div}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}. \tag{6.1}$$

Bu tənliyin sol tərəfi eynilik kimi sıfra bərabərdir:

$$\operatorname{divrot}\vec{E}(\vec{r},t)=(\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{E}])=([\vec{\nabla}\vec{\nabla}]\vec{E})\equiv 0.$$

Onda (6.1)-dən alırıq:

$$0=\operatorname{div}\frac{1}{c}\frac{\partial H(\vec{r},t)}{\partial t}\equiv\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r},t)$$

və ya

$$\operatorname{div}\vec{H}(r,t)=f(\vec{r}). \tag{6.2}$$

Burada $f(\vec{r})$ zamandan asılı olmayan hər hansı sabit funksiyadır. Maqnit sahəsi intensivliyinin istənilən zaman anındakı qiymətinin divergensiyası həmişə sabit $f(\vec{r})$ funksiyasına bərabərdir. Bu funksiyanı $\vec{H}$-ın hər hansı t_0 anındakı qiymətinə görə təyin etsək, onda $\vec{H}$-ın istənilən zaman anındakı qiymətində də $f(\vec{r})$ elə həmin qiyməti alacaqdır. Fərz edək ki, $\vec{H}(r,t)$ harmonik qanunla dəyişir $\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{F}(\vec{r})\cdot\cos\omega t$. Burada $t=t_0=\frac{\pi}{2\omega}$ seçsək, $\vec{H}(\vec{r},t_0)=0$ olar və biz $f(\vec{r})=0$ qiymətini alırıq. Onda (6.2) ifadəsindən

$$\mathrm{div}\vec{H}(\vec{r},t)=0 \tag{6.3}$$

tənliyi alınır. Bu Maksvell tənliklərindən biridir. Bu tənlikdən görünür ki, təbiətdə elektrik yüklərinə oxşar sərbəst maqnit yükləri yoxdur. Əks halda onlar (6.3) tənliyinin sağ tərəfinə mənbə şəklində daxil olmalı idilər. Deməli, maqnit sahəsinin mənbəyi yoxdur. O, elektrik sahəsindən fərqli olaraq, mənbəsiz sahədir. Onda maqnit sahəsinin qüvvə xətləri həmişə kəsilməz və qapalı olmalıdır. Bunu izah etmək üçün (6.3) tənliyini hər hansı həcm üzrə inteqrallayaq və Qauss teoremini tətbiq edək:

$$0=\int_V \mathrm{div}\vec{H}dV=\oint_S \vec{H}d\vec{S}. \tag{6.4}$$

Maqnit intensivliyinin istənilən qapalı səthdən keçən selinin sıfır olması üçün intensivlik xətləri mütləq qapalı olmalıdır.

Maqnit sahəsi mənbə tərəfindən yaradılmır və onun əmələ gəlməsinə, törəməsinə, meydana çıxmasına səbəb elektrik cərəyanlarıdır (keçiricilik və dəyişmə cərəyanları). Maqnit sahəsi həmişə cərəyan xətlərinə dolanan konsentrik qapalı qüvvə xətləri şəklində özünü bürüzə verir və cərəyanı müşayiət edir. Biz gələcəkdə cərəyanlar maqnit sahəsini «yaradır» sözünü işlədərkən, bunu mənbə mənasında deyil, yuxarıdakı mənada başa düşməliyik.

(6.3) tənliyini BS sistemində yazmaq üçün onu μ_0-a vurmaq lazımdır:

$$\mathrm{div}\mu_0\vec{H}(\vec{r},t)=0 \text{ və ya } \mathrm{div}\vec{B}_0(\vec{r},t)=0. \tag{6.3) BS}$$

§7. Maksvell tənlikləri sistemi və elektromaqnit potensialları

Maksvell tənlikləri Qauss sistemində aşağıdakı şəkildə yazılır (bax (2.5), (3.3), (5.3), (6.3)):

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} && \text{a)}\\
&\mathrm{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j} && \text{b)}\\
&\mathrm{div}\vec{H}=0 && \text{c)}\\
&\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho. && \text{d)}
\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Bu tənliklər *vakuumda Maksvell tənlikləri sistemi* adlanır. Sistem 4 tənlikdən – 2 vektori və 2 skalyar (və ya 8 ədəd skalyar) tənlikdən ibarətdir.

Tənliklərə 2 məchul vektor – elektromaqnit sahəsinin *elektrik intensivliyi vektoru* $\vec{E}(\vec{r},t)$ və *maqnit intensivliyi vektoru* $\vec{H}(\vec{r},t)$ daxildir. Deməli, vakuumda elektromaqnit sahəsi iki vektorla ($\vec{E}$ və $\vec{H}$) tam təsvir olunur. Elektromaqnit sahəsinin mənbəyi elektrik yükləri ($\rho(\vec{r},t)$) və elektrik cərəyanlarıdır ($\vec{j}(\vec{r},t)$).

(7.1) sisteminə daxil olan kəmiyyətlər zaman və fəzanın funksiyalarıdır. $\rho(\vec{r},t)$ və $\vec{j}(\vec{r},t)$ verildikdə (7.1) sistemindən istifadə edərək $\vec{E}(\vec{r},t)$ və $\vec{H}(\vec{r},t)$ vektorlarını bir qiymətli təyin etmək mümkündür. Beləliklə, elektromaqnit sahəsi vahid bir tamdır və vakuumda $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları ilə təsvir olunur. $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları arasında üzvü bir əlaqə, asılılıq mövcuddur.

Maqnit sahəsinin zamana görə dəyişməsi elektrik sahəsini yaradır və əksinə elektrik sahəsinin zamana görə dəyişməsi isə maqnit sahəsini yaradır.

Maksvellin dövrundə bu tənliklər başqa şəkildə yazılırdı. Maksvell tənliklərini ilk dəfə (7.1) şəklində (operatorlar vasitəsilə) yazan onun davamçıları Hevisayd və Herts olmuşdur.

Biz (7.1) tənliklərini alarkən müasir riyazi aparatdan, elmin bugünki inkişaf səviyyəsindən və alacağımız nəticələrin əvvəlcədən bizə məlum olmasından istifadə edərək çox qısa yolla hərəkət etdik və elmin dərinliklərinə girmədən çox tez son nəticəyə çatdıq.

Lakin Maksvellin yaşadığı dövr heç bir yüklü zərrəciyin kəşf olunmadığı, cərəyanların «flyuidlər»dən ibarət olduğu, yalançı mexaniki efir nəzəriyyəsinin hökm sürdüyü, riyazi aparatın hələlik tam olmadığı, elektrik və maqnetizm haqqında bir-birinə zidd müxtəlif mexaniki modellərin mövcüd olduğu ziddiyyətli bir zaman idi. Maksvell mexaniki analogiyalardan çox məharətlə istifadə edərək və özünə məxsus dahiyanə uzaqgörənliklə aksiomatik ümumiləşdirmələr apararaq mühitdə elektromaqnit sahəsini tam təsvir edən 20 məchullu 20 diferensial tənlik vermişdir. Əlbəttə, bu tənliklərə sahə tənlikləri ilə yanaşı, mühitdə sahəni xarakterizə edən müxtəlif kəmiyyətlər arasında mümkün olan bütün maddi münasibət tənlikləri də daxil idi. Bu tənliklər XIX əsrin ən böyük kəşfi idi.

Vakuumda elektromaqnit sahəsi üçün bu tənliklər müasir formada (7.1) sistemi şəklində yazılır və Maksvellin adını daşıyır.

(7.1) tənliklərindən alınan nəzəri nəticənin, yəni elektromaqnit dalğalarının mövcud olmasının 1888-ci ildə Herts tərəfindən təcrübədə sübut edilməsi, Maksvell tənliklərinin doğruluğunun və onun dahiyanə aksiomlarının və ən alisi dəyişmə cərəyanının bir həqiqət olmasının təntənəsi idi.

Maksvell 1873-cü ildə elektrik, maqnetizm və işıq haqda elmin 2 əsrlik inkişafını təhlil edən, ona yekun vuran və bu elmi bütünlükdə ensiklopedik icmal şəklində şərh edən «Elektrik və maqnetizm haqqda traktat» adlı misli görunməmiş bir əsər çap etdirmişdi. Maksvellin müasirləri 2 tomluq bu əsəri elektrikin «İncili» adlandırırdılar.

Biz əvvəlki paraqrafın nəticələrindən istifalə edərək müqayisə üçün vakuumda Maksvell tənliklərinin BS sistemində ifadələrini aşağıdakı şəkildə veririk:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial B_0}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{D}_0 &= \rho, \\ \operatorname{div}\vec{B}_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)\ \text{BS}$$

Bu tənliklərə 4 vektor $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}_0$ və $\vec{B}_0$ daxildir və onlar müxtəlif ölçü vahidlərinə malikdir. BS-də hətta vakuum üçün induksiya vektorları daxil edirlər və bunlar intensivlik vektorları ilə $\vec{D}_0 = \varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}$ şəklində əlaqədardır. Burada $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\frac{\phi}{m}$ və $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Hn}{m}$ vakuumun elektrik və maqnit sabitləridir.

İndi Maksvell tənliklərinin tam sistem təşkil etməsi məsələsi ilə məşğul olaq.

(7.1) tənliklər sistemi iki məchul vektor $\vec{E}$ və $\vec{H}$, yəni altı məchul kəmiyyət $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ daxil olan iki vektori və iki skalyar, yəni səkkiz skalyar tənlikdən ibarətdir. Belə görünür ki, tənliklərin sayı məchulların sayından çoxdur. Lakin bu, ilk baxışda belədir. Göstərək ki, bu səkkiz tənliyin hamısı sərbəst (qeyri-asılı) deyildir, onlar arasında müəyyən asılılıq mövcuddur. (7.1) sistemində a) ilə c) və b) ilə d) tənlikləri arasında müəyyən asılılıq, əlaqə vardır. Doğrudan da, a) tənliyinin divergensiyasını hesablayaq: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial H}{\partial t}$ və həmişə $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} \equiv 0$

olduğundan, $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{H}=0$ alırıq. İndi c) dən zamana görə törəmə alsaq $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{H}=0$ olar. a) və c) tənliklərindən eyni bir nəticə alırıq və bu, həmin tənliklər arasında müəyyən əlaqə olduğunu göstərir. İndi həmin əməliyyatı b) və d) tənlikləri üzərində aparaq və (1.4) kəsilməzlik tənliyindən istifadə edək: $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{H}=\mathrm{div}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\vec{j}$ və ya $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{H}\equiv 0$ olduğundan, $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{E}+\frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\vec{j}=0$ alırıq. Burada kəsilməzlik tənliyindən istifadə edərək $\mathrm{div}\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ yazsaq, $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{E}-4\pi\rho)=0$ alarıq.

İndi d) tənliyindən zamana görə törəmə alsaq $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{E}-4\pi\rho)=0$ olar və bu da b) tənliyinin nəticəsi ilə üst-üstə düşür. Deməli b) və d) tənlikləri arasında da müəyyən əlaqə mövcuddur.

Beləliklə səkkiz tənlik arasında iki ədəd əlaqənin mövcud olması altı məchul kəmiyyətin tam təyin edilməsini təmin edir. Deməli (7.1) Maksvell tənlikləri tam sistem təşkil edir. Bu tənliklərdə $\vec{j}(\vec{r},t)$ və $\rho(\vec{r},t)$ funksiyaları məlum sayılır. Yəni sahənin $\vec{j}$ və ρ mənbələri verilir və bu mənbələrin yaratdığı sahə ($\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları) (7.1) tənliklərindən tam təyin edilir. (7.1) tənliklərinin tam sistem təşkil etməsini başqa yolla da izah etmək olar. Riyaziyyatdan məlumdur ki, əgər axtarılan məchul vektori kəmiyyət cəbri tənliyə yalnız vektori hasil şəklində daxil olursa, məsələn, $[\vec{A}\vec{H}]=\vec{B}$ ($\vec{H}$ məchul vektordur, $\vec{A}$ və $\vec{B}$ isə məlumdur) belə vektori cəbri tənlik yalnız iki ədəd asılı olmayan skalyar tənliyə ekvivalentdir.

(7.1) Maksvell tənliklərində məchul $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları a) və b) vektori tənliklərə vektori hasil şəklində, yəni $\mathrm{rot}\vec{E}\equiv[\vec{\nabla}\vec{E}]$ və $\mathrm{rot}\vec{H}\equiv[\vec{\nabla}\vec{H}]$ şəklində daxil olur. Ona görə a) və b) vektorı tənliklərin hər birisi yalnız iki skalyar tənliyə ekvivalentdir. Deməli a) və b) vektori tənliklər birlikdə dörd ədəd asılı olmayan skalyar tənliyə ekvivalendir. Bunlara iki ədəd c) və d) skalyar tənliyi əlavə etsək altı ədəd asılı olmayan skalyar tənlik alırıq və bunlar da altı ədəd məchulu tam təyin etməyə imkan verir. Beləliklə (7.1) Maksvell tənliklərində tənliklərin sayı məchulların sayına bərabərdir və onlar tam sistem təşkil edir. Biz burada vakuumda Maksvell tənliklərindən danışdıq. Lakin eyni sözləri maddi mühit üçün yazılmış Maksvell tənlikləri haqqıda da demək olar.

Biz gələcəkdə göstərəcəyik ki, *Maksvell tənliklərinin həlləri həm də birqiymətlidir*. Bu o deməkdir ki, Maksvell tənliklərinin verilmiş sərhəd və başlanğıc şərtləri daxilində həlləri (yəni $\vec{E}$ və $\vec{H}$ funksiyaları) vardır və özləri də yeganədir.

Hevisayd sistemində Maskvell tənlikləri Qauss sistemindəki kimi yazılır, lakin $\vec{j}(\vec{r},t)$ və $\rho(\vec{r},t)$ həddlərində 4π vuruğu olmur.

İndi elektromaqnit sahəsinin potensialları anlayışına nəzər salaq. Yuxarıda görduk ki, elektromaqnit sahəsi $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları ilə xarakterizə olunur. Belə məlum olur ki, elektromaqnit sahəsini bir vektor və bir skalyar funksiya ilə də təsvir etmək olar. Doğrudan da $\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r},t)=0$ tənliyinə nəzər salsaq, görərik ki, $\vec{H}(\vec{r},t)$ vektorunu həmişə hər hansı $\vec{A}(\vec{r},t)$ vektorunun rotoru kimi seçmək olar:

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t). \tag{7.2}$$

Çunki həmişə $\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r},t)=\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)=(\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{A}])=([\vec{\nabla}\vec{\nabla}]\vec{A})\equiv 0$ ödənir. $\vec{A}(\vec{r},t)$ kəmiyyəti elektromaqnit sahəsinin *vektor potensialı* adlanır və o, $\vec{H}(\vec{r},t)$ vektorunu birqiymətli təyin edir. İndi

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

tənliyində $\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}$ ifadəsini nəzərə alaq:

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \text{ və ya } \operatorname{rot}(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0. \tag{7.3}$$

Biz yuxarıda rot ilə $\dfrac{\partial}{\partial t}$ əməliyyatının yerini dəyişdik və tənliyin sol və sağ tərəfindəki rot həddlərini birləşdirdik. (7.3) ifadəsindən görünür ki,

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\varphi \tag{7.4}$$

qəbul etmək olar ($\operatorname{grad}\varphi=\vec{\nabla}\varphi$ ... əlavədə verilmişdir). Çunki, həmişə

$\mathrm{rot}(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\mathrm{rot}(-\mathrm{grad}\varphi)=-[\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi]\equiv 0$ ödənir. (7.4) ifadəsindən $\vec{E}$-ni təyin edək:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-\mathrm{grad}\varphi(\vec{r},t). \qquad (7.5)$$

Bu şəkildə daxil edilmiş $\varphi(\vec{r},t)$ kəmiyyəti elektromaqnit sahəsinin *skalyar potensialı* adlanır. (7.4) ifadəsində – "gradφ" göturulməsi statik sahədə φ skalyar potensialın adi elektrik kursundakı elektrostatik potensialla üst-üstə düşməsini təmin edir.

(7.2) və (7.5) ifadələrindən görünür ki, $\vec{A}$ və φ potensialları $\vec{H}$ və $\vec{E}$ sahə intensivliklərini birqiymətli təyin edir. Beləliklə $\vec{A}$ və φ potensialları elektromaqnit sahəsini təsvir edir. Bəzən φ=0 olur (bax: sərbəst sahə) və elektromaqnit sahəsi yalnız $\vec{A}$ vektor potensialı ilə xarakterizə olunur. Məhz buna görə elektromaqnit sahəsi *vektori sahə* adlanır.

Biz bununla Maksvell tənliklərinin aksiomatik alınmasına, onların xassələrinə və fiziki mənalarına, müxtəlif vahidlər sistemində tənliklərin ifadələrinə, Maksvell tənlikləri sisteminin tamlığına və birqiymətli olmasına aid xülasəni qurtarırıq.

Gələcəkdə biz elektrodinamikanı yüksək səviyyədə, relyativistik prinsiplər əsasında davam etdirəcəyik.

Xülasənin sonunda qeyd edək ki, elektrodinamikada istifadə olunan əsas anlayışlar və terminlər mayelərin mexanikasından göturulmuşdur və hidrodinamikada onlar müəyyən fiziki mənaya malikdir. Lakin elektrodinamikada işlədilən cərəyan xəttləri, qüvvə xəttləri, intensivlik xəttləri, intensivlik seli və s. anlayışlar formal, şərti xarakter daşıyır və onların elə bir fiziki mənası yoxdur. Buna baxmayaraq fiziki proseslərin təsvirində bu anayışlar müəyyən qədər «əyanilik» yaradır və məhz buna görə onlardan istifadə edirlər.

II FƏSİL
EYNŞTEYNİN XÜSUSİ NİSBİLİK NƏZƏRİYYƏSİ

§8. Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin təcrübi əsasları

Müasir elektrodinamikanın və relyativistik fizikanın əsasını təşkil edən xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi 1905-ci ildə A. Eynşteyn tərəfindən iki postulat şəklində verilmişdir. Bu nəzəriyyənin yaranmasında Eynşteynlə yanaşı H. Lorensin, A. Puankarenin, H. Minkovskinin və başqa alimlərin çox böyük rolu olmuşdur. Eynşteynin xidməti ondadır ki, o, fiziki proseslərin tədqiqində zaman və məkan anlayışlarına daha tənqidi yanaşaraq onları dərindən təhlil etmiş və fiziki duyğunun köməyi ilə bu nəzəriyyəni yığcam və tam şəkildə ifadə edə bilmişdir.

Qeyd edək ki, Maksvell tərəfindən elektromaqnit sahəsi nəzəriyyəsinin yaradılması, həm xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin və həm də relyativistik mexanikanın yaranması üçün mühüm zəmin yaratmış və onların inkişafına güclü təkan vermişdir. Təkcə onu demək kifayətdir ki, elektrodinamika yarandığı gündən yeganə relyativistik nəzəriyyə idi.

Biz burada xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin (x.n.n.) yaranmasına kömək edən bir neçə təcrübi faktı araşdıracağıq. Əvvəlcə Qaliley-Nyuton (Q.-N.) mexanikasından başlayaq.

8.1. Qaliley-Nyuton mexanikasında zaman-məkan anlayışı, ətalət sistemləri və Qaliley çevrilmələri

Mexanikada (fizikada) istənilən prosesi öyrənmək üçün hesabat sistemi (H.S.) seçirlər. Hesabat sistemi 3-ölçülü koordinat sistemindən və onunla sərt bağlanmış saatlardan və miqyaslardan ibarətdir. Sistemdə baş verən hər hansı prosesin yerini miqyaslarla (xətkeşlərlə), prosesin davam etmə müddətini isə yaxınlıqdakı saatlarla ölçürlər. Bu sistemlər arasında ətalət hesabat sistemi xüsusi rol oynayır. Nyutonun ətalət qanununun ödəndiyi sistemə *ətalət sistemi* deyilir. Bu sistemdə sərbəst (heç bir qüvvə təsir etməyən) cisim ətalət hərəkəti edir, yəni ya bərabər sürətli düz xətli hərəkət edir ya da sükunətdə qalır. Ətalət sisteminə nəzərən bərabər sürətli düzxətli hərəkət edən hər bir hesabat sisteminin özü də ətalət sistemidir. Biz ətalət hesabat sisteminə qısaca ətalət sistemi deyəcəyik. Ətalət sistemində mexanikanın (fizikanın) qanunları təbii və sadə şəklə malik olur.

Nyuton mexanikasında cisimlərin varlığından və onların yerləşməsindən asılı olmayan mütləq fəzanın və müntəzəm axan (davam edən) universal zamanın varlığı fərz edilir.

Nyutondan fərqli olaraq müasir fizika qəbul edir ki, materiyanı, onun hərəkətini, dəyişmələrini nəzərə almadan, zaman və məkan haqqında danışmaq mənasızdır. Zaman və məkan materiyanın varlıq formalarıdır.

Nyuton mütləq hesabat sistemindən istifadə edirdi. Bu sistem tərpənməz ulduzlarla bağlı sistem idi. Nyuton qanunları mütləq sistemdə doğrudur.

Mahiyyət etibarilə Nyutonun mütləq hesabat sistemi özlüyündə ətalət sistemidir. Yerlə bağlı hesabat sistemi əslində ətalət sistemi deyildir. Əgər Yerin öz oxu ətrafında fırlanmasını və onunla bağlı hərəkətləri nəzərə almasaq kiçik zaman intervalında Yerin Günəş ətrafında hərəkətinə ətalət sistemi kimi baxmaq olar. Onda Yerə nəzərən bərabər sürətli düz xətli hərəkət edən sistem də ətalət sistemi olacaqdır.

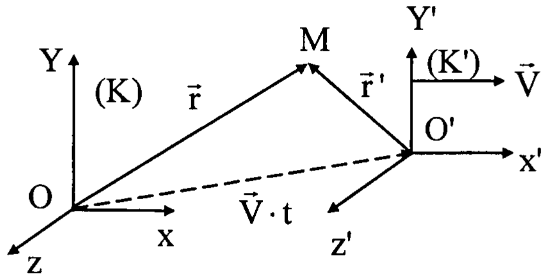
Qeyd edək ki, Nyutonun dövründə mexanika bütün fizikanı təmsil edirdi və «fizikanın digər bölmələri» sadəcə olaraq mövcud deyildi. Qaliley-Nyuton mexanikasına *klassik mexanika* deyilir.

Dekart koordinat oxları (X, Y, Z) bir-birinə paralel yönəlmiş K və K' kimi iki ətalət sistemi seçək. Fərz edək ki, K' sistemi K-ya nəzərən sabit $\vec{V}$ sürəti ilə sağ tərəfə hərəkət edir və başlanğıc zaman anında $(t = t' = 0)$ sistemlərin koordinat başlanğıcları üst-üstə düşür. K və K' hesabat sistemlərinə nəzərən M maddi nöqtənin (cismin) hərəkətini müşahidə edək.

M cisminin $t \neq 0$ anında yerləşdiyi nöqtənin K və K' sisteminə nəzərən radius vektorlarına $\vec{r}(t)$ və $\vec{r}\,'(t')$ desək və bu anda O və O' koordinat başlanğıcları arasındakı məsafə $\vec{V}t$ olduğunu nəzərə alsaq, OMO' üçbucağından $\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t') + \vec{V}t$ alırıq (şəkil 8.1).

Nyuton mexanikasında zaman mütləq, universal olduğundan $t = t'$ yazmaq lazımdır. Onda hərəkət edən M cisminin K və K' ətalət sistemlərində ölçülmüş koordinatları və zamanları arasında əlaqəni belə yazmaq olar:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t') + \vec{V}t', \\ t = t'. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$



Şəkil **8.1**

Bu, koordinat və zamanın *Qaliley çevrilmələri düsturları* adlanır. (8.1)-dən zamana görə törəmə alsaq və M cisminin K və K' sisteminə nəzərən sürətlərini $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ və $\frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \vec{\upsilon}\,'$ ilə işarə etsək, Qalileyə görə sürətlərin toplanması qanununu alarıq:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{V}. \tag{8.2}$$

Dekart koordinat sistemi oxlarının K və K' ətalət sistemlərində bir-birinə paralel olması məcburi deyildir.

Qaliley-Nyuton mexanikası qeyri-relyativistik mexanikadır, çünki burada cisimlərin hərəkət sürətləri işığın yayılma sürətindən çox-çox kiçikdir.

Nyuton mexanikasında Qalileyin nisbilik prinsipi hökm sürür: hər hansı mexaniki proses eyni başlanğıc şərtləri daxilində bütün ətalət sistemlərində eyni şəkildə baş verir.

Nisbilik prinsipi küllü miqdarda təcrübələrin nəticəsidir. Bu prinsipi belə də ifadə edirlər: İstənilən mexaniki prosesi təsvir edən diferensial tənliklər bütün ətalət sistemlərində eyni şəklə malikdir. Başqa sözlə mexanikanın tənlikləri Qaliley çevrilmələrinə görə invariant (dəyişməz) qalır. Məsələn, *Nyutonun qanunları bütün ətalət sistemlərində eyni cür ifadə olunur.*

Əgər söhbət diferensial tənliklərdən gedirsə, onda nisbilik prinsipində eyni başlanğıc şərtlərə ehtiyac yoxdur. Əgər bu tənliklərin inteqral şəklinə baxırıqsa, invariant tənlik almaq üçün mütləq eyni başlanğıc şərtləri verilməlidir. Əks halda K-da şaquli yuxarı atılmış cismin trayektoriyası düz xətt K'-də isə parabola olacaqdır.

Nyutonun ikinci qanununun invariantlığını göstərək. Fərz edək ki, ölçüləri böyük olmayan iki a və b cismi bir-birilə qarşılıqlı təsirdədir. Mexanikada qüvvə dedikdə biz cazibə, elastiklik, zərbə qüvvəsi, təzyiq qüvvəsi, sürtünmə qüvvəsi və s. başa düşürük. İki cisim (a və b cismi) arasındakı mexaniki təsir qüvvəsi ətalət sistemində ümumiyyətlə o cisimlərin qarşılıqlı vəziyyətindən ($\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$ -nisbi radius vektorundan) və onların mexaniki halından ($\vec{\upsilon}_{ab} = \vec{\upsilon}_a - \vec{\upsilon}_b$ -nisbi sürətindən) asılı ola bilər. Onda K sistemində a cisminin hərəkət tənliyi (Nyutonun II qanunu) belə yazılar:

$$m_a \frac{d^2\vec{r}_a(t)}{dt^2} = \vec{F}_a(\vec{r}_{ab}(t), \vec{\upsilon}_{ab}(t)). \qquad (8.3)$$

Burada m_a kəmiyyəti a cisminin kütləsi, $\vec{r}_a(t)$ onun radius vektoru, $\vec{F}_a$ isə a cisminə təsir edən qüvvədir. Bu tənliyi K' sistemində yazmaq üçün Qaliley çevrilmələrindən istifadə edərək (8.3) tənliyinin sol və sağ tərəfindəki hədlərin K' sistemində ifadələrini tapmaq lazımdır. Qaliley-Nyuton mexanikasında cismin kütləsi invariant kəmiyyətdir, yəni bütün ətalət sistemlərində eyni bir qiymətə malikdir: $m_a = m_a'$. Qaliley çevrilmələrinə görə K-dan K'-ə keçəndə cismin radius vektoru $\vec{V}t$ qədər dəyişir: $\vec{r}_a(t) = \vec{r}_a'(t') + \vec{V}t'$. Lakin $\vec{V} = \text{const}$ olduğundan, cismin təcili dəyişmir: $\frac{d^2\vec{r}_a(t)}{dt^2} \equiv \frac{d^2\vec{r}_a'(t')}{dt'^2}$, yəni hər iki ətalət sistemində cisim eyni təcilə malik olur. Qaliley çevrilməsi qüvvənin çevrilməsi haqda heç bir söz demir və yalnız qüvvənin asılı olduğu radius vektorların və sürətlərin çevrilməsini ifadə edir.

Qalileyin (8.1) və (8.2) çevrilmə düsturlarından istifadə etsək a və b cisimlərinin $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$ nisbi radius vektorunun və $\vec{\upsilon}_{ab} = \vec{\upsilon}_a - \vec{\upsilon}_b$ nisbi sürətinin K və K' sistemlərində invariant qaldığını taparıq: $\vec{r}_a - \vec{r}_b = \vec{r}_a' - \vec{r}_b'$ və $\vec{\upsilon}_a - \vec{\upsilon}_b = \vec{\upsilon}_a' - \vec{\upsilon}_b'$. Yəni qüvvənin arqumentləri hər iki ətalət sistemində eyni qiymət alır. Görəsən, qüvvənin özü necə dəyişir? Bunu ancaq təcrübələrin köməyi ilə müəyyən etmək olar. Əlbəttə K' ətalət sistemində də bu iki cisim arasındakı təsir qüvvəsi cisimlərin nisbi radius vektorundan ($\vec{r}_{ab}' = \vec{r}_a' - \vec{r}_b'$) və onların nisbi sürətindən ($\vec{\upsilon}_{ab}' = \vec{\upsilon}_a' - \vec{\upsilon}_b'$) asılı olmalıdır. Sual oluna bilər ki, K'-də bu qüvvənin öz arqumentlərindən asılılığı xarakteri, şəkli, forması necədir, K-da olduğu kimidirmi? Bəli, təcrübələr göstərir ki, qüvvənin hər iki ətalət sistemində öz arqumentlərindən asılılığı xarakteri eynidir ($\vec{F} = \vec{F}'$, yəni $\vec{F}'$-in üstündəki ştrixin heç bir rolu yoxdur). Digər tərəfdən yuxarıda göstərdik ki, hər iki sistemdə qüvvənin arqumentləri də invariantdır.

Deməli, bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə mexaniki qüvvə invariant qalır, dəyişmir:

$$\vec{F}(\vec{r}_{ab}, \vec{\upsilon}_{ab}) = F'(\vec{r}'_{ab}, \vec{\upsilon}'_{ab}) = \text{in var}$$

Ona görə (8.3) tənliyi Qaliley çevrilməsinə görə invariant qalır, yəni hər iki ətalət sistemində eyni şəkildə yazılır:

$$m'_a \frac{d^2\vec{r}'_a(t')}{dt'^2} = \vec{F}'_a(\vec{r}'_{ab}(t'), \vec{\upsilon}'_{ab}(t')). \qquad (8.3')$$

Nyuton «Natural fəlsəfənin riyazi əsasları» əsərində (1687) heç bir kənar şeylərdən asılı olmayan mütləq fəzanın və mütləq, universal zamanın varlığını postulat şəklində qəbul etmişdir. Nyutonun (8.3) hərəkət tənliyində cismin aldığı təcillə ona təsir edən qüvvə eyni bir zaman anında götürülür. Bu, o deməkdir ki, a cisminə təsir edən b cisminin vəziyyətində t anında əmələ gələn hər hansı dəyişikliyi a cismi elə həmin anda «hiss» edir, yəni qarşılıqlı təsir ani olaraq verilir, başqa sözlə qarşılıqlı təsirin yayılma sürəti sonsuz böyükdür: $\upsilon_{q/t}^{mex} \to \infty$. Bu onunla əlaqədardır ki, Nyuton-Qaliley mexanikasında təsir həmişə uzağa təsirdir. Bu klassik mexanikanın ən böyük qüsurlarındandır. Bu haqda biz gələcəkdə danışacağıq.

İndi isə N.-Q. mexanikasının oynadığı mühüm rolu qeyd edək. Eynşteyn özünün Nyutona olan dərin hörmətini qeyd edərək yazırdı: «Nyuton mütləq fəza və mütləq zaman anlayışları ilə bağlı çətinlikləri... hamıdan yaxşı başa düşürdü. Lakin bu anlayışların postulat kimi verilməsi o dövrdə hərəkəti təsvir etməkdə irəli getmək üçün praktiki mümkün olan yeganə üsul idi».

Qeyd edək ki, riyaziyyatı mexanikaya (fizikaya) ilk tətbiq edən Nyuton olmuşdur.

Klassik mexanikanın mütləq fəza, mütləq zaman və mütləq hərəkət kimi ağlabatmaz postulatlarına baxmayaraq, Nyuton qanunları kvant obyektləri* və relyativistik sürətlər bəhsi istisna olmaqla Yer şəraitində bütün fizikanı, texniki qurğular və mühəndis sistemlərini, raket texnikasını, kosmik gəmilərin uçuşunu, Günəş sistemində planetlərin dəqiq hərəkətini doğru izah edir. Bu onu göstərir ki, klassik mexanikanın bu anlayışları təqribən doğrudur və adı həyatda onlardan kənara çıxma halları çox cüzidir.

* Kvant mexanikası ilə təsvir olunan elementar zərrəciklər sistemləri.

8.2. İşığın aberrasiyası, Fizo təcrübəsi, Maykelson-Morli təcrübələri

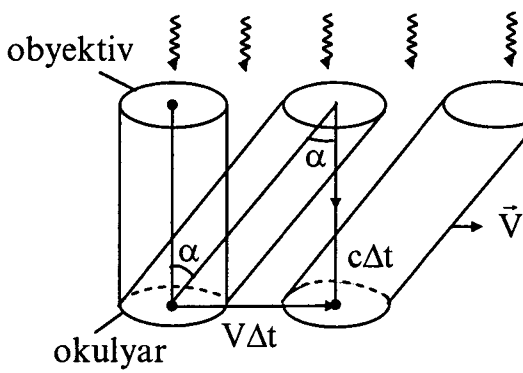
XIX əsrin sonu Maksvell tənliklərinə əsaslanan işığın dalğa nəzəriyyəsinin təntənəli yürüşü dövrü idi. Dalğavi hərəkətin öyrənilməsində əldə edilən bütün əvvəlki nəticələr tədqiqatçılarda belə yəqinlik yaratmışdı ki, hər-hansı dalğanın yayılması üçün müəyyən mühit lazımdır. Ona görə fiziklər belə bir qənaətə gəlmişdilər ki, işığın (elektromaqnit dalğasının) yayılması üçün də müəyyən mühit lazımdır. Bu mühiti efir adlandırdılar («İşıq daşıyan» efir). Efir çox qəribə xassələrə malik hipotetik mühitdir. O, bütün cisimlərə daxil olur, müəyyən sıxlığa və elastikliyə malikdir, qravitasiyada iştirak etmir, cisimlərin hərəkətinə mane olmur, işığın $c = 3\cdot 10^{10}\dfrac{\text{sm}}{\text{san}}$ sürətilə yayılmasını təmin edir və s. Dahi Maksvell də efiri qəbul etmişdi. O dövrün fizikləri efirə bir ətalət sistemi kimi baxırdılar. Bütün kainatı dolduran dünya efiri anlayışı belə yaranmışdı.

A. Eynşteyn 1905-ci ildə xüsusi nisbilik nəzəriyyəsini (x.n.n.) yaradarkən efir anlayışını rədd etdi. Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsində mühüm rol oynamış üç təcrübi faktı yadımıza salaq.

Biz burada hələlik klassik mexanika qanunlarından və onun riyazi aparatından istifadə edəcəyik.

1. İşığın aberrasiyası (Bradley, 1727). Təcrübələr göstərir ki, Yerdən göy cismini (ulduzu) müşahidə edərkən teleskopu cismin olduğu nöqtəyə deyil, ona yaxın olan digər nöqtəyə yönəltmək lazımdır. Yəni teleskopu yerin hərəkəti istiqamətində müəyyən bucaq qədər meyl etdirmək lazımdır. Bu istiqamət *görünmə istiqaməti* adlanır. Ulduza tuşlanmış istiqamətlə (ulduz istiqaməti ilə) görünmə istiqaməti arasındakı α bucağına *oberrasiya bucağı* deyilir. Təcrübələr göstərir ki, $\mathrm{tg}\alpha = V/c$. Burada $V = 3\cdot 10^{6}\dfrac{\text{sm}}{\text{san}}$ Yerin Günəş ətrafında orbital hərəkət sürətidir, $c = 3\cdot 10^{10}\dfrac{\text{sm}}{\text{san}}$ işığın vakuumda («efirdə») yayılma sürətidir. Aberrasiya bucağını biz çox asanlıqla hesablaya bilərik. Fərz edək ki, tərpənməz ulduz zenitdə yerləşmişdir, ondan Yerə onun səthinə perpendikulyar istiqamətdə paralel işıq şüaları (dalğaları) gəlir və teleskopun obyektivinə düşür. Tutaq ki, teleskop Yerlə birlikdə sağ tərəfə V sürəti ilə hərəkət edir.

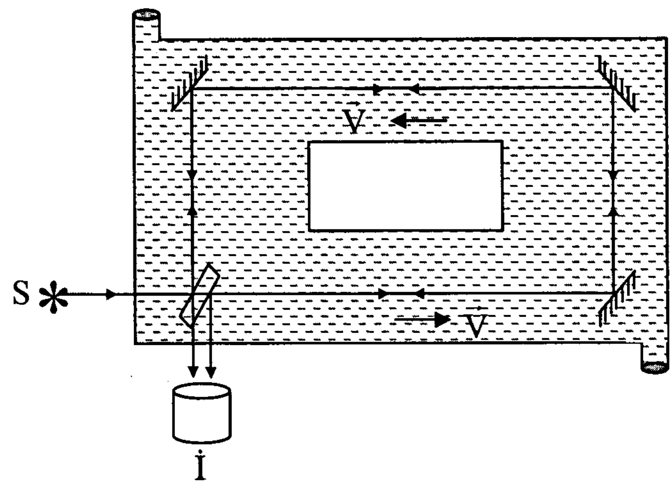
Əgər biz teleskopu düz zenitdəki ulduza yönəltsək, şüa teleskopun daxilində şaquli istiqamətdə yayılacaq, teleskop isə üfüqi istiqamətdə sağ tərəfə hərəkət edəcək və nəticədə şüa teleskopun okulyarına yox, dal divarına düşəcək və biz onu görməyəcəyik. Ulduzdan gələn şüanı görmək üçün biz teleskopu Yerin hərəkəti istiqamətində (α bucağı qədər) elə əyməliyik ki, şaquli istiqamətdə hərəkət edən şüa teleskopun daxilində $c\Delta t$ yolunu getdikdə okulyar da Yerlə birlikdə üfüqi istiqamətdə $V\Delta t$ qədər yol gedərək şüa ilə görüşsün. Burada katetləri $c\Delta t$ və $V\Delta t$ olan düzbucaqlı üçbucaq alınacaqdır (Δt şüanın teleskopun daxilində yayılma müddətidir). ~~Şəkil 8.2-dən~~ $tg\alpha = \frac{V\Delta t}{c\Delta t} = \frac{V}{c} = 10^{-4}$ alırıq. $tg\alpha \ll 1$ olduğuna görə, $\alpha \approx 10^{-4}$ radian $\approx 20{,}5''$ götürmək olar. Bu ən böyük aberrasiya bucağıdır. 6 aydan sonra Yer Günəş ətrafında orbital sürətinin istiqamətini dəyişərək, sol tərəfə hərəkət edəcəkdir.



Şəkil **8.2**

Bu zaman aberrasiya bucağı ulduz istiqamətindən sol tərəfdə alınacaq və il ərzində zenitdə yerləşmiş ulduz Yerə nəzərən $2\alpha \approx 41''$ aberrasiya bucağı cızacaqdır. Yəni zenitdə yerləşmiş çox uzaq, tərpənməz ulduzlar il ərzində göy sferasında Yerə nəzərən diametri $41''$ olan çevrə cızacaqdır. Digər ulduzlar isə müxtəlif şəkilli ellipslər cızacaqdır. Aberrasiya hadisəsinin mahiyyəti bundan ibarətdir.

2. Fizo təcrübəsi (1859). Bu təcrübədə işığın hərəkət edən mühitdə (mayedə) yayılma sürəti ölçülmüşdür. Burada borucuqlarına hərəkət etdirilə bilən maye doldurulmuş cihazdan istifadə olunur. S mənbəyindən gələn monoxromatik işıq şüası yarımşəffaf O lövhəsi vasitəsilə iki koherent şüaya ayrılır və onlar əks etdirici güzgülər vasitəsilə mayenin içərisində müxtəlif istiqamətlərdə hərəkət edərək yenidən O lövhəsinə düşür və sonra I interferometrində görüşürlər (şəkil 8.3).



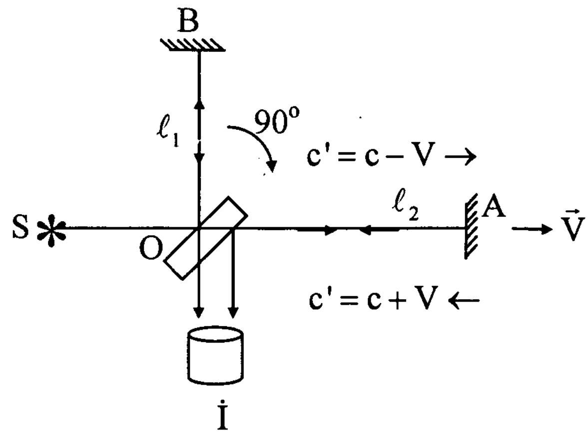
Şəkil **8.3**

Mayeni xüsusi qurğu vasitəsilə V sürəti ilə hərəkət etdirirlər. Maye hərəkət edərkən interferometrdə interferensiya mənzərəsinin dəyişməsinə görə işığın hərəkət edən mayedə sürətini hesablamaq mümkün olmuşdur:

$$U = U' \pm kV, \quad k = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

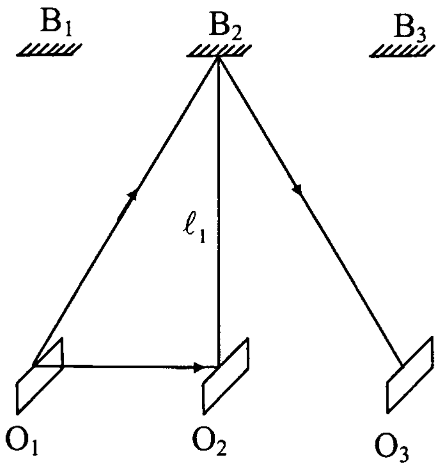
Burada U və U' hərəkət edən və sükunətdə olan mühitdə işığın yayılma sürəti, V mayenin hərəkət sürəti, n-mühitin sındırma əmsalıdır $(U' = c/n)$. Müsbət və mənfi işarəsi mayenin və işığın eyni və müxtəlif istiqamətdə hərəkətinə uyğundur. Əgər k=1 olsaydı, biz Qalileyə görə sürətlərin toplanmasını alardıq. Lakin $k \neq 1$ olduğuna görə deyə bilərik ki, efir, hərəkət edən maye tərəfindən qismən aparılır.

3. Maykelson-Morli təcrübəsi (1881). Təcrübədə məqsəd Yerin efirə nəzərən sürətini ölçmək idi. Cihaz civədə üzən plitə üzərində quraşdırılmışdır. S mənbəyindən gələn monoxromatik işıq şüası yarımşəffaf O lövhəsi vasitəsilə bir-birinə perpendikulyar istiqamətdə hərəkət edən iki koherent şüaya parçalanır. Şüalar A və B güzgülərindən əks olunaraq yenidən O lövhəsinə düşür və sonra İ interferometrində görüşərək interferensiya edir ~~(şəkil 8.4)~~.



Şəkil 8.4

İnterferensiya mənzərəsi şüaların yollar fərqindən asılıdır. Yollar fərqi isə şüaların bu yolları getməsi üçün sərf etdiyi zamanlar fərqi ilə mütənasibdir. Klassik mexanika qanunlarından istifadə edərək şüaların yollar fərqini hesablayaq. Fərz edək ki, K ətalət sistemi efirlə bağlı sistemdir və orada işığın yayılma sürəti $\vec{c}$ -dir. Yerlə və deməli cihazla bağlı ətalət sisteminə K' deyək. Fərz edək ki, cihaz Yerlə birlikdə efirə (K-yə) nəzərən OA istiqamətində $\vec{V}$ sürəti ilə sağ tərəfə hərəkət edir. İşığın Yerə və cihaza (yəni K'-ə) nəzərən hərəkət sürətini $\vec{c}\,'$ ilə işarə edək. Sürətlərin Qaliley toplanması qanununa görə: $\vec{c} = \vec{c}\,' + \vec{V}$ və ya $\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V}$ olur. Əgər işıq OA istiqamətində yayılırsa $\vec{c}\,', \vec{c}$, və $\vec{V}$ vektorları bir istiqamətə yönəlmiş olur və $c' = c - V$ alırıq. Əgər işıq AO istiqamətində yayılırsa $\vec{c}\,'$ və $\vec{c}$ vektorları $\vec{V}$-nin əksinə yönəlmiş olur və biz $c' = c + V$ alırıq. Beləliklə, işıq OA istiqamətində yayılarkən Yerin arxasınca «qaçır» və Yerə nəzərən sürəti $c' = c - V$ olur. Və əksinə işıq AO istiqamətində yayılarkən (A-dan əks olunaraq geri qayıdır) o, Yerlə qarşı-qarşıya gəlir və Yerə nəzərən sürəti $c' = c + V$ olur. İnterferometrin qolları $\ell_1 = OB$ və $\ell_2 = OA$ təqribən bir-birinə bərabər götürülür. İşıq şüasının OA+AO yolunu getməsi üçün sərf etdiyi zamana t_2 deyək: $t_2 = \dfrac{\ell_2}{c - V} + \dfrac{\ell_2}{c + V} = \dfrac{2\ell_2}{c}\dfrac{1}{1 - V^2/c^2}$ olur. İşıq şüasının OB+BO yolunu getməsi üçün sərf etdiyi zamana t_1 deyək. OB istiqamətində yayılan şüanın B-dən əks olunaraq O-ya qayıtması üçün, biz şüanı OB şaqulu boyunca yox, bir qədər sağ tərəfə meyilli istiqamətdə göndərməliyik ki, «görüşmə» üçbucağı alınsın. Bunu izah etmək üçün O və B güzgülərinin üç vəziyyəti şəkil 8.5-də göstərilmişdir.



Şəkil **8.5**

O_1 vəziyyətində şüa elə maili istiqamətdə buraxılır ki, B_1 güzgüsü B_2 vəziyyətinə gəldikdə şüa da B_2-yə çatır və ondan əks olunur və B_2 güzgüsü B_3 vəziyyətinə gəldikdə, əks olunmuş şüa O_3 lövhəsinə çatır. Şərtə görə $O_1B_2O_3$ yolunu şüa t_1 zamanı müddətində qət edir. Onda O_1B_2 məsafəsini şüa $t_1/2$ zamanı müddətində qət edəcəkdir: $O_1B_2=ct_1/2$. $t_1/2$ zamanı müddətində O_1 lövhəsi O_2 vəziyyətinə gəlir: $O_1O_2 = Vt_1/2$, $\dfrac{c^2t_1^2}{4} = \dfrac{V^2t_1^2}{4} + \ell_1^2$ və ya $t_1 = \dfrac{2\ell_1}{c}\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ olur. Onda bu iki şüanın OA+AO və OB+BO məsafələrini getməsi üçün sərf etdiyi zamanlar fərqi:
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\left\{\frac{\ell_2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \ell_1\right\}$$
olur. Alınmış interferensiya mənzərəsi Δt ilə müəyyən ediləcəkdir. Δt-nin hesablanmasında ℓ_2 və ℓ_1-in fərqi xoşagəlməz şəkildə iştirak edir və onların ölçülməsində buraxılan xəta t-də çox böyük xətaya səbəb ola bilər. Bunun qarşısını almaq üçün civədə üzən plitə üzərində yerləşdirilmiş cihazı 90° fırladaraq ℓ_1 və ℓ_2 qollarının rollarını dəyişirlər. Fırlandıqdan sonra ℓ_1 qolu $\vec{V}$ istiqamətində, ℓ_2 isə $\vec{V}$-yə perpendikulyar istiqamətdə yönəlmiş olur. İndi şüa-

ların ℓ_2 və ℓ_1 yollarını gedib-gəlməsi üçün sərf etdiyi zamanlar: $t_2^* = \frac{2\ell_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, $t_1^* = \frac{2\ell_1}{c}\frac{1}{1-V^2/c^2}$ olur. Bu zamanların fərqi üçün:

$$\Delta t^* = t_2^* - t_1^* = \frac{2}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\left\{\ell_2 - \frac{\ell_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right\}$$ alırıq. Δt^* fərqinə uyğun

interferensiya şəkli alınır. Aydındır ki, cihazın 90° fırlanması zamanı əvvəlki interferensiya mənzərəsinin dəyişməsi $\Delta\tau = \Delta t - \Delta t^* = \frac{2(\ell_1+\ell_2)}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\times$

$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right\}$ ilə mütənasib olmalıdır. İndi ℓ_1 və ℓ_2-nin ölçülməsindəki xətaların $\Delta\tau$-ya həlledici təsiri olmayacaqdır. Maykelson-Morlinin ilk təcrübələrində $\ell_1 + \ell_2 = 3\cdot 10^2$ sm götürülmüşdü. Ədədi hesablamalarda

$V = 3\cdot 10^6 \frac{\text{sm}}{\text{san}}$ və $c = 3\cdot 10^{10}\frac{\text{sm}}{\text{san}}$ götürsək $\Delta\tau \approx 10^{-16}$ san alarıq. Onda

fırlanma nəticəsində alınan yollar fərqi $c\Delta\tau \simeq 3\cdot 10^{-6}\text{sm} = 300\,\mathring{A}$ olur. Təcrübə dalğa uzunluğu $\lambda = 3000\,\mathring{A}$ olan işıqla aparılmışdı. Yollar fərqi dalğa uzunluğunun 1/10 hissəsi olduğundan, fırlanma nəticəsində interferensiya şəkli zolağın eninin 1/10 hissəsi qədər sürüşməli idi. Lakin təcrübədə heç bir sürüşmə müşahidə edilmədi, yəni $\Delta\tau_{təc}=0$ oldu. Buna Maykelson-Morli təcrübəsinin mənfi nəticəsi deyilir. Bu mənfi nəticəni izah etmək üçün fərz etmək lazımdır ki, Yer hərəkət edərkən efiri tamamilə aparır. Yəni Yerin efirə nəzərən sürəti V=0 olur!? Onda $\Delta\tau=0$ və $c\Delta\tau=0$ alınır!? Lakin aberrasiya hadisəsini izah etmək üçün fərz etmək lazımdır ki, Yer efiri aparmır. Əks halda aberrasiya bucağı sıfır olardı. Yəni Yer efiri aparsaydı, onda efirdə yayılan işıq şüası teleskopun daxilində efirlə birlikdə teleskopla bərabər sağ tərəfə sürüşərdi və biz teleskopu əymədən həmişə ulduzu müşahidə edə bilərdik. Fizo təcrübəsinin nəticəsi göstərir ki, hərəkət edən mühit efiri qismən aparır və efirin aparılması əmsalı $k = 1 - \frac{1}{n^2}$-dır.

Maykelson-Morli sonrakı təcrübələrini daha da təkmilləşdirmişlər, lakin yenə də mənfi nəticə almışlar.

Bu üç təcrübənin nəticələri bir-birilə uzlaşmır və onları vahid nöqteyi-nəzərdən izah etmək o dövrdə mümkün olmadı. Efirin varlığı anlayışı məsələni daha da mürəkkəbləşdirdi. Efiri xilas etmək üçün müxtəlif fərziyyələr irəli sürüldü, lakin onlar bir nəticə vermədi. Alınmış vəziyyətdən çıxış yolunu A. Eynşteyn göstərdi.

8.3. Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi

İşığın yayılması ilə əlaqədar olan təcrübələri dərindən analiz edən A. Eynşteyn belə bir fikrə gəldi ki, efir anlayışı proseslərin izahında anlaşılmazlıq yaradır və bu anlayışı atmaq lazımdır.

Efir yoxdur və işığın (elektromaqnit dalğasının) yayılması efirin xassəsi olmayıb fəzanın öz xassəsidir. Fəza elə xassəyə malikdir ki, o, işıq şüasını (el. maq. dalğasını) bir nöqtədən başqa nöqtəyə ötürür.

Eynşteyn fərz etdi ki, işıq (və ya elektromaqnit dalğası) vakuumda bütün ətalət sistemlərində və bütün istiqamətlərdə eyni bir $c = 2{,}99792 \cdot 10^{10} \frac{sm}{san} \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{sm}{san}$ sürətilə yayılır. Buna *işıq sürətinin sabitliyi postulatı* deyilir (II postulat). Bu nəticə Nyuton mexanikasına ziddir. Məsələn, K və K' ətalət sistemlərində işığın sürətinə $\vec{c}$ və $\vec{c}\,'$ desək, sürətlərin Qaliley toplanmasına görə $\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V}$ və $c' = \sqrt{c^2 + V^2 - 2cV\cos\theta}$ olur. burada θ bucağından asılı olaraq c' sürəti c-V ilə c+V arasındakı bütün qiymətləri alır. Halbuki Eynşteynə görə $c' = c = \text{in var}$ olmalıdır.

Eynşteyn 1905-di ildə xüsusi nisbilik nəzəriyyəsini iki postulat şəklində vermişdir.

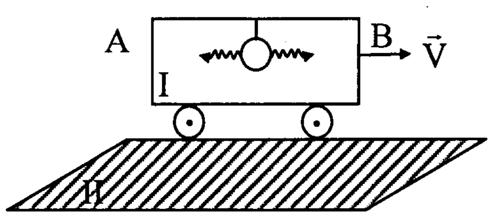
I. Fizikanın, təbiətin bütün qanunları eyni başlanğıç şərtlər daxilində bütün ətalət sistemlərində özlərini eyni cür aparır. Fiziki proseləri ifadə edən diferensial tənliklər bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə öz şəklini dəyişmir, yəni invariant və ya kovariant qalır. Bu postulat Qaliley prinsipini bütün təbiət qanunlarına şamil edir.

II. İşığın yayılma sürəti vakuumda bütün ətalət sistemlərində və bütün istiqamətlərdə eyni bir qiymətə malikdir. İkinci postulatın mənasını bir az açıqlayaq. İşığın yayılması elektromaqnit dalğasının, yəni elektromaqnit qarşılıqlı təsirinin yayılmasıdır. İşığın yayılma sürətinə elektromaqnit q/t-nin limit və ya maksimal yayılma sürəti də deyilir. Belə ki, istənilən sürətə malik yüklü zərrəciklər arasında həmişə elektromaqnit q/t mövcuddur.

Bir halda ki, elektromaqnit q/t-nin yayılması fəzanın xassəsidir, onda eyni sözləri biz güclü, zəif və qravitasiya q/t-ləri üçün də deyə bilərik. Təbiət bütün q/t-lərə eyni cür münasibət bəsləyir. Bütün q/t-lər bütün ətalət sistemlərində eyni bir c sürəti ilə yayılır. Onda II postulatı belə ifadə etmək olar: Bütün növ qarşılıqlı təsirlər bir limit yayılma sürətinə malikdir və o da bütün ətalət sistemlərində eyni olub, c-yə bərabərdir.

Qeyd edək ki, Nyuton mexanikasında q/t-in yayılma sürəti sonsuz böyük olduğu halda, relyativistik mexanikada (Eynşteynin nisbilik nəzəriyyəsində) q/t sonlu c sürətilə yayılır.

Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsində mütləq zaman anlayışı yoxdur və zaman da fəza koordinatları kimi nisbidir. Bu nəzəriyyə hadisələrin fəza-zaman baxımında köklü dəyişikliklərə səbəb oldu. Eynşteyn nəzəriyyəsi zaman-məkan anlayışlarına daha dərindən və tənqidi yanaşmağı tələb edir. X.n.n.-də iki hadisənin eyni zamanda baş verməsi (eyni zamanlığı) nisbi anlayışdır və müşahidəçidən asılıdır. Bunu Eynşteyn vaqonu misalında izah edək. Şəkil 8.6-da Eynşteyn vaqonu sağa tərəf böyük $\vec{V} = \text{const}$ sürəti ilə hərəkət edir. Vaqonun tavanının tən ortasından elektrik lampası asılmışdır. Vaqonda yerləşmiş müşahidəçiyə I, stansiyanın platformasında dayanmış müşahidəçiyə II deyək. Müəyyən zaman anında tavandan asılmış lampa yanaraq A və B istiqamətdə işıq şüaları buraxır. I müşahidəçi işıq şüalarını vaqonun A və B divarlarına eyni zamanda çatdığını qeyd edir.



Şəkil **8.6**

II müşahidəçiyə görə isə işıq şüası A divarına B divarından tez çatır (B divarı işıq şüasından qaçır, A divarı şüaya qarşı gəlir). Hər iki müşahidəçi düz deyir. I və II müşahidəçi müxtəlif ətalət sistemlərində yerləşmişdir, zaman mütləq deyil nisbidir və o, müxtəlif ətalət sistemlərində müxtəlif tərzdə axır (keçir) və hadisələrin eyni zamanlığı ətalət sistemlərindən (müşahidəçidən) asılıdır. Klassik mexanikadan fərqli olaraq relyativistik nəzəriyyədə eynizamanlıq nisbi kəmiyyətdir.

§9. İnterval və işıq konusu

İnterval relyativistik fizikada ən mühüm anlayışlardan biridir. O, bir çox münasibətlərə və o cümlədən relyativistik zərrəciyin və elektromaqnit sahəsinin Laqranj funksiyalarına daxil olur. Bundan əlavə, gələcəkdə görəcəyik ki, interval yaşadığımız real fiziki zaman və məkanın həndəsəsini müəyyən edir.

Fizikada hadisə anlayışından geniş istifadə olunur. Hər bir hadisə 4 kəmiyyətlə – hadisənin baş verdiyi nöqtənin 3 fəza koordinatı (x, y, z) və onun baş verdiyi zaman anı (t) ilə xarakterizə edilir. Hadisələr mahiyyətcə çox müxtəlifdir və onlara misal olaraq ölçü cihazının əqrəbinin müəyyən bölgüdən keçməsini, işıq ləkəsinin ekrana düşməsini, uşağın anadan olmasını, təyyarənin qəzaya uğramasını və s. göstərmək olar. Biz hadisələrin mahiyyətinə fikir vermədən istənilən hadisəni x, y, z, t kimi 4 kəmiyyətlə xarakterizə edəcəyik. Proses dedikdə biz hadisələr ardıcıllığını başa düşəcəyik.

Bəzən biz şərti olaraq 4 – ölçülü ortoqonal koordinat sistemindən istifadə edəcəyik. Burada bir-birinə perpendikulyar olan 4 ox boyunca üç fəza koordinatı və zaman qeyd ediləcəkdir. Bu hələlik şərti olan 4-ölçülü fəza *Minkovski fəzası* adlanır və onun hər bir nöqtəsi bir hadisəyə uyğün gəlir (çünki, burada hər bir nöqtə x, y, z, t ilə xarakterizə edilir). Bu fəzanın nöqtəsinə *«dünyəvi nöqtə»* deyilir. Hər hansı zərrəciyin (və ya cismin) hərəkətinə bu fəzada bir xətt uyğun gələcəkdir ki, buna da *«dünyəvi xətt»* deyilir. Dünyəvi xəttin nöqtələri bütün zaman anlarında zərrəciyin koordinatlarını müəyyən edir. Zərrəciyin bərabər sürətli, düzxətli hərəkətinə düz dünyəvi xətt uyğun gələcəkdir. Dünyəvi xəttin tənliyini almaq üçün zərrəciyin koordinatlarının zamandan asılılığı məlum olmalıdır: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ və $t(t)$. Əslində dünyəvi xətt zərrəciyin hadisələr fəzasında mövcud olması tarixini təsvir edir. Real fiziki fəza – zamanda baş verən hadisələrə Minkovski fəzasının nöqtələri uyğun gəlir.

Biz həmişə (X, Y, Z) və (X', Y', Z') koordinat oxları bir-birinə paralel olan K və K' ətalət sistemlərindən istifadə edəcəyik. Çox vaxt fərz edəcəyik ki, K' sistemi K-ya nəzərən X (və deməli X') oxu boyunca sabit $\vec{V}$ sürətilə sağ tərəfə hərəkət edir. K ətalət sistemində 2 hadisəyə baxaq. Birinci hadisə odur ki, t_1 zamanı anında koordinatları x_1, y_1, z_1 olan nöqtədən işıq siqnalı (dalğası) buraxılır. İkinci hadisə olaraq bu siqnalın t_2 zamanı anında fəza koordinatları x_2, y_2, z_2 olan nöqtəyə çatmasını qəbul edək. Bu iki fəza nöqtəsi arasında məsafənin kvadratı $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$ və ya $c^2(t_2-t_1)^2$ olduğundan

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=c^2(t_2-t_1)^2 \qquad (9.1)$$

bərabərliyini yaza bilərik. Burada x_2, y_2, z_2 kəmiyyətlərini cari koordinatlar kimi qəbul etsək (9.1) ifadəsi K ətalət sistemində işığın yayıldığı sferik səthin tənliyi olacaqdır. Bu, mərkəzi x_1, y_1, z_1 nöqtəsində olan və radiusu $R=c(t_2-t_1)$ zaman keçdikcə böyüyən sferik səthdir. Əgər x_1, y_1, z_1, t_1 və x_2, y_2, z_2, t_2 yalnız işığın yayılması ilə əlaqədar olan hadisələr deyil, istənilən iki ixtiyari hadisənin koordinat və zamanlarıdırsa, onda aşağıdakı kimi yazılmış

$$S_{12}^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \qquad (9.2)$$

kəmiyyəti bu *iki hadisə arasında intervalın kvadratı* adlanır. İnterval çox mühüm anlayışdır və o, həm işığın yayılması ilə əlaqədar olan hadisələrə və həm də digər ixtiyari hadisələrə tətbiq edilir. Hadisələr bir-birinə çox yaxındırsa, *diferensial interval* anlayışından istifadə olunur:

$$dS=\sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}\,.$$

İnterval haqqında aşağıdakı teorem mövcuddur: verilmiş iki hadisə arasındakı interval bütün ətalət sistemlərində eyni bir qiymətə malikdir, yəni invariantdır. Bunu isbat etmək üçün əvvəlcə göstərək ki, iki hadisə arasındakı interval K ətalət sistemində sıfırdırsa, o, K' ətalət sistemində də sıfır olacaqdır. Doğrundan da işığın K-da yayılması ilə əlaqədar olan iki hadisəyə aid (9.1) düsturundan $S_{12}^2(\text{işıq})=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-$ $-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2=0$ alınır. İndi K-da işığın yayılması ilə əlaqədar olan həmin iki hadisəni K'-dən müşahidə etsək və onların koordinat və zamanlarının K'-də ölçülmüş qiymətlərinə x_1', y_1', z_1', t_1' və x_2', y_2', z_2', t_2' desək və nəzərə alsaq ki, K' ətalət sistemində də işıq bütün istiqamətlərdə eyni bir c sürəti ilə yayılır (Eynşteynin II postulatı), onda (9.1)-ə uyğun olaraq K' sistemində də işığın yayılması üçün sferik səth tənliyini yaza bilərik:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2=c^2(t_2'-t_1')^2. \qquad (9.1')$$

Buradan da işığın yayılması ilə əlaqədar olan həmin iki hadisə arasındakı interval üçün K'-də $S_{12}'^2(\text{işıq})=c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-$

$-(z_2' - z_1')^2 = 0$ alırıq. Deməli, eyni bir işıq şüası (dalğası) ilə əlaqədar olan iki hadisə arasındakı interval istənilən ətalət sistemində (məs. K və K'-də) sıfıra bərabərdir.

İndi bir-birinə çox yaxın olan ixtiyari iki hadisə götürək və bunlar arasındakı diferensial intervalı K və K'-də dS və dS' ilə işarə edək. Diferensial birinci tərtib kiçik kəmiyyət olduğundan, onlar bir-biri ilə mütənasib ola bilər. Onda

$$dS = a dS' \qquad (9.3)$$

yaza bilərik. Burada a fəza-zaman koordinatlarından və ətalət sistemlərinin nisbi hərəkət sürətindən asılı olan ixtiyari sonlu funksiyadır: $a \equiv a(x', y', z', t', \vec{V})$. Təcrübələr göstərir ki, əgər qravitasiyanı nəzərə almasaq ətalət sistemində sərbəst fəza bircins və izotropdur, zaman isə bircinsdir. Yəni ətalət sistemində bütün fəza nöqtələri və zaman anları eynihüquqludur və fəzada bütün istiqamətlər eynigüclüdür. Buradan çıxır ki, a funksiyası koordinat və zamandan deyil, yalnız ətalət sistemlərinin nisbi hərəkət sürətinin mütləq qiymətindən asılı ola bilər: $a = f(V)$. Onda (9.3) bərabərliyini açıq yazsaq

$$dS = f(V) dS' \qquad (9.3')$$

olar. Bu yazılışda K' sistemi K-ya nəzərən OX oxu boyunca (OX və OX' oxları üst-üstə düşür. Bax şək. 8.1) $\vec{V}$ sürəti ilə hərəkət edir. İndi $x \to -x$, $z \to -z$ və $x' \to -x'$, $z' \to -z'$ çevrilməsini etsək, dS və dS' dəyişməz qalar, K ilə K' isə rollarını dəyişər. K sistemi K'-ə nəzərə OX' oxu boyunca (yəni, OX boyunca) $\vec{V}$ sürəti ilə hərəkət edər. Onda analoji olaraq

$$dS' = f(V) dS, \qquad (9.4)$$

yaza bilərik. (9.3') və (9.4)-dən $f^2=1$ alınır. Buradanda $f=+1$ olur ($f=-1$ həlli yanlışdır).

Deməli

$$dS = dS'. \qquad (9.5)$$

Bu bərabərliyi hadisələr (və ya onların koordinatları) üzrə inteqrallayaraq, $S = S' + B$ alırıq. Burada B hadisələrdən (və ya koordinatdan) asılı olmayan inteqrallanma sabitidir. Göstərmək olar ki, $B \equiv 0$. Doğrudan da, biz işığın yayılması ilə bağlı iki hadisəyə baxsaq S(işıq) =

$= S'(\text{işıq}) + B$ və ya 0=0+B. B sabiti hadisələrdən asılı olmadığına görə, onun işıqla əlaqədar hadisələr üçün tapılmış qiyməti, bütün digər hadisələr üçün də eyni olmalıdır, yəni $B \equiv 0$. Onda $S = S' = \text{in var}$ və ya $S^2 = S'^2 = \text{in var}$.

Üçölçülü məsafənin kvadratlarını $\ell_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + +(z_2 - z_1)^2$, $\ell_{12}'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$ ilə işarə etsək və $c^2(t_2 - t_1)^2 = c^2 t_{12}^2$, $c^2(t_2' - t_1')^2 = c^2 t_{12}'^2$ qəbul etsək, intervalın invariantlığı şərtini aşkar şəkildə yaza bilərik:

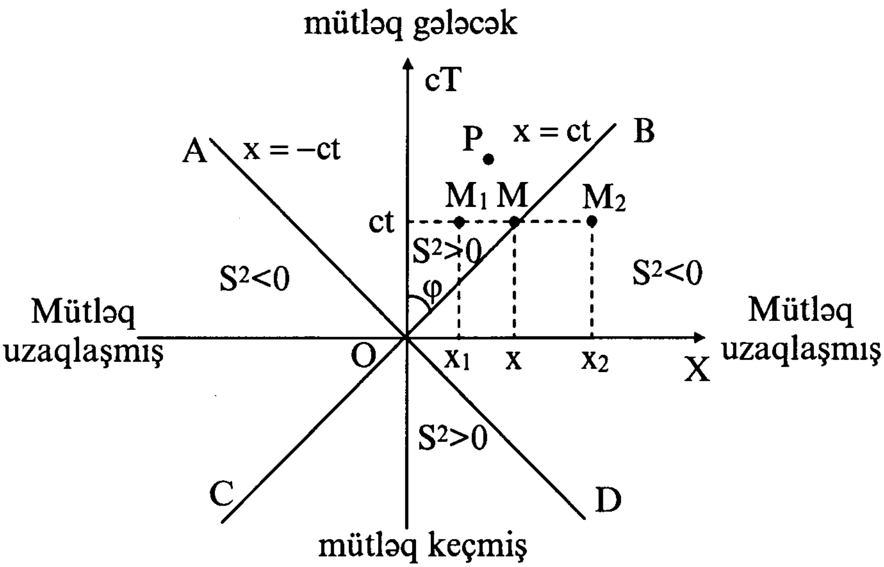
$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - \ell_{12}'^2 = S_{12}'^2 = \text{in var}. \quad (9.6)$$

İndi intervalın bəzi xassələrini araşdıraq. Fərz edək ki, K' ətalət sistemində iki hadisə eyni bir fəza nöqtəsində baş verir, yəni $\ell_{12}'^2 = 0$. Onda $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$, yəni intervalın kvadratı müsbət, intervalın özü isə həqiqi kəmiyyət olur. Həqiqi intervallara *zamanaoxşar intervallar* deyilir. Alınmış bu nəticəni belə ifadə etmək olar: Verilmiş iki hadisə arasındakı interval zamana oxşardırsa, elə hesabat sistemi seçmək olar ki, (məs: K' sistemi) bu sistemdə həmin iki hadisə eyni bir 3-ölçülü fəza nöqtəsində baş versin.

İndi fərz edək ki, K' sistemində hər hansı 2 hadisə eyni zaman anında baş verir, yəni $t_{12}'^2 = 0$ olur. Onda $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = -\ell_{12}'^2 < 0$, yəni intervalın kvadratı mənfi, intervalın özü isə xəyali kəmiyyət olur. Xəyali intervallar *fəzayaoxşar intervallar* adlanır. Bu nəticəni belə ifadə etmək olar: Verilmiş 2 hadisə arasındakı interval fəzayaoxşardırsa, elə hesabat sistemi seçmək olar ki, (Məs: K' sistemi) bu sistemdə həmin 2 hadisə eynianda baş versin. Əgər iki hadisə eyni bir işıq şüasının yayılması ilə əlaqədardırsa, onda bu hadisələr arasındakı interval həmişə sıfıra bərabər olacaqdır: $S_{12}^2 = 0$. Belə intervallar işığaoxşar və ya *izotrop intervallar* adlanır. İntervalların invariantlığından çıxır ki, onların zamanaoxşar, fəzayaoxşar və işığaoxşar (izotrop) intervallara bölünməsi mütləq anlayışdır. Yəni intervalın zamana-, fəzaya- və işığaoxşar olması hesabat sistemindən asılı olmayıb yalnız hadisələrin özlərindən asılıdır.

İntervalın digər xassələrini aydınlaşdırmaq üçün sadəlik xətrinə y və z koordinatlarını nəzərə almayaraq bir ölçülü OX koordinat sistemini seçək və t zaman oxunu əlavə edək (yəni Minkovski fəzasının XOT müstəvisinə baxaq). OX oxu boyunca işıq siqnalının yayılması ilə bağlı 2 hadisəyə nəzər salaq: $S_{12}^2(\text{işıq}) = c^2 t_{12}^2 - (x_2 - x_1)^2 = 0$. Hadisələrdən biri $t_1=0$ anında $x_1=0$ nöqtəsindən işıq siqnalının buraxılması, digəri isə t_2 anında bu siqnalın koordinatı x_2 olan nöqtəyə çatması olsun. Bunları yuxarıdakı intervalda nəzərə alsaq, $S_{12}^2(\text{işıq}) = c^2 t_2^2 - x_2^2 = 0$ və buradan $x_2 = \pm c t_2$ olar. Burada x_2 və t_2-yə cari koordinat və cari zaman kimi baxsaq $x = \pm ct$ olar. Bu $x = +ct$ və $x = -ct$ kimi iki düz xəttin tənliyi (XOT müstəvisində) olub, OX oxunun müsbət və mənfi istiqamətlərində işıq şüasının yayılmasını xarakterizə edir. Bu xətlər XOT müstəvisini 4 hissəyə (oblasta, kvadranta bölür). Biz zaman oxu üzərində t əvəzində ct götürsək, oxlar boyunca götürülən kəmiyyətlər uzunluq ölçüsünə malik olar və bu, məntiqə daha uyğundur. Bu xətləri BC və AD ilə işarə edək və onlar koordinat bucaqlarının bissektrisləridir. Bu xətlərin hər biri üzərində götürülmüş istənilən iki nöqtə (hadisə) arasındakı interval sıfırdır (çünki bu xətlər işıq şüasının yayılması xətləridir). Eyni bir t zamanı anına və müxtəlif x, x_1 və x_2 fəza koordinatlarına malik M, M_1 və M_2 hadisələrinə (nöqtələrinə) nəzər salaq (şəkil 9.1). M hadisəsi BOC xətti üzərində, M_1 hadisəsi AOB kvadrantında (oblastında), M_2 isə BOD kvadrantındadır. Bu hadisələrlə «O» hadisəsi (koordinat başlanğıcı) arasındakı intervalları yazaq: $S_{OM}^2 = c^2t^2 - x^2 = 0$, $S_{OM_1}^2 = c^2t^2 - x_1^2 > 0$, $S_{OM_2}^2 = c^2t^2 - x_2^2 < 0$.

9.1-ci şəkildən görünür ki, AOB kvadrantındakı istənilən hadisə ilə «O» hadisəsi arasındakı interval zamana oxşar intervaldır ($S^2 > 0$). BOD kvadrantında istənilən hadisə ilə «O» hadisəsi arasındakı interval fəzaya oxşar intervaldır ($S^2 < 0$). Eyni sözləri COD və AOC kvadrantları üçün də deyə bilərik. AOB kvadrantında ixtiyari P hadisəsinə baxaq. Şəkildən görünür ki, baxdığımız ətalət sistemlərində P hadisəsi «O» hadisəsindən sonra baş verir. Göstərmək olar ki, istənilən ətalət hesablama sistemində P hadisəsi O hadisəsindən sonra baş verəcəkdir. Bunun üçün bir anlıq əksini fərz edək. Yəni qəbul edək ki, elə bir sürətlə hərəkət edən ətalət sistemi vardır ki, orada P hadisəsi O-dan əvvəl baş verir. Onda biz daha böyük (və ya daha kiçik) sürətli digər bir ətalət sistemi tapa bilərdik ki, orada P ilə O hadisələri eyni zamanda baş versin. Belə olduqda P və O arasındakı interval fəzaya oxşar olur, yəni $S_{OP}^2 < 0$ olur ki, bu da AOB və COD kvadratlardakı istənilən hadisə ilə O hadisəsi arasındakı intervalın zamana oxşar olması ($S^2 > 0$) şərtinə ziddir. Deməli bizim bir anlığa qəbul etdiyimiz əks fərziyyə doğru deyildir. Beləliklə, AOB kvadrantı daxilindəki bütün hadisələr O-dan sonra baş verir və bu, bütün ətalət sistemlərində doğrudur. Ona görə bu oblast O hadisəsinə nəzərən «*mütləq gələcək*» adlanır.



Şəkil **9.1**

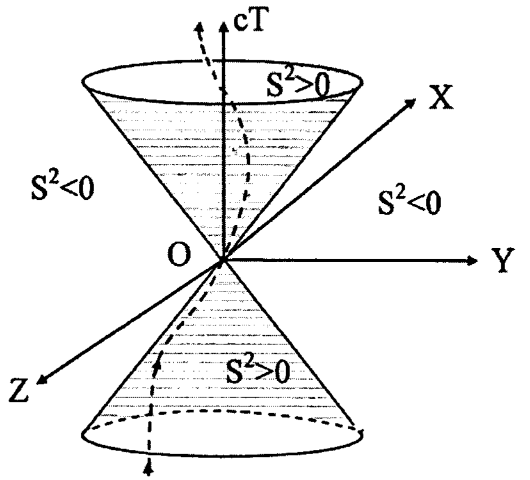
Analoji olaraq COD oblastı O hadisəsinə nəzərən «*mütləq keçmiş*» adlanır.

BOD oblastındakı istənilən hadisə ilə «O» hadisəsi arasındakı interval fəzaya oxşardır və bu bütün ətalət sistemlərində doğrudur. İstənilən ətalət sistemlərində bu hadisələr müxtəlif fəza (3-ölçülü) nöqtələrində baş verir (çünki $S^2 < 0$-dır). Ona görə bu oblast O hadisəsinə nəzərən «*mütləq uzaqlaşmış*» *oblast* adlanır. Lakin bu oblastdakı istənilən hadisə ətalət sistemlərindən asılı olaraq O hadisəsindən əvvəl, O-dan sonra və O hadisəsi ilə eyni zamanda baş verə bilər.

Eyni sözləri AOC oblastı üçün də demək olar. İşığın yayıldığı BC xəttinin T oxu ilə əmələ gətirdiyi meyl bucağına φ desək, $tg\varphi = \frac{x}{ct} = \frac{ct}{ct} = 1$ olur. c sürəti ən böyük (limit) sürət olduğundan, φ bucağı ən böyük meyl bucağıdır. AD xəttinin meyl bucağı mənfidir, lakin ədədi qiymətcə φ-yə bərabərdir. Əgər hər hansı maddi zərrəcik (işıq yox!) t=0 anında koordinat başlanğıcından keçərək hər hansı υ sürəti ilə hərəkət edərsə, onun

T oxu ilə əmələ gətirdiyi meyl bucağı $tg\varphi_{zər} = \frac{x_{zər}}{ct} = \frac{\upsilon_{zər}}{c} < 1$ olar. Həmişə real hərəkətlər üçün $\varphi_{zər} < \varphi_{işıq}$. Real zərrəciyin dünyəvi xətti AOB və COD oblastları daxilində olacaqdır və $\varphi_{zər}$ meyl bucağı da işıq xətlərinin meyl bucağından kiçik olacaqdır.

Əgər biz y və z koordinatlarını da nəzərə alsaq, kəsişən iki düz xətt əvəzində $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ tənliyini alarıq. Bu, 4-ölçülü fəzada fırlanma oxu cT boyunca yönəlmiş «konusu» təsvir edir. Buna «*işıq konusu*» deyilir. Bu konusun daxili boşluqları mütləq gələcək (yuxarı boşluq) və mütləq keçmiş (aşağı boşluq) oblastlarına uyğun gəlir. «İşıq konusunun» əsas xassəsi odur ki, t=0 anında koordinat başlanğıcından (O nöqtəsindən) keçən işıq şüaları konusun doğuranları boyunca yayılır (şəkil 9.2).



Şəkil **9.2**

İndi göstərək ki, yalnız zamana oxşar intervalla ayrılmış iki hadisə bir-birilə səbəbiyyət əlaqəsində olur. Doğrudan da zamanaoxşar interval üçün $S_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - \ell_{12}^2 > 0$ olur. Buradan $c^2 > \frac{\ell_{12}^2}{t_{12}^2} = \upsilon^2$ və ya $c>\upsilon$ alırıq. Deməkυ sürətli zərrəcik vasitəsilə bu hadisələr arasında əlaqə yaratmaq olar. Eyni yolla göstərək ki, fəzaya oxşar intervalla ayrılmış hadisələr səbəbiyyət əlaqəsində ola bilməzlər. Doğrudan da $S_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - \ell_{12}^2 < 0$ münasibətindən $c^2 < \frac{\ell_{12}^2}{t_{12}^2} = \upsilon^2$ və ya $c<\upsilon$ alırıq. Burada əlaqə yaratmaq üçün sürəti c-dən böyük olan zərrəcik (υ>c) lazımdır və belə zərrəcik də təbiətdə yoxdur. Deməli $S_{12}^2 < 0$ halında hadisələr arasında səbəbiyyət əlaqəsi yoxdur.

Qeyd edək ki, t=0 anında koordinat başlanğıcından keçən bütün real zərrəciklərin dünyəvi xətləri işıq konusunun daxilindən keçir və onların cT oxuna meyl bucağı konusun doğuranlarının meyl bucağından kiçikdir.

Biz şərti olaraq koordinat oxlarını böyük hərflərlə (X, Y, Z, cT) cari koordinatları isə kiçik hərflərlə (x, y, z, tc) işarə edirik.

§10. Məxsusi zaman

Məxsusi zaman relyativistik fizikada geniş istifadə edilən anlayışlardan biridir. Hərəkət edən obyektlə sərt bağlanmış saatın göstərdiyi zaman həmin *obyektin məxsusi zamanı* adlanır. Bunu aydınlaşdırmaq üçün fərz edək ki, hər hansı A cismi (obyekti) bizim yerləşdiyimiz K ətalət sisteminə nəzərən ixtiyari sürətlə qeyri-ətalət hərəkəti edir.

A cisminə K' hesabat sistemini sərt bağlayaq. Kiçik zaman müddətində A-nın hərəkətinə ətalət hərəkəti kimi baxmaq olar və onda K' də ətalət sistemi olacaqdır. A cisminin hər hansı nöqtəsinin (məsələn, b nöqtəsinin) sonsuz kiçik zaman ərzində fəzadakı iki ardıcıl vəziyyətinə 2 hadisə kimi baxaraq, bu hadisələrin K və K' ətalət sistemlərində koordinat və zamanlarını qeyd edək: K sistemində I hadisənin koordinat və zamanı x_1, y_1, z_1, t_1 və II hadisəninki isə $x_2 = x_1 + dx$, $y_2 = y_1 + dy$, $z_2 = z_1 + dz$, $t_2 = t_1 + dt$ olsun. Burada dx, dy və dz kəmiyyətləri dt zamanı ərzində b nöqtəsinin fəza koordinatlarının K-ya nəzərən dəyişməsi və $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ bu nöqtənin dt müddətində getdiyi məsafədir. K' sistemində I hadisənin koordinat və zamanı x_1', y_1', z_1', t_1' və II hadisənin ki isə $x_2' = x_1', y_2' = y_1', z_2' = z_1', t_2' = t_1' + dt'$ olacaqdır. A cismi K' ilə sərt bağlandığına görə, onun K' sisteminə nəzərən fəza koordinatları dəyişməyəcək, zaman isə dəyişəcəkdir.

İndi bu iki hadisə arasındakı intervalı K və K' ətalət sistemlərində yazaq və intervalın invariantlığından istifadə edək:

$$\left.\begin{aligned} &dS=\sqrt{c^2dt^2-d\ell^2}=dS'=\sqrt{c^2dt'^2}=cdt'=\text{in var} \\ \text{və ya}\quad & \\ &dt'=\frac{1}{c}dS=\frac{cdt}{c}\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2}=dt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2(t)}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (10.1)$$

Burada $\upsilon(t)$ A cisminin K sistemində ani sürətidir. Son nəticəni yazaq:

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{\upsilon(t)^2}{c^2}}=\frac{dS}{c}. \quad (10.2)$$

Burada dt' A cismi ilə birlikdə hərəkət edən (onunla sərt bağlanmış) K' sistemindəki saatın göstərdiyi zaman müddətidir. Bu, hərəkət edən A cisminin *məxsusi zamanı* adlanır (diferensial məxsusi zaman). A cismi ixtiyari obyekt və o cümlədən elementar zərrəcik də ola bilər. (10.2) düsturunda dt isə A cisminin hərəkəti müşahidə edilən K sistemindəki saatın göstərdiyi uyğun zaman müddətidir. Adətən K sistemi laborator sistemi olur. dt-yə sadəlik üçün koordinat zamanı demək olar.

Son düsturdan alınan nəticəni belə ifadə etmək olar: əgər obyekt hərəkət edirsə ($\upsilon(t)\neq 0$) onun məxsusi zamanı digər uyğun zamanlar içərisində ən kiçiyidir, yəni $dt'<dt$. Məxsusi zaman intervalla mütənasibdir və ona görə relyativistik invariantdır. $dt'<dt$ şərtini belə də ifadə edirlər: hərəkət edən saatların ritmi sükunətdəki saatlara nəzərən yavaşımış olur. Hərəkət edən saatlar sükunətdəkilərə nəzərən ləng işləyir, yəni geri qalır. Buna saatların *Eynşteyn «ləngiməsi»* deyilir.

Məxsusi zamanın bu xassəsi yüksək enerjili zərrəciklər fizikasında özünün tam təcrübi təsdiqini tapmışdır. Bunu izah etmək üçün (10.2) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazaq

$$dt=\frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad (10.2')$$

və bu ifadəni qeyri-stabil zərrəcik olan $\mu^{\mp}$-mezonun (və ya başqa bir zərrəciyin) yaşama müddətinin (ömrünün) ölçülməsinə tətbiq edək. Məlumdur ki, μ^--mezon hər hansı mənbə tərəfindən, məsələn π^--mezon tərəfindən yaradılır ($\pi^- \to \mu^- + \tilde{\nu}$) və müəyyən müddət yaşadıqdan sonra ($2\cdot10^{-6}$ san) üç zərrəciyə parçalanır ($\mu^- \to e^- + \nu + \tilde{\nu}$). Bu parçalanmada müxtəlif enerjili (sürətli) μ-mezonlar iştirak edir. Nüvə və elementar zərrəciklər fizikasında istənilən yüklü zərrəciyin hərəkət trayektoriyasının uzunluğunu və sürətini ölçmək üsulları mövcuddur (Heyger sayğacı, Vilson kamerası və s.). Zərrəciyin trayektoriyasının uzunluğu onun yarandığı nöqtə ilə digər zərrəciklərə parçalandığı nöqtə arasındakı məsafədir. Bu məsafəni zərrəciyin sürətinə bölməklə onun ömrünü (yaşama müddətini) təcrübi olaraq ölçürlər.

İndi I hadisə olaraq μ^--mezonun doğulmasını və II hadisə olaraq onun elektron və iki neytrinoya parçalanaraq məhv olmasını fərz edək və (10.2') düstürunu bu hadisələrə tətbiq edək.

Onda dt' bu iki hadisə arasında keçən zaman intervalının μ^--mezonla birgə hərəkət edən (mezonla sərt bağlanmış) K' sistemindəki saatla ölçülmüş qiymətidir, yəni μ^--mezonun məxsusi zamanıdır. Mezonun məxsusi zamanını $dt' = T_0$ ilə işarə edək. μ^--mezon K'-də sükunətdədir və ona görə T_0 sükunətdəki μ^--mezonun ömrüdür (yaşama müddətidir). (10.2) düsturunda dt isə bu iki hadisə arasında keçən zamanın hərəkətdə olan μ^--mezonun müşahidə edildiyi K sistemindəki (yəni bizim yerləşdiyimiz laborator sistemindəki) saatlarla ölçülmüş qiymətidir. Bu koordinat və ya laborator zamanını $dt = T$ ilə işarə edək. μ^--mezon K-ya nəzərən $\upsilon(t)$ sürətilə hərəkət edir və ona görə T hərəkət edən μ^--mezonun ömrü (yaşama müddəti) olur. İndi (10.2') düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (10.2'')$$

Buradan alınan nəticə belədir: hərəkət edən zərrəciyin ömrü uzanır ($T > T_0$).

Bu düsturu istənilən cismə, prosesə, əkizlərə, kosmik uçuşlara və s. tətbiq etmək olar.

Biz Lorens çevrilmələrindən çıxan kinematik nəticələrdə bu düstura yenidən qayıdaraq bəzi açıqlamalar verəcəyik.

Biz yuxarıda diferensial məxsusi zamanı müzakirə etdik. İndi (10.2) düsturunu koordinat zamanı üzrə inteqrallayaraq, sonlu məxsusi zamanın ifadəsini ala bilərik:

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{\upsilon}^2(t)}{c^2}} dt. \qquad (10.3)$$

Bu düstur formal xarakter daşıyır, çünki (10.2) düsturundan fərqli olaraq sonlu zaman intervalı üçün K' sistemi artıq ətalət sistemi olmayacaqdır.

§11. Koordinatlar və zamanın Lorens çevrilmələri

Bu çevrilmələr eyni bir hadisənin iki ətalət sistemində ölçülmüş fəza koordinatları və zamanları arasındakı əlaqəni ifadə edir. Lorens çevrilmələri bir ətalət sistemindən digər ətalət sisteminə keçid düsturlarıdır.

Burada söhbət fəza koordinatları və zamanın ölçülməsindən getdiyinə görə, hər bir ətalət sistemində hadisənin fəza koordinatları və zamanının prinsipcə mümkün olan ölçülmə qaydasını yadımıza salaq. Qeyd edək ki, bütün ətalət sistemləri eyni cür miqyaslarla (xətkeşlərlə) və eyni cür dəqiq işləyən saatlarla təchiz edilmişdir. Belə ki, istənilən ətalət sistemində etalon saat və etalon miqyas rolunu hər hansı təmiz maddənin atomları (Sezium atomları) oynaya bilər. Eyni atomların xarakterik rəqs tezlikləri (periodu, dövrü) eynidir və xarakterik şüalanma dalğa uzunluğu da eynidir. Rəqs periodları zaman etalonu, dalğa uzunluğu isə uzunluq etalonu (miqyas) ola bilər.

Fəzanın hər bir nöqtəsində hər bir ətalət sisteminə məxsus miqyas, saat və müşahidəçinin yerləşdiyi fərz edilir. Bunlar öz ətalət sistemi ilə birgə hərəkət edirlər. Hər bir ətalət sistemi yalnız öz miqyas, saat və müşahidəçinin göstərişini əsas götürür. İstənilən ətalət sisteminin bütün saatları eyni vaxtı göstərməlidir. Buna görə hər bir ətalət sistemində bütün saatlar sinxronlaşdırılmalıdır. Bunu belə icra edirlər: Məsələn, K ətalət sisteminin koordinat başlanğıcında (O nöqtəsində) yerləşən saatın əqrəbi sıfır bölgüsünü göstərdiyi zaman anında O nöqtəsindən işıq dalğası (və ya radiosiqnal) buraxılır və əmr edilir ki, bu dalğa koordinat başlanğıcından r məsafəsində yerləşmiş nöqtəyə (müşahidəçiyə) çatdıqda, o, öz saatında əqrəbi r/c bölgüsünə qoysun. Biz burada Eynşteynin II postulatından istifadə edirik: İşıq dalğası ətalət sistemində vakuumda bütün istiqamətlərdə eyni bir c sürəti ilə yayılır. O-dan buraxılan işıq dalğası r məsafəsini r/c zamanı müddətində qət edir. Deməli işıq dalğası r-də yerləşmiş müşahidəçiyə çatdığı anda həm bu müşahidə nöqtəsində və həm də O-da yerləşmiş saatların hər ikisi eyni $\frac{r}{c}$ bölgüsünü göstərəcəkdir. Eyni sözləri başlanğıcdan $r_1, r_2, ... r_n$ məsafəsində yerləşmiş saatlar üçün demək olar. İşıq dalğası bu saatlara çatdığı anda uyğun müşahidəçilər öz saatlarında əqrəbi $\frac{r_1}{c}, \frac{r_2}{c}, ..., \frac{r_n}{c}$ bölgüsünə qoymalıdırlar. Beləliklə K ətalət sistemində bütün nöqtələrdəki saatlar eyni vaxtı göstərəcəkdir. Digər ətalət sistemlərində də (K',K" və s.) saatların sinxronlaşdırılması uyğun qaydada aparılır. Biz eyni bir hadisəni K və K' kimi iki ətalət sistemindən müşahidə edəcəyik. Fərz edəcəyik ki, K və K' sistemlərinin koordinat oxları bir-birinə paraleldir və K' ətalət sistemi K-ya nəzərən $\vec{V}$ sürəti ilə X oxu istiqamətində sağa hərəkət edir (müsbət istiqamətdə). Bu müşahidəni aparmaq üçün biz mütləq K sisteminin sinxronlaşdırılmış saatlar toplusu ilə K' sisteminin sinxronlaşdırılmış saatlar toplusu arasında əlaqə yaratmalıyıq. Adətən bu əlaqəni belə həyata keçirirlər: K və K' koordinat sistemlərinin başlanğıcları (O və O' nöqtələri) üst-üstə düşdükdə ümumi başlanğıcda yerləşmiş həm K və həm də K' sistemindən olan saatların hər ikisində əqrəbləri $t = 0$ və $t' = 0$ bölgüsünə qoyurlar. Beləliklə K və K' ətalət sistemlərinin koordinat başlanğıclarında yerləşən saatlar arasında əlaqə yaranmış olur. Artıq K və K' ətalət sistemlərinin hər birində saatların sinxronlaşdırılmasını apararaq bu sistemləri istənilən hadisə və prosesin tədqiq edilməsinə hazırlamış oluruq.

Hər hansı hadisəni K ətalət sistemində tədqiq edərkən hadisənin baş verdiyi nöqtədə yerləşmiş K sisteminin miqyaslarından və həmin nöqtədə yerləşmiş K sisteminin saatının göstərişindən istifadə etmək lazımdır.

İndi bilavasitə Lorens çevrilmələri düsturlarının alınmasına keçək. Əlverişlilik üçün t-zamanı əvəzinə uzunluq ölçüsünə malik $\tau = ict$ kəmiyyəti daxil edək. Burada $i = \sqrt{-1}$ xəyali vahiddir. Onda K sistemində iki hadisə arasındakı intervalın kvadratı

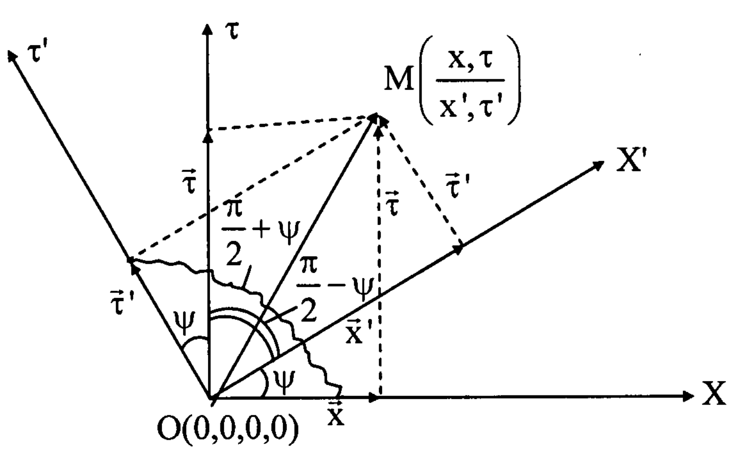
$$S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \ell_{12}^2 = -\{(\tau_2 - \tau_1)^2 + \ell_{12}^2\} = \text{in var}$$

və ya (11.1)

$$-S_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \text{in var}$$

şəklində yazılır. Burada son bərabərliyin sağ tərəfi 4-ölçüli koordinat sistemində (X, Y, Z, τ) iki nöqtə arasındakı məsafənin kvadratıdır və özü də invariantdır. Deməli bizi 4-ölçülü fəzada koordinatların elə çevrilməsi maraqlandırır ki, bu zaman (11.1) ifadəsi invariant qalsın, yəni 4-ölçülü məsafənin kvadratı dəyişməz qalsın. Biz üç-ölçülü fəzadakı çevrilmələrdən bilirik: 1) üç-ölçülü koordinat sisteminin dönməsi (fırlanması) və 2) üç-ölçülü koordinat sisteminin başlanğıcının sürüşməsi zamanı üç-ölçülü məsafə (həm də kvadratı) dəyişmir, invariant qalır. Buna analoji olaraq deyə bilərik ki, 1) 4-ölçülü fəzanın fırlanması (dönməsi) zamanı və 2) 4-ölçülü sistemin koordinat başlanğıcının sürüşməsi zamanı 4-ölçülü məsafənin kvadratı, yəni (11.1) ifadəsi dəyişməz qalacaqdır. Biz hələlik 4-ölçülü fəzanın fırlanması ilə məşğul olacağıq. 4-ölçülü fəzanın fırlanması aşağıdakı 6 (altı) müstəvidə fırlanmaya gətirilir: XY, XZ, YZ, Xτ, Yτ, Zτ. Birinci üç müstəvidə fırlanma adi üç-ölçülü fəzanın fırlanmasıdır. Axırıncı üç müstəvidə fırlanma ətalət sistemlərinin bir-birinə nəzərən hərəkətinə gətirilir (bunu aşağıda görəcəyik).

Sadəlik üçün Xτ müstəvisində fırlanmaya baxaq. Bu müstəvidə XOτ düzbucaqlı koordinat sistemi quraq. O(0, 0, 0, 0) nöqtəsində bütün koordinatlar sıfırdır (koordinat başlanğıcı). Bu koordinat sistemini O nöqtəsi ətrafında ψ bucağı qədər fırladaq və koordinat sisteminin yeni vəziyyətini X'Oτ' ilə işarə edək. Xτ müstəvisində ixtiyari M hadisəsini (nöqtəsini) seçək və onun koordinatlarını ilk və dönmüş koordinat sistemlərində (x,τ) və (x',τ') ilə işarə edək (şəkil 11.1).



Şəkil **11.1**

Biz Xτ müstəvisində koordinatların çevrilməsini əlavədə verilmiş üçölçülü fəzada ortoqonal çevrilmə düsturlarından istifadə etməklə yaza bilərdik. Lakin burada biz bu çevrilmə düsturlarını bilavasitə hesablayacağıq.

O və M nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasına bir vektor kimi baxaq ($\vec{OM}$ vektoru).

$\vec{OM}$ vektorunun oxlar üzrə toplananlarına $\vec{x}, \vec{\tau}$ və $\vec{x}', \vec{\tau}'$ desək

$$\vec{OM} = \vec{x} + \vec{\tau} = \vec{x}' + \vec{\tau}' \tag{11.2}$$

olar. Bu vektorun OX və Oτ oxları üzrə proyeksiyasını alaq:

$$\begin{cases} x = x'\cos\psi - \tau'\sin\psi, \\ \tau = x'\sin\psi + \tau'\cos\psi, \\ y = y',\ z = z'. \end{cases} \tag{11.3}$$

Biz burada nəzərə almışıq ki, 4-ölçülü fəzanın Xτ müstəvisində fırlanması zamanı digər koordinatlar, yəni y və z dəyişmir. Ona görə (11.3) düsturunda bu şərti nəzərə alaraq $y = y'$ və $z = z'$ yazmışıq. Burada ψ bucağı yalnız fırlanmanın xarakterindən asılı olan kəmiyyətdir, yəni $\psi \neq f(x, \tau)$.

(11.3) münasibəti x koordinatı ilə $\tau = ict$ zamanı arasındakı xətti əlaqəni ifadə edir. Mexanikadan məlumdur ki, koordinatla zaman arasındakı xətti münasibət yalnız bərabər sürətli düz xətli hərəkətlər (ətalət hərəkətləri) halında mövcuddur. Deməli (11.3) münasibəti K və K' ətalət sistemlərinin OX oxu boyunca hərəkətini təsvir etməlidir. Tutaq ki, K' sisteminin koordinat başlanğıcının K-ya nəzərən hərəkətinə baxırıq (K'-in digər nöqtələri də eyni qanununla hərəkət edir). Onda (11.3)-də $x' = 0$ yazaraq,

$$\begin{cases} x = -\tau'\sin\psi \\ \tau = \tau'\cos\psi \end{cases} \tag{11.3'}$$

alırıq. Burada birinci tənliyi ikinci tənliyə bölməklə ψ parametrini təyin edək:

$$-\mathrm{tg}\psi = \frac{x}{\tau} = \frac{x}{ict} = \frac{1}{ic}V = -i\frac{V}{c} \text{ və ya } \mathrm{tg}\psi = i\frac{V}{c}.$$

Burada V kəmiyyəti K' ətalət sisteminin koordinat başlanğıcının (yəni

K' sisteminin özünün) K-ya nəzərən OX oxu istiqamətində hərəkət sürətidir (Bərabər sürətli hərəkətdə x/t nisbəti sürəti ifadə edir). Beləliklə $tg\psi$ sırf xəyali kəmiyyət olub ətalət sistemlərinin nisbi sürətini təyin edir. Buradakı xəyali vahid köməkçi rol oynayır və son ifadələrdə bütün kəmiyyətlər həqiqi olacaqdır. $tg\psi = i\frac{V}{c}$ ifadəsindən istifadə edərək triqonometrik düsturların köməyi ilə $\sin\psi$ və $\cos\psi$-ni təyin edib (11.3) düsturunda yerinə yazaq:

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad \sin\psi = tg\psi\cdot\cos\psi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

İndi (11.3) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

$$x = \frac{x' - i\frac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \tau = \frac{\tau' + i\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{11.4}$$

Bu, 4-ölçülü şəkildə yazılmış Lorens çevrilmələri düsturlarıdır. Burada K' sistemindən K sisteminə keçid icra olunur. (x, y, z, τ) və (x', y', z', τ') kəmiyyətləri eyni bir hadisənin K və K' ətalət sistemlərində 4-ölçülü koordinatlarıdır. τ və τ' dördüncü koordinatdır və özləri də K və K'-də hadisənin baş vermə zamanlarını xarakterizə edirlər. Biz bəzən $\beta = \frac{V}{c}$ və $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ şərti işarələrdən istifadə edəcəyik.

(11.4) ifadəsində $\tau = ict$ və $\tau' = ict'$ yazaraq, Lorens çevrilmələri düsturlarının üç-ölçülü şəklini alarıq:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{11.4'}$$

Bu düsturlarda bütün kəmiyyətlər həqiqidir. Buradan görünür ki, $t = t' = 0$ olduqda, $x = x' = 0$ olur. Yəni başlanğıc anda $(t = 0, t' = 0)$ K və K' koordinat sistemlərinin başlanğıcları üst-üstə düşür.

İndi K-dan K'-ə keçidi icra etmək üçün (11.4) və (11.4') düsturlarını ştrixli koordinatlara görə həll etmək lazımdır. Tənlikləri bilavasitə həll etdikdə məlum olur ki, bu ifadələrdə ştrixli kəmiyyətlərin yerinə ştrixsiz kəmiyyət və tərsinə yazsaq $((\cdots)' \leftrightarrow (\cdots))$ və V-ni «–V» ilə **əvəz etsək** $(V \to -V)$ K-dan K'-ə keçid düsturlarını almış olarıq:

$$x' = \gamma\left(x + i\frac{V}{c}\tau\right),\quad \tau' = \gamma\left(\tau - i\frac{V}{c}x\right),\quad y' = y,\ z' = z. \qquad (11.5)$$

Bu 4-ölçülü şəkildə yazılmış K-dan K'-ə keçid düsturlarıdır, **yəni** Lorens çevrilmələridir. Burada $\tau = ict$ və $\tau' = ict'$ yazaraq, K-dan K'-ə keçid düsturlarının üç ölçülü şəklini alırıq:

$$x' = \gamma(x - Vt),\quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right),\quad y' = y,\quad z' = z. \qquad (11.5')$$

Biz hər yerdə V ilə ətalət sistemlərinin nisbi hərəkət sürətini $(\vec{V} = \text{const})$, υ ilə isə zərrəciyin ani hərəkət sürətini işarə edəcəyik ($\vec{\upsilon}$ ümumiyyətlə sabit deyildir).

Koordinat və zamanın Lorens çevrilmələri relyativistik fizikanın əsas düsturlarıdır. Bu düsturlardan görünür ki, fəza koordinatları kimi zaman da nisbi kəmiyyətdir və bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə müəyyən qanunla çevrilir (dəyişir).

Üç-ölçülü şəkildə yazılmış (11.4') və (11.5') Lorens çevrilməsi düsturlarından aşkar görünür ki, V<c olmalıdır, yəni ətalət sisteminin sürəti işıq sürətindən kiçik olmalıdır. Əks halda: a) V>c olarsa, həqiqi zaman və koordinat xəyali zaman və koordinata çevrilərdi və bu da mümkün deyil; b) V=c olarsa, sonlu koordinat və zaman sonsuz kəmiyyətlərə çevrilərdi və bu da mənasızdır. Yuxarıdakı (11.4') və (11.5') düsturlarında qeyri-relyativistik hala keçsək, yəni $V \ll c$ qəbul etsək, biz Qaliley çevrilməsi düsturlarını alarıq.

Bizim burada aldığımız Lorens çevrilmələri *xüsusi Lorens çevrilmələri* adlanır, çünki burada ətalət sistemləri OX oxu boyunca hərəkət edirlər. Biz gələcəkdə ətalət sistemlərinin istənilən istiqamətdə hərəkət etdiyi halda ümumi Lorens çevrilmələrinə ayrıca baxacağıq.

Bəzən Lorens çevrilmələrini xəyali yox həqiqi bucaq vasitəsilə ifadə edirlər. Bunun üçün (11.3) düsturunda $\psi = i\varphi$ əvəzləməsini aparırlar. Onda $\sin\psi = \sin i\varphi = i\,\mathrm{sh}\varphi$, $\cos\psi = \cos i\varphi = \mathrm{ch}\varphi$, $\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\, i\varphi = i\,\mathrm{th}\varphi$ olacaqdır. Burada hiperbolik sinus və kosinus triqonometriyadan məlum olan aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur: $\mathrm{sh}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$,

$ch\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$. Yuxarıda $tg\psi = ith\varphi$ ifadəsində $tg\psi = i\dfrac{V}{c}$ bərabərliyini nəzərə alsaq, $th\varphi = \dfrac{V}{c}$ olar. Dediklərimizi (11.3) düsturuna tətbiq etsək Lorens çevrilmələri üçün aşağıdakı ifadələri alarıq:

$$\begin{cases} x = x'ch\varphi + ct'sh\varphi, \\ ct = ct'ch\varphi + x'sh\varphi, \\ y = y',\ z = z'. \end{cases} \qquad (11.6)$$

Bu, K'-dən K-ya keçidi ifadə edən Lorens çevrilməsi düsturlarının yeni şəklidir və bəzi hallarda bu düsturlardan da istifadə olunur. K-dan K'-ə keçid düsturları aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\begin{cases} x' = xch\varphi - ctsh\varphi, \\ ct' = ctch\varphi - xsh\varphi, \\ y' = y,\ z' = z. \end{cases} \qquad (11.7)$$

Burada həqiqi φ bucağı belə təyin edilir: $th\varphi = V/c$.

Lorens çevrilməsi üçün yazılmış bu düsturlardan yalnız birini, məsələn (11.4) düsturunu, yadda saxlamaq kifayətdir. Çünki digər düsturları onun köməyi ilə çox asanlıqla almaq olar.

Biz göstərdik ki, hər hansı hadisənin bir ətalət sistemində koordinatları və zamanını bilərək Lorens çevrilmələri vasitəsilə onun istənilən ətalət sistemində koordinatları və zamanını təyin edə bilərik.

Lorens çevrilməsi düsturlarını müxtəlif üsullarla almaq mümkündür. Biz 4-ölçülü fəzanın fırlanması üsulundan istifadə edərək bu düsturları aldıq. Göstərdik ki, $X\tau$ müstəvisində fırlanma ətalət sistemlərinin X oxu boyunca hərəkətinə uyğundur. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $Y\tau$ müstəvisində fırlanma ətalət sistemlərinin Y oxu boyunca hərəkətinə uyğun gəlir və s. 4-ölçülü fəzanın fırlanması üsulu daha ümumi xarakter daşıyır və fəza-zamanın həndəsəsinin öyrənilməsinə kömək edir. Bu bizi bütün təbiət proseslərinin baş verdiyi real fiziki aləmin 4-ölçülü xarakterini başa düşməyə hazırlayır.

Qeyd edək ki, Lorensin adını daşıyan (11.4') və (11.5') çevrilmə düsturlarını Lorens artıq 1904-cü ildə Maksvell tənliklərinin bütün ətalət sistemlərində kovariant qalmasını təmin etmək üçün formal olaraq postulat şəkilində yaza bilmişdir. Lakin bu çevrilmələrdə fiziki proseslərin baş verdiyi fəza və zamanın vəhdəti, onun vahid tam olması və yeganə metrik xassəyə (həndəsəyə) malik olması ideyası dərk edilməmiş və açıq qalmışdır.

§12. Lorens çevrilmələrindən alınan bəzi kinematik nəticələr

Lorens çevrilmələri bizim adi şəraitdə, məişətdə istifadə etdiyimiz anlayışlarda köklü dəyişiklərə səbəb olmuşdur.

Gəlin əvvəlcə hərəkət edən xətkeşlərin uzunluğunun relyativistik fizikada ölçülməsi məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, K ətalət sistemində sükunətdə olan xətkeş OX oxu boyunca yerləşmişdir. Onun başlanğıc və son nöqtələrinin koordinatlarına x_1 və x_2 desək, bunların fərqi K-da bu xətkeşin uzunluğunu təyin edir: $x_2 - x_1 = \Delta x = \ell_0$. Xətkeşin sükunətdə olduğu sistemdə uzunluğuna onun *məxsusi uzunluğu* deyilir. Məxsusi uzunluğu ℓ_0 ilə işarə edirlər. Sükunətdə olan xətkeşin başlanğıc və son nöqtəsinin koordinatlarının nə vaxt və necə (eyni anda və ya müxtəlif anda) ölçülməsinin heç bir əhəmiyyəti yoxdur. K-da sükunətdə olan xətkeş K' sisteminə nəzərən «$-\vec{V}$» sürətilə (yəni sol tərəfə) X' (və deməli X) oxu boyunca hərəkət edir. Hərəkət edən xətkeşin uzunluğunu ölçmək üçün onun başlanğıc və son nöqtələrinin koordinatlarını eyni bir zaman anında (məsələn t_1' anında) ölçmək lazımdır. Belə ölçülmüş son və başlanğıc koordinatların fərqi hərəkət edən xətkeşin uzunluğunu təyin edəcəkdir: $x_2'(t_1') - x_1'(t_1') = \Delta x' = \ell$. Hərəkət edən xətkeşin uzunluğuna ℓ deyək. Xətkeşin K və K' sistemlərində başlanğıc və son nöqtələrinin koordinatları arasındakı əlaqəni (11.4') Lorens çevrilməsi düsturlarından təyin edək:

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x_2 = \frac{x_2' + Vt_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

İkinci bərabərlikdən birinci bərabərliyi tərəf-tərəfə çıxaraq, aşağıdakı münasibəti alırıq:

$$x_2 - x_1 = \Delta x = \ell_0 = \frac{x_2'(t_1') - x_1'(t_1')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Bu münasibəti qısa belə yazmaq olar:

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{və ya} \quad \ell = \ell_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv \ell_0 : \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (12.1)$$

Son düsturu sözlə belə ifadə edirlər: *Hərəkət edən xətkeşin uzunluğu sükunətdəki eyni xətkeşin uzunluğundan qısadır* $\ell < \ell_0$, *yəni xətkeş hərəkət edərkən onun uzunluğu hərəkət istiqamətində* $\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ *dəfə qısalır.* Buna xətkeşlərin *«Lorens qısalması»* deyilir*. Bu Lorens çevrilməsindən alınan kinematik nəticələrdən biridir və qısalmanın qiyməti xətkeşin hazırlandığı maddənin növündən asılı olmayaraq bütün maddələr üçün eynidir.

Əgər hər hansı cisim hərəkət edirsə, eninə ölçülər dəyişmədiyinə görə $(y = y', z = z')$, onun həcmi də $\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ dəfə kiçiləcəkdir:

$$dV = dV_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv dV_0 : \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (12.1')$$

Burada dV_0 cismin məxsusi həcmi, dV isə hərəkət halında bu cismin həcmidir.

Adətən xətkeşin (cismin) sükunətdə olduğu sistemə xətkeşin *«öz» sistemi* deyilir. Onda yuxarıda alınmış nəticəni qısa belə ifadə etmək olar: xətkeş «öz» sistemində ən böyük uzunluğa malikdir, digər ətalət sistemlərində onun uzunluğu $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ nisbətində qısalmış olur. Bu o, deməkdir ki, bizim indiyə qədər məişətdə dəyişməz qəbul etdiyimiz üçölçülü məsafələr artıq relyativistik invariant deyildir.

Çox vaxt sual olunur ki, bu qısalma nə dərəcədə realdır? Cavabı belədir: bu qısalma fiziki reallıqdır. Hərəkət edən cihazlar vasitəsilə xətkeşlərin uzunluğunun ölçülməsinə aid çoxlu sayda təcrübələr, eləcə də ele-

---

* Əlbəttə burada alınmış qısalma ilə Lorensin efir nəzəriyyəsini müdafiə etmək məqsədilə 1892-ci ildə hipotez şəklində təklif etdiyi: "cisimlər efirdən keçərkən onların uzunluğu $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ nisbətində qısalır" müddəası tamamilə müxtəlif şeylərdir. Lakin xronologiyaya riayət edərək burada da şərti olaraq "Lorens qısalması" termini işlədilmişdir.

mentar zərrəciklər fizikasında yüksək enerjili zərrəciklərin səpilməsinin effektiv kəsiklərinin təcrübədə ölçülməsi və s. bu qısalmanın varlığını birqiymətli sübut edir.

Qeyd edək ki, xətkeşin qısalması çox ehtimal ki, iki ətalət sistemində uzunluqların ölçülməsi üsullarının müxtəlifliyi ilə bilavasitə əlaqədardır.

İndi hərəkət edən saatların ləngiməsi məsələsini izah etməyə çalışaq.

Fərz edək ki, K və K' ətalət sistemləri verilmişdir. Onda məxsusi zaman bəhsindən bildiyimiz kimi K-dakı müşahidəçilər qeyd edirlər ki, K'-dəki saatlar ləngiyir, geri qalır və əksinə K'-dəkı müşahidəçilər isə qeyd edilər ki, K-dakı saatlar geri qalır. Relyativistik nəzəriyyəyə görə hər iki sistemdəki müşahidəçilər haqlıdır. Belə bir sual ortaya çıxa bilər: bəlkə bu saatların geri qalmaları zahirən belədir, əslində isə heç bir geriqalma yoxdur? Sualın cavabı belədir: hərəkət edən saatların geri qalması həqiqətdir, lakin onun mahiyyətini bir az açıqlamaq lazımdır.

Bunu izah etmək üçün fərz edək ki, K' sisteminin x_1', y_1', z_1' nöqtəsində fiksə olunmuş hər hansı bir proses gedir. Biz K' və K sistemlərindən bu prosesin davam etmə müddətini müşahidə edirik (ölçürük). Proses olaraq yanıb-sönən lampa qoşulmuş rəqs konturunu götürə bilərik və lampanın bir dəfə yanıb-sönməsini prosesin davam etmə müddəti kimi qəbul edə bilərik. Prosesin lokallaşdığı (fiksə olunduğu) sistemə prosesin «öz» sistemi deyəcəyik (bizdə bu K' sistemidir). Fərz edək ki, bu prosesin davam etmə müddəti üçün prosesin «öz» sistemindəki saatlar $\Delta t' = t_2' - t_1'$ zaman intervalını göstərir. K sistemindəki saatlar isə bu prosesin davam etmə müddəti üçün $\Delta t = t_2 - t_1$ qiymətini göstərir.

Eyni bir prosesin davam etmə müddəti üçün alınmış $\Delta t'$ və Δt zaman intervalları arasındakı əlaqəni (11.4') Lorens çevrilmələri düsturlarından təyin edək:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (12.2)$$

Buradan son nəticə

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \text{və ya} \quad \Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\Delta t \qquad (12.2')$$

alınır.

Son düsturlardan görünür ki, $\Delta t' < \Delta t$.

Bu nəticəni belə ifadə edirlər: Hər hansı prosesin davam etmə müddəti onun «öz» sistemində (lokallaşdığı sistemdə) ən kiçik qiymətə malikdir ($\Delta t' < \Delta t$). Bu tam obyektiv nəticədir və bunu həm K' və həm də K-dakı müşahidəçilər təsdiq edirlər. Prosesin lokallaşdığı K' sistemi K-ya nəzərən $\vec{V}$ sürəti ilə hərəkət etdiyinə görə yuxarıdakı nəticəni belə də ifadə etmək olar: hərəkət edən saatların ritmi sükunətdəkilərə nəzərən yavaşıyır, ləngiyir və onlar gecikir. Beləliklə bir-birinə nəzərən hərəkət edən saatların göstərişlərinin müqayisə edilməsində söhbət mütləq hər hansı lokallaşmış prosesin davam etmə müddətinin müxtəlif saatlarla ölçülməsindən getməlidir. (12.2) düsturlarında $\Delta t'$ kəmiyyəti əslində məxsusi zamandır.

İndi (11.4') düsturlarında t-dən t'-ə görə xüsusi törəmə (x',y',z' koordinatlarını fiksə etməklə, sabit saxlamaqla) alaq:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial t'}\right|_{x',y',z'=\text{const}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > 1, \quad \partial t' < \partial t. \qquad (12.3)$$

Eynilə (11.5') düsturlarında t'-dən t-yə görə xüsusi törəməni (x,y,z koordinatlarını sabit saxlamaqla) hesablayaq:

$$\left.\frac{\partial t'}{\partial t}\right|_{x,y,z=\text{const}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > 1, \quad \partial t < \partial t'. \qquad (12.4)$$

İlk baxışda (12.3) və (12.4) ifadələri bir-birinə ziddir. Əslində isə bu ifadələr bir-birinə uyğundur və hər ikisi eyni mahiyyəti izah edir. (12.3)-də x', y', z' koordinatları fiksə edildiyinə görə K' sistemi prosesin «öz» sistemidir və bu sistemdə prosesin davam etmə müddəti ən kiçik qiymətə malikdir, yəni $\partial t' < \partial t$ olur (Δt əvəzində ∂t götürmək olar). Bu, özlüyündə (12.2') ifadəsidir. (12.4) ifadəsində x, y, z koordinatları fiksə edildiyinə görə indi K sistemi prosesin «öz» sistemi olur və bu sistemdə prosesin davam etmə müddəti ən kiçik qiymət alır, yəni $\partial t < \partial t'$ olur.

Əgər biz (12.2) düsturunda proses olaraq μ^--mezonun parçalanması prosesini ($\mu^- \to e^- + \nu + \tilde{\nu}$) götürsək, onda $\Delta t'$ μ^--mezonun sükunətdə olduğu (lokallaşdığı) sistemdə ömrü T_0, $\Delta t'$ isə μ^--mezonun hərəkət etdiyi halda ömrü T olacaqdır. Nəticədə məxsusi zaman bəhsində verilmiş

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{12.5}$$

düsturunu alırıq. Mezon nə qədər böyük sürətlə hərəkət edərsə, onun parçalanması prosesi bir o qədər yavaş gedər, yəni ömrü (T) bir o qədər böyük olar.

Adətən deyirlər ki, digər ətalət sisteminin çoxlu sayda saatları ilə (2, 3 və s.) müqayisə olunan saat həmişə geri qalır. Doğrudan da bu belədir. Bunun üçün (12.2) düsturlarına müraciət edək. K' sistemində lokallaşmış prosesin davam etmə müddətini ölçmək üçün proses gedən nöqtədə yerləşmiş bircə saat kifayətdir (məs., a_1' saatı). t_1' və t_2' zaman anları məhz a_1' saatının göstərişləridir. Həmişə müxtəlif sistemlərdə yerləşən iki saat bir-birinin yanından keçdiyi anda (eyni bir fəza nöqtəsində) onların göstərişləri müqayisə, qeyd edilir və hesabat üçün əsas götürülür. K'-dəki a_1' saatı sistemlə birlikdə hərəkət edərək K-dakı b_1 saatının yanından keçdiyi anda onların göstərişləri t_1' və t_1 qeyd olunur. Fərz edək ki, bu, prosesin başlandığı anı (K'-də və K-da) göstərir. Qəbul edək ki, onların göstərişləri eynidir: $t_1'=t_1$. a_1' saatı hərəkətini davam etdirərək K-dakı b_2 saatının yanından keçdiyi anda onların göstərişləri t_2' və t_2 yenə qeyd olunur və bu, məsələn, tutaq ki, prosesin qurtardığı ana uyğun gəlir. (12.2)-də $t_2-t_1=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ düsturunda $t_2'-t_1'<t_2-t_1$ şərtini indi belə izah edirik: K'-dəki a_1' saatı K-dakı b_1 və b_2 saatları ilə müqayisə olunur və ona görə də geri qalır, $t_2'<t_2$ olur.

Əgər proses nə K'-də və nə də K-da lokallaşmamışdırsa, onda ~~(11.4') düsturlarında~~ bu prosesin K və K' sistemlərində davam etmə müddətləri üçün

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{V}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

münasibətini alırıq. Burada Δt və $\Delta t'$ haqqında konkret bir şey demək mümkün deyildir. $\Delta x'$ kəmiyyətinin qiymət və işarəsindən asılı olaraq $\Delta t \gtreqless \Delta t'$ ola bilər. Bu halda hansı saatın gecikməsi haqda obyektiv fikir söyləmək mümkün olmur.

Hərəkət edən saatların gecikməsi (ləngiməsi) Lorens çevrilmələrindən alınan ikinci əsas kinematik nəticədir.

Lorens çevrilməsi və ondan alınan bütün nəticələr müasir relyativistik fizikada tamamilə təsdiq edilmişdir və burada heç bir «paradoks» yoxdur. «Paradoks» o vaxt meydana çıxır ki, müəyyən şərtlər daxilində doğru olan düsturları biz ya qəsdən, ya da bilmədən bu şərtlərin ödənmədiyi hallara tətbiq etməyə çalışırıq.

Nəhayət, xətkeşlərin uzunluqlarını müqayisə etmək üçün (11.4') və (11.5') Lorens çevrilmələri düsturlarında x-ın x'-ə görə və x'-in x-ə görə xüsusi törəmələrini hesablayaq:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial x'}\right|_{t'=\mathrm{const}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} > 1, \qquad \partial x > \partial x'. \qquad (12.6)$$

$$\left.\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{t=\mathrm{const}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} > 1, \qquad \partial x' > \partial x. \qquad (12.7)$$

Zahirən bir-birilə ziddiyyət təşkil edən (12.6) və (12.7) düsturları tamamilə bir-birinə uyğundur və eyni bir nəticəni ifadə edir. (12.6) ifadəsində t' fiksə olunmuşdur və bu o deməkdir ki, xətkeş K'-ə nəzərən hərəkət edir və orada onun başlanğıc və son nöqtələrini eyni t' anında qeyd edirlər. Xətkeşin «öz» sistemi K-dır və burada o, ən böyük uzunluğa malikdir, yəni $\partial x > \partial x'$ (burada Δx əvəzində ∂x götürülmüşdür). (12.7) ifadəsində törəmə alanda t fiksə olunmuşdur. Bu isə o deməkdir ki, burada xətkeşin «öz» sistemi K'-dir və orada xətkeş maksimum uzunluğa malikdir, yəni $\partial x' > \partial x$ olur.

Biz qeyd etdik ki, saatlar K və K' ətalət sistemlərində sinxronlaşdırılmışdır. Lakin K sisteminin sinxronlaşdırılmış saatları K'-dəki saatlara nəzərən qeyri-sinxron işləyir və əksinə, K'-dəki saatlar K-dakı saatlara nəzərən qeyri-sinxrondur. Bunu sadə izah etmək üçün $t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ ifadəsində K'-də koordinat başlanğıcında (x'=0) yerləşmiş saatın göstərişini t'=0 qəbul edək. Onda yuxarıdakı düsturda t'=0 yazdıqda $t=\frac{V}{c}x$ alırıq. Burada x=0 olduqda t=0 olur, yəni O və O'-dəki saatlar eyni bir t=0 və t'=0 zaman anını göstərir. Son düsturdan görünür ki, x>0 olduqda t>0 və x<0 olduqda t<0 olur. Bu o deməkdir ki, K' sisteminin başlanğıcında yerləşmiş saata nəzərən (t'=0) K-da X oxunun müsbət istiqamətində yerləşmiş bütün saatlar onu qabaqlayır (t>0 olur) və X oxunun mənfi istiqamətində yerləşmiş bütün saatlar isə ondan geri qalır (t<0 olur).

İndi $t=\dfrac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ düsturunda t=0 yazaraq $t'=-\frac{V}{c^2}x'$ alırıq. Buradan alınır ki, K-da koordinat başlanğıcında yerləşmiş saata nəzərən (t=0) K'-də X' oxunun müsbət istiqamətində yerləşmiş bütün saatlar ondan geri qalır (t'<0 olur) və X' oxunun mənfi istiqamətində yerləşmiş saatlar onu qabaqlayır (t'>0 olur). Beləliklə, sinxronlaşdırılmanın özü də nisbidir və müşahidəçidən asılıdır.

Biz bəzi kinematik nəticələrlə məşğul olduq və burada dinamika, təcil, qüvvə, deformasiya və s. yoxdur. Əlbəttə, başqa kinematik nəticələr də mövcuddur, lakin biz indi onlarla məşğul olmayacağıq.

Biz Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsini açıqlayan düsturları və onlardan alınan nəticələri izah edən riyazi ifadələri aldıq. İndi xülasə halında Eynşteynin x.n.n.-in mahiyyətini populyar şəkildə bir neçə cümlə ilə ifadə edək: Fiziki reallıq dünyası çox sadə və müdrik quruluşdur. Hər bir proses hadisələr ardıcıllığından ibarətdir. Mənim ətalət sistemimdə (dünyamda) çox sayda obyektlər mövcuddur və onlarda bu və ya digər proses gedə bilər. Obyektlər müxtəlif sürətlərlə hərəkət edir. Mənim sistemimdə fiziki reallıq ondan ibarətdir ki, obyekt nə qədər böyük sürətlə hərəkət edirsə, ondakı fiziki proses bir o qədər yavaş gedir. Hər hansı səyyah nə qədər böyük sürətlə mənim sistemimdən keçib-gedərsə, onun nəbzi bir o qədər yavaş vurar. Təbiətin bu qanununu bütün müşahidəçilər öz sistemlərində yəqin edirlər.

§13. Sürətlərin Eynşteyn toplanması və bucaqların Lorens çevrilməsi

Relyativistik zərrəciklərin sürətlərinin toplanması qaydası sürətlərin

Qaliley toplanmasından tamamilə fərqlidir. Hər hansı zərrəciyin K və K' ətalət sistemlərinə nəzərən sürətlərinin toplananlarını (proyeksiyalarını) $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \frac{dz}{dt}$ və $\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'}$, $\upsilon_y' = \frac{dy'}{dt'}$, $\upsilon_z' = \frac{dz'}{dt'}$ ilə işarə edək. (11.4') Lorens çevrilməsi düsturlarının sol və sağ tərəflərinin diferensialını hesablayaq (məlumdur ki, V=const):

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (13.1)$$

Birinci üç bərabərliyi tərəf-tərəfə dördüncü bərabərliyə bölək və yuxarıdakı işarələnməyi nəzərə alaq:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'},$$

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y = \frac{dy'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{\upsilon_y'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V\upsilon_x'}{c^2}},$$

$$\frac{dz}{dt} = \upsilon_z = \frac{dz'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{\upsilon_z'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V\upsilon_x'}{c^2}}.$$

Alınmış düsturları yığcam şəkildə yazaq:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + V}{1 + \frac{V}{c^2}\upsilon_x'}, \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon_y'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V\upsilon_x'}{c^2}}, \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon_z'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V\upsilon_x'}{c^2}}. \qquad (13.2)$$

Bu düsturlar relyativistik zərrəciklərin sürətlərinin toplanması düsturlarıdır və onlar *sürətlərin Eynşteyn toplanması* adlanır. Bu düsturlardan görünür ki, əgər zərrəcik K'-də X' oxu boyunca hərəkət edirsə, yəni $\upsilon_y' = \upsilon_z' = 0$, $\upsilon_x' = \upsilon' \neq 0$ onda bu zərrəcik K sistemində də X oxu boyunca hərəkət edəcəkdir, yəni $\upsilon_y = \upsilon_z = 0$, $\upsilon_x = \upsilon \neq 0$ olacaqdır (nəzərə alaq ki, X' və X oxları paraleldir). Bunları (13.2) düsturunda nəzərə alsaq, paralel sürətlərin relyativistik toplanması

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + V}{1 + \frac{V\upsilon'}{c^2}} \tag{13.3}$$

olar. Burada υ sürəti υ' ilə V-nin relyativistik cəmidir. Bu düsturdan aşağıdakı nəticələr alınır: 1) c-yə çox yaxın, lakin ondan kiçik iki sürət, yəni $\upsilon' = c - \alpha$ və $V = c - \beta$ $(\alpha, \beta \ll c)$ toplandıqda yekun υ sürəti c-dən kiçik olacaqdır: $\upsilon = c - \delta$, $\delta \ll c$. 2) Əgər $\upsilon'=c$ və $V \neq c$ olarsa, onda $\upsilon=c$ olar. Bu elə Eynşteynin II postulatıdır: işıq bütün ətalət sistemlərində eyni bir c sürətilə yayılır. 3) Əgər $\upsilon=c$ və V=c-dirsə, onda onların «cəmi» $\upsilon=c$ olur. Yəni biz istənilən qədər böyük sürətləri, hətta işıq sürətinə bərabər sürətləri toplasaq, işıq sürətindən böyük nisbi sürət ala bilmərik. İşıq sürəti limit sürətdir.

(13.2) və (13.3) düsturları Fizo təcrübəsini, aberrasiya hadisəsini və Maykelson-Morli təcrübəsini çox asanlıqla izah edir. Misal üçün Fizo təcrübəsini izah edək. Bunun üçün fərz edək ki, K' sistemi maye ilə sərt bağlanmalıdır və υ' işıq şüasının sükunətdəki mayedə (sındırma əmsalı n olan maye) hərəkət sürətidir, υ işığın hərəkət edən mayedə sürətidir, V-isə mayenin hərəkət sürətidir. Onda (13.3)-də $\upsilon' = c/n$ yazsaq və mayenin hərəkət sürətinin işıq sürətindən çox kiçik olduğunu nəzərə alsaq $(V/c \ll 1)$

$$\upsilon = \frac{\frac{c}{n} \pm V}{1 \pm \frac{V}{cn}} = \left(\frac{c}{n} \pm V\right)\left(1 \mp \frac{V}{cn} + \cdots\right) \approx$$

$$\approx \frac{c}{n} \mp \frac{V}{n^2} \pm V - \frac{V^2}{cn} \approx \frac{c}{n} \pm V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{13.4}$$

Biz burada $\left(1 \pm \frac{V}{cn}\right)^{-1}$ ifadəsini elementar riyaziyyatdan məlum olan Nyuton binomu düsturu ilə hesablayaraq, $\frac{V}{cn} \ll 1$ olduğundan iki hədlə kifayətlənmişik.

(13.4) düsturu Fizo təcrübəsinin nəticəsini izah edir.

İndi K' sistemindən K-ya keçdikdə zərrəciyin sürətinin istiqamətini müəyyən edən bucaqların çevrilməsi düsturlarını təyin edək. Əvvəlki bəhslərdə olduğu kimi K və K' ətalət sistemlərində koordinat oxlarını birbirinə paralel götürək və fərz edək ki, K' sistemi K-ya nəzərən ümumi ox olan X' və ya X oxu boyunca V sürəti ilə inersial hərəkət edir. Nisbi hərəkət istiqamətini, yəni X və X' oxlarını polyar oxu qəbul edək. Y və Y' oxlarını azimut (φ və φ') bucaqlarının hesablanması istiqaməti seçək. $\vec{\upsilon}$ və $\vec{\upsilon}\,'$ vektorlarının polyar və azimut bucaqlarını θ,φ və θ',φ' ilə işarə etsək, onların koordinat oxları istiqamətdə proyeksiyaları $\upsilon_x = \upsilon\cos\theta$, $\upsilon_y = \upsilon\sin\theta\cos\varphi$, $\upsilon_z = \upsilon\sin\theta\sin\varphi$ və $\upsilon_x' = \upsilon'\cos\theta'$, $\upsilon_y' = \upsilon'\sin\theta'\times$ $\times\cos\varphi'$, $\upsilon_z' = \upsilon'\sin\theta'\sin\varphi'$ şəklində olar.

(13.2) düsturlarından $\dfrac{\upsilon_z}{\upsilon_y} = \dfrac{\upsilon_z'}{\upsilon_y'}$ bərabərliyini alırıq. Bu bərabərlikdə proyeksiyaların bucaqlarla ifadəsini yazsaq $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi'$ bərabərliyini alarıq. Bu onu göstərir ki, Lorens çevrilmələri zamanı azimut bucağı dəyişmir:

$$\varphi = \varphi'. \qquad (13.5)$$

(13.2) düsturlarında υ_x və υ_y-in ifadələrində proyeksiyaların bucaqlarla ifadələrini yazsaq:

$$\upsilon\cos\theta = \frac{\upsilon'\cos\theta' + V}{1 + \dfrac{\upsilon' V}{c^2}\cos\theta'}, \qquad \upsilon\sin\theta = \frac{\upsilon'\sin\theta'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \dfrac{\upsilon' V}{c^2}\cos\theta'}, \qquad (13.6)$$

bərabərliklərini alarıq. (13.5) və (13.6) düsturları sferik bucaqların Lorens çevrilmələri düsturlarıdır. (13.6) düsturlarında ikinci bərabərliyi birinciyə bölərək aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\upsilon'\sqrt{1 - V^2/c^2}\,\sin\theta'}{\upsilon'\cos\theta' + V} = \frac{\upsilon'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\upsilon' + \dfrac{V}{\cos\theta'}}\cdot \operatorname{tg}\theta'. \qquad (13.7)$$

Buradan alınır ki, $\theta' = 0$ qiyməti istisna olmaqla bütün digər qiymətlərdə $\theta' \neq \theta$.

Yuxarıda biz istənilən υ' sürətli zərrəciyin sferik bucaqlarının Lorens çevrilməsi düsturlarını aldıq. İndi fərz edək ki, zərrəcik fotondur (işıq kvantıdır) yəni $\upsilon = \upsilon' = c$. Onda (13.6) düsturları aşağıdakı şəklə düşür:

$$\cos\theta=\frac{\cos\theta'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'},\quad \sin\theta=\frac{\sin\theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'},\quad \varphi=\varphi'. \tag{13.6'}$$

(13.6') ifadələri bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə işıq şüasının oxlarla əmələ gətirdiyi bucaqlar üçün çevrilmə düsturlarıdır. Əlbəttə burada ya $\cos\theta$ və ya $\sin\theta$ üçün ifadəni vermək kifayət idi, lakin əlverişlilik üçün hər iki ifadəni verirlər.

(13.6') düsturlarından istifadə edərək, çox asanlıqla aberrasiya hadisəsini izah edə bilərik. İşıq şüası bir ətalət sistemindən (məsələn, ulduzla bağlı K' sistemindən) digərinə (Yerlə bağlı K *sisteminə) keçdikdə öz hərəkət istiqamətini dəyişməsi hadisəsi işığın* aberrasiyası adlanır (bax: §8.2). $\theta'-\theta=\Delta\theta$ *aberrasiya bucağı* adlanır. Aberrasiya bucağını hesablayaq:

$$\mathrm{tg}\Delta\theta=\frac{\sin(\theta'-\theta)}{\cos(\theta'-\theta)}\cong\frac{\frac{V}{c}\sin\theta'}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\approx\frac{V}{c}\sin\theta'=\frac{V_\perp}{c}. \tag{13.8}$$

Burada V Yerin hərəkət sürəti olduğundan $V^2/c^2\ll 1$ olur və biz kəsiri bilavasitə hesablayanda surət və məxrəcdə $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\approx 1$ qəbul etmişik, son ifadədə isə məxrəcdə $\frac{V}{c}\cos\theta'\ll 1$ olduğuna görə onu vahidə nəzərən atmışıq. $V_\perp$ kəmiyyəti K' sisteminin hərəkət sürətinin $(\vec{V})$ K'-da işığın yayılma istiqamətinə perpendikulyar toplananıdır. Bu §-da bizim aldığımız bütün düsturlar K' sistemindən K-ya keçid düsturlarıdır.

Tərs keçid, yəni K-dan K'-ə keçid düsturlarını almaq üçün bu düsturlarda aşağıdakı əvəzləməni aparmaq kifayətdir:

$$(\cdots)'\leftrightarrow(\cdots),\quad V\to -V. \tag{13.9}$$

Misal üçün (13.6') düsturlarını tərs keçid üçün yazaq:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \dfrac{V}{c}}{1 - \dfrac{V}{c}\cos\theta}, \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \dfrac{V}{c}\cos\theta}, \quad \varphi' = \varphi. \qquad (13.6'')$$

İndi işıq şüasının cisim bucağının Lorens çevrilməsi düsturunu müəyyən edək. Bunun üçün (13.6') və (13.6") düsturlarından istifadə edəcəyik:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = -d\varphi d\cos\theta =$$

$$= -\frac{(-\sin\theta')\left(1 + \dfrac{V}{c}\cos\theta'\right) + \dfrac{V}{c}\sin\theta'\left(\cos\theta' + \dfrac{V}{c}\right)}{\left(1 + \dfrac{V}{c}\cos\theta'\right)^2} d\varphi' d\theta' =$$

$$= \frac{(1 - V^2/c^2)}{\left(1 + \dfrac{V}{c}\cos\theta'\right)^2} d\Omega'. \qquad (13.10)$$

Bu düstur K'-dən K-ya keçidi ifadə edir. Tərs keçidi icra etmək üçün burada (13.9) əvəzləməsini aparmaq lazımdır:

$$d\Omega' = \frac{(1 - V^2/c^2)}{\left(1 - \dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2} d\Omega. \qquad (13.10')$$

Qeyd edək ki, bu §-da verilmiş bütün düsturlarda, o cümlədən (13.2) və (13.3) ifadələrində qeyri-relyativistik limitə keçsək, yəni $\dfrac{V}{c} \ll 1$ şərtini nəzərə alsaq, biz Nyuton mexanikasının qanunlarını və o cümlədən sürətlərin Qaliley toplanması düsturlarını almış olarıq.

Yadda saxlayaq ki, burada alınan bütün düsturlar xüsusi Lorens çevrilmələri ilə məhdudlaşır.

§14. 4-ölçülü vektorlar və tenzorlar

4-ölçülü vektorlar və tenzorlar bütün relyativistik fizikanın əsasını təşkil edir. Bu anlayışa gəlmək üçün aşağıdakı şəkildə seçilmiş M(x, y, z, τ=ict) və O(0, 0, 0, 0) hadisələri arasındakı intervalın kvadratını yazaq: $S^2 = -\{\tau^2 + x^2 + y^2 + z^2\} = \text{in var}$.

Burada böyük mötərizə içərisindəki cəm O nöqtəsindən M nöqtəsinə çəkilmiş 4-ölçülü *radius vektorun kvadratı* adlanır. Bu kəmiyyət 4-ölçülü fəzanın fırlanması zamanı invar. qalır. 4-ölçülü radius vektor dedikdə x_1=x, x_2=y, x_3=z, x_4=τ=ist kimi dörd kəmiyyətin məcmui başa düşülür. Bu kəmiyyətlər 4-ölçülü radius *vektorun komponentləri* (*koordinatları*) adlanır, vektorun özü x_μ ilə işarə edilir və yunan indeksi μ=1, 2, 3, 4 qiymətlərini alır. Məlumdur ki, x, y, z, τ kəmiyyətləri Lorens çevrilməsinə tabedir və ona görə aşağıdakıları yaza bilərik:

$$x_1 = \frac{x_1' - i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ x_2 = x_2',\ x_3 = x_3',\ x_4 = \frac{x_4' + i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (14.1)$$

Deməli, 4-ölçülü radius vektor $x_\mu = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ elə 4 kəmiyyətin məcmuidir ki, bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə bu kəmiyyətlər Lorens çevrilməsi ilə çevrilsinlər.

İxtiyari *4-ölçülü A_μ vektoru* elə dörd A_1, A_2, A_3, A_4 kəmiyyətin məcmuinə deyilir ki, onlar 4-ölçülü fəzanın fırlanması zamanı x_μ-nün komponentləri kimi, yəni Lorens çevrilməsi ilə çevrilsin:

$$A_1 = \frac{A_1' - i\frac{V}{c}A_4'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ A_2 = A_2',\ A_3 = A_3',\ A_4 = \frac{A_4' + i\frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (14.2)$$

(14.1) düsturlarını Lorens çevrilməsi matrisi daxil etməklə aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L'_{\mu\nu}x'_\nu = L'_{\mu1}x'_1 + L'_{\mu2}x'_2 + L'_{\mu3}x'_3 + L'_{\mu4}x'_4, \qquad (14.1')$$

burada μ=1, 2, 3, 4.

Son bərabərliyin sol və sağ tərəfində fiksə edilmiş μ indeksinə 1, 2, 3, 4 qiymətlərini verməklə 4 ədəd bərabərlik alırıq. Bu bərabərlikləri (14.1) bərabərlikləri ilə müqayisə edərək $L'_{\mu\nu}$ kəmiyyətinin sıfırdan fərqli elementləri üçün aşağıdakı qiymətləri müəyyən edirik:

$$L'_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma, \quad L'_{22} = L'_{33} = 1,$$

$$L'_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma, \quad L'_{14} = -i\frac{V}{c}\gamma, \quad L'_{41} = i\frac{V}{c}\gamma.$$

$L'_{\mu\nu}$ əmsalları *Lorens çevrilməsi matrisi elementləri* adlanır. Bu matrisin digər elementləri sıfırdır. (14.1') bərabərliyində eyni bir həddə iki dəfə təkrar olunan ν indeksi («lal» indeks) üzrə cəm aparıldığını fərz edərək (Eynşteyn üsulu) bu ifadəni qısa şəkildə belə yaza bilərik:

$$x_\mu = L'_{\mu\nu} x'_\nu . \tag{14.1''}$$

Bu, 4-ölçülü radius vektor üçün Lorens çevrilməsi düsturudur. Burada K'-dən K-ya keçid icra olunur. Biz Lorens çevrilməsi matrisini L' ilə, onun elementlərini (komponentini) isə $L'_{\mu\nu}$ ilə işarə edəcəyik. İstənilən 4-ölçülü A_μ vektoru üçün Lorens çevrilməsi düsturu tamamilə yuxarıdakına oxşar şəkildə yazılacaqdır:

$$A_\mu = L'_{\mu\nu} A'_\nu . \tag{14.2'}$$

Xüsusi Lorens çevrilməsi üçün yuxarıda alınmış Lorens çevrilməsi matrisini yazaq:

$$L' \equiv (L'_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\frac{V}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

Biz (14.1'') düsturunda (13.9) əvəzləməsini apararaq K-dan K'-ə keçid düsturunu da Lorens çevrilməsi matrisi vasitəsilə yaza bilərik:

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu . \tag{14.4}$$

Burada

$$L \equiv (L_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\frac{V}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad (14.5)$$

K-dan K'-ə keçidi icra edən matrisdir.

(14.1") və (14.4) düsturları biri digərinin tərsi olan keçidləri icra edir. Gələcəkdə (14.4) keçidinə düz, (14.1") keçidinə isə tərs keçid deməyi şərtləşək. Onda L' matrisi L matrisinin tərsi olmalıdır, yəni $L' = L^{-1}$ şərti ödənməlidir (L^{-1} ilə L-in tərs matrisini işarə etmişik). (14.3) və (14.5)-dən görünür ki, Lorens çevrilməsində tərs matris düz matrisdən transponirə edilmə yolu ilə alınır. Transponirə edilmə matrisdə sətirlərlə sütunların yerlərinin dəyişdirilməsi əməliyyatıdır. Bu əməliyyat matrisin üstündə yazılmış ~(tilda) işarəsi ilə göstərilir, yəni $\tilde{L}$ matrisi L-in transponirə edilmişidir. Onda $L' = L^{-1} = \tilde{L}$ olur.

Ədəbiyyatda bəzən transponirə əməliyyatını ~ ilə yox T ilə işarə edirlər, yəni $\tilde{L} \equiv L^T$. Biz bu işarələrin hər ikisindən istifadə edəcəyik.

Riyaziyyatdan məlumdur: Əgər tərs matris düz matrisdən transponirə edilmə yolu ilə alınırsa, bu matrislər ortoqonal matris və onların icra etdiyi çevrilmə *ortoqonal çevrilmə* adlanır. Deməli, Lorens çevrilməsi ortoqonal çevrilmədir. Ümumiyyətlə matris cədvəl şəklində yazılır (bax: (14.5)).

4-ölçülü vahid matris I baş diaqonal elementləri vahid, digər elementləri sıfır olan matrisdir və onun $\delta_{\mu\nu}$ matris elementi aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, \text{ əgər } \mu = \nu, \\ 0, \text{ əgər } \mu \neq \nu. \end{cases} \qquad (14.6)$$

$\delta_{\mu\nu}$-yə *Veyerştras-Kroneker simvolu* deyilir və bu 4-ölçülü iki ranqlı vahid tenzordur.

Bu simvolun çox mühüm xassəsi vardır:

$$\delta_{\mu\nu} A_\nu = A_\mu . \qquad (14.7)$$

4-*ölçülü* 2 *ranqlı tenzor* elə 16 kəmiyyətin (məsələn $T_{\mu\nu}$, μ,ν=1, 2, 3,

4) məcmuinə deyilir ki, bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə bu kəmiyyətlər 2 dörd-ölçülü radius vektorun hasili kimi çevrilsin:

$$T_{\mu\nu} = L'_{\mu\alpha} L'_{\nu\beta} T'_{\alpha\beta} \qquad (14.8)$$

Müqayisə et: $x_\mu x_\nu = L'_{\mu\alpha} x'_\alpha \cdot L'_{\nu\beta} x'_\beta = L'_{\mu\alpha} L'_{\nu\beta} x'_\alpha x'_\beta$.

Doğrudan da $T_{\mu\nu}$ kəmiyyəti $x_\mu x_\nu$ hasili kimi çevrilir, yəni tenzorun hər bir indeksi bir vektor kimi çevrilir. Digər 3, 4 və s. ranqlı tenzorlar da bu qayda ilə təyin edilir. Tenzorun indekslərinin sayına ranq deyilir. Vektorlardan fərqli olaraq tenzorlar daha mürəkkəb quruluşa malik olan kəmiyyətlərdir və onlardan elektrodinamikada (nəzəri fizikada) geniş istifadə olunur.

Tenzorun iki indeksinin yerini dəyişdikdə tenzorun (komponentinin) qiyməti dəyişməzsə, o, *simmetrik tenzor* adlanır: $S_{\mu\nu}=S_{\nu\mu}$. Tenzorun iki indeksinin yerini dəyişdikdə tenzorun yalnız işarəsi dəyişirsə o, *antisimmetrik tenzor* adlanır: $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$. Antisimmetrik tenzorun diaqonal elementləri sıfıra bərabərdir: $A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=0$. Doğrudan da antisimmetriklik şərtinə görə $A_{11} = -A_{11}$ olmalıdır. İndeksdə 1-lə 1-in yerini dəyişdikdə yenə 11 olur. Buradan $2A_{11}=0$ və ya $A_{11}=0$ olur və s. Antisimmetrik tenzorun diaqonaldan sağda və solda yerləşən elementləri bir-birindən işarəcə fərqlənir: $A_{12} = -A_{21}$ və s.

3-ölçülü vektorların hasilinə uyğun olaraq, 2 dörd-ölçülü vektorun uyğun komponentlərinin hasillərinin cəminə bu *vektorların skalyar hasili* deyilir və belə yazılır: $A_\mu B_\mu = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 \equiv \vec{A}\vec{B} + A_4B_4$. 4-ölçülü vektorun birinci üç komponenti fəza komponenti, dördüncü komponent isə *zaman koponenti* adlanır. 4-ölçülü radius vektoru belə ifadə edəcəyik: $x_\mu = (\vec{r}, x_4) \equiv (\vec{r}, ict) \equiv (\vec{r}, ix_0)$, burada $x_0 = ct$. Onda hər hansı 4-ölçülü vektoru belə yazacağıq: $A_\mu = \{\vec{A}, A_4\} \equiv \{\vec{A}, iA_0\}$. Bizim burada seçdiyimiz «metrikada» vektorların zaman komponentləri xəyalidir. Əlbəttə elə «metrika» seçmək olar ki, 4-vektorların bütün komponentləri həqiqi olsun (Bax: § 21 və § 46 əlavə). 4-vektorun kvadratı belə yazılır: $A_\mu^2 = A_\mu A_\mu = \vec{A}^2 + A_4^2 \equiv \vec{A}^2 - A_0^2 \gtreqless 0$.

Deməli 4-ölçülü vektorlar fəzaya oxşar, zamana oxşar və izotrop (işığa oxşar) vektorlar ola bilər.

Tenzorun diaqonal elementlərinin cəmi bu tenzorun *şpuru* və ya *izi* adlanır. Məsələn, $\delta_{\mu\mu} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44} = 4$.

4-ölçülü 4-ranqlı vahid antisimmetrik tenzor aşağıdakı şərtləri ödəyən 256 komponentin məcmui olan $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ kəmiyyətinə deyilir:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1, \text{ əgər } \mu\nu\alpha\beta \text{ cüt sayda yerdəyişmə ilə } 1234 \text{ şəklinə düşürsə,} \\ -1, \text{ əgər } \mu\nu\alpha\beta \text{ tək sayda yerdəyişmə ilə } 1234 \text{ şəklinə düşürsə,} \\ 0, \text{ əgər } \mu\nu\alpha\beta \text{ heçbir yolla } 1234 \text{ şəklinə düşmürsə.} \end{cases}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ bütün indekslərinə görə antisimmetrikdir, ən azı iki indeksi bərabər olan komponentlər sıfırdır, əsas komponent $\varepsilon_{1234}=+1$, digər sıfırdan fərqli komponentlər +1 və -1-dir. $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ əslində psevdotenzordur.

Psevdotenzorlar da 4-ölçülü fəzanın çevrilməsi zamanı adi tenzorlar kimi çevrilir, lakin bərabərliyin sağ tərəfi əlavə olaraq çevrilmə matrisinin determinantına vurulur:

$$P_{\mu\nu} = (\det L') \cdot L'_{\mu\alpha} L'_{\nu\beta} P'_{\alpha\beta}.$$

Psevdotenzor (aksial kəmiyyətlər) tenzordan yalnız fəzanın inversiyası zamanı fərqlənir. Belə ki, n-ranqlı tenzorun komponentləri fəzanın inversiyası zamanı $(-1)^n$-ə vurulduğu halda, uyğun ranqlı psevdotenzorun komponentləri $(-1)^{n+1}$-ə vurulur.

Bu tenzorun 3-ölçülü analoqu ℓ_{ijk}-dır, burada i, j, k=1, 2, 3 (bax: ... əlavə). Asanlıqla göstərmək olar ki, $\varepsilon^2_{\mu\nu\alpha\beta} = 24 \equiv 4!$

Lorens çevrilmələrinə görə invariant qalan funksiyaya skalyar fuksiya və ya sadəcə *skalyar* deyilir: $\phi(x) = \phi'(x') = \text{in var}$. Məsələn, elektrik yükü, interval, 4-ölçülü vektorun kvadratı və s. skalyar kəmiyyətdir. Çox vaxt skalyar sıfır ranqlı tenzor, vektor isə *bir ranqlı tenzor* adlanır.

§15. 4-ölçülü sürət və təcil. Ümumi halda Lorens çevrilmələrinin ortoqonallığı şərti

Relyativistik nəzəriyyədə fiziki kəmiyyətlər arasında kovariant münasibətlər yazmaq üçün zərrəciyin 4-ölçülü sürətindən və təcilindən istifadə edilir. Qeyri-relyativistik halda bütün tənliklər Nyuton mexanikasının tənliklərinə keçdiyinə görə 4-ölçülü vektorları (sürət, təcil və s.) quranda çalışmalıyıq ki, onların fəza komponentləri uyğun 3-ölçülü vektorlara oxşar olsun. 3-ölçülü sürətə oxşar olaraq zərrəciyin 4-ölçülü sürətinə belə tərif verirlər: 4-ölçülü radius vektorun məxsusi zamana (və ya intervala) görə törəməsinə zərrəciyin *4-ölçülü sürəti* deyilir:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{dS}. \tag{15.1}$$

Bilirik ki, interval və məxsusi zaman bir-birilə mütənasibdir: $dt' = \frac{dS}{c} = \text{in var}$. Biz intervalı əsas götürəcəyik: $dS = c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt$. Bəzən diferensial intervalın digər ifadəsindən də istifadə edəcəyik: $dS = \sqrt{c^2dt^2 - d\ell^2} = \sqrt{-dx_\mu^2}$.

(15.1) düsturunda intervalın birinci ifadəsindən istifadə edək və 4-ölçülü sürətin toplananlarını hesablayaq:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{dS} = \frac{dx_\mu}{c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}dt},$$

$$u_1 = \frac{dx_1}{c\sqrt{\ }dt} = \frac{\upsilon_1}{c\sqrt{\ }} = \frac{\upsilon_x}{c\sqrt{\ }},$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{c\sqrt{\ }dt} = \frac{\upsilon_2}{c\sqrt{\ }} = \frac{\upsilon_y}{c\sqrt{\ }},$$

$$u_3 = \frac{dx_3}{c\sqrt{\ }dt} = \frac{\upsilon_3}{c\sqrt{\ }} = \frac{\upsilon_z}{c\sqrt{\ }},$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{c\sqrt{\ }dt} = \frac{icdt}{c\sqrt{\ }dt} = \frac{i}{\sqrt{\ }}.$$

Burada $\sqrt{1-\frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}$ ifadəsini qısaca $\sqrt{\ }$ şəklində yazmışıq. Bu düsturlarda $\vec{\upsilon}$ zərrəciyin adi sürətidir və ümumiyyətlə o, zamanın funksiyasıdır. Zərrəciyin 4-ölçülü sürətini qısaca belə yazmaq olar:

$$u_\mu = \left(\frac{\upsilon_j}{c\sqrt{1-\vec{\upsilon}^2/c^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-\vec{\upsilon}^2/c^2}}\right) \equiv \left(\frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\vec{\upsilon}^2/c^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-\vec{\upsilon}^2/c^2}}\right). \tag{15.2}$$

Qeyd edək ki, latın indeksi j=1, 2, 3 qiymətlərini alır və $\vec{\upsilon}^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$. Yuxarıdakı ifadədən görünür ki, 4-ölçülü sürət adsız kəmiyyətdir.

4-ölçülü sürətin kvadratını hesablayaq və $dS^2 = -dx_\mu^2$ şərtindən istifadə edək:

$$u_\mu^2 = \left(\frac{dx_\mu}{dS}\right)^2 = \frac{dx_\mu^2}{dS^2} = \frac{dx_\mu^2}{-dx_\mu^2} = -1.$$

Bu nəticəni (15.2) ifadəsini bilavasitə kvadrata yüksəltməklə də almaq olardı. Alınmış nəticəni qısaca yazaq:

$$u_\mu^2 = -1. \tag{15.3}$$

Həndəsi mənada, u_μ zamana-oxşar vahid 4-ölçülü vektordur. İndi 4-ölçülü təcilin tərifini verək: 4-ölçülü sürətin intervala (məxsusi zamana) görə törəməsinə *4-ölçülü təcil* deyilir:

$$w_\mu = \frac{du_\mu}{dS} = \frac{du_\mu}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}dt}. \tag{15.4}$$

Əlbəttə, u_μ-dən törəmə alaraq w_μ-nün komponentlərini aşkar şəkildə yazmaq olardı, lakin biz bunu məsələ həllində edəcəyik. (15.3) bərabərliyindən intervala görə törəmə alsaq $2u_\mu \frac{du_\mu}{dS} = 0$ olar. Buradan

$$u_\mu w_\mu = 0 \tag{15.5}$$

olur. Bu o deməkdir ki, 4-ölçülü sürət 4-ölçülü təcilə «perpendikulyardır». Əlbəttə bunlar 4-ölçülü fəzada ortoqonaldır. (15.5) bərabərliyini açıq yazsaq: $\vec{u}\vec{w} + u_4 w_4 = 0$ olur.

İndi ümumi halda Lorens çevrilmələrində ortoqonallıq məsələsini açıqlayaq. Bilirik ki, Lorens çevrilmələrində intervalın kvadratı və ya 4-ölçülü məsafənin kvadratı invariant qalır. Bu o deməkdir ki

$$x_\mu'^2 = x_\nu^2 = \text{in var} \tag{15.6}$$

olmalıdır. Burada fərz edəcəyik ki, ətalət sistemləri istənilən istiqamətdə (X oxu boyunca yox!) hərəkət edə bilər və K və K' sistemlərində uyğun koordinat oxlarının paralel olması da məcburi deyildir. Bu zaman L' və L matrisləri (14.3) və (14.5) şəklində deyil, daha mürəkkəb şəklə malik olacaqdır. (Bax: Ümumi Lorens çevrilmələri). İndi bilavasitə ümumi Lorens çevrilmələrindən istifadə edək. Ümumi Lorens çevrilmələri də xarici görünüşcə (14.4) şəklində yazılır, lakin L-in ifadəsi daha mürəkkəb olur.

$$x_\mu'^2 = x_\mu' x_\mu' = L_{\mu\nu} x_\nu L_{\mu\rho} x_\rho = L_{\mu\nu} L_{\mu\rho} x_\nu x_\rho .$$

(15.6) şərtinə görə bu bərabərliyin sağ tərəfi x_ν^2 olmalıdır və bunun üçün isə mütləq

$$L_{\mu\nu} L_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho} \tag{15.7}$$

şərti ödənməlidir. Doğrudan da bu şərti yuxarıda nəzərə alsaq

$$x_\mu'^2 = L_{\mu\nu} L_{\mu\rho} x_\nu x_\rho = \delta_{\nu\rho} x_\nu x_\rho = x_\nu x_\nu = x_\nu^2$$

invariantlıq ödənmiş olur.

(15.7) bərabərliyi Lorens matrislərinin və o cümlədən Lorens çevrilmələrinin ortoqonallığı şərtidir. Bu şərtin digər yazılış şəkilləri də mövcuddur və onları bilmək pis olmazdı. Bunları almaq üçün (15.7) düsturundan başlayaq. (15.7) bərabərliyinin sol tərəfində $L_{\mu\nu}$ matrisində sətirlə sütunun (yəni μ ilə ν-nün) yerini dəyişərək transponirə edilmiş matrisə keçək: $L_{\mu\nu} = \tilde{L}_{\nu\mu}$ və sonra iki matrisin bir-birinə hasili qaydasından istifadə edək:

$$L_{\mu\nu} L_{\mu\rho} = \tilde{L}_{\nu\mu} L_{\mu\rho} \equiv (\tilde{L}L)_{\nu\rho} .$$

Burada iki matrisin hasilinin $\nu\rho$ elementinin hesablanması düsturu verilmişdir. Yəni ali cəbrdən məlumdur ki, iki A və B matrisinin hasilinin $\alpha\beta$ elementi belə hesablanır: $(AB)_{\alpha\beta}=A_{\alpha\mu}B_{\mu\beta}$, burada təkrar olunan μ indeksi üzrə cəm aparılır. İki matrisi bir-birinə vurduqda birinci matrisin hər sətrini ikinci matrisin hər bir sütnuna vurmaq lazımdır. İndi (15.7) bərabərliyinin sağ tərəfini də nəzərə alsaq

$$(\tilde{L}L)_{\nu\rho} = \delta_{\nu\rho} \equiv (I)_{\nu\rho}$$

olar. Bilirik ki, $\delta_{\nu\rho}$ vahid matrisin (yəni I-nin) $\nu\rho$ elementidir. Bu bərabərliyin sol və sağ tərəfində $\nu\rho$ indekslərini atsaq, onda matrislərin özlərinin (elementlərinin yox!) bərabərlik şərtini alarıq: $\tilde{L}L = I$ və ya $L^T L = I$. Bu bərabərliyə sağdan L^{-1} matrisini (tərs matrisi) vursaq

$$\tilde{L} = L^{-1} \tag{15.8}$$

olar. Bilirik ki, Lorens çevrilmələrində L' tərs keçidi icra etdiyinə görə *tərs matris* adlanır, yəni $L' \equiv L^{-1}$. Bunu yuxarıda nəzərə alsaq

$$\tilde{L} = L' \qquad (15.9)$$

olur. Son düstur göstərir ki, tərs matris düz matrisin transponirə edilmişinə bərabərdir. Belə matrislər *ortoqonal matrislər* adlanır. Bu şərti biz xüsusi Lorens çevrilməsində də almışdıq.

(15.9) matris bərabərliyinin $\mu\nu$ elementini hesablayaq:

$$\tilde{L}_{\mu\nu} = L'_{\mu\nu} \text{ və ya } L_{\nu\mu} = L'_{\mu\nu}. \qquad (15.10)$$

(15.10) bərabərliyindən görünür ki, düz matris, indekslərinin yeri dəyişdirilmiş tərs matrisə və əksinə, tərs matris indekslərinin yeri dəyişdirilmiş düz matrisə bərabərdir. İndi biz (15.7) bərabərliyinin sol tərəfində növbə ilə əvvəlcə yalnız birinci vuruqda (yəni $L_{\mu\nu}$-də), sora yalnız ikinci vuruqda (yəni, $L_{\mu\rho}$-da) və daha sonra eyni anda hər iki vuruqda tərs matrisə keçsək, ortoqonallıq şərtinin bütün mümkün olan şəkillərini almış olarıq:

$$L_{\mu\nu}L_{\mu\rho} = L'_{\nu\mu}L_{\mu\rho} = L_{\mu\nu}L'_{\rho\mu} = L'_{\nu\mu}L'_{\rho\mu} = \delta_{\nu\rho}. \qquad (15.7')$$

Burada yadda saxlamaq lazımdır ki, düz matris düz matrisə və tərs matris tərs matrisə vurulduqda cəmləmə indeksləri (μ indeksləri) vuruqlarda eyni yerdə, düz matris tərs matrisə və əksinə vurulduqda isə cəmləmə indeksləri vuruqlarda müxtəlif yerdə yazılmalıdır.

Nəticədə 4-ölçülü diferensial operatorların vektor və tenzor xassələrini müəyyən edək. Gələcəkdə biz sahə funksiyalarından 4-ölçülü koordinatlara görə birinci, ikinci və s. tərtib törəmə alacağıq. 4-ölçülü törəməni $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ və ya qısaca $\partial\mu$ şəklində yazırlar.

Koordinatların Lorens çevrilməsindən istifadə edərək $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ diferensial operatorunun vektor olduğunu göstərək. Bunun üçün hər hansı skalyar funksiyanın x_μ və x'_μ-ə görə törəmələri arasında əlaqə yaradaq: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_\mu} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x'_\nu}\cdot\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}$; Bu əlaqəni operator şəklində belə yazırlar: $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \dfrac{\partial}{\partial x'_y}\cdot\dfrac{\partial x'_y}{\partial x_\mu}$; Koordinatların $x'_\nu = L_{\nu\rho}x_\rho$ çevrilməsindən istifadə edərək,

$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}$ kəmiyyətini hesablayaq:

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} = L_{\nu\rho}\frac{\partial x_\rho}{\partial x_\mu}.$$

Burada $\frac{\partial x_\rho}{\partial x_\mu} = \begin{cases} 1, \text{ əgər } \rho=\mu \\ 0, \text{ əgər } \rho\neq\mu \end{cases}$ qiymətini alır. Deməli, $\frac{\partial x_\rho}{\partial x_\mu} = \delta_{\rho\mu}$ olur.

Bunu yuxarıda nəzərə alsaq: $\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} = L_{\nu\rho}\delta_{\rho\mu} = L_{\nu\mu}$ olar. Son ifadədə $L_{\nu\mu} = L'_{\mu\nu}$ yazaraq $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_\nu}\cdot L_{\nu\mu} \equiv L'_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'_\nu}$ alırıq.

Beləliklə $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 4-ölçülü koordinat kimi, yəni $x_\mu = L'_{\mu\nu}x'_\nu$ şəklində çevrilir. Deməli $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ operatoru 4-ölçülü vektordur. Onu komponentlərdə yazaq: $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$. Adətən onun birinci üç fəza komponentlərini 3-ölçülü vektor şəklində yazaraq, onu $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\vec{\nabla},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$ şəklində təsvir edirlər, burada $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t} \equiv$, $\equiv -\frac{i\partial}{c\partial t} \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $x_0=ct$. Bilirik ki, $\vec{\nabla}$ 3-ölçülü qradiyenti ifadə edir. Ona görə $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ kəmiyyətinə 4-*ölçülü qradiyent* deyilir. $\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu$ kəmiyyəti 4-ölçülü divergensiyadır.

Deyilənlərdən aydın olur ki, $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ iki-ranqlı 4-ölçülü tenzordur.

Göstərək ki, $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$ kəmiyyəti relyativistik invariantdır, yəni skalyardır:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\mu}==L'_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'_\nu}\cdot L'_{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x'_\rho}=$$

$$=L'_{\mu\nu}L'_{\mu\rho}\frac{\partial^2}{\partial x'_\nu \partial x'_\rho}==\delta_{\nu\rho}\frac{\partial^2}{\partial x'_\nu \partial x'_\rho}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2_\nu}\equiv\frac{\partial^2}{\partial x'^2_\mu}=\text{in var}.$$

(sonda ν cəmləmə indeksini μ ilə əvəz etmişik). Yuxarıdakı skalyar kəmiyyəti açıq şəkildə yazaq:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}=\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\Box.$$

Bu *Dalamber operatoru* adlanır (*Dalambertian*).

§16. Ümumi Lorens çevrilmələri və sürətlərin toplanması

Biz indiyə qədər xüsusi Lorens çevrilmələri ilə məşğul olduq. Bu çevrilmədə K və K' inersial sistemlərində koordinat oxları bir-birinə paralel idi və K' sistemi K-ya nəzərən OX oxu boyunca $\vec{V}$ sürəti ilə hərəkət edirdi. İndi fərz edən ki, K' sisteminin nisbi hərəkət sürəti $\vec{V}$ ixtiyari istiqamətdə yönəlmişdir. Bu hal üçün Lorens çevrilmələri geniş imkana malikdir. Xüsusi Lorens çevrilməsində yalnız hərəkət istiqamətindəki (sürətə paralel) koordinatlar (yəni x və x') çevrilirdi. Bu variantdan istifadə etmək üçün $\vec{r}$ və $\vec{r}\,'$ radius vektorlarının $\vec{V}$-yə paralel və perpendikulyar proyeksiyalarını (və sonra toplananlarını) hesablayaq: $r_\parallel=\frac{(\vec{r}\vec{V})}{V}, r'_\parallel=\frac{(\vec{r}\,'\vec{V})}{V}$. $r_\parallel$ və $r'_\parallel$ xüsusi Lorens çevrilmələrində x və x' rolunu oynayır. Onda $r_\parallel$ və t üçün Lorens çevrilmələri düsturları

$$r_\parallel=\frac{r'_\parallel+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}r'_\parallel}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{16.1}$$

şəklində yazılır. Birinci tənliyi $\vec{V}$ istiqamətində vahid vektora $(\frac{\vec{V}}{V})$ vuraq və $r_\parallel\frac{\vec{V}}{V}=\frac{(\vec{r}\vec{V})\vec{V}}{V^2}=\vec{r}_\parallel$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\vec{r}_{\parallel}=\frac{\vec{r}_{\parallel}^{\,'}+\vec{V}t'}{\sqrt{}} \qquad (16.2)$$

Məlumdur ki, xüsusi Lorens çevrilməsində eninə koordinatlar (y və z) dəyişmir. Yəni $\vec{r}_{\perp}=\vec{r}_{\perp}^{\,'}$ olur. Digər tərəfdən $\vec{r}_{\perp}=\vec{r}-\vec{r}_{\parallel}$ və $\vec{r}_{\perp}^{\,'}=\vec{r}\,'-\vec{r}_{\parallel}^{\,'}$ olduğunu nəzərə alaraq, (16.2) bərabərliyinin sol tərəfinə $\vec{r}_{\perp}$ və sağ tərəfinə isə ona bərabər olan $\vec{r}_{\perp}^{\,'}$ vektorlarını əlavə edək. Sadə hesablamadan sonra (16.2) və (16.1)-dən alırıq:

$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right)\frac{(\vec{r}\,'\vec{V})\vec{V}}{V^2}+\frac{\vec{V}t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ t=\frac{t'+\dfrac{\vec{V}\vec{r}\,'}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (16.3)$$

(16.3) koordinatlar və zamanın *ümumi Lorens çevrilmələri* adlanır və K'-dən K-ya keçidi icra edir. Adətən ümumi Lorens çevrilmələrinə 3-ölçülü fəzanın dönməsini də əlavə edirlər. Tərs keçidi almaq üçün bu düsturlarda $(\cdot\cdot)'\leftrightarrow(\cdot\cdot)$, $\vec{V}\to-\vec{V}$ əvəzləməni aparmaq lazımdır:

$$\vec{r}\,'=\vec{r}+\left(\frac{1}{\sqrt{}}-1\right)\frac{(\vec{r}\vec{V})\vec{V}}{V^2}-\frac{\vec{V}t}{\sqrt{}},\quad t'=\frac{t-\dfrac{\vec{V}\vec{r}}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (16.4)$$

İxtiyari A_μ vektoru üçün ümumi Lorens çevrilmələri düsturlarını almaq üçün bu vektorun radius vektorla aşağıdakı oxşarlığından istifadə etmək lazımdır: $A_\mu=\{\vec{A},iA_0\}$, $r_\mu=\{\vec{r},ict\}$, $\vec{r}\to\vec{A}$, $ct\to A_0$. Onda A_μ vektoru üçün ümumi Lorens çevrilmələri

$$\vec{A}=\vec{A}\,'+\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}-1\right)\frac{(\vec{A}\,'\vec{V})\vec{V}}{V^2}+\frac{\vec{V}A_0^{'}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$A_0=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(A_0^{'}+\frac{\vec{V}\vec{A}\,'}{c}\right) \qquad (16.5)$$

şəklində yazılır. (16.4) çevrilməsini 4-ölçülü $x_\mu^{'}=L_{\mu\nu}x_\nu$ şəklində yazaraq buradakı L-in ifadəsinin onun xüsusi haldakı (14.5) yazılışından çox fərqləndiyini görmək olar.

Ümumi halda sürətləri relyativistik toplamaq üçün (16.3) ifadələrini diferensiallamaq və birinci bərabərliyi ikinci bərabərliyə tərəf-tərəfə bölmək lazımdır. Alınmış ifadədə $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\upsilon}$ və $\frac{d\vec{r}\,'}{dt\,'}=\vec{\upsilon}\,'$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\vec{\upsilon}=\frac{\vec{\upsilon}\,'+\left(\frac{1}{\sqrt{}}-1\right)\frac{\vec{V}(\vec{V}\vec{\upsilon}\,')}{V^2}+\frac{\vec{V}}{\sqrt{}}}{\frac{1}{\sqrt{}}\left(1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}\,'}{c^2}\right)}$$

olar. Biz sadəlik üçün $\sqrt{1-V^2/c^2}$ kəmiyyətini $\sqrt{}$ ilə işarə etmişik. Son bərabərliyin surətinə $\vec{V}$ vektorunu əlavə edək və çıxaq:

$$\vec{\upsilon}=\frac{\vec{\upsilon}\,'+\vec{V}+\left(\frac{1}{\sqrt{}}-1\right)\frac{\vec{V}}{V^2}(\vec{V}\vec{\upsilon}\,'+V^2)}{\frac{1}{\sqrt{}}\left(1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}\,'}{c^2}\right)}. \qquad (16.6)$$

Bu düstur $\vec{V}$ ilə $\vec{\upsilon}\,'$-in relyativistik «cəmini» ifadə edir. Burada $\vec{\upsilon}\,'$ zərrəciyin K'-də, $\vec{\upsilon}$ isə həmin zərrəciyin K-da sürətidir. (16.6) K'-dən K-ya keçidi icra edir. tərs keçidi almaq üçün uyğun əvəzləməni aparmaq lazımdır:

$$\vec{\upsilon}\,'=\frac{\vec{\upsilon}-\vec{V}+\left(\frac{1}{\sqrt{}}-1\right)\frac{\vec{V}}{V^2}(\vec{V}\vec{\upsilon}-V^2)}{\frac{1}{\sqrt{}}\left(1-\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}}{c^2}\right)}. \qquad (16.7)$$

Bu düstur «$-\vec{V}$« ilə $\vec{\upsilon}$-nin relyativistik «cəmidir». Toplanan sürətlər kollinear olduqda (16.6) və (16.7) aşağıdakı şəklə düşür:

$$\vec{\upsilon}=\frac{\vec{\upsilon}\,'+\vec{V}}{1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}\,'}{c^2}},\quad \vec{\upsilon}\,'=\frac{\vec{\upsilon}-\vec{V}}{1-\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}}{c^2}}. \qquad (16.8)$$

Bu düsturlardan istifadə edərək relyativistik fizikanın bir çox məsələlərini həll etmək olur. (16.6) və (16.7) düsturlarının şəklini bir az dəyişərək, onları aşağıdakı kimi yazmaq olur:

$$\vec{\upsilon}=\frac{\vec{\upsilon}'+\vec{V}+(1-\sqrt{\ })\frac{1}{V^2}[\vec{V}[\vec{V}\vec{\upsilon}']]}{1+\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}'}{c^2}},$$

$$\vec{\upsilon}'=\frac{\vec{\upsilon}-\vec{V}+(1-\sqrt{\ })\frac{1}{V^2}[\vec{V}[\vec{V}\vec{\upsilon}]]}{1-\frac{\vec{V}\vec{\upsilon}}{c^2}}. \qquad (16.9)$$

Sürətlərin relyativistik toplanma düsturlarından (16.6, 16.7 və 16.9) görünür ki, qeyri-kollinear sürətlər ($\vec{V}$ və $\vec{\upsilon}'$, $-\vec{V}$ və $\vec{\upsilon}$) toplanma düsturlarına qeyri-simmetrik daxil olur. Deməli yekun sürət sürətlərin toplanma ardıcıllığından asılıdır və sürətlərin relyativistik toplanmasında kommutativlik pozulur. Yalnız kollinear sürətlərin toplanmasında kommutativlik şərti ödənir, yəni yekun sürət sürətlərin toplanma ardıcıllığından asılı olmur. Bu (16.8) düsturlarından aşkar görünür: $\vec{V}$ ilə $\vec{\upsilon}'$-in yerlərini və «$-\vec{V}$» ilə $\vec{\upsilon}$-nin yerlərini dəyişdirdikdə yekun sürət dəyişmir. Bu xassələr koordinatların Lorens çevrilməsinə də aiddir. Ardıcıl aparılmış iki Lorens çevrilməsinin nəticəsi ümumiyyətlə aparılma ardıcıllığından asılıdır. Bu, əvvəlki paraqraflardan bildiyimiz kimi, Lorens çevrilməsinin 4-ölçülü fəzanın fırlanması ilə ekvivalent olması şərtindən bilavasitə alınır. Riyaziyyatdan məlumdur ki, müxtəlif oxlar boyunca aparılmış iki ardıcıl fırlanmanın (məs. $X\tau$ və $Y\tau$ müstəvilərində) nəticəsi bunun hansı ardıcıllıqla aparılmasından asılıdır.

§17. Lorens çevrilmələrinin bəzi xassələri

Biz burada Lorens çevrilmələrinin mühüm xassələrini qısaca şərh edəcəyik.

İndi (16.4) ümumi Lorens çevrilməsi düsturlarını

$$x'_\mu = L_{\mu\nu}x_\nu \qquad (17.1)$$

şəklində yazaraq $L_{\mu\nu}$ Lorens çevrilməsi matrisinin elementlərini hesablasaq, göstərərik ki, (14.5) ifadəsindən fərqli olaraq burada L matrisinin bütün elementləri sıfırdan fərqlidir və özləri də mürəkkəb şəklə malikdir. Biz (17.1) ifadəsinə 4-ölçülü Minkovski fəzasının fırlanması zamanı 4-ölçülü radius vektorların çevrilməsi düsturu kimi baxırıq. Bu çevrilmə *bircins Lorens çevrilməsi* adlanır. Bu çevrilməyə ümumiyyətlə həm 3-ölçülü fəzanın fırlanması həm də bir ətalət sistemindən digər ətalət sisteminə keçid daxilidir. $L_{\mu\nu}$ matrisləri bir qrup təşkil edir və bu *Lorens çevrilməsi qrupu* adlanır. Bu qrupun xassələri və onun çevrilmə parametrləri haqda gələcəkdə danışacağıq.

Əgər biz 4-ölçülü fəzada 4-ölçülü koordinat başlanğıcının müəyyən a_μ vektoru qədər sürüşməsinə (translyasiya) baxsaq, onda 4-ölçülü radius vektorların çevrilməsi

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu \tag{17.2}$$

şəklində yazılar. Burada $a_\mu = \{\vec{a}, ia_0\}$ ştrixsiz 4-ölçülü koordinat sisteminin başlanğıcının (x_μ=0 nöqtəsinin) ştrixli 4-ölçülü koordinat sistemində vəziyyətini təyin edən 4-ölçülü vektordur (translyasiya vektorudur).

Əgər 4-ölçülü fəzada həm fırlanmanı və həm də translyasiyanı nəzərə alsaq, 4-ölçülü vektorların çevrilmə düsturları

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \tag{17.3}$$

şəklində olar. Bu çevrilmə *qeyri-bircins Lorens çevrilməsi* və *ya Puankare çevrilməsi* adlanır. (17.1), (17.2) və (17.3) çevrilmələri fəza və zamanın simmetriya xassələrini ifadə edən kəsilməz çevrilmələrdir. Bunlara 3-ölçülü fəzanın fırlanmasını xarakterizə edən üç ədəd bucaq ($\theta_1,\theta_2,\theta_3$), bir ətalət sistemindən digərinə keçidi xarakterizə edən istənilən $\vec{V} = \text{const}$ vektorunun üç toplananı (V_x, V_y, V_z) və 4-ölçülü koordinat sisteminin ixtiyari translyasiya vektorunun dörd komponenti (a_1, a_2, a_3, a_4) daxildir. Bu çevrilmələrə daxil olan 10 kəmiyyət qeyri-bircins Lorens çevrilməsini (Puankare çevrilməsini) xarakterizə edən kəsilməz parametrlərdir. Əgər fəzanın transilyasıyasını nəzərə almasaq, onda 6 kəmiyyət (θ_1, θ_2, θ_3, V_x, V_y, V_z) bircins Lorens çevrilməsini xarakterizə edən parametrlər olur. Bundan əlavə 4-ölçülü fəzada (fəza-zamanda) diskret çevrilmə simmetriyası mövcuddur. Buraya 3-ölçülü fəzanın inversiyası (inikası) $x'_i = -x_i$ (i=1, 2, 3), yəni sağ sistemdən sol sistemə keçid: $P = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$ –

diaqonal matris, zamanın inversiyası $t' = -t$: $T = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ – diaqonal matris və 4-ölçülü fəzanın tam inversiyası $x'_\mu = -x_\mu$ ($\mu = 1,2,3,4$): $R = PT = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ – diaqonal matris daxildir.

İndi Lorens çevrilməsinin (15.7) ortoqonallıq şərtindən istifadə edərək çevrilmə matrisinin determinantını hesablayaq: $|L_{\mu\nu}L_{\mu\rho}| = |\tilde{L}_{\nu\mu}L_{\mu\rho}| = |\tilde{L}_{\nu\mu}||L_{\mu\rho}| = |L_{\nu\mu}||L_{\mu\rho}| = |L_{\mu\rho}|^2 = |\delta_{\nu\rho}| = 1$ və ya $|L_{\mu\rho}| = \pm 1$.

Çox vaxt $|L_{\mu\rho}|$ determinantını sadəcə $|L|$ şəklində yazırlar.

$$|L| = +1 \tag{17.4}$$

şərtini ödəyən çevrilmələr bircins məxsusi Lorens çevrilmələri adlanır. (17.4) şərtinə *unimodulyarlıq* deyilir.

$|L| = -1$ şərtini ödəyən çevrilmələr *qeyri-məxsusi Lorens çevrilmələri* adlanır. Burada fəza və zamanın inversiyası da iştirak edir.

Zaman oxunun istiqamətinin saxlandığı (inversiya etmədiyi) bütün çevrilmələr *ortoxron çevrilmələr* adlanır.

Bircins məxsusi Lorens çevrilmələrini icra edən matrislər çoxluğu bir qrup təşkil edir (Lorens qrupu). Bu qrupun elementləri 6 kəsilməz parametrin bütün mümkün qiymətlərinə uyğun olan matrislərdir. Onları L_1, L_2, L_3 ... və s. ilə işarə edirlər. Onlar qrupun «vurma»* əməliyyatına tabe olaraq aşağıdakı 4 şərti ödəyir:

1) Qrupda istənilən iki elementin hasilinə uyğun üçüncü element mövcuddur: $L_1L_2 = L_3$.

2) Elementlərin hasili assosiativ qanuna tabedir:

$$L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3 = L_1L_2L_3.$$

3) Qrupda aşağıdakı şərti ödəyən vahid $L_0 = I$ elementi mövcuddur:

---

* Qrupda "vurma" əməliyyətini yalnız hasil kimi deyil daha geniş mə'nada (bə'zən toplama kimi və s.) başa düşmək lazımdır.

$$LL_0 = L_0L = L.$$

4) Qrupun hər bir L elementinin tərs L^{-1} elementi vardır:

$$LL^{-1} = L^{-1}L = L_0 = I.$$

Lorens qrupu ümumiyyətlə kommutativ deyildir: $L_1L_2 \neq L_2L_1$.

Bu qrup kəsilməz qrupdur, yəni onun 6 parametri kəsilməz dəyişir. Bu parametrləri adətən ω_ℓ, $\ell = 1,2,3,4,5,6$ ilə işarə edirlər. Kəsilməz qrup *Li qrupu* adlanır. 4-ölçülü fəzanın məxsusi ortoqonal bircins fırlanmasını təsvir edən bu qrupu çox vaxt SO (3.1) ilə işarə edirlər.

III FƏSİL
PSEVDOEVKLİD FƏZASININ BƏZİ XASSƏLƏRİ

§18. 4-ölçülü Minkovski fəzası və psevdoevklid həndəsəsi

Aparılan çox saylı tədqiqatlar göstərir ki, fiziki proseslərin baş verdiyi real fəzanın metrik xassələri psevdoevklid həndəsəsi ilə təsvir olunur (bax : əlavə). Bunu izah etmək üçün qravitasiyanı nəzərə almayaraq ətalət sistemində Nyuton-Qaliley mexanikasında fəza və zamanın xassələrini araşdıraq. Asanlıqla göstərmək olar ki, Nyuton mexanikasının tənlikləri, məs. (8.2) hərəkət tənliyi 3-ölçülü fəzada koordinat sistemi başlanğıcının müəyyən sabit vektor qədər yerdəyişməsi (translyasiyası) və zamanın müəyyən qədər sürüşməsi və həm də koordinat sisteminin müəyyən bucaq qədər dönməsi (fırlanması) zamanı invariant qalır. 3-ölçülü fəzada tranalyasiya və fırlanma Evklid fəzasında bir qrup təşkil edir. Bu qruppa şərti olaraq G_1 deyək. Təcrübələr göstərir ki, üç-ölçülü fəza Evklid fəzasıdır. Bu fəzanın metrik xassələri iki nöqtə arasındakı məsafə ilə təyin edilir. Bu məsafə Dekart koordinat sistemində Pifaqor teoremi vasitəsilə müəyyən edilən

$$\ell_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad (18.1)$$

kəmiyyətidir. Buraya bütün kvadratik hədlər eyni işarə ilə daxil olur və bu da Evklid metrikasının əsasını təşkil edir. İki nöqtə bir-birinə çox yaxın olduqda məsafə (onun kvadratı)

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (18.2)$$

şəklində yazılır.

3-ölçülü fəzada ətalət sistemində bütün məsafələr və Nyutonun qanunları G_1 qrupuna nəzərən invariant qalır. Bu onu göstərir ki, 3-ölçülü fəza bircins və izotropdur, zaman isə bircinsdir. Yəni bütün fəza nöqtələri və zaman anları eyni hüquqludur və bütün istiqamətlər eyni güclüdür.

Digər tərəfdən məlumdur ki, Nyutonun (8.2) hərəkət tənliyi (8.1) Qaliley çevrilmələrinə nəzərən invariantdır. Qaliley çevrilmələri də qrup təşkil edir və onu şərti olaraq G_2 qrupu adlandıraq. Bu qrup G_1-dən fərqli olaraq mexaniki sistemin hərəkətini, onun halının dəyişməsini təsvir edir. Bu qrup həmişə əlahiddə (ayrıca) yer tuturdu.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz iki çevrilmə qrupu: zamanın bircins və fəzanın bircins və izotrop olması xasələrini əks etdirən qrup (G_1) və Qaliley çevrilməsi qrupu (G_2) bir-birindən asılı olmadan mövcud idi və bunlar arasında sıx əlaqənin varlığı H. Minkovskinin işlərinə qədər tam müəyyən edilməmişdi.

Minkovski 1908-ci ildə Kölndə alman tədqiqatçıları qarşısında çıxış etdiyi «Fəza və zaman» məruzəsində qeyd edirdi: «Sizə təqdim edəcəyim fəza və zaman haqda mülahizələrim eksperimental-fiziki əsasa malikdir. Onların gücü də məhz bundadır. Onların mahiyyəti çox radikaldır. İndidən belə fəzanın özü-özlüyündə və zamanın özü-özlüyündə mövcud olması fikri fiksiyadır (yanlışdır) və yalnız onların hər ikisinin müəyyən birləşmə forması mövcud olmalıdır ...» H. Minkovski 1908-ci ildə Dünyanın 4-ölçülü mənzərəsinin qurulmasını tamamladı və onun əsasında uyğun fiziki model yaratdı.

4-ölçülü fəza-zamanın (buna fəza-zaman kontiniumu da deyilir) izahında əyanilik yaratmaq üçün Minkovski fizikaya işıq konusu anlayışı daxil edir və bu anlayış nisbilik nəzəriyyəsində mühüm əyani model kimi çox böyük rol oynayır. K ətalət sistemində t_1 anında üç ölçülü fəzanın x_1,y_1,z_1 nöqtəsindən buraxılan işıq siqnalı sferik dalğa şəklində yayılır (bax: §9) və onun tənliyi 3-ölçülü fəzada aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2. \qquad (18.1)$$

Burada x_2, y_2, z_2 kəmiyyətləri t_2 zaman anında sferik dalğa cəbhəsinin çatdığı fəza nöqtəsinin cari koordinatlarıdır. Beləliklə üç ölçülü fəzada işıq sferik simmetrik şəkildə yayılır və dalğanın sferik cəbhəsinin $R=c(t_2-t_1)$ radiusu zaman keçdikcə artır. Bunu 4-ölçülü fəzada necə təsvir etmək olar? Bunun üçün (18.1) tənliyinin sağ tərəfini sola keçirərək bu tənliyi x, y, z və ct koordinatlarında

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 \qquad (18.2)$$

şəklində yazmaq lazımdır. Bu tənlik 4-ölçülü fəzada (4-cü koordinat ct-dir) konus səthini təsvir edir və buradan da işıq konusu adı meydana gəlir. (18.2) kvadratik formaya bəzi hədlər əks işarə ilə daxil olur və bu da 4-ölçülü Minkovski fəzasının psevdoevklid xassəsini ifadə edir. Əgər biz $t_1=0$ anında $x_1=y_1=z_1=0$ qəbul etsək (yəni, başlanğıc anda işığın koordinat başlanğıcından buraxıldığını fərz etsək), kvadratik forma və ya işıq konusu səthinin tənliyi sadə şəklə düşər:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0. \qquad (18.2')$$

İndi biz Minkovski fəzasında 4-cü koordinat olaraq ct yox, xəyali ict kəmiyyətini qəbul etsək, (18.2') tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 = 0. \quad (18.3)$$

(18.2')-dən fərqli olaraq burada axırıncı hədd də «müsbət» işarə ilə daxil olur. Beləliklə biz xəyali $i = \sqrt{-1}$ vahidindən süni istifadə edərək formal olaraq zamana da fəza xassələrini aid etmiş oluruq. Fəza və zaman koordinatları eyni hüquqludur və onlar vahid bir tam təşkil edir.

Bu, üç ölçülü fəzadakı fırlanma anlayışını 4-ölçülü fəza üçün ümumiləşdirməyə imkan verir. Ona görə də biz Lorens çevrilmələrini 4-ölçülü fəzanın fırlanması üsulu ilə almışıq. Xəyali i vahidini bu şəkildə daxil etməklə biz gələcəkdə Minkovski fəzasında kovariant və kontravariant kəmiyyətlər arasındakı fərqi süni yolla aradan qaldıra biləcəyik.

Minkoski fəzasında kvadratik formanı digər ekvivalent şəkildə də təyin etmək mümkündür. Bunun üçün (18.1) sferik dalğa tənliyinin sol tərəfini sağa keçirərək, onu aşağıdakı kimi 4-ölçülü şəkildə yazmaq lazımdır:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad (18.4)$$

Bu da 4-ölçülü fəzada konus səthinin tənliyidir. Burada $t_1=0$ və $x_1=y_1=$ $=z_1=0$ qəbul etsək, kvadratik forma sadə şəklə düşər:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (18.4')$$

Alınmış (18.2), (18.2') və (18.4), (18.4') kvadratik formaları bir-birindən zaman koordinatı kvadratının işarəsi ilə fərqlənir. Fizikada şərtləşmişlər ki, (18.2), (18.2') kvadratik formalara mənfi siqnaturalı (18.4), (18.4') kvdratik formalara isə müsbət siqnaturalı formalar desinlər. Bu siqnaturalar bir-birinə ekvivalentdir, lakin biz əsasən müsbət siqnaturanı seçəcəyik.

Əgər qəbul etsək ki, x_1,y_1,z_1,t_1 və x_2,y_2,z_2,t_2 yalnız işığın yayılması ilə əlaqədar olan hadisələr deyil, istənilən iki ixtiyari hadisədir, onda (18.2) və (18.4) kvadratik formaları sıfırdan fərqli olacaqdır:

$$\tilde{S}_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (18.5)$$

$$S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (18.6)$$

Burada $\tilde{S}_{12}^2$ və S_{12}^2 mənfi və müsbət siqnaturada 4-ölçülü fəzada bu iki hadisə (və ya iki dünyəvi nöqtə) arasındakı məsafənin kvadratı olacaqdır. Biz bilirik ki, (bax: §9) $\tilde{S}_{12}^2$ və S_{12}^2 bu *iki hadisə arasındakı intervalın kvadratı* adlanır və özləri də relyativistik invariantdır. Hadisələr (dünyəvi nöqtələr) bir-birinə çox yaxın olduqda diferensial interval anlayışından istifadə edirlər:

$$d\tilde{S} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2}\,. \qquad (18.7)$$

$$dS = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,. \qquad (18.8)$$

$d\tilde{S}$ və dS mənfi və müsbət siqnaturada 4-ölçülü Minkovski fəzasında bir-birinə sonsuz yaxın iki nöqtə arasındakı məsafəni ifadə edir. Onlar 4-ölçülü fəzanın metrik xassələrini, onun həndəsəsini xarakterizə edir və hər ikisi psevdoevklid metrikasıdır.

Deyilənlərə yekun vuraraq qeyd edək ki, bütün fiziki proseslər 4-ölçülü fəzada, yəni fəza-zamanda baş verir və onun həndəsəsi psevdoevklid həndəsəsidir. Fəza və zaman birləşərək vahid bir tam təşkil edir və onun həndəsəsi (18.6) intervalı ilə müəyyən olunur. 4-ölçülü Minkovski fəzası izotrop və bircinsdir (4 ədəd koordinata görə). Əlbəttə, fəza-zaman kontiniumunun burada şərh edilən xassələri ətalət sistemində və qravitasiyanı nəzərə almadıqda doğrudur.

4-ölçülü $x_\mu = \{x_1, x_2, x_3, x_4 = ict\}$ radius vektorunu daxil edərək (18.7) və (18.8) ifadələrini yığcam şəkildə yaza bilərik:

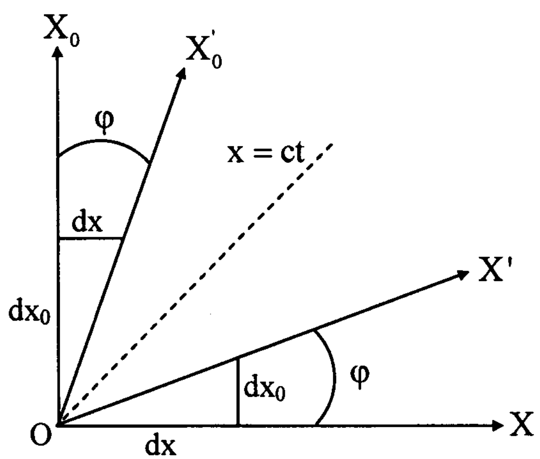
$$d\tilde{S} = \sqrt{dx_\mu^2}\,. \qquad (18.7')$$

$$dS = \sqrt{-dx_\mu^2}\,. \qquad (18.8')$$

§19. Psevdoevklid müstəvisi və Lorens çevrilməsinin həndəsi təsviri

Psevdoevklid fəzasının xassələrini psevdoevklid müstəvisi timsalında daha asan öyrənmək olar. Psevdoevklid fəzasının metrik xassələrini xarakterizə edən $dS^2 = -dx_\mu^2$ intervalında $x_2=x_3=0$ qəbul etsək psevdoevklid müstəvisinə keçmiş olarıq (yəni, iki ölçülü psevdoevklid fəzası). Bilirik ki, 4-ölçülü fəzanın (X,τ) kompleks müstəvisində koordinat oxlarının fırlanması koordinatların Lorens çevrilməsini, yəni K-dan K' ətalət sisteminə keçidi ifadə edir. (X, τ=icT) kompleks müstəvi olduğundan ψ fırlanma bucağı da xəyali idi. İndi kompleks (X,τ) müstəvisindən həqiqi (X, cT) müstəvisinə keçək və cT-ni X_0-la işarə edək. (X,X_0) müstəvisində (XOX_0) düzbucaqlı koordinat sistemi quraq. Bu müstəvidə XOX_0 düzbucağının bissektrisi işıq şüasının yayılmasını təsvir edən dünyəvi xətt olacaqdır: $x = ct$ (şəkil 19.1-də qırıq xətt).

Qeyd edək ki, orijinaldakı psevdoevklid müstəvisi (iki ölçülü psevdoevklid fəzası) ilə onun kağız müstəvisində (adi planimetriyada) şərti təsviri arasında müəyyən fərqlər, təhriflər mövcuddur. Biz gələcəkdə belə hallarda orijinaldakı psevdoevklid müstəvisinin metrik xassələrini əsas götürəcəyik. Bu fərqlər labüddür və onlar Yer kürəsinin səthi ilə onun müstəvi xəritədəki təsviri (əksi) arasındakı təhriflərə oxşayır.



Şəkil **19.1**

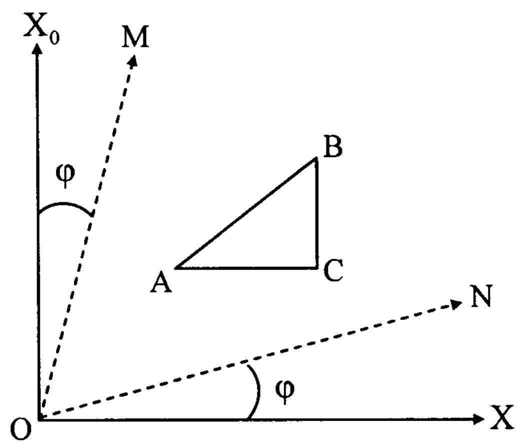
K-dan K'-ə keçid düsturlarının 3-ölçülü ifadəsini yazaq:

$$x' = \frac{x - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_0' = \frac{x_0 - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{19.1}$$

Burada $\beta = \frac{V}{c}$, $x_0 = ct$. Bu düsturların köməyi ilə K'-dəki ($X'OX_0'$) koordinat oxlarının K-dakı (XOX_0) koordinat oxlarına nəzərən vəziyyətini müəyyən edək. Şəkil 19.1-dən görünür ki, bu oxlar eyni başlanğıcdan çıxır ($x = x_0 = 0$ şərtindən $x' = x_0' = 0$ alınır) və OX_0' oxu üçün x'=0 olur, yəni $x=\beta x_0$ tənliyi alınır. Bu, OX_0' oxunun (X,X_0) müstəvisində yazılmış tənliyidir. Buradan $\frac{dx}{dx_0}=\beta=tg\varphi$ alınır. Deməli OX_0' oxu OX_0 oxu ilə φ bucağı təşkil edir. Eyni qayda ilə OX' oxu üçün: $x_0'=0$, yəni $x_0=\beta x$ alınır. Bu da OX' oxunun (X,X_0) müstəvisində yazılmış tənliyidir. Buradan da $\frac{dx_0}{dx}=\beta=tg\varphi$ alınır. Beləliklə, OX' oxu da OX oxu ilə φ bucağı təşkil edir. Deməli, K ətalət sistemindən K' ətalət sisteminə keçid, yəni Lorens çevrilmələri düzbucaqlı (XOX_0) koordinat sistemindən «çəpbucaqlı» (itibucaqlı) $(X'OX_0')$ koordinat sisteminə keçidə uyğun gəlir.

Burada yeni oxlar uyğun köhnə oxlarla eyni bir $\varphi=\mathrm{arctg}\beta$ bucağı əmələ gətirərək bissektrisə tərəf dönmüş olur (şəkil 19.1). K' ətalət sisteminin sürəti $\beta=\frac{V}{c}$ artdıqca $(\beta\to 1)$ yeni oxlar bissektrisə daha çox yaxınlaşır. Qeyd edək ki, orijinalda (yəni psevdoevklid fəzasında) hər iki K və K' sistemində oxlar ortoqonaldır. Lakin təsvirdə (yəni adi müstəvidəki yazılışda) hər iki sistem ortoqonal ola bilməz. Sistemlərdən yalnız biri, yəni təsvir üçün əsas götürülən bir sistem (məsələn XOX_0) həm orijinalda həm də təsvirdə ortoqonal ola bilər. Digər sistemlər isə təsvirdə «çəpbucaqlı» olacaqdır. Əgər təsvirdə əsas sistem olaraq K' ətalət sistemindəki ortoqonal $X'OX_0'$ koordinat sistemini götürsək və K'-dən K ətalət sisteminə keçmək üçün (19.1) düsturlarında $(\cdots)'\leftrightarrow(\cdots)$ və $V\to -V$ əvəzləməsini aparsaq, görərik ki, XOX_0 koordinat sisteminin oxları uyğun düzbucaqlı $X'OX_0'$ koordinat oxları ilə eyni bir $\varphi=\mathrm{arctg}(-\beta)$ bucağı əmələ gətirərək bissektrisdən uzaqlaşar və əks tərəfə dönər.

Bu zaman təsvirdə $X'OX_0'$ ortoqonal sistem, XOX_0 isə «çəpbucaqlı» (korbucaqlı) koordinat sistemi olacaqdır. Psevdoevklid müstəvisinin bundan əlavə digər qəribə xassələri vardır. Qeyd edək ki, orijinalda psevdoevklid müstəvisi və onun kağız üzərində şərti təsviri xarici görünüşcə (afin xassələrinə görə) bir-birinə oxşar olsa da, metrik xassələrinə görə bir-birindən kəskin fərqlənir. Məsələn, psevdoevklid müstəvisidə ortoqonal olan vektorlar və ya bərabər parçalar, onun adi şəkil müstəvisindəki təsvirdə ortoqonal qalmayacaqlar və parçalar da bərabər olmayacaqdır. Buna görə təsvirdə psevdoevklid müstəvisi ilə ehtiyatlı dolanmaq lazımdır. (X, X_0) psevdoevklid müstəvisində ortoqonal (XOX_0) koordinat sistemi seçək və ABC düzbucaqlı üçbucağını quraq (şəkil 19.2).



Şəkil **19.2**

Üçbucağın təpələrinin koordinatlarını belə işarə edək: $A(x_{01},x_1)$, $B(x_{02}, x_2)$, $C(x_{01}, x_2)$. Üçbucağın katetləri adi planimetriyadakı kimi $AC=x_2-x_1$, $BC=x_{02}-x_{01}$ şəklindədir. Psevdoevklid müstəvisində intervalın kvadratı: $AB^2 = (x_{02} - x_{01})^2 - (x_2 - x_1)^2 \equiv BC^2 - CA^2 = \text{in var}$ şəklindədir. Bu adi Pifaqor teoreminə ziddir və ona görə *psevdo-Pifaqor teoremi* adlanır: $AB^2=BC^2-CA^2$ və ya $BC^2=CA^2+AB^2$.

Psevdoevklid müstəvisində bir-birinə ortoqonal iki $\vec{OM}$ və $\vec{ON}$ vektorlarını götürək. Onların son nöqtələrinin koordinatlarını belə işarə edək: x^M, x_0^M və x^N, x_0^N. Minkovski fəzasında (psevdoevklid müstəvisində) bu vektorlar ortoqonaldır: $\vec{OM}\cdot\vec{ON}=0$. Minkovski fəzasında vektorların skalyar hasili ifadəsindən istifadə edərək $x^M x^N - x_0^M x_0^N = 0$ alırıq. Buradan $x^M : x_0^M = x_0^N : x^N$ nisbətini tapırıq. Buradan alınır ki, $\vec{OM}$ vektorunun OX_0 oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensi ($\text{tg}\varphi = \frac{x^M}{x_0^M}$), $\vec{ON}$ vektorunun OX oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə bərabərdir ($\mathrm{tg}\varphi = \frac{x_0^N}{x^N}$). Bu o deməkdir ki, orijinalda ortoqonal olan vektorlar təsvirdə ortoqonal olmayıb, bir-biri ilə $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$ çəp bucağı altında görüşürlər (şəkil 19.2, qırıq xətlər).

(X, Y) Evklid müstəvisində çevrə koordinat başlanğıcından (O-dan) eyni məsafədə yerləşmiş nöqtələrin həndəsi yeridir: $x^2+y^2=r^2$. Burada r çevrənin radiusdur. İndi (X,X_0) psevdoevklid müstəvisində radiusu ρ və mərkəzi O olan çevrə çəkək. Bu, uzunluğu ρ olan x_μ vektorunun ucunun çızdığı əyridir: $x_\mu^2 = \rho^2$. Psevdoevklid müstəvisində vektorun kvadratı $x_\mu^2 = x^2 - x_0^2$ olduğundan, bu müstəvidə çevrənin tənliyi

$$x^2 - x_0^2 = \rho^2 \tag{19.2}$$

şəklində yazılır. Minkovski fəzasında vektorun uzunluğunun kvadratı $\rho^2 \gtreqless 0$ ola bilər. Əvvəlcə fərz edək ki, $\rho^2=0$. Onda (19.2) çevrə tənliyi iki düz xəttə çevrilir: $x = x_0$ və $x = -x_0$. Bu xətlər koordinat başlanğıcından keçən işıq şüasının yayılması xətləridir (izotrop xətlər). Onlar koordinat bucaqlarının bissektrisləri olub psevdoevklid müstəvisini dörd kvadranta bölür (şəkil 19.3, punktir xətlər).

İndi fərz edək ki, $\rho^2>0$. Həqiqi müsbət a kəmiyyətini seçək və ρ=a qəbul edək (yəni, çevrənin radiusu həqiqidir). Xüsusi halda a=1 götürsək, vahid radiuslu çevrə alarıq:

$$x^2 - x_0^2 = 1. \tag{19.3}$$

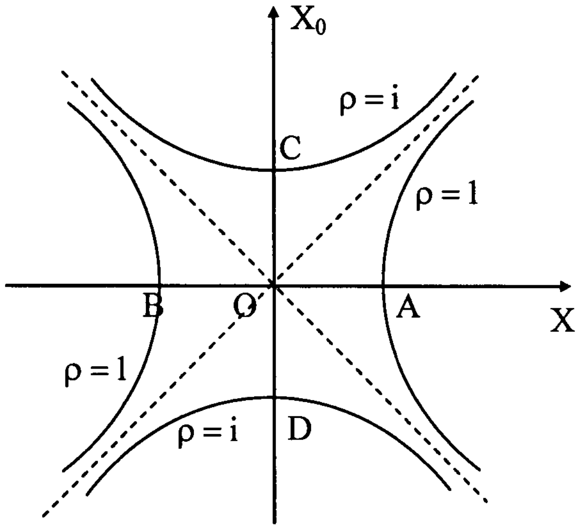
Bu, təsvirdə bərabər yanlı hiperbolun tənliyidir, onun həqiqi oxu OX-dir və $x = +1$ və $x = -1$ nöqtələrində hiperbol bu oxu kəsir (sağ-sol qanadlı hiperbol).

Fərz etsək ki, $\rho^2 = -a^2 < 0$, yəni ρ=ia, biz xəyali radiusa malik çevrə alarıq. Yenə də a=1 qəbul etsək, çevrənin tənliyi

$$x^2 - x_0^2 = -1 \quad \text{və ya} \quad x_0^2 - x^2 = 1 \tag{19.4}$$

olar. Bu da təsvirdə həqiqi oxu OX_0 olan bərabər yanlı hiperbolun tənliyidir və $x_0 = \pm 1$ nöqtələrində hiperbol OX_0 oxunu kəsir (yuxarı-aşağı qanadlı hiperbol).

Oriqinaldakı çevrənin təsvirdə müxtəlif əyrilərə çevrilməsi psevdoevklid metrikasının xassəsidir və bu, heç kəsdə təəccüb doğurmamalıdır. Koordinat başlanğıcından hiperbolların təpələrinə qədər olan məsafələr vahidə bərabər olduğundan (OA=OB=1, OC=OD=1) bunlar *miqyas hiperbolları* adlanır.



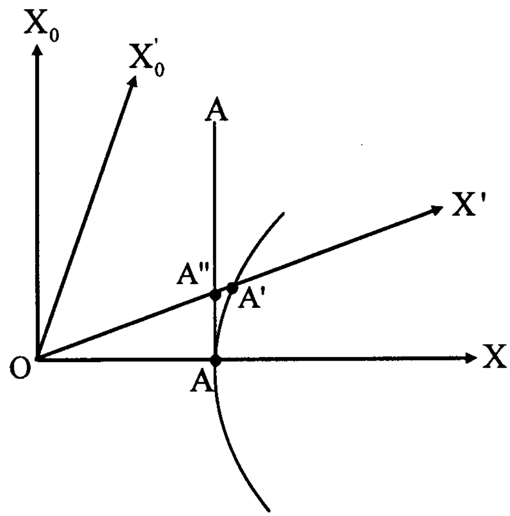
Şəkil **19.3**

Şəkil 19.3-də izotrop (punktir) xətlər hiperbolların asimptotları olur. 4-ölçülü vektorların kvadratları bütün ətalət sistemlərində invariant olduğundan (19.2), (19.3), (19.4) tənlikləri və şəkil 19.3-də təsvir olunan əyrilər istənilən ətalət sistemi üçün doğrudur. Miqyas hiperbollarından istifadə edərək Lorens çevrilməsindən çıxan nəticələri həndəsi olaraq çox asanlıqla izah edə bilərik.

Analoji olaraq göstərə bilərik ki, yüksək ölçülü (üç, dörd və s.) psevdoevklid fəzasında izotrop xətlər izotrop konuslara (işıq konuslarına) və hiperbollar isə hiperboloidlərə çevriləcəkdir. Qeyd edək ki, ölçüləri üç və daha çox olan səthlər *hipersəthlər* və ya *hipermüstəvilər* adlanır.

İndi hərəkət edən xətkeşin qısalmasını həndəsi olaraq izah edək. 19.3-cü şəklin birinci kvadrantını çəkək və orada K və K' ətalət sistemlərinin X, X_0 və X', X_0' oxlarını qeyd edək (şəkil 19.4). Bilirik ki, istənilən ətalət sistemində miqyas hiperbolları koordinat oxlarından vahid parçalar kəsir. Fərz edək ki, vahid uzunluqlu OA xətkeşi K-da sükunətdədir, və ona görə bu xətkeşin O və A uçlarının dünyəvi xətləri K-da OX_0 və

AA olacaqdır (sükunətdəki cismin dünyəvi xətti zaman oxuna paraleldir). Miqyas hiperbolu X və X' oxlarından vahid OA=OA'=1 parçalarını kəsir. Baxdığımız xətkeş K'-ə nəzərən hərəkət edir və K'-də onun uzunluğunu ölçmək üçün xətkeşin uc nöqtələrinin koordinatlarını eyni bir $X_0' = CT' = \text{const}$ anında bilmək lazımdır. Bu o deməkdir ki, xətkeşin uclarının dünyəvi xətlərini hər hansı $X_0' = \text{const}$ xətti ilə, məsələn, OX' oxu ilə kəsmək lazımdır (bu T'=0 anına uyğun gəlir). Onda xətkeşin K'-də uzunluğu OA" olacaqdır.

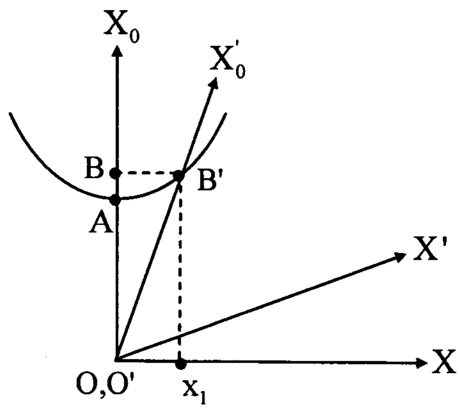


Şəkil 19.4

Şəkildən görünür ki, OA"<OA'=1. Hərəkət edən xətkeşin uzunluğu qısalır. Biz xətkeşi K'-də sükunətdə götürərək, analoji yolla göstərə bilərik ki, K-da onun uzunluğu qısalmış olacaqdır.

İndi hərəkət edən saatların göstərişlərini qrafiki yolla müqayisə edək (şəkil 19.5).

Bilirik ki, başlanğıc anda O və O' üst-üstə düşdükdə oradakı K və K' sisteminin saatları eyni bir t=0 və t'=0 anlarını göstərir. Fərz edək ki, başlanğıc anda K sisteminin bir saatı O-da və K' sisteminin bir saatı isə O'-də yerləşmişdir və onlar eyni bir zaman anını t=t'=0 qeyd edirlər. K' sisteminin saatının (hərəkət edən saat) dünyəvi xətti OX_0'-dir. Bu saat hərəkət edərək B' nöqtəsinə çatdıqda onun göstərişi $t_{B'}' = 1$ olacaqdır. Cünki, miqyas hiperbolu koordinat oxlarından vahidə bərabər parçalar kəsir (OA=1, OB'=1). B' nöqtəsinin K sistemində koordinatları x_1 və OB-dir.



Şəkil **19.5**

Deməli, K' sisteminin B' saatı ilə K sisteminin x_1 nöqtəsində yerləşmiş saatının göstərişi müqayisə olunur (çünki, bu saatların dünyəvi xətləri B' nöqtəsində kəsişir, yəni B' saatı hərəkət edərək x_1-də yerləşmiş K sisteminin saatının yanından keçir). Şəkildən görünür ki, bu satların göstərişləri t_B=OB>OB' olacaqdır (belə ki, OA=OB'=1 və OB>OA=OB'). Yəni hərəkət edən saat geri qalır: $t'_{B'} < t_B$.

§20. Relyativistik fizikada «əkizlər» məsələsi

Əvvəllərdə qeyd etdiyimiz kimi Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsində (x.n.n.) heç bir «paradoks» yoxdur. Yalnız x.n.n.-ın şərtləri pozulduqda «paradoks» əmələ gəlir.

İndi bir qədər ətraflı «əkizlər» məsələsinə nəzər salaq. Bəzən buna «əkizlər» paradoksu deyirlər. Əgər «əkizlər» bir-birinə nəzərən inersial hərəkət edirsə, onların hər biri eyni hüquqla deyəcək ki, digərinin saatı geri qalır və o, gec qocalır. Burada heç bir ziddiyyət yoxdur və bu, belə də olmalıdır. Çünki hər iki inersial sistem (I və II əkizlə bağlı sistemlər) eyni hüquqludur və saatların Eynşteyn ləngiməsini hər iki sistem üçün söyləmək olar. Digər tərəfdən qeyd edək ki, inersial hərəkət edən iki «əkiz» yalnız bir dəfə görüşə və öz saatlarının göstərişini bilavasitə tutuşdura bilərlər. Sonra onlar bir-birindən uzaqlaşır və saatların göstərişini bir-birinə radio dalğası göndərməklə müqayisə edirlər. Bu müqayisədə Lorens çevrilməsindən istifadə edərək hər bir «əkiz» yəqin edəcəkdir ki, digərinin saatı (hərəkət edən) geri qalır.

Əgər «əkizlərin» hər ikisi və ya biri qeyri-inersial hərəkət edərək başlanğıcda və sonda onlar bir-biri ilə görüşərlərsə, məsələ bir qədər dəyişər.

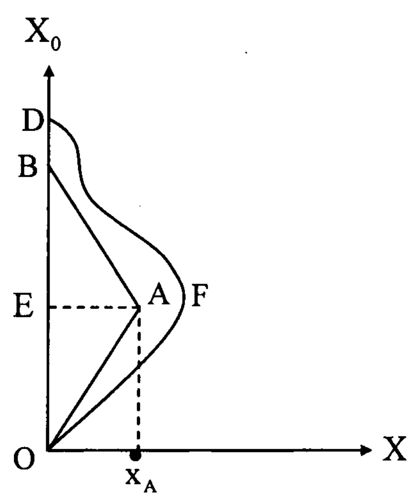
Fərz edək ki, I əkiz K ətalət sisteminin koordinat başlanğıcında (O nöqtəsində) sükunətdir, II əkiz isə ona nəzərən hərəkət edir.

Əvvəlcə sadəlik üçün fərz edək ki, hər iki əkiz O nöqtəsində olduqda öz saatlarını tutuşdururlar ($t_1^0 = t_2^0 = 0$) və sonra II əkiz sabit $\vec{\upsilon}$ sürətilə hərəkət edərək I əkizdən uzaqlaşır. O, hər hansı A nöqtəsində sürətinin istiqamətini əksinə dəyişərək sabit $-\vec{\upsilon}$ sürətilə geri qayıdır və I əkizlə yenidən görüşür. Onlar saatlarını yenidən tutuşdurduqda, yəqin edirlər ki, II əkizin saatı geri qalır:

$$t_2 = \sqrt{1-\beta^2}\,t_1. \tag{20.1}$$

Burada $\beta = \frac{\upsilon}{c}$, t_1 və t_2 birinci və ikinci əkizin ölçdüyü zaman müddətidir.

Bu nəticəni izah etmək üçün əkizlərin dünyəvi xətlərini çəkək (şəkil 20.1). I əkiz O nöqtəsində sükunətdə olduğuna görə onun dünyəvi xətti OX_0 oxu boyunca yönəlmişdir. II əkizin dünyəvi xətti isə OAB sınıq xəttidir. Əkizlər yenidən koordinat başlanğıcında (yəni B nöqtəsində) görüşürlər (B və O nöqtələrinin fəza koordinatları eynidir, yəni x=0-dır).



Şəkil **20.1**

B nöqtəsi əkizlərin dünyəvi xətlərinin kəsişdiyi nöqtədir. Məlumdur ki, hərəkət edən obyektin (saatın) elementar məxsusi zamanı $\frac{1}{c}dS$ şəklində ifadə edilir (bax: (10.2)).

Burada dS diferensial interval və ya obyektin dünyəvi xəttinin uzunluq elementdir. Əgər saat (və ya obyekt) sonlu dünyəvi xətt cızırsa, saatın göstərdiyi zaman müddəti $\frac{1}{c}\int_a^b dS$ inteqralı ilə ifadə ediləcəkdir. Burada a və b dünyəvi xəttin başlanğıc və son nöqtələridir. Buradan aydın olur ki, I və II əkizin saatlarının göstərişləri 1/c dəqiqliyi ilə OB və OAB dünyəvi xətlərinin uzunluğuna bərabərdir. OB və OAB xətlərinin uzunluqlarını müqayisə etmək üçün A nöqtəsindən OX_0 oxuna AE perpendikulyarını endirək və psevdo-Pifaqor teoremindən istifadə edək: $EB^2=EA^2+AB^2$, $OE^2=OA^2+AE^2$. Buradan EB>AB və OE>OA münasibətləri alınır. Bu o deməkdir ki, OB=OE+EB dünyəvi xəttinin uzunluğu (I əkizin) OAB dünyəvi xəttinin uzunluğundan (II əkizin) böyükdür. Beləliklə hərəkət edən əkizin (II əkizin) saatı geri qalır və o, gec qocalır.

İndi məsələni bir qədər mürəkkəbləşdirək. Başlanğıc anda əkizlər O nöqtəsində öz saatlarını tutuşdururlar və sonra I əkiz koordinat başlanğıcında sükunətdə qalır II əkiz isə istənilən qapalı əyri-xətli trayektoriya üzrə (OFD əyrisi) qeyri-inersial hərəkət edərək əvvəlcə ondan uzaqlaşır və sonra yenidən çıxış nöqtəsinə ixtiyari şəkildə yaxınlaşaraq I əkizlə görüşür. Əkizlər saatlarını yenidən müqayisə etdikdə məlum olur ki, II əkizin saatı geri qalır. Bunu izah etmək üçün yenə də əkizlərin dünyəvi xətlərini çəkək. Sükunətdə olan I əkizin dünyəvi xətti OX_0 oxu boyunca yönəlmiş düz xətdir. II əkizin dünyəvi xətti hər-hansı əyri xətli qapalı OFD trayektoriyasıdır. Dünyəvi xətlər D nöqtəsində kəsişir (D və O nöqtələrinin fəza koordinatları eynidir, yəni x=0-dır). I və II əkizin sərf etdiyi zaman müddətiləri 1/c dəqiqliyi ilə OD düz xəttinin (I əkiz) və OFD əyrixətli trayektoriyanın (II əkiz) uzunluqlarına bərabərdir.

II əkizin əyrixətli trayektoriyasını elə kiçik düzxətli elementlərə (ΔS_i, i=1,2,...,N) bölmək olar ki, hər bir elementdə hərəkətə inersial hərəkət kimi baxmaq mümkün olsun. Bir elementdən digərinə keçdikdə sürət sıçrayışla dəyişir və bu anda inersiallıq pozulur. Hər bir düzxətli ΔS_i elementini diaqonal hesab edərək onun üzərində elementar düzbucaqlı üçbucaq quraq və OX_0 oxuna paralel və perpendikulyar olan elementar katetləri $\Delta S_i^{\parallel}$ və $\Delta S_i^{\perp}$ ilə işarə edək. Psevdo-Pifaqor teoreminə görə hər bir üçbucaqda $\Delta S_i^{II} > \Delta S_i$ olacaqdır. Son ifadədə parçalar üzrə cəmləmə aparsaq ($i=1\div N$) sol tərəfdə OD xəttinin uzunluğunu, sağ tərəfdə isə OFD əyri xətli trayektoriyanın uzunluğunu almış olarıq.

Beləliklə, OD xəttinin uzunluğu OFD əyri xəttin uzunluğundan böyük olur, yəni II əkizin saatı geri qalır və o, gec qocalır.

Deyilənlərdən aydın olur ki, psevdo-Evklid mütəvisində iki hadisəni birləşdirən əyri dünyəvi xəttin uzunluğu həmin hadisələr arasındakı düz xəttin uzunluğundan kiçikdir. Eyni sözləri bütövlukdə Minkovski fəzasına aid etmək olar. Qeyd edək ki, dünyəvi xətlər zamana oxşar intervallardan təşkil edilməlidir. Əks halda hadisələr arasında səbəbiyyət əlaqəsi pozulardı.

Əkizlər məsələsinin fiziki mahiyyətini izah edərkən nəzərə almaq lazımdır ki, I əkiz həmişə inersial hərəkət edir və Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin (x.n.n.) prinsiplərinə sadiq qalır. Buna görə də onun digər əkizin saatının geri qalması haqda mülahizələri həmişə toplanır. II əkiz isə trayektoriyanın bəzi hissələrində qeyri-inersial hərəkət edir və müxtəlif təcillərə məruz qalır. Bu əkiz OAB sınıq xəttin üzərində A nöqtəsində sürətinin istiqamətini sıçrayışla əksinə dəyişir və çox böyük təcil alır. Əslində A nöqtə yox müəyyən oblast olmalıdır. II əkiz A nöqtəsinin yaxın ətrafı istisna olmaqla sınıq xəttin digər hissələrində inersial hərəkət edir. Digər halda II əkiz OFD əyrixətli trayektoriya boyunca hərəkət etdikdə isə ΔS_i parçalarının birindən digərinə keçdikdə sürətini kəskin dəyişir və təcillə hərəkət edir. Ümumiyyətlə II əkiz x.n.n.-ın prinsiplərini pozur və onun digər əkizin saatının geri qalması haqda mülahizələri bir parçadan-digərinə keçdikdə dəyişir və bu gecikmələr tam toplanmır. Buna görə də II əkizin saatı həmişə geri qalır.

Qeyd: Biz şəkil 20.1-ə qayıdaraq sadə hal üçün (20.1) düsturunun hər iki əkizə görə doğru olduğunu bilavasitə göstərək. İkinci əkizin A dönmə nöqtəsinin fəza koordinatının $x_A = \frac{1}{2}\upsilon t_1$ olduğunu nəzərə alaq. Çünki hərəkət edən əkiz OAB «yolunu» sükunətdəki əkizə nəzərən t_1 zamanı müddətində qət edir və $OA = \frac{1}{2}OAB$. OA «yolunu» getmək isə OX_A məsafəsini getmək deməkdir. Şəkildən görünür ki, OE=EB və OA=AB. Əkizlər yenidən görüşdükdə II və I əkizin saatlarının göstəriciləri

$$t_2 = \frac{OAB}{c} \equiv \frac{2 \cdot OA}{c}, \tag{20.2}$$

$$t_1 = \frac{OB}{c} \equiv \frac{2 \cdot OE}{c} \tag{20.3}$$

invariant ifadələrlə təyin olunur. OA invariantının ifadəsini yazaq:

$$OA = \sqrt{(\Delta x_0)^2 - \Delta x^2} = \sqrt{OE^2 - EA^2} = \sqrt{\left(\frac{ct_1}{2}\right)^2 - x_A^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ct_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\upsilon t_1}{2}\right)^2} = \frac{ct_1}{2}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{20.4}$$

Bunu (20.2)-də nəzərə alaq:

$$t_2 = t_1\sqrt{1-\beta^2}.$$

Bu, II əkizə nəzərən hesablanmış (20.1) düsturudur. İndi (20.4) ifadəsindən istifadə edərək OE dünyəvi xəttinin uzunluğunu hesablayaq və bunu (20.3)-də nəzərə alaq:

$$t_1 = \frac{2}{c} \cdot OE = \frac{2}{c}\sqrt{OA^2 + EA^2} =$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{OA}{c}\right)^2 + \left(\frac{X_A}{c}\right)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta t_1}{2}\right)^2}.$$

Bu tənlikdən t_1-i təyin edək:

$$t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{və ya} \quad t_2 = t_1\sqrt{1-\beta^2}.$$

Bu da I əkizə nəzərən hesablanmış (20.1) düsturdur. Beləliklə, hər iki əkiz yəqin edir ki, II əkiz qeyri-inersial hərəkət etdiyinə görə məhz onun saatı geri qalır.

§21. 4-ölçülü psevdo-Evklid fəzasında ko- və kontravariant vektorlar və tenzorlar

Biz indiyə qədər 4-ölçülü vektorların 4-cü komponentini xəyali götürürdük və bu da hesabatı xeyli asanlaşdırırdı (məs.: adi vektor $x_\mu = \{x_1, x_2, x_3, x_4 = ict\}$, bax: §14, 15). Burada bütün vektorlar və ya tenzorlar eyni qayda ilə təyin edilirdi. Belə məlum olur ki, klassik elektrodinamikanı (hətta Kvant mexanikasını, kvant sahə nəzəriyyəsini və s.) təsvir etmək üçün bu vektorlar və tenzorlar tam qənaətbəxşdir. Lakin Eynşteynin qravitasiya nəzəriyyəsini şərh etmək üçün bu vektorlar artıq əlverişli olmur. Bu nəzəriyyədə 4-ölçülü qeyri-Evklid fəzasının həqiqi vektor və tenzorlarından, onların ko- və kontravariant şəkillərindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, son zamanlar bəzən hətta elektrodinamikanın özünü ko- və kontravariant vektorlarla təsvir etməyə başlamışlar. Bundan əlavə dövrü elmi ədəbiyyatda bu vektor və tenzorlardan geniş istifadə olunur.

Ona görə biz burda ko- və kontravariant vektor və tenzorlar, oların çevrilməsi haqda qısa məlumat veririk.

4-ölçülü psevdo-Evklid (Minkovski) fəzasında 4-ölçülü həqiqi radius vektoru belə təyin edirlər:

$$x^{\mu}=\{x^0,x^1,x^2,x^3\}\equiv\{x^0,\vec{r}\}. \qquad (21.1)$$

Burada zaman komponenti olan $x^0=ct$ birinci yerdə yazılır («sıfır» komponenti), x^1, x^2, x^3 isə 3-ölçülü $\vec{r}$ radius vektorunun komponentləridir və onlar *fəza komponentləri* adlanır ($x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$). x^{μ} *kontravariant vektor* adlanır və istənilən təbiətli kontravariant vektor $A^{\mu}=\{A^0,A^1,A^2,A^3\}\equiv\{A^0,\vec{A}\}$ şəklində təyin edilir. μ-indeksi 0, 1, 2, 3 qiymətlərini alır. İntervalın $S^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=$invar ifadəsindən alınır ki, 4-ölçülü x^{μ} radius vektorunun kvadratı $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$ şəklində olmalıdır. Belə kvadratik formanın alınması üçün aşağıdakı şəkildə ikinci növ 4-ölçülü radius vektor yazmaq lazımdır:

$$x_{\mu}=\{x^0,-x^1,-x^2,-x^3\}=\{x^0,-\vec{r}\}=\{x_0,x_1,x_2,x_3\} \qquad (21.2)$$

Bu *4-ölçülü kovariant radius vektor* adlanır. Yazılışdan görünür ki, 4-radius vektorun kontra- və kovariant komonentləri aşağıdakı şəkildə bir-birilə əlaqədardır: $x^0=x_0$, $x^1=-x_1$, $x^2=-x_2$, $x^3=-x_3$. Bu əlaqə bütün vektorlar və tenzorların uyğun komponentlərinə aiddir. Psevdo-Evklid fəzasında 4-radius vektorun kvadratı $(x^{\mu})^2$ şəklində deyil $x^{\mu}x_{\mu}=$
$=x^0x_0+x^1x_1+x^2x_2+x^3x_3=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2\equiv(x^0)^2-\vec{r}^2$ şəklində təyin edilir. Yuxarıda və aşağıda yazılmış eyni indekslər üzrə cəm aparıldığı fərz edilir (μ=0, 1, 2, 3). Biz psevdoevklid fəzasında 4-ölçülü həqiqi vektorların komponentlərini xarakterizə edən və yuxarıda həm də

aşağıda yazıla bilən bu indekslərə psevdoevklid indeksləri deyəcəyik.

Psevdoevklid fəzasında sabit simmetrik metrik tenzordan istifadə edirlər:

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (21.3)$$

Qravitasiya nəzəriyyəsində metrik tenzor çox mühüm rol oynayır və ümumiyyətlə zaman və fəzanın funksiyasıdır. Psevdoevklid fəzasında o sabitdir və yalnız fəzanın siqnaturasını göstərir və vektorların (tenzorların) indekslərini qaldırıb-endirməyə kömək edir:

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu}x_{\nu}, x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu}, A^{\mu}B^{\nu}g_{\mu\nu} = A_{\nu}B^{\nu} = A^{\mu}B_{\mu} \text{ və s.}$$

Bu tenzorun köməyilə diferensial intervalı belə yazırlar (bax: (18.8')):

$$dS = \sqrt{(dx^0)^2 - (d\vec{r})^2} = \sqrt{dx^{\mu}dx_{\mu}} = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}. \qquad (21.4)$$

Əvvəlki bəhslərdə (§§14, 15) tanış olduğumuz adi 4-ölçülü vektorlarda olduğu kimi burada da 4-ölçülü kontravariant radius vektor (və ya ixtiyari kontravariant vektor) dedikdə elə dörd x^0, x^1, x^2, x^3 (və ya A^0, A^1, A^2, A^3) kəmiyyətin məcmui başa düşülür ki, bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə onlar Lorens çevrilmə düsturları ilə çevrilsinlər (məs.: (11.6) və (11.7)):

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 ch\varphi - x^1 sh\varphi, \\ x'^1 = -x^0 sh\varphi + x^1 ch\varphi, \\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3. \end{cases} \qquad (21.5)$$

Burada $x^0 = ct$, $th\varphi = \dfrac{V}{c}$.

K-dan K'-ə keçidi ifadə edən (21.5) çevrilməsini qısa şəkildə yazaq:

$$x'^{\mu} = \lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}. \qquad (21.5')$$

Burada vektorlar və çevrilmə matrisləri həqiqidir və ona görə Lorens çevrilmə matrisini əvvəlkindən fərqli olar yeni hərflə, yəni λ ilə işarə edirik. Matrisin indekslərini $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$ şəklində qəsdən bir-birindən aralı yazırlar ki, onları qaldırıb endirdikdə bir-birinə mane olmadan öz boş yerlərini tutsunlar. (21.5') ifadəsində $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$ matrisində μ – sətri, ν isə sütunu göstərir və ν üzrə cəmləmə aparılır (ν=0,1,2,3). (21.5) ifadəsindən istifadə edərək xüsusi Lorens çevrilməsi üçün bu matrisin elementlərini yazaq:

$$(\lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} ch\varphi & -sh\varphi & 0 & 0 \\ -sh\varphi & ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (21.6)$$

Ümumi Lorens çevrilməsi üçün bu matris daha mürəkkəb olacaqdır.

İki ranqlı tenzor iki 4-ölçülü vektorun hasili kimi özünü aparır. Məsələn, $T^{\mu\nu} \sim x^{\mu}x^{\nu}, T_{\mu}{}^{\nu} \sim x_{\mu}x^{\nu}$ və $T_{\mu\nu} \sim x_{\mu}x_{\nu}$. Burada $T^{\mu\nu}$ 2 ranqlı kontravariant-, $T_{\mu\nu}$ 2-ranqlı kovariant- və $T_{\mu}{}^{\nu}$ 2-ranqlı *qarışıq tenzor* adlanır. Birinci tenzor üçün Lorens çevrilməsi qanununu yazaq:

$$T'^{\mu\nu} = \lambda^{\mu}{}_{\rho}\lambda^{\nu}{}_{\sigma}T^{\rho\sigma}. \qquad (21.7)$$

Tenzorların indekslərini $g_{\mu\nu}$ və $g^{\mu\nu}$ metrik tenzorları vasitəsilə qaldırıb-endirəcəyik: $T^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = T_{\rho}{}^{\nu}$, $T^{\mu\nu}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} = T_{\rho\sigma}$ və s. Tenzorun və matrisin sıfır indeksini qaldırdıqda və endirdikdə tenzorun komponenti işarəni dəyişmir, lakin 1, 2, 3 indekslərini hər dəfə qaldırdıqda və ya endirdikdə tenzorun komponenti öz işarəsini əksinə dəyişir: $T^{00} = T^{0}_{0} = T_{00}$, $T^{01} = -T^{0}_{1} = -T_{01}$, $T^{11} = -T^{1}_{1} = T_{11}$, $T^{12} = -T^{1}_{2} = T_{12}$ və s. Metrik tenzorun sıfırdan fərqli komponentləri $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ olduğundan, $g^{0}_{0} = g^{1}_{1} = g^{2}_{2} = g^{3}_{3} = 1$ olar. Yəni $g^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{əgər } \mu \neq \nu \\ 1, & \text{əgər } \mu = \nu \end{cases}$. δ^{ν}_{μ} 2 ranqlı *vahid tenzor* adlanır. Eyni üsulla göstərmək olur ki, $g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$. Vektorların Lorens çevrilməsi üçün (21.5) və ya (21.5') düsturlarını yadda saxlamaq kifayətdir. Sonuncu düstur məsələyə daha ümumi şəkildə baxmağa imkan verir. Bu düsturlardan istifadə edərək Lorens çevrilməsinin bütün variantlarını ala bilərik.

Məsələn, kovariant vektorun Lorens çevrilməsi qanununu almaq üçün (21.5') düsturunun hər tərəfini $g_{\rho\mu}$ tenzoruna vurmaq, bu tenzorun xassələrindən istifadə etmək, və $A^{\nu}B_{\nu}=A_{\nu}B^{\nu}$ eyniliyini nəzərə almaq lazımdır:

$$g_{\rho\mu}x'^{\mu} = g_{\rho\mu}\lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \text{ və ya } x'_{\rho} = \lambda_{\rho\nu}x^{\nu} = \lambda_{\rho}{}^{\nu}x_{\nu}.$$

Son düsturu belə yazırlar:

$$x'_{\rho} = \lambda_{\rho}{}^{\nu}x_{\nu}. \tag{21.8}$$

Burada $\lambda_{\rho}{}^{\nu}$-də ρ indeksi sətri ν isə sütunu xarakterizə edir və ν üzrə cəmləmə aparılır. Xüsusi Lorens çevrilməsi üçün $\lambda_{\rho}{}^{\nu}$-nün matris elementlərini yazmaqdan ötrü (21.6) düsturundakı $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$-nün matris elementlərindən istifadə etmək lazımdır. (21.5'), (21.6) və (21.8) düsturlarından istifadə edərək $\lambda^{\mu}{}_{\nu}$ və $\lambda_{\rho}{}^{\nu}$ matrislərinin yuxarıdan iki sətrini yazaq (sadəlik üçün) və nəzərə alaq ki, bunlarda cəmləmə indeksi ν-dür:

$$(\lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \lambda^{0}{}_{0} & \lambda^{0}{}_{1} & \lambda^{0}{}_{2} & \lambda^{0}{}_{3} \\ \lambda^{1}{}_{0} & \lambda^{1}{}_{1} & \lambda^{1}{}_{2} & \lambda^{1}{}_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & -\text{sh}\varphi & 0 & 0 \\ -\text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\lambda_{\rho}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} \lambda_{0}{}^{0} & \lambda_{0}{}^{1} & \lambda_{0}{}^{2} & \lambda_{0}{}^{3} \\ \lambda_{1}{}^{0} & \lambda_{1}{}^{1} & \lambda_{1}{}^{2} & \lambda_{1}{}^{3} \end{pmatrix}.$$

Ardıcıl yazılmış 3 cədvəlin müqayisəsindən və «0» indeksini qaldırdıqda və ya endirdikdə matrisin (tenzorun) elementinin dəyişmədiyini, lakin 1,2,3 indekslərindən, hər birini qaldırdıqda və ya endirdikdə matris (tenzor) elementinin işarəsinin əksinə dəyişdiyini nəzərə alaq:

$$\lambda^{0}{}_{0} = \text{ch}\varphi = \lambda_{0}{}^{0};\ \lambda^{0}{}_{1} = -\text{sh}\varphi = -\lambda_{0}{}^{1};\ \lambda^{0}{}_{2} = 0 = \lambda_{0}{}^{2};\ \lambda^{0}{}_{3} = 0 = \lambda_{0}{}^{3};$$

$$\lambda^{1}{}_{0} = -\text{sh}\varphi = -\lambda_{1}{}^{0};\ \lambda^{1}{}_{1} = \text{ch}\varphi = \lambda_{1}{}^{1};\ \lambda^{1}{}_{2} = 0 = \lambda_{1}{}^{2};\ \lambda^{1}{}_{3} = 0 = \lambda_{1}{}^{3} \quad \text{və s.}$$

Bu bərabərliklərin sağ tərəflərindən istifadə edərək $\lambda_{\rho}{}^{\nu}$-matrisini xüsusi Lorens çevrilməsi üçün yaza bilərik:

$$(\lambda_{\rho}{}^{\nu}) = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & \text{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21.8'}$$

Ümumi halda Lorens çevrilməsi matrislərinin digər xassələrini araşdıraq. Kvadratik formanın invariantlıq şərtini yazaq:

$$x'^{\mu}x'_{\mu} = x^{\rho}x_{\rho} = \text{in var} \text{ və ya } g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} = \text{in var}. \tag{21.9}$$

Bərabərliyin sol tərəfinin şəklini dəyişək: $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\lambda^{\mu}{}_{\rho}x^{\rho}\lambda^{\nu}{}_{\sigma}x^{\sigma}$. Burada (21.9)-un sağ tərəfini nəzərə alaq:

$$g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\lambda^{\mu}{}_{\rho}\lambda^{\nu}{}_{\sigma}x^{\rho}x^{\sigma} = g_{\rho\sigma}x^{\rho}x^{\sigma}. \qquad (21.10)$$

(21.10) istənilən x^{ρ} və x^{σ} üçün doğru olduğundan

$$g_{\mu\nu}\lambda^{\mu}{}_{\rho}\lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \qquad (21.11)$$

matrislərin ortoqonallıq şərtini alırıq. Bunun daha sadə şəkli də vardır. Onu almaq üçün ya (21.11) ifadəsində $g_{\rho\sigma}$ metrik tenzorun xassələrindən istifadə edirlər, ya da vektorların hasilinin $x'^{\mu}x'_{\mu} = x^{\nu}x_{\nu} = \text{in var}$ ifadəsində Lorens çevrilməsi matrislərini aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$x'^{\mu}x'_{\mu} = \lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\lambda_{\mu}{}^{\rho}x_{\rho} = \lambda^{\mu}{}_{\nu}\lambda_{\mu}{}^{\rho}x^{\nu}x_{\rho} = x^{\nu}x_{\nu} = \text{in var}.$$

Axırıncı bərabərliyin ödənməsi üçün

$$\lambda^{\mu}{}_{\nu}\lambda_{\mu}{}^{\rho} = \delta_{\nu}{}^{\rho} \qquad (21.12)$$

olmalıdır. Axırıncı münasibət (21.11) ifadəsi ilə ekvivalentdir və hər ikisi Lorens matrislərinin ortoqonallığı şərtidir.

Burada verilən (21.11) və (21.12) ortoqonallıq şərti ümumi Lorens çevrilmələri üçün də doğrudur.

(21.5') və (21.8) çevrilmələri (K)-dan (K')-ə keçidi, yəni düz keçidi icra edir. Biz çox asanlıqla tərs keçidi (yəni (K')-dən (K)-ya) icra edən Lorens çevrilmələrini yaza bilərik. Bunun üçün (21.5')-i $\lambda_{\mu}{}^{\rho}$-ya vuraq və matrislərin ortoqonallığı şərtindən istifadə edək: $\lambda_{\mu}{}^{\rho}x'^{\mu} = \lambda_{\mu}{}^{\rho}\lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} =$
$= \delta_{\nu}{}^{\rho}x^{\nu} = x^{\rho}$. Deməli,

$$x^{\rho} = \lambda_{\mu}{}^{\rho}x'^{\mu}. \qquad (21.13)$$

Bu kontravariant vektor üçün tərs Lorens çevrilməsidir. Kovariant vektor üçün tərs Lorens çevrilməsini almaq üçün ya (21.8)-i $\lambda^{\rho}{}_{\mu}$ matrisinə vuraraq analoji hərəkət etməliyik, ya da sadəcə olaraq (21.13) bərabərliyinin sağ və sol tərəfində ρ indeksini aşağıda yazmalıyıq:

$$x_{\rho} = \lambda_{\mu\rho}x'^{\mu} \equiv \lambda^{\mu}{}_{\rho}x'_{\mu}. \qquad (21.14)$$

Çox vaxt çevrilmələri və hasilləri matris şəklində yazmaq daha əlverişli olur. Burada x^μ vektorunu sütun şəklində göstərirlər $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ və onun transponirə edilmişini sətir şəklində yazırlar $x^T=(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $(g_{\mu\nu})$ matrisini g ilə işarə edirlər. Matrisləri bir-birinə vuranda birinci matrisin sətrini ikinci matrisin sütununa vurub uyğun yerdə yazırlar. Onda intervalın kvadratını belə yazmaq olar: $S^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv x^T g x$. Buna oxşar olaraq (21.11) ortoqonallıq şərtini aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$\lambda^T g \lambda = g. \qquad (21.11')$$

(21.11') bərabərliyinin hər tərəfindən determinant alaq və matrislərin hasilinin determinantı onların determinantlarının hasilinə bərabərdir şərtindən istifadə edək:

$$\det(\lambda^T g \lambda)=\det g \text{ və ya } \det\lambda^T \cdot \det g \cdot \det\lambda=\det g.$$

Nəticədə $\det\lambda^T \cdot \det\lambda=1$ və ya $|\det\lambda|^2=1$ olur. Buradan

$$\det\lambda = \pm 1 \qquad (21.15)$$

alınır. $\det\lambda = +1$ qiyməti məxsusi Lorens çevrilməsinə və $\det\lambda = -1$ halı isə qeyri-məxsusi Lorens çevrilməsinə uyğundur. Qeyri-məxsusi Lorens çevrilməsində 4-ölçülü fəzanın fırlanması ilə yanaşı onun inversiyası da mövcuddur.

(21.11) bərabərliyini indekslərin $\rho=\sigma=0$ qiyməti üçün yazsaq aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$(\lambda_0^0)^2 - (\lambda_0^1)^2 - (\lambda_0^2)^2 - (\lambda_0^3)^2 = 1.$$

Burada $(\lambda_0^0)^2 \geq 1$ və ya $\lambda_0^0 \geq 1$ və $\lambda_0^0 \leq -1$ şərtləri alınır. $\lambda_0^0 \geq 1$ şərti zamanın istiqamətinin dəyişmədiyi (ortoxron) çevrilməyə və $\lambda_0^0 \leq -1$ isə zamanın inversiya etdiyi (qeyri-ortoxron) çevrilməyə uyğundur.

4-ölçülü 4-ranqlı antisimmetrik vahid $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tenzorunun sıfırdan fərqli komponentləri belə təyin edilir: $\varepsilon^{0123} = +1$, $\varepsilon_{0123} = -1$.

İndi diferensial operatorlar haqqında qısa məlumat verək. Bu məqsədlə koordinat və zamandan asılı olan hər hansı $\varphi(x)=\varphi'(x')$=invar skalyar funksiyanın diferensialını hesablayaq:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} dx^\mu = \text{in var}.$$

Yazılışdan aydındır ki, dx^{μ} kontravariant vektor olduğundan $\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}$ kovariant vektor olmalıdır (çünki, belə iki vektorun hasimi invariantdır). Beləliklə, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{0}},\vec{\nabla}\varphi\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},\vec{\nabla}\right)\varphi$ kovariant diferensiallama əməliyyatıdır və $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},\vec{\nabla}\right)$ kovariant diferensial operatordur. Onu çox vaxt ∂_{μ} şəklində yazırlar: $\partial_{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},\vec{\nabla}\right)$. İndi skalyar funksiyanın x_{μ} kovariant koordinatlara görə törəməsini hesablayaq: $\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\cdot\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x_{\mu}}$.

Aydındır ki, $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x_{\mu}}=g^{\mu\nu}$. Onda aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu}}=g^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},-\vec{\nabla}\varphi\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},-\vec{\nabla}\right)\varphi.$$

Bu kontravariant diferensiallama əməliyyatıdır və burada iştirak edən $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},-\vec{\nabla}\right)$ kəmiyyəti *kontravariant diferensial operator* adlanır.

Onu adətən ∂^{μ} şəklində yazırlar: $\partial^{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},-\vec{\nabla}\right)$. Deyilənlərdən aydın olur ki, $\partial_{\mu}\varphi$-4-ölçülü qradiyent, $\partial_{\mu}A^{\mu}\equiv\partial^{\mu}A_{\mu}$-4-ölçülü divergensiya, $-\partial_{\mu}\partial^{\mu}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\vec{\nabla}^2=\Box$=*skalyar Dalamber operatoru* adlanır. Beləliklə biz ko- və kontravariant vektorlar və tenzorlar, onların çevrilmə qanunları, əsas xassələri və ödədiyi münasibətlər haqda əsas məlumatları verdik. Bu məlumatları adi 4-ölçülü vektor və tenzorlar haqqında 14-17-ci paraqraflarda verilən təsvirlə müqayisə etdikdə yeni, önəmli bir şey hiss olunmur və yalnız ko- və kontravariant psevdoevklid indeksləri uyğun düsturları bir qədər mürəkkəbləşdirir. Ona görə biz hər yerdə hesablamaları adi 4-ölçülü vektor və tenzorlarla aparacağıq, lakin mühüm kəmiyyətləri və əsas tənlikləri, yeri gəldikdə, psevdoevklid indekslərində də yazacağıq. Bu, ya ayrıca qeyd olunacaq (Məsələn, ifadənin altından xətt çəkməklə), ya da yazılış kontekstindən aydın olacaqdır.

Axırda nəticə kimi qeyd edək ki, biz 4-ölçülü adi vektorlar və tenzorlar (yəni 4-cü komponenti xəyali olan, məsələn $x_4 = ict = ix_0$ olan) üzərində əməliyyat apararkən 4-ölçülü vektorun kvadratını $x_\mu^2 = \vec{r}^2 + +x_4^2 = \vec{r}^2 - x_0^2$ şəklində hesablayırıq. Əgər bütün 4-ölçülü kəmiyyətlər bu şəklində hesablanırsa, deyirlər ki, hesabat Pauli-Eynşteyn metrikasında aparılmışdır. Lakin 4-ölçülü vektorları və tenzorları ko- və kontravariant şəklində yazaraq, onlar üzərində əməliyyat apararkən 4-ölçülü vektorun kvadratını $x_\mu x^\mu = x_0^2 - \vec{r}^2$ şəklində hesablayırlar. Bu zaman deyirlər ki, hesabat Byorken-Drel metrikasında aparılır. Bu kitabda biz əsasən Pauli-Eynşteyn metrikasından istifadə edəcəyik. Lakin bəzi hallarda Byorken-Drel metrikasına da nəzər salacağıq.

IV FƏSİL
QALİLEY-NYUTON MEXANİKASINDA VƏ RELYATİVİSTİK MEXANİKADA ƏN KİÇİK (STASİONAR) TƏSİR PRİNSİPİ. RELYATİVİSTİK KİNEMATİKA

§22. Qaliley-Nyuton mexanikasında Hamiltonun variasiya prinsipi və Laqranj tənliyi

Məlumdur ki, qeyri-relyativistik mexanikanın əsas tənlikləri Nyuton qanunları ilə ifadə edilir. Lakin klassik mexanikada elə analitik riyazi prinsiplər verilmişdir ki, onlar Nyuton qanunlarını odəməklə yanaşı çox geniş tətbiq oblastına malikdir. Bunlardan birisi və ən mühüm olanı Hamiltonun variasiya prinsipi və ya ən kiçik təsir prinsipidir. Bu prinsipi bir qədər deformasiya etməklə bütün relyativistik fizikaya və o cümlədən elektromaqnit sahəsi və digər sahələrə tətbiq etmək mümkündür. Ona görə bu prinsipin müzakirəsi böyük əhəmiyyətə malikdir.

Fərz edən ki, N sayda maddi nöqtədən (cisimdən) ibarət mexaniki sistem verilmişdir və biz bu sistemin 3-ölçülü Evklid fəzasında hərəkətini öyrənirik. Sistemin sərbəstlik dərəcəsi n=3N-*l* olacaqdır. Burada *l* mexaniki sistemdəki rabitələrin, yəni N maddi nöqtə arasındakı əlaqələrin sayıdır. Sərbəstlik dərəcəsi mexaniki sistemi tam təsvir edən və bir-birindən asılı olmayan funksiyaların, yəni koordinatların sayıdır. Sistemi təsvir edən funksiyalar ya ümumiləşmiş koordinatlar $q_i(t), i=1,2,...,n$ və ya adi dekart koordinatları $x_i(t), i=1,2,...,n$ ola bilər. Əgər sistemdə rabitələri nəzərə almasaq, yəni *l*=0 qəbul etsək, onda N maddi nöqtədən ibarət sistemin sərbəstlik dərəcəsi n=3N olar. Bəzən mexaniki sistem bir ədəd maddi nöqtədən ibarət ola bilər. Əgər bu maddi nöqtə sərbəstdirsə, bu sistemin sərbəstlik dərəcəsi n=3 olacaqdır və sistemin (maddi nöqtənin) istənilən zaman anında vəziyyəti 3-ölçülü fəzada 3 ədəd x(t), y(t), z(t) dekart koordinatları ilə təyin ediləcəkdir. Biz mexaniki sistemin adı fəzada t_1 anında tutduğu I vəziyyətdən onun t_2 anında tutduğu II vəziyyətə keçməsini müşahidə edəcəyik. Əgər mexaniki sistem bir ədəd maddi nöqtədən ibarətdirsə, o, I vəziyyətdən II vəziyyətə keçdikdə 3-ölçülü fəzada bir əyri, adi trayektoriya cızacaqdır. Bu trayektoriyanın tənliyi və ya forması 3 ədəd x(t), y(t), z(t) dekart koordinatları ilə təyin olunacaqdır.

Əgər mexaniki sistem n sərbəstlik dərəcəsinə malikdirsə, onun hər hansı t anında 3-ölçülü fəzada tutduğu vəziyyəti müəyyən etmək üçün n sayda funksiya, yəni ümumiləşmiş $q_1(t)$, $q_2(t)$, ... $q_n(t)$ koordinatları verilməlidir. Əgər biz şərti olaraq n-ölçülü fiktiv fəza götürsək və burada n-sayda koordinat oxu seçərək hər bir ox boyunca uyğun ümumiləşmiş koordinatı qeyd etsək, onda hər bir anda mexaniki sistemin tutduğu vəziyyət, yəni onun konfiqurasiyası n-ölçülü fiktiv fəzada bir nöqtə ilə təsvir olunacaqdır. Bu fəzaya *konfiqurasiya fəzası* və n-ölçülü nöqtəyə *təsviredici nöqtə* deyilir. Zaman keçdikcə mexaniki sistemin 3-ölçülü fəzada vəziyyətinin dəyişməsi konfiqurasiya fəzasında təsviredici nöqtənin hərəkətinə, yerdəyişməsinə səbəb olacaqdır. Onda zamanın funksiyası kimi $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ ümumiləşmiş koordinatların məcmui təsviredici nöqtənin konfiqurasiya fəzasında hərəkəti zamanı cızdığı əyrini təyin edəcəkdir. Klassik mexanikada «sistemin hərəkəti» dedikdə məhz bunu nəzərdə tuturlar.

Burada söhbət mexaniki sistemin ixtiyari zaman anında 3-ölçülü fəzada tutuğu vəziyyətdən və zaman keçdikcə bu vəziyyətin dəyişməsindən gedir. Göstərdik ki, sistemin t anında tutduğu vəziyyət həmin anda verilmiş n sayda ümumiləşmiş $q_i(t)$, $i=1, 2, ..., n$ koordinatları ilə tam müəyyən edilir. Sistemin t anında halını müəyyən etmək üçün isə həmin anda onun n sayda ümumiləşmiş $q_i(t)$ koordinatlarından əlavə n sayda $\dot{q}_i(t)=\dfrac{dq_i(t)}{dt}$ ümumiləşmiş sürətləri də verilməlidir.

İstənilən mexaniki sistemi Laqranj funksiyası adlanan bir L funksiyası ilə xarakterizə edirlər. Laqranj funksiyası sistemin ümumiləşmiş koordinatları, ümumiləşmiş sürətləri və zamandan asılıdır: $L(q_i(t),\ \dot{q}_i(t), t)$. Mexaniki sistem qapalı olduqda Laqranj funksiyası zamandan aşkar asılı olmur: $L(q_i(t),\ \dot{q}_i(t))$. Fəza və zamanın simmetriyasından və mexaniki sistemin xassələrindən istifadə edərək uyğun Laqranj funksiyasını qurmaq mümkündür.

Laqranj funksiyasından istifadə edərək sistem üçün aşağıdakı şəkildə yeni kəmiyyət-funksional daxil edirlər:

$$S[q_i]=\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\ \dot{q}_i(t), t)dt. \tag{22.1}$$

Bu funksional *sistemin təsir inteqralı* (və ya təsir) adlanır. Funksionalın arqumentləri $q_i(t)$ sistemin müşahidə olunduğu $t_1 \le t \le t_2$ zaman intervalında təyin edilmiş və intervalın uclarında verilmiş $q_i(t_1)$ və $q_i(t_2)$ qiymətlərini alan funksiyalardır. (22.1) ifadəsi mexaniki sistem t_1 anında tutduğu I vəziyyətdən t_2 anında tutduğu II vəziyyətə keçdiyi zaman onun konfiqurasiya fəzasında cızdığı əyri (yəni trayektoriya) boyunca aparılan əyrixətli inteqraldır. Aydındır ki, (22.1) inteqralının qiyməti t_1 və t_2-nın verilmiş qiymətlərində inteqrallanmanın hansı əyri boyunca aparılmasından, yəni $q_i(t)$ funksiyalarının şəklindən, formasından asılıdır.

Ən kiçik təsir prinsipi belə ifadə edilir: sistem t_2-t_1 zaman intervalında real hərəkət edərkən mümkün olan trayektoriyalardan elə həqiqi trayektoriya (elə formalı q_i-lər) seçir ki, onun üzərində S təsir inteqralı minimum (ekstremum) qiymət alır. Başqa sözlə sistemin t_2-t_1 intervalında həqiqi hərəkəti $q_i(t)$-lərin elə şəklinə (formasına) uyğun gəlir ki, bu zaman S minimum qiymət alır. Məlumdur ki, funksional minimum qiymət aldıqda onun variasiyası sıfıra bərabər olur:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\ \dot{q}_i(t), t)dt = 0. \qquad (22.2)$$

Bu, ən kiçik təsir prinsipinin riyazi şəklidir. Funksiya üçün diferensialın (d) oynadığı rolu funksional üçün variasiya (δ) oynayır.

Variasiya hesabından bəzi anlayışları yadımıza salaq.

(22.2) tənliyinin araşdırmaq üçün əvvəlcə $q_i(t)$ funksiyasının variasiyasını hesablayaq. Fərz edək ki, $q_i(t)$ funksiyaları (i=1, 2, ..., n) həqiqi trayektoriyanı təsvir edir. Həqiqi trayektoriyanın kiçik deformasiya edilməsi nəticəsində alınan, yəni mümkün olan və ya təsəvvür edilən trayektoriyalardan birisi üçün ümumiləşmiş koordinatları $q_i'(t)$ ilə işarə edək. Bu trayektoriya həqiqi trayektoriyaya çox yaxındır və onların müqayisəsi aşağıdakı kəmiyyətlə xarakterizə edilir:

$$q_i'(t) - q_i(t) = \delta q_i(t). \qquad (22.3)$$

Eyni sinfə mənsub olan bir-birinə çox yaxın iki funksiyanın fərqi bu *funksiyanın variasiyası* ($\delta q_i(t)$) adlanır. Xüsusi halda $q_i'(t)$-ni belə seçmək olar: $q_i'(t) = q_i(t) + \alpha\eta_i(t)$. Burada α kiçik sabit parametr, $\eta_i(t)$ isə $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$ şərtini ödəyən ixtiyarı funksiyalardır. Axırıncı şərt bütün trayektoriyaların t_1 və t_2 anlarında konfiqurasiya fəzasında eyni iki nöqtədən keçməsini təmin edir: $q_i'(t_1) = q_i(t_1)$ və $q_i'(t_2) = q_i(t_2)$. Beləliklə biz bütün mümkün olan trayektoriyaları bir-birilə və həqiqi trayektoriya ilə müqayisə edə bilərik.

(22.3) variasiyası *forma* (*şəkil*) *variasiyası* adlanır, çünki burada eyni arqumentli funksiyaların fərqi götürülür. Adətən bu variasiyanı $\bar{\delta}$ şəklində yazırlar: $\bar{\delta}q_i(t) = q_i'(t) - q_i(t)$. Forma variasiyasında törəmə ilə variasiyanın yerini dəyişmək olar:

$$\frac{d}{dt}\bar{\delta}q_i(t) = \frac{d}{dt}(q_i'(t) - q_i(t)) = \dot{q}_i'(t) - \dot{q}_i(t) = \bar{\delta}\dot{q}_i(t).$$

Deməli

$$\frac{d}{dt}\bar{\delta}q_i(t) = \bar{\delta}\frac{d}{dt}q_i(t). \tag{22.4}$$

Funksiyanın tam variasiyası aşağıdakı şəklində hesablanır:

$$\begin{aligned}\delta q_i(t) = q_i'(t') - q_i(t) \equiv q_i'(t') - q_i(t') + q_i(t') - q_i(t) = \\ = \bar{\delta}q_i(t') + q_i(t+\delta t) - q_i(t) \cong \bar{\delta}q_i(t') + \cancel{q_i(t)} + \dot{q}_i(t)\delta t - \cancel{q_i(t)} = \\ = \bar{\delta}q_i(t') + \dot{q}_i(t)\delta t \cong \bar{\delta}q_i(t) + \dot{q}_i(t)\delta t.\end{aligned}$$

Burada $t' = t + \delta t$ götürülmüşdür.

Biz əvvəlcə bərabərliyin saq tərəfinə $q_i(t')$ həddini əlavə etdik və çıxdıq, sonra $q_i(t') = q_i(t+\delta t)$ funksiyasını Teylor sırasına ayırıb 2 hədlə kifayətləndik və nəhayət

$$\bar{\delta}q_i(t') = \bar{\delta}q_i(t + \delta(t)) \cong \bar{\delta}\{q_i(t) + \dot{q}_i(t)\delta t\} \cong \bar{\delta}q_i(t)$$

olduğunu nəzərə aldıq (xətti hədlə kifayətləndik). Tam variasiyada həm forma variasiyası ($\bar{\delta}q_i(t)$) və həm də arqumentin variasiyası hesabına alınan hədd ($\dot{q}_i\delta t$) iştirak edir. Arqumentin hesabına alınan variasiyanı adətən $\bar{\bar{\delta}}$ ilə işarə edirlər:

$$\bar{\bar{\delta}}q_i(t) = q_i(t') - q_i(t) = \dot{q}_i(t)\delta t.$$

Onda funksiyanın tam variasiyası

$$\delta q_i(t) = \bar{\delta}q_i(t) + \bar{\bar{\delta}}q_i(t) = \bar{\delta}q_i(t) + \dot{q}_i(t)\delta t \tag{22.5}$$

şəklində yazılır.

Biz gələcəkdə hər yerdə (Nöter teoremi istisna olmaqla) forma variasiyasından istifadə edəcəyik və şərti olaraq (sadəlik xətrinə) $\bar{\delta}$ əvəzində δ yazacağıq.

Funksionalın variasiyası da funksiyanın variasiyasına oxşar şəkildə hesablanır. Həqiqi trayektoriya ilə mümkün olan trayektoriyanı müqayisə edərkən $S[q_i]$ funksionalı müəyyən artım alır. Funksionalın artımının arqumentin variasiyasına nəzərən xətti olan hissəsinə *funksionalın variasiyası* (*birinci variasiya*) deyilir:

$$\delta S = S[q_i'] - S[q_i]. \tag{22.6}$$

Bu yazılışda nəzərdə tutulur ki, biz bərabərliyin sağ tərəfində δq_i ilə mütənasib hədlərlə kifayətlənəcəyik.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i'(t), \dot{q}_i'(t), t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\{L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)\} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right\}dt. \tag{22.7}$$

Biz burada $L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta\dot{q}_i, t)$ funksiyasını δq_i və $\delta\dot{q}_i$ kəmiyyətlərinə görə sıraya ayırıb 2 hədlə kifayətlənmişik. (22.7) ifadəsindən görünür ki, S funksionalından formaya görə variasiya aldıqda aşağıdakı kimi hərəkət etmək olar:

$$\delta S[q_i] = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right\}dt. \tag{22.7'}$$

İndi (22.7') bərabərliyinin sağ tərəfindəki ikinci toplananda $\delta\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$ yazaraq hissə-hissə inteqrallanma aparsaq

$$\delta S[q_i] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i(t)\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_1} dt\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right\}\delta q_i(t) \tag{22.8}$$

alarıq. Bütün ifadələrdə təkrar olunan i indeksi üzrə cəm aparılır.

İndi bilavasitə sistemin hərəkət tənliyinin (Laqranj tənliyi) alınmasına keçək. Burada iki növ variasiya məsələnə baxmaq olar.

A) Birinci məsələdə fərz edilir ki, mexaniki sistemin t_1 və t_2 zaman anlarında konfiqurasiya fəzasında tutduğu I və II vəziyyətlər fiksə olunmuşdur və sistem hərəkət edərək I vəziyyətdən II vəziyyətə keçir. Burada müxtəlif trayektoriyalar mümkün ola (təsəvvür edilə) bilər və onların hamısı I və II vəziyyətlərdən keçməlidir. Sistem elə trayektoriya seçir ki, bu həqiqi hərəkətə uyğun olsun və onun üzərində S təsir inteqralı minimum qiymət alsın, yəni $\delta S_{min} = 0$ şərti ödənsin. Qeyd edək ki, S maksimum (ekstremum) qiymət də ala bilər. Lakin bu çox böyük zaman intervalında mümkündür. Yadda saxlayaq ki, buradakı «trayektoriya» adi olmayıb şərti konfiqurasiya fəzasında çəkilmiş şərti trayektoriyadır. Əgər mexaniki sistem bir ədəd maddi nöqtədən ibarətdirsə, konfiqurasiya fəzası adi 3-ölçülü fəza ilə üst-üstə düşər və maddi nöqtənin seçdiyi əyri də adi trayektoriya olar. Bu xüsusi halı yadda saxlamaqla yanaşı, biz variasiya məsələlərində ümumiyyətlə konfiqurasiya fəzasında işləyəcəyik.

Şəkil 22.1-də konfiqurasiya fəzasında sistemin hərəkəti zamanı mümkün olan trayektoriyalar göstərilmişdir. Konfiqurasiya fəzasını tam göstərə bilmədiyimizə görə, onu şərti olaraq müstəvi ilə (q_iq_j – müstəvisi) əvəz etmişik. Sistemin real hərəkətinə uyğun gələn trayektoriyanı qalın xətlə və oxla göstərmişik. Bu trayektoriyanın digər mümkün trayektoriyalardan fərqi horizontal xətlərlə göstərilmişdir və bunların uzunluğu elə q_i-lərin $\delta q_i(t)$ variasiyaları ilə mütənasibdir. t_1 və t_2 zaman anlarında (I və II vəziyyətlərdə) trayektoriyalar görüşdüyünə görə $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ olur. Lakin t_2-t_1 intervalı daxilində istənilən t anında $\delta q_i(t)$ variasiyası ixtiyari funksiya olacaqdır və $\delta q_i(t) \neq 0$.

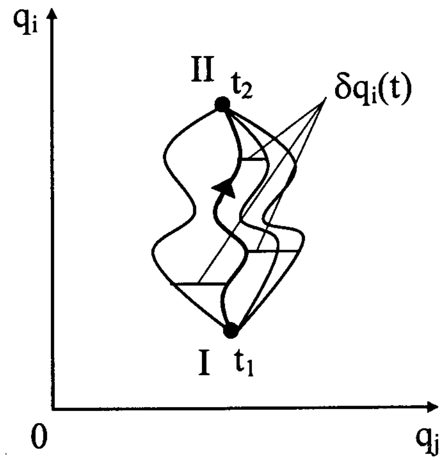
Sistemin real hərəkətinə uyğun trayektoriya üzərində $\delta S_{min} = 0$ olacaqdır. Şəkil 22.1-ə aid olan bütün dediklərimizi (22.8) ifadəsinə tətbiq edək.

$$0 = \delta S_{min} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\} \delta q_i(t). \qquad (22.9)$$

İnteqralın sıfıra bərabər və inteqral altındakı vuruqlardan birinin, yəni $\delta q_i(t)$-nin t_2-t_1 intervalında ixtiyari funksiya olmasından alınır ki, inteqral altındakı böyük mötərizə sıfır olmalıdır:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \; i = 1, 2, 3, \ldots n. \qquad (22.10)$$

Bu baxdığımız mexaniki sistemin hərəkət tənlikləridir, yəni sistemin real hərəkətini təsvir edən $q_i(t)$-lərin ödədiyi diferensial tənliklər sistemidir. Bunlar *Laqranj-Eyler tənlikləri* adlanır. Laqranj tənlikləri n-sayda ümumiləşmiş $q_i(t)$ koordinatları üçün yazılmış 2-ci tərtib xətti diferensial tənliklərdir.



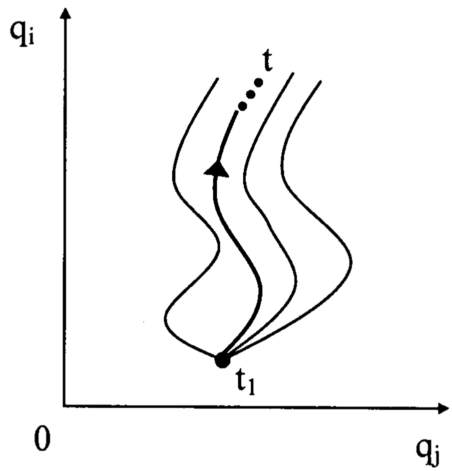
Şəkil **22.1**

Bu tənliklər Nyutonun tənliklərinə ekvivalentdir. Lakin bunlar həm əlverişlidir və həm də geniş tətbiq edilmə oblastına malikdir. Beləliklə, ən kiçik təsir Prinsipi istənilən mexaniki sistem üçün hərəkət tənliklərini almağa imkan verir. Ən kiçik təsir prinsipini təbiətin qənaətliyi qanunu adlandırmaq olar. Təbiət öz imkanlarından qənaətlə istifadə edir.

B) İkinci variasiya məsələsində fərz edilir ki, mexaniki sistemin I vəziyyəti (t_1 anında) fiksə olunur, lakin II vəziyyəti (t_2 anında) fiksə olunmamış cari vəziyyət hesab edilir. Bu zaman həqiqi trayektoriya üzərində hərəkət tənliyi ödənəcək, lakin S artıq minimum qiymət almayacaqdır, yəni $\delta S \neq 0$ olacaqdır. II vəziyyət fiksə olunmadığına görə t_2 anını cari t anı ilə işarə edəcəyik. İndi artıq trayektoriyalar ikinci vəziyyətdə, yəni t anında bir-birilə görüşməyəcəkdir. Şəkil 22.2-də həqiqi trayektoriya qalın xətlə çəkilmiş və t-anı isə cari nöqtələr şəklində göstərilmişdir. Burada S artıq funksional yox, inteqralın yuxarı sərhədində (t-anında) ümumiləşmiş koordinatların ($q_i(t)$) funksiyası olacaqdır: $S(q_i(t))$. Koordinatların variasiyası $\delta q_i(t_1) = 0$, $\delta q_i(t) \neq 0$ olacaqdır.

İndi (22.8) ifadəsində t_2-ni cari t ilə əvəz edək və yuxarıda deyilənləri burada nəzərə alaq:

$$\delta S(q_i(t)) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t). \qquad (*)$$



Şəkil **22.2**

Burada $S(q_i(t))$ funksiyasının forma variasiyası üçün $\delta S(q_i(t)) = = \frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i(t)$ yazsaq və alınmış (*) bərabərliyinin sol və sağ tərəfində $\delta q_i(t)$-nin ixtiyari olduğunu nəzərə alsaq (tənlikdə ixtiyari kəmiyyətin əmsalları bir-birinə bərabərdir):

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ və ya } \frac{\partial S}{\partial q_i} = P_i \qquad (22.11)$$

olacaqdır. Mexanikada $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ *ümumiləşmiş impuls* adlanır.

Sistemin təsir inteqralı yuxarı sərhədin funksiyası olduqda təsirin ümumiləşmiş koordinata görə törəməsi sistemin uyğun ümumiləşmiş impulsuna bərabər olur.

Göstərmək olar ki, sadə mexaniki sistemin Laqranj funksiyası sistemin kinetik (T) və potensial (V) enerjilərinin fərqinə bərabərdir:

$$L = T - V. \qquad (22.12)$$

Sistem qapalıdırsa V sistemə daxil olan maddi nöqtələrin (və ya cisimlərin) bir-birilə qarşılıqlı təsirin potensial enerjisidir. Konservativ sistem üçün V zamandan asılı deyildir. Əgər sistem qapalı deyildirsə, V-yə sistemin xarici obyektlərlə və ya sahələrlə qarşılıqlı təsir enerjisi də daxil olacaqdır. Bu halda V zamandan asılı ola bilər. Əgər sistem bir ədəd sərbəst maddi nöqtədən (cisimdən) ibarətdirsə, onun Laqranj funksiyası

$$L = T = \frac{m\vec{\upsilon}^2}{2} \tag{22.12'}$$

olar. Burada m cismin kütləsi, $\vec{\upsilon}$ isə sürətidir.

Sistemin Laqranj funksiyasına hər hansı ixtiyari funksiyanın zamana görə tam törəməsini (tam diferensialı) əlavə etmək və ya çıxmaq olar:

$$L'(q_i(t),\dot{q}(t),t) = L(q_i(t),t) + \frac{d}{dt}f(q_i,\dot{q}_i,t). \tag{22.13}$$

Doğrudan da, (22.13) üçün təsir inteqrallarını yazsaq, bu təsirlər bir-birindən *f* ixtiyari funksiyasının inteqrallanma sərhədində aldığı sabit qiymətləri ilə fərqlənəcəkdir. Sistemin hərəkət tənliyi isə təsir inteqralının variasiyasından alınır və sabitin variasiyası eynilik kimi sıfır olduğundan L' və L üçün eyni Laqranj tənliyi alınır.

İsbat edilmişdir ki, sistemin tam enerjisi

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{22.14}$$

düsturu ilə hesablanır. Enerjinin impulsla ifadəsinə *Hamilton funksiyası* deyilir. Hamilton funksiyası ümumiyyətlə koordinat, impuls və zamanın funksiyasıdır: $H(q_i, p_i, t)$. Laqranj funksiyası isə koordinat, sürət və zamandan asılıdır: $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Hamilton funksiyası da (22.14) düsturu ilə ifadə olunur:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{22.14'}$$

Mexaniki sistemin hərəkətini Laqranj tənliklərindən əlavə Hamilton tənlikləri ilə də təsvir etmək olur. Bu tənliklər bir-birinə ekvivalentdir. Hamilton tənliklərini də ən kiçik təsir prinsipindən alacağıq. Bunun üçün (22.14') bərabərliyindən Laqranj funksiyasını Hamilton funksiyası vasitəsilə ifadə edək və onu (22.1) təsir inteqralında yerinə yazaq:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t))dt. \tag{22.15}$$

Biz çox vaxt təkrar olunan indeks üzrə cəm aparıldığını nəzərə alaraq (Ernşteyn qaydası) cəmləmə işarəsini yazmayacağıq. Ən kiçik təsir prinsipinə görə (22.15) təsir inteqralının variasiyasını (forma variasiyası) sıfıra bərabər qılırıq:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta(\dot{q}_i p_i-H(q_i,p_i,t))dt=0. \qquad (22.16)$$

Burada p_i və q_i-lərə görə variasiya bir-birindən asılı olmadan aparılmalıdır. İnteqrallanma sərhədlərində sistemin vəziyyəti fiksə olunduğundan həmin nöqtələrdə arqumentlərin variasiyası sıfır olmalıdır: $\delta q_i(t_1)=$ $=\delta q_i(t_2)=\delta p_i(t_1)=\delta p_i(t_2)=0$. Adi qayda ilə variasiyanı hesablasaq,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta\dot{q}_i p_i+\dot{q}_i\delta p_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right\}dt=0$$

olar. Birinci inteqralı hissə-hissə inteqrallayaq:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\dot{q}_i p_i dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\delta q_i\right)\cdot p_i dt=p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_i\delta q_i dt=-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_i\delta q_i dt.$$

Bunu δS-də nəzərə alaq:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right\}dt=0.$$

İnteqrallanma intervalında $(t_1\le t\le t_2)$ $\delta q_i(t)$ və $\delta p_i(t)$ ixtiyari olduğundan yuxarıdakı inteqralın sıfır olması üçün hər bir variasiyanın əmsalı ayrılıqda sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ \dot{q}_i=+\frac{\partial H}{\partial p_i},\ i=1,2,...,n. \qquad (22.17)$$

Bu məşhur Hamilton tənlikləridir.

Hamilton tənlikləri 2n sayda funksiya ($q_i(t)$ və $p_i(t)$) üçün yazılmış birinci tərtib xətti diferensial tənliklərdir. Hamilton tənlikləri Laqranj tənlikləri ilə ekvivalentdir, lakin Laqranj tənlikləri gələcəkdəki ümumiləşdirilmələr üçün daha əlverişlidir.

Qeyd edək ki, Laqranj funksiyası vasitəsilə təkcə mexaniki yox, istənilən fiziki sistemi təsvir etmək mümkündür və o, sahə nəzəriyyəsində müstəsna rol oynayır. Bununla əlaqədar olaraq Laqranj funksiyası müəyyən şərtləri ödəməlidir.

1. Laqranj funksiyasının həqiqiliyi (və ya ermitliyi) şərti. Sistemin enerjisi, impulsu və s. Laqranj funksiyası ilə təyin edildiyinə görə, o həqiqi funksiya olmalıdır.

2. Laqranj funksiyası fəza və zamanın simmetriyası xassələrini özündə əks etdirməlidir. O, müəyyən invariantlıq şərtlərini ödəməlidir.

Onun ödədiyi digər şərtləri (məs. sadəlik şərtləri və s.) gələcəkdə yeri gəldikdə qeyd edəcəyik.

§23. Relyativistik mexanikada ən kiçik təsir prinsipi. Sərbəst relyativistik zərrəciyin Laqranj funksiyası, enerjisi və impulsu

Biz xarici qüvvə təsir etməyən sərbəst relyativistik zərrəciyin hərəkətinə baxırıq. İstənilən sistemin və ya zərrəciyin hərəkətini xarakterizə etmək üçün təsir inteqralından istifadə edirlər. Relyativistik nəzəriyyədə Eynşteynin xüsusi nisbilik prinsipi hökm sürür. Bu prinsipə görə fizikanın bütün qanunları bütün ətalət sistemlərində özlərini eyni cür aparır.

Eynşteynin x.n.p. və sərbəst hərəkətin xassələri tələb edir ki, sərbəst zərrəciyin təsir inteqralı aşağıdakı şərtləri ödəsin:

1. Təsir inteqralı relyativistik invariant kəmiyyət olmalıdır, yəni skalyar olmalıdır.

2. Hərəkət sərbəst olduğuna görə Laqranj funksiyasına zərrəciyin koordinatı və zamanı aşkar daxil ola bilməz. Lakin onların diferensialları (törəmələri) iştirak edə bilər.

3. Relyativistik zərrəciyin Laqranj funksiyası $\upsilon << c$ olduqda Nyuton mexanikasındakı Laqranj funksiyası ilə üst-üstə düşməlidir. Bu, fizikada mövcud olan uyğunluq prinsipidir. Məsələn, daha ümumi olan Lorens çevrilmələri çox kiçik sürətlər halında Qaliley çevrilmələri ilə üst-üstə düşür.

Bu şərtləri ödəyən təsir inteqralını belə yazmaq olar:

$$S = \alpha \int_a^b ds. \tag{23.1}$$

Burada

$$ds = \sqrt{-dx_\mu^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{23.2}$$

diferensial intervalıdır. Bu, 4-ölçülü fəzada (Minkovski fəzası) sonsuz yaxın iki nöqtə arasındakı məsafədir və özü də invariant (skalyar) kəmiyyətdir. Düstura daxil olan α vuruğu zərrəciyin növündən asılı olan sabit kəmiyyətdir. İnteqrallanma sərhədi olan a və b kəmiyyətləri zərrəciyin 4-ölçülü fəzada tutduğu iki vəziyyəti xarakterizə edən dünyəvi nöqtələrdir.

Ən kiçik təsir prinsipinə görə zərrəcik iki dünyəvi nöqtə arasında hərəkət edərkən elə həqiqi trayektoriya seçir ki, onun üzərində təsir inteqralı minimum qiymət alır:

$$\delta S = \delta\alpha \int_a^b ds = 0\,. \qquad (23.3)$$

Qeyd edək ki, burada forma variasiyasından söhbət gedir, lakin şərtləşmişik ki, hər yerdə $\bar{\delta}$ əvəzində δ yazaq (bax §22). S-in (23.1) ifadəsində $ds = cdt\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \equiv cdt\sqrt{1-\beta^2}$ yazsaq və a və b dünyəvi nöqtələrə uyğun olan zamanları t_1 və t_2 ilə işarə etsək

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \alpha c\sqrt{1-\beta^2}dt \equiv \int_{t_2}^{t_1} Ldt$$

olar. Burada $L = \alpha c\sqrt{1-\beta^2}$ kəmiyyəti sərbəst relyativistik zərrəcik üçün Laqranj funksiyasıdır ($\beta = \upsilon/c$ işarəsi qəbul olunmuşdur). α sabitini tapmaq üçün Laqranj funksiyasında qeyri-relyativistik hala keçək, yəni $\beta << 1$ (və ya $\upsilon << c$) olduğunu nəzərə alaq. Bunun üçün $\sqrt{1-\beta^2} \equiv$ $\equiv (1-\beta^2)^{1/2}$ vuruğunu Nyuton binomu düsturu vasitəsilə β^2-ın üstlərinə görə sıraya ayıraq və 2 hədlə kifayətlənək: $(1-\beta^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{8}\beta^4 + \ldots$.

Onda $\underset{(\beta \ll 1)}{L} = \alpha c(1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots) \cong \alpha c - \frac{\alpha c\beta^2}{2} = \alpha c - \frac{\alpha\upsilon^2}{2c}$ olar.

Laqranj funksiyasına daxil olan $\alpha c \equiv \frac{d}{dt}(\alpha ct)$ tam törəmə həddini ataraq, qeyri-relyativistik halda $\underset{(\beta \ll 1)}{L} = -\frac{\alpha\upsilon^2}{2c}$ ifadəsini alırıq. Bu ifadə Nyuton mexanikasında sərbəst zərrəcik üçün yazılmış $L = \frac{m\upsilon^2}{2}$ ilə üst-üstə düşməlidir. Bu iki ifadənin bərabərliyindən biz $\alpha = -mc$ tapırıq. Biz Nyuton mexanikasında maddi nöqtənin (zərrəciyin) kütləsini m ilə işarə etdik. Nyuton mexanikasında kütlə cismin ətalət ölçüsüdür, onun maddəsinin miqdarıdır, saxlanan invariant kəmiyyətdir, additivdir, həm ətalət, həm də qravitasiya xassələrinə malikdir, kütlənin qiyməti istənilən yerdə-Ayda, Günəşdə, ulduzda eynidir. $\alpha = -mc$-ni L-in ilk ifadəsində nəzərə alsaq

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} \qquad (23.4)$$

olar. Bu sərbəst relyativistik zərrəciyin Laqranj funksiyasıdır. Relyativistik mexanikada zərrəciyin kütləsi sürətdən asılı deyil, relyativistik invariantdır, skalyardır və zərrəciyin yükü, spini kimi onun əsas xarakteristikasıdır.

Laqranj funksiyasını bilərək və mexanikadan məlum olan münasibətlərdən istifadə edərək biz relyativistik zərrəciyin hərəkətini xarakterizə edən bütün kəmiyyətləri hesablaya bilərik. Sərbəst zərrəciyin sərbəstlik dərəcəsi n=3-dür və biz zərrəciyi dekart koordinatları ildə xarakterizə edəcəyik:

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z,\ \dot{q}_1 = \dot{x} = \upsilon_x,\ \dot{q}_2 = \dot{y} = \upsilon_y,\ \dot{q}_3 = \dot{z} = \upsilon_z,$$

$$p_1 = p_x,\ p_2 = p_y,\ p_3 = p_z.$$

Ümumi qayda ilə impulsun komponentlərini hesablayaq:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_x} = -mc^2\frac{\left(-2\frac{\upsilon_x}{c^2}\right)}{2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Burada nəzərə aldıq ki, $\beta^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}{c^2}$.

Analoji olaraq $p_y = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $p_z = \frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$ alırıq.

İmpulsun komponentlərini uyğun vahid (ort) vektorlara vuraq və toplayaq:

$$\vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}p_z = \vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (23.5)$$

Bu, relyativistik zərrəciyin impuls vektorudur. Zərrəciyin enerjisini hesablamaq üçün mexanikadakı uyğun münasibətdən istifadə edək:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \vec{\upsilon}\vec{p} - L = \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} =$$

$$= \frac{m\upsilon^2 + mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Beləliklə sərbəst relyativistik zərrəciyin tam enerjisi

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{23.6}$$

düsturu ilə hesablanır. Bu düsturlardan görünür ki, ultrarelyativistik sürətlərdə, yəni $\upsilon \to c$ (və ya $\beta \to 1$) olduqda zərrəciyin impulsu və enerjisi sonsuz artır. (23.5) və (23.6) düsturlarından istifadə edərək $\vec{p}, \vec{\upsilon}$ və ε arasında aşağıdakı əlaqələri tapırıq:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{p}c^2}{\varepsilon} \text{ və ya } \vec{p} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{\upsilon}. \tag{23.7}$$

Qaliley-Nyuton klassik mexanikasında impulsla sürət arasındakı $\vec{p}_{kl} = m\vec{\upsilon}_{kl}$ münasibəti yazaq və (23.7) düsturunda bu analogiyadan istifadə edək. Buradan alınır ki, guya relyativistik zərrəciyin kütləsi

$$m(\upsilon) = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{23.8}$$

düsturu ilə təyin olunur.

(23.8) düsturunu belə də yazırlar:

$$m(\upsilon) = \frac{\varepsilon}{c^2} \text{ və ya } \varepsilon = m(\upsilon)c^2 \tag{23.8'}$$

Qeyd edək ki, bu düsturların alınmasında müəyyən xətaya yol verilib və ona görə də bunlardan istifadə etmək doğru deyil. Burada 2 ədəd çatışmayan cəhət vardır: 1) Kiçik sürətlərdə doğru olan klassik Nyuton mexanikasında impulsun $\vec{p}_{kl} = m\vec{\upsilon}_{kl}$ ifadəsini qeyri-qanunu olaraq onun doğru olmadığı relyativistik oblasta aid etmişik. 2) Gələn §-da görəcəyik ki, $m(\upsilon)$ ilə m müxtəlif transformasiya xassəsinə malikdir, yəni m skalyar olduğu halda $m(\upsilon)$ skalyar deyil. Dəqiq desək $m(\upsilon)$ c vuruğu dəqiqliyi ilə 4-ölçülü vektorun (p_μ-nun) zaman komponentdir. $m(\upsilon)$-ni kütlə hesab etmək olmaz.

$m(\upsilon)$ və m-in eyni ölçü vahidinə, yəni dimenziona malik olması heç də onların eyni kəmiyyət olması demək deyildir. Mexanikadan məlumdur ki, qüvvə momenti $[\vec{r}\vec{F}]$ və iş $dA = \vec{F}d\vec{r}$ eyni, ölçü vahidinə (kq·m) malikdir, lakin onlar tamamilə müxtəlif kəmiyyətlərdir.

Lakin köhnə relyativistik mexanikada (23.8) və (23.8') düsturlarını doğru sayaraq onlardan istifadə edirlər və $m(\upsilon)$-ni relyativistik kütlə, m-i isə sükunət kütləsi adlandırırdılar. Müasir relyativistik fizikada zərrəciyin hərəkət kütləsi yoxdur, yeganə m kütləsi vardır, «sükunət» sözünü də atmaq lazımdır, çünki zərrəcik (cisim) sükunətdə də olsa, hərəkətdə də olsa o, yeganə, invariant, skalyar m kütləsinə malikdir.

(23.6) düsturundan görünür ki, sərbəst zərrəcik sükunətdə olduqda da ($\upsilon = 0$) enerjiyə malik olur:

$$\varepsilon_0 = mc^2. \tag{23.6'}$$

Bu sərbəst zərrəciyin *sükunət enerjisi* adlanır. Sükunət enerjisi bu zərrəciyi sükunət halında «doğurmaq, yaratmaq» üçün lazım olan enerjinin miqdarıdır. Zərrəciyin kütləsi onun sükunət enerjisinə ekvivalentdir. Bu, məşhur Eynşteyn düsturudur. Zərrəcik küllü miqdarda sükunət enerjisinə malikdir. Sükunət enerjisi digər enerji növlərinə çevrilə bilər və bununla əlaqədar olaraq zərrəciyin kütləsi dəyişə bilər. Əgər sükunət enerjisindən $\Delta\varepsilon$ qədər enerji götürsək, onda cismin kütləsi $\Delta m = \Delta\varepsilon / c^2$ qədər azalmış olar. Əksinə, cismi şüalandıraraq və ya qızdıraraq ona $\Delta\varepsilon$ qədər enerji versək, cismin kütləsi $\Delta m = \Delta\varepsilon / c^2$ qədər artmış olar. Bu, kütlənin yeni xassəsidir. Əgər cismin kütləsi 1 qr.-dırsa, onda bu cisimdə toplanmış sükunət enerjisi $\varepsilon_0 = 1q \cdot c^2 = 1q \cdot 9 \cdot 10^{20}$ $sm^2/s^2 = 9 \cdot 10^{20}$ erq. olar.

Eynşteyn düsturundan istifadə edərək təbiətdə baş verən bütün reaksiyalarda – kimyəvi, bioloji, fiziki və nüvə reaksiyalarında enerji dəyişmələrini izah edə bilərik.

(23.6) düsturundan istifadə edərək qeyri-relyativistik mexanikada sərbəst zərrəciyin malik olduğu enerjini hesablayaq. Bunun üçün düsturdakı $\sqrt{1-\beta^2}^{\,-1} \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$ vuruğunu Nyuton binomu düsturu vasitəsilə β^2-ın üstlərinə görə sıraya ayırıb iki hədlə kifayətlənək (çünki $\beta = \dfrac{\upsilon}{c} << 1$ götürülür):

$$(1-\beta^2)^{-1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

Bunu (23.6)-da nəzərə alsaq: $\varepsilon_{q/r} = mc^2 + \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ olur. Bu qeyri-relyativistik mexanikada sərbəst zərrəciyin enerjisidir. Burada mc^2 zərrəciyin sükunət enerjisi, $m\upsilon^2/2$ isə onun kinetik enerjisidir. Bu mexanikada sükunət enerjisi heç bir rol oynamır. Onu ya atırlar, ya da enerjini sükunət enerjisindən etibarən hesablayırlar. Onda sərbəst zərrəciyin qeyri-relyativistik enerjisi belə olur: $\varepsilon'_{q/r} = \varepsilon_{q/r} - mc^2 = m\upsilon^2/2$. Bu, adi klassik mexanikada υ sürəti ilə hərəkət edən cismin kinetik enerjisidir.

Relyativistik mexanikada da kinetik enerji anlayışı mövcuddur və onu belə təyin edirlər:

$$K^{\text{rel.}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 \equiv \varepsilon^{\text{kin}}_{\text{rel.}}. \tag{23.9}$$

Biz zərrəciyin impulsundan, enerjisindən və s. danışdıq, lakin bu zərrəciyin elementar zərrəcik olub-olmaması haqqında heç bir söz deмədik, çünki buna ehtiyac da yoxdur. Ona görə burada alınmış bütün düsturlar həm zərrəciyə və həm də istənilən qədər mürəkkəb cismə aid edilməlidir. Onda $\vec{\upsilon}$, $\vec{p}$, ε, m və s. cismin bütövlüklə bir tam kimi irəliləmə sürəti, bir tam kimi onun impulsu, enerjisi və bütövlükdə kütləsi olacaqdır və s.

§24. Sərbəst zərrəciyin 4-ölçülü hərəkət tənliyi, 4-ölçülü impuls, 4-ölçülü qüvvə və kütlə defekti

Əvvəlcə sərbəst zərrəciyin 4-ölçülü hərəkət tənliyini alaq. Bunun üçün ~~(23.1)~~ təsir inteqralının formaya görə variasiyasını hesablayaq:

$$\delta S = \delta(-mc\int_a^b ds) = -mc\int_a^b \delta ds \tag{24.1}$$

Burada $ds = \sqrt{-dx_\mu^2}$ olduğundan, onun arqumenti dx_μ-dür ~~(x_μ deyil!)~~. Bilirik ki, funksiyanın (burada ds-in) variasiyasını hesablayanda funksiyanın uyğun arqumentə görə törəməsini həmin arqumentin variasiyasına vurmaq və alınan hədləri toplamaq lazımdır:

$$\delta ds = \frac{\partial ds}{\partial dx_\mu}\delta dx_\mu = -\frac{2dx_\mu}{2ds}\delta dx_\mu = -\frac{dx_\mu}{ds}d\delta x_\mu = -u_\mu d\delta x_\mu.$$

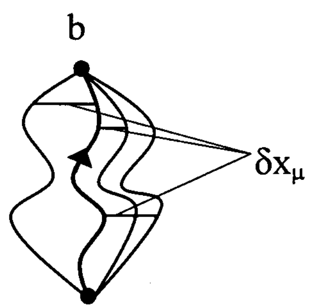
Biz arqumentdə variasiya ilə diferensialın yerini dəyişdirmişik ~~($\delta dx_\mu = d\delta x_\mu$)~~. Alınmış ifadəni ~~(24.1)-də~~ yerinə yazaq və hissə-hissə inteqrallama aparaq:

$$\delta S = mc\int_a^b u_\mu d\delta x_\mu = mcu_\mu \delta x_\mu \Big|_a^b - mc\int_a^b du_\mu \cdot \delta x_\mu. \tag{24.1'}$$

Axırıncı inteqralda $du_\mu \equiv \frac{du_\mu}{ds}ds$ yazacağıq. Baxdığımız məsələdə konfiqurasiya fəzası Minkovski fəzası ilə üst-üstə düşür. Əvvəlcə fərz edək ki, a və b nöqtələri fiksə olunmuşdur və bütün mümkün «trayektoriалar» həmin nöqtələrdən keçir və həqiqi trayektoriya üzərində S minimum qiymət alır, yəni $\delta S_{min} = 0$ olur. Şəkil 24.1-də həqiqi trayektoriya qalın xətlə çəkilmişdir. Şəkildən görünür ki, $\delta x_\mu(a) = \delta x_\mu(b) = 0$. Bu dediklərimizi (24.1') ifadəsinə tətbiq edək: $0 = 0 - mc\int_a^b \frac{du_\mu}{ds}ds\delta x_\mu$. (a, b) inteqrallanma oblastında δx_μ ixtiyari olduğundan və yuxarıdakı inteqralın sıfır olmasından çıxır ki,

$$\frac{du_\mu}{ds} = 0 \text{ və ya } u_\mu = \text{const} \tag{24.2}$$

olmalıdır. Bu, relyativistik sərbəst zərrəciyin 4-ölçülü şəkildə hərəkət tənliyidir.

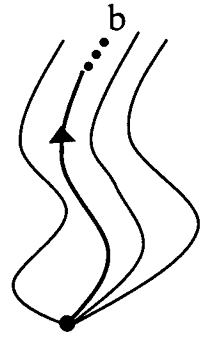


Şəkil 24.1

Sərbəst zərrəciyin 4-ölçülü təcili, yəni $W_\mu = \frac{du_\mu}{ds}$ sıfırdır və ya onun 4-ölçülü sürəti, yəni u_μ sabitdir. Doğrudan da belə də olmalıdır. Çünki adi mexanikadan məlumdur ki, sərbəst zərrəciyin üç ölçülü sürəti $\vec{\upsilon}$ sabitdir. (15.2) ifadəsindən görünür ki, 4-ölçülü sürətin bütün komponentləri 3-ölçülü sürətlə təyin edildiyindən onlar da sabit olmalıdır.

İndi fərz edək ki, 4-ölçülü fəzada a nöqtəsi fiksə olunmuşdur, lakin b nöqtəsi cari nöqtədir. Mümkün olan trayektoriyalar a nöqtəsindən başlayır, lakin b nöqtəsində onlar görüşmürlər. Ona görə $\delta x_\mu(a) = 0$,

$\delta x_\mu(b) \neq 0$ olur. Şəkil (24.2)-də bu trayektoriyalar şərti olaraq göstərilmişdir və həqiqi hərəkətə uyğun trayektoriya qalın xətlə çəkilmişdir. Orada b fiksə olunmadığına görə, onun ala biləcəyi qiymətlər cari nöqtələr şəklində verilmişdir. Biz belə hallarda $\delta x_\mu(b)$-də «b» indeksini ataraq, onu sadəcə δx_μ şəklində yazacağıq. Bu zaman həqiqi trayektoriya üzərində hərəkət tənliyi ödənəcək $\left(\frac{du_\mu}{ds} = 0\right)$, lakin S artıq minimum qiymət almayacaqdır, yəni $\delta S \neq 0$ olacaqdır. Burada S funksional yox, inteqralın yuxarı sərhədində zərrəciyin koordinatlarının funksiyası olacaqdır. Bu dediklərimizi (24.1')-də nəzərə alsaq: $\delta S = mcu_\mu \delta x_\mu(b)$ olar. Burada $\delta x_\mu(b) \equiv \delta x_\mu$ yazırıq və S artıq yuxarı sərhəddə x_μ-nun funksiyası olduğundan, onun formaya görə variasiyasını $\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}\delta x_\mu$ şəklində hesablayırıq. Hər yerdə təkrar olunan indeks (yəni μ) üzrə cəm aparıldığı nəzərdə tutulur. δS-in ifadəsini yuxarıdakı münasibətdə yerinə yazsaq $\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\delta x_\mu = mcu_\mu \delta x_\mu$ olar.



Şəkil **24.2**

Bərabərliyin sağ və sol tərəfində δx_μ-lər bir-birindən asılı olmayan ixtiyari dəyişən kəmiyyətlər olduğundan, onların əmsalları bir-birinə bərabər olmalıdır.

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = mcu_\mu . \tag{24.3}$$

Mexanikadan məlumdur ki, (bax §22) təsirin koordinata görə törəməsi həmin koordinata uyğun kanonik impulsu ifadə edir:

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = p_\mu . \tag{24.4}$$

Aydındır ki, p_μ 4-ölçülü vektordur, çünki o, skalyarın (S-in) 4-ölçülü koordinata (4-ölçülü vektora) görə törəməsidir. ~~(24.3) və (24.4)-dən~~ zərrəciyin 4-ölçülü impulsunun aşkar ifadəsini alırıq:

$$p_\mu = mcu_\mu . \tag{24.5}$$

4-ölçülü sürətin (15.2) ifadəsindən istifadə edərək 4-ölçülü impulsun komponentlərini hesablayaq. Yuxarıda $\mu=1$ desək

$$p_1 = mcu_1 = mc\frac{\upsilon_x}{c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \equiv p_x$$

olar. Analoji olaraq $\mu=2$ və $\mu=3$ desək,

$$p_2 = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \equiv p_y, \qquad p_3 = \frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \equiv p_z$$

alırıq. İndi $\mu=4$ götürək:

$$p_4 = mcu_4 = i\frac{mc}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{i}{c}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \equiv \frac{i}{c}\varepsilon .$$

Beləliklə 4-ölçülü impulsun birinci üç komponenti (fəza komponentləri) 3-ölçülü impulsun komponentləri ilə üst-üstə düşür, dördüncü komponenti isə $\frac{i}{c}$ vuruğu dəqiqliyi ilə relyativistik sərbəst zərrəciyin ε enerjisini ifadə edir. Biz p_4-ü (23.8) düsturu ilə müqayisə etsək, görərik ki, bu düstur ic dəqiqliyi ilə 4-ölçülü impulsun dördüncü komopnenti olan p_4 ilə üst-üstə düşür. 4-ölçülü impulsu qısa şəkildə yazaq:

$$p_\mu = \left\{ \vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \ \frac{i}{c}\varepsilon \right\}. \tag{24.6}$$

Deməli, zərrəciyin impulsu və enerjisi bir dördölçülü vektor təşkil edir. Bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə 4-ölçülü vektor Lorens çevrilməsi düsturları ilə çevrilir. Onda K'-dən K ətalət sisteminə keçdikdə impuls və enerjinin hansı qanunla dəyişdiyini yazmaq üçün yadımıza salaq ki, xüsusi Lorens çevrilmələrində 4-ölçülü vektorun yalnız birinci və dördüncu komponentləri dəyişir:

$$p_1 = p_x = \gamma\left\{p_x' - i\frac{v}{c}p_4'\right\} = \gamma\left\{p_x' + \frac{v}{c^2}\varepsilon'\right\}; \quad p_4 = \gamma\left\{p_4' + i\frac{v}{c}p_x'\right\}$$

və ya

$$\varepsilon = \gamma\left\{\varepsilon' + vp_x'\right\},$$

burada $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ – Lorens faktorudur.

Beləliklə xüsusi Lorens çevrilməsində enerji və impuls aşağıdakı qanunla dəyişir:

$$p_x = \gamma\left(p_x' + \frac{v}{c^2}\varepsilon'\right), \; p_y = p_y', \; p_z = p_z', \; \varepsilon = \gamma\{\varepsilon' + vp_x'\}. \tag{24.7}$$

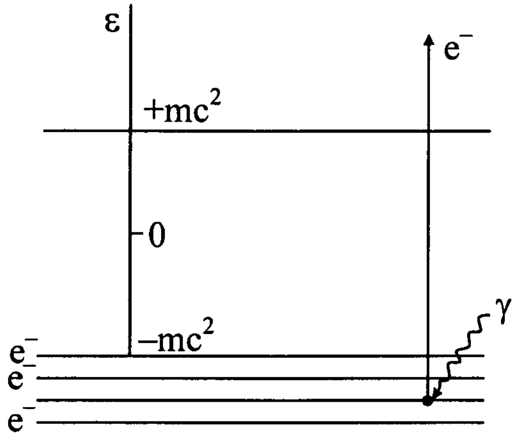
Enerjinin digər ifadələrini almaq üçün (24.5) bərabərliyini kvadrata yüksəldək, p_μ-nün (24.6) ifadəsindən istifadə edək və $u_\mu^2 = -1$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\vec{p}^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m^2c^2, \text{ və ya } \varepsilon = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} \tag{24.8}$$

Düsturdan görünür ki, relyativistik fizikada sərbəst zərrəciyin tam enerjisi həm müsbət və həm də mənfi ola bilər. Lakin klassik fizikada biz (24.8)-də müsbət işarəni saxlayacağıq, yəni

$$\varepsilon = +\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} \tag{24.8'}$$

qəbul edəcəyik. Bu, belə də olmalıdır, çünki klassik fizikada sərbəst zərrəciyin enerjisi hərəkət enerjisidir, onun potensial enerjisi yoxdur, burada kvant keçidləri də yoxdur. Amma kvant fizikasında hər iki işarənin mənası vardır. Bu nəzəriyyədə müsbət enerji zərrəciyi (məsələn, elektronu), mənfi enerji isə antizərrəciyi (məsələn, pozitronu) xarakterizə edir. (24.8) düsturunun birinci hissəsi zərrəciyin kütləsini onun enerjisi və impulsu ilə ifadə edən çox mühüm relyativistik düsturdur. Biz istənilən zərrəciyin, cismin, zərrəciklər sisteminin kütləsini bu düsturla təyin edəcəyik. Sükunət halında (24.8)dən $\varepsilon_0 = \pm mc^2$ alınır. Şəkil 24.1-də müsbət və mənfi enerji halları sxematik göstərilmişdir. Burada $+mc^2$ səviyyəsi ilə $-mc^2$ səviyyəsi arasında zərrəcik ola bilməz, hündürlüyü $2mc^2$ olan bu aralıq *qadağan olunmuş zona* adlanır. Zərrəciklər bu zonadan yuxarıda və ondan aşağıda ola bilər. Dirak nəzəriyyəsinə görə bütün mənfi enerji səviyyələri elektronlarla dolmuşdur. Enerjisi $2mc^2$-dan böyük olan γ-kvantı mənfi enerji səviyyələrinin birindəki elektron (e^-) udaraq müsbət enerji səviyyəsinə keçir. Bu elektronun boş qalmış yeri (deşik) mənfi enerji səviyyələri və mənfi elektrik yükləri fonunda özünü müsbət yüklü zərrəcik kimi aparır. Bu *pozitron* adlanır (e^+). Baxdığımız proses γ-kvant tərəfindən *elektron-pozitron cütünün fotodoğulması* adlanır.



Şəkil **24.1**

Biz (23.7) və (24.8') düsturlarından istifadə edərək istənilən kütləyə və impulsa malik olan zərrəciyin sürəti üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\upsilon = c\frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}. \qquad (24.9)$$

Deməli, kütləyə malik zərrəciklərin sürəti işıq sürətindən kiçikdir və impulsun çox böyük qiymətlərində ($p \to \infty$) o, asimptotik olaraq c-yə yaxınlaşır. (24.9)-da m=0 götürsək $\upsilon = c$ alarıq. Kütləsi sıfır olan bütün zərrəciklər işıq sürəti ilə hərəkət edirlər.

Fotonlar, qravitonlar, neytrinolar belə zərrəciklərdir. Belə zərrəciklərin impulsu (24.8) düsturuna əsasən

$$p = \frac{\varepsilon}{c} \qquad (24.8'')$$

olacaqdır.

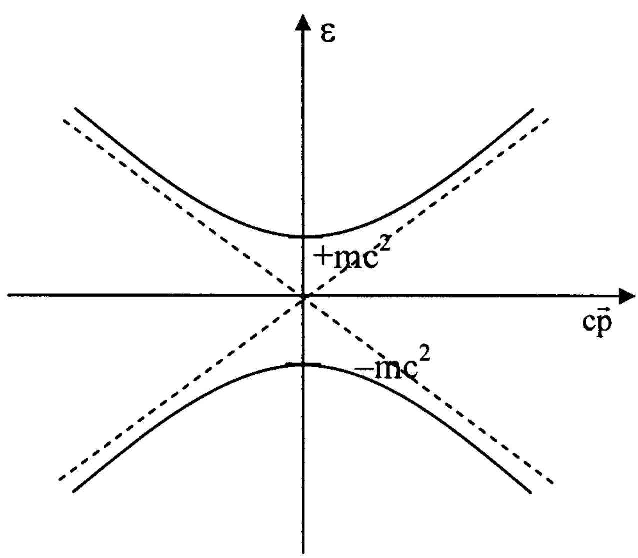
İndi relyativistik enerji üçün (24.8) ifadəsini 4-ölçülü psevdoevklid (Minkovski) fəzasında təsvir edək. Oxlar boyunca cp_x, cp_y, cp_z və ε

kəmiyyətlərini qeyd etsək (4-ölçülü impuls fəzası), relyativistik zərrəciyin enerjisi üçün yuxarı qanadlı və aşağı qanadlı hiperboloid səthi alarıq. Şəkil (24.2)-də cp_x, cp_y, cp_z oxlarını şərti olaraq $c\vec{p}$ oxu ilə işarə etmişik. Hiperboloidin qanadları enerji oxunu $\pm mc^2$ nöqtələrində kəsir. Bu hiperboloidin səthi kütləsi m olan zərrəcik və antizərrəciyin enerjisinin ala biləcəyi bütün qiymətləri təsvir edir. Ona görə bu səth *enerji səthi* adlanır. Qeyd edək ki, müxtəlif kütləyə malik zərrəcik və antizərrəciklərə müxtəlif hiperboloidlər uyğun gəlir. İşıq zərrəciklərinə (m=0 olan fotonlara) uyğun gələn hiperboloid işıq konusu olacaqdır (24.2 şəklində qırıq xətlər). Bütün mümkün olan enerji hiperboloidləri işıq konusunun daxilində yerləşir və asimptotik olaraq işıq konusuna yaxınlaşırlar. Beləliklə təbiətdə mövcud olan bütün zərrəcik və antizərrəciklər işıq konusu daxilində yerləşdirilə bilər.

Bu bir daha onu göstərir ki, işıq konusu relyativistik fizikada çox fundamental rol oynayır.

Relyativistik fizikada 4-ölçülü qüvvə anlayışından da geniş istifadə olunur. Klassik mexanikadakı qüvvəyə uyğun olaraq 4-ölçülü qüvvəni belə təyin edirlər. 4-ölçülü impulsun məxsusi zamana və ya intervala görə törəməsinə *4-ölçülü qüvvə* deyilir:

$$f_\mu = \frac{dp_\mu}{ds} = m\frac{cdu_\mu}{ds}. \tag{24.10}$$



***Şəkil* 24.2.** Enerji hiperboloidləri enerji səthləridir.

p_μ-nün (24.6) ifadəsindən istifadə edərək qüvvənin fəza komponentlərini çox asanlıqla təyin edirik:

$$\vec{f}=\frac{d\vec{p}}{ds}=\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Burada $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ adı 3-ölçülü qüvvədir. İndi qüvvənin 4-cü komponentini hesablayaq:

$$f_4=\frac{dp_4}{dS}=\frac{i}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{i}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{i(\vec{\upsilon}\vec{F})}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Biz burada $\frac{d\varepsilon}{dt}$-ni (24.8) düsturundan zamana görə törəmə almaqla hesablamışıq:

$$2\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt}-\frac{1}{c^2}2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=0 \text{ və ya } \frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{\vec{p}c^2}{\varepsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{\upsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (24.11)$$

4-ölçülü qüvvəni yığcam şəkildə yazaq:

$$f_\mu=\left\{\vec{f}=\frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},\ \frac{i}{c}\frac{(\vec{\upsilon}\vec{F})}{c\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right\}. \qquad (24.12)$$

Adi 3-ölçülü $\vec{F}$ qüvvəsi ilə vahid zamanda görülən $(\vec{\upsilon}\vec{F})$ işi bir 4-ölçülü qüvvə təşkil edir və buna adətən *Minkovski qüvvəsi* deyilir.

4-ölçülü sürət 4-ölçülü təcilə ortoqonal olduğuna görə $u_\mu f_\mu=0$ olur. Biz (24.6) və (24.12) ifadələrindən istifadə edərək (24.10) düsturunun fəza komponentlərini yazsaq Nyuton qanununun relyativistik şəklini alarıq:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}. \qquad (24.10')$$

Təbiətdə mövcud olan bütün cisimlər müəyyən tərkib hissələrinə malikdir və bu hissələr daim bir-biri ilə qarşılıqlı təsirdədir. Bu qarşılıqlı təsir qüvvələri cisimləri formalaşdırır və onlara müəyyən xassələr verir. Cisimlərin tərkib hissələri atomlar, molekullar, kristallik qəfəslər, müsbət və mənfi yüklü ionlar və s. ola bilər. Stabil cisimlərdə tərkib hissələrin qarşılıqlı təsir enerjisi son nəticədə cazibə enerjisi olacaqdır (mənfi enerji). Ona görə bütün cisimlər rabitə enerjisinə malikdir və bu enerji nüvələrdə böyük qiymət alır, çünki nüvə qüvvələri ən güclü qüvvələrdir.

Hər hansı ətalət sistemində sükunətdə olan cismin və ya fiziki sistemin malik olduğu enerji onun daxili enerjisi və ya sükunət enerjisi adlanır. Fərz edək ki, cismin və ya fiziki sistemin bütövlükdə kütləsi M-dır. Cismin sükunət (daxili) enerjisi Mc^2 onun tərkib hissələrinin malik olduğu bütün enerji növlərinin cəmidir. Cismin n-sayda zərrəcikdən təşkil olunduğunu fərz etsək, onun daxili enerjisini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$Mc^2 = \sum_{a=1}^{n} m_a c^2 + \sum_{a=1}^{n} K_a + \sum_{a,b}^{n} u_{ab}\,. \qquad (24.13)$$

Burada $\sum_a m_a c^2$ cismi təşkil edən zərrəciklərin sükunət enerjilərinin cəmi $\sum_a K_a$ – bu zərrəciklərin kinetik enerjilərinin cəmi, $u = \sum_{a,b} u_{ab}$ isə zərrəciklərin qarşılıqlı təsir enerjisidir. İfadədən görünür ki, cismin kütləsi onun tərkib hissələrinin kütlələrinin cəminə bərabər deyildir: $M \neq \sum_{a=1}^{n} m_a$. Bu o deməkdir ki, relyativistik fizikada kütlə saxlanmır. Cismin özünün kütləsi ilə onun tərkib hissələrinin kütlələrinin fərqinə *cismin kütlə defekti* deyilir:

$$\Delta M = M - \sum_{a=1}^{n} m_a\,. \qquad (24.14)$$

Cismin kütlə defektinin c^2-na hasili *cismin rabitə enerjisi* adlanır:

$$\Delta W = \Delta Mc^2 \qquad (24.14')$$

(24.13)-dən

$$\Delta Mc^2 = \sum_a K_a + u \qquad (24.15)$$

alırıq. Əgər kütlə defekti müsbətdirsə ($\Delta M > 0$) cisim qeyri-stabil olur və öz başına tərkib hissələrinə parçalanır. Çünki bu zaman $\sum_a K_a + u > 0$ olur, yəni zərrəciklərin kinetik enerjisi onların qarşılıqlı təsir enerjisini üstələyir və zərrəciklər cismi tərk edir. Kütlə defekti mənfidirsə ($\Delta M < 0$) cisim, stabil olur və o parçalanmır. Bu zaman $\sum_a K_a + u < 0$ olur, yəni qarşılıqlı təsir enerjisi zərrəciklərin kinetik enerjisini üstələyir və onları cismin daxilində tutub saxlayır. Rabitə enerjisi (24.14') düsturuna görə kütlə defekti ilə eyni işarəli olduğundan belə deyə bilərik: rabitə enerjisi ΔW mənfi olduqda ($\Delta M < 0$) cisim stabil olur, rabitə enerjisi ΔW müsbət olduqda isə ($\Delta M > 0$) o qeyri-stabil olur və öz başına tərkib hissələrinə parçalanır. Kütlə defekti (və ya rabitə enerjisi) enerji baxımından cisimlərdə, fiziki sistemlərdə, nüvələrdə və s. özbaşına gedən bütün reaksiyaların istiqamətini müəyyən edir. Sadə misallara baxaq. Məlumdur ki, Berillium atomunun nüvəsi $B_{e_4}^8$ 4 proton və 4 neytrondan təşkil olunmuşdur. Göstərək ki, bu nüvə 4p və 4n-a parçalana bilməz, yəni $Be_4^8 \not\rightarrow 4p + 4n$? reaksiyası gedə bilməz. Bunu izah etmək üçün reaksiyada iştirak edən zərrəciklərin kütlələrini atom kütlə vahidlərində (akv) yazaq və reaksiya üçün kütlə defektini hesablayaq.

$$m_{Be} = 8,00785, \ m_p = 1,0081, \ m_n = 1,0089;$$

$$\Delta M = m_{Be} - 4(m_p + m_n) = 8,00785 - 4 \cdot 2,0170 = -0,06 \text{ akv}.$$

$\Delta M<0$, yəni $\Delta W<0$ olur. Belə reaksiya özbaşına gedə bilməz. Belə məlum olur ki, Berillium nüvəsinin daxilində protonlar neytronlarla birləşərək 2 ədəd α-zərrəcik yarada bilər. α-zərrəcik Helium atomunun nüvəsinə deyilir: $\alpha = He_2^4$. Helium atomunun nüvəsi 2p və 2n-dan təşkil olunmuşdur. Onda Be_4^8 aşağıdakı reaksiya üzrə parçalana bilər:

$$Be_4^8 \rightarrow 2He_2^4.$$

Bunu izah etmək üçün α-zərrəciyin kütləsinin $m_\alpha = 4,0039$ akv olduğunu bilərək, bu reaksiyanın kütlə defektini hesablayaq:

$$\Delta M = m_{Be} - 2m_\alpha = 8,00785 - 2 \cdot 4,0039 = 0,00005 \text{ akv} > 0 \cdot \Delta M > 0$$

olduğuna görə bu reaksiya gedə bilər. Beləliklə, Be_4^8 nüvəsi 4 proton və 4 neytrona yox, iki α-zərrəciyə özbaşına parçalanır. Bütün parçalanma reaksiyalarını bu qayda isə hesablamaq lazımdır.

İndi birləşmə (sintez) reaksiyalarına baxaq. Tədqiqatlar göstərir ki, Günəşdə ən çox yayılmış elementlər Hidrogen (H_1^1), Deytron (H_1^2) və Heliumdur He_2^4. Hidrogenin nüvəsi bir protondan, Deytronun (deyton) nüvəsi bir proton və bir neytrondan, Tritonun nüvəsi 1 proton və 2 neytrondan təşkil edilmişdir. Bunların akv-də kütlələri belədir:

$$m_{H_1^1} = 1,00782, \ m_{H_1^2} = 2,0141, \ m_{H_1^3} = 3,01605 \text{ akv}.$$

Qəbul edilmişdir ki, Günəş enerjisinin yaranmasında aşağıdakı proses həlledici rol oynayır:

$$2p + 2n \rightarrow He_2^4.$$

Bu reaksiya üçün kütlə defekti $\Delta M = 2 \cdot 2,0170 - 4,0039 = 0,0301\,\text{akv} > 0$ olur və reaksiya gedir. Bu reaksiyada ΔMc^2 qədər enerji ayrılır. Bu enerjini hesablamaq üçün elektron-voltla erq arasındakı əlaqəni yadımıza salaq və elementar zərrəciklər fizikasında işlədilən enerji vahidlərinin adlarını sadalayaq $1\text{ev} = 4,8 \cdot 10^{-10}(\text{SGSE})_q \cdot \frac{1}{300}(\text{SGSE})\varphi = 1,6 \cdot 10^{-12}$ erq.

$1\text{Mev (Meqa ev)} = 10^6\text{ev}$, $\quad 1\text{Gev (Giqa ev)} = 10^9$ ev.

Atom fizikasından bilirik ki, 1 *akv* neytral C^{12} atomunun kütləsinin 1/12 hissəsinə deyilir və ədədi qiymətcə $1\,\text{akv} = 1,66 \cdot 10^{-24}$ qramdır. Bir akv-nə uyğun gələn enerji $1\,\text{akv}c^2 = 9 \cdot 1,66 \cdot 10^{-4}\,\text{erq} \approx 9 \cdot 10^8\,\text{ev} = 0,9\,\text{Gev}$ olur.

Yuxarıdakı sintez reaksiyasında ayrılan enerjinin miqdarı $\Delta W = 0,03 \cdot 0,9$ Gev=27 Mev olacaqdır. Buna reaksiyanın *enerji çıxımı* deyilir.

Qeyd edək ki, Günəşdə $4p \rightarrow He_2^4 + 2e^+ + 2\nu_e$ reaksiyası da gedir və bu da Günəş neytrinolarının mənbələrindən biridir. Bu reaksiyanın kütlə defekti $\Delta M = 4 \cdot 1,0081 - (4,0039 + 0,001) = 4,0324 - 4,0049 = 0,0275$ akv olur. Reaksiyada ayrılan enerji $\Delta W = 0,0275 \cdot 0,9$ GeV=24,5 Mev-ə bərabərdir.

Aşağıdaki reaksiya idarə edilən istilik nüvə reaksiyaları arasında çox mühüm yer tutur: $H_1^2 + H_1^3 = He_2^4 + n$. Bu reaksiyanın kütlə defekti $\Delta M = 2,0141 + 3,0160 - (4,0039 + 1,0089) = 5,0301 - 5,0128 = 0,0173$ akv-dir. Reaksiyada ayrılan enerji $\Delta W = 0,0173 \cdot 0,9$ Gev=17,3Mev-dir.

Son iki nüvə reaksiyalarında kütlə itkisini hesablasaq $\frac{\Delta M}{M}$ üçün $0,68 \cdot 10^{-2}$ və $0,34 \cdot 10^{-2}$ alarıq.

Lakin biz kimyəvi reaksiyalara və müxtəlif yanma reaksiyalarına, məsələn kömürün və metan qazının yanmasına baxsaq ($C + O_2 = CO_2$, $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$) burada kütlə itkisi çox az olacaq, yəni $\frac{\Delta M}{M} = 10^{-9}$ və 10^{-10} tərtibində olacaqdır.

Beləliklə rabitə enerjisi müsbət olduqda istənilən reaksiya özbaşına gedir, mənfi olduqda isə reaksiya özbaşına gedə bilmir. Lakin özbaşına gedə bilməyən reaksiyaları (prosesləri) süni yolla aparmaq olar. Bunun üçün prosesə xaricdən mütləq qiymətcə reaksiyanın rabitə enerjisinə bərabər olan müsbət enerji vermək lazımdır. Sistemə verilən bu müsbət enerjiyə reaksiyanın *astana* və ya *hüdud enerjisi* deyilir.

Məsələn, $e^+ + e^- = \gamma_1 + \gamma_2$ reaksiyası (e^+e^- cütünün iki fotona annihilyasiyası) özbaşına gedir. Lakin $\gamma_1 + \gamma_2 = e^+ + e^-$ reaksiyasının (e^+e^- cütünün iki fotonlu doğulması) getməsi üçün fotonların enerjiləri cəmi $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 2m_e c^2$ olmalıdır.

Elektromaqnit sahəsi haqqında bir neçə kəlmə demək lazımdır. Elektromaqnit sahəsinin zərrəciyi olan fotonun impulsu $p = \frac{\varepsilon}{c}$ olduğundan tək fotonun kütləsi (24.8) düsturuna əsasən sıfırdır. Lakin fotonlar sisteminin kütləsi sıfır da ola bilər, sıfırdan fərqli də ola bilər. Sadəlik üçün fərz edək ki, iki fotondan ibarət sistemimiz vardır.

Sistemin tam impulsu $P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu} = \left\{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \frac{i}{c}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right\}$ olur. Fərz edək ki, iki foton eyni istiqamətdə bir-birinə paralel hərəkət edir, onda sistemin kütləsi sıfır olur. İndi fərz edək ki, fotonların impulsları bir-biri ilə müəyyən bucaq əmələ gətirir, xüsusi halda bir-birinin əksinə yönəlmişdir. Onda $P_\mu^2 = (p - p)^2 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{c^2} = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{c^2} = -m_f^2 c^2$ olar. Yəni, $m_f = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{c^2}$ olur. Biz burada sadəlik üçün fərz etdik ki, fotonların impulslarının modulu bir-birinə bərabərdir ($p_1 = p_2 = p$).

Biz fərz edəcəyik ki, elektromaqnit sahəsinin kütləsi vardır. Çünki, kütlənin sıfır olduğu hal, yəni bütün elektromaqnit sahəsini bir istiqamətdə bir-birinə dəqiq paralel yayılan fotonlar seli kimi təsəvvür etmək çox sünidir və qeyri realdır. Beləliklə cismi qızdırdıqda və ya ona elektromaqnit sahəsi ilə təsir etdikdə onun kütləsi artır.

Bəzən ədəbiyyatda kütlə defekti və rabitə enerjisi olaraq «$-\Delta M$» və «$-\Delta W$» götürülür. Yəni Be_4^8 məsələsində kütlə defektini aşağıdakı kimi təyin edirlər: $\Delta\tilde{M} = 4(m_p + m_n) - M_{Be}$. Onda $\Delta\tilde{M} = -\Delta M$ olur (yeni kütlə defektini tilda (~) ilə işarə edirik). İndi reaksiyaların mənası dəyişməyəcək, lakin yuxarıdakı tərifləri tərsinə oxumaq lazım gələcəkdir («gedər» əvəzinə «getməz» və s. demək lazımdır).

§25. Relyativistik zərrəciklərin kinematikası

Relyativistik zərrəciklər və zərrəciklər sistemi müxtəlif fiziki proseslərdə iştirak edir. Bunlar zərrəciklərin toqquşması (səpilməsi) prosesləri, parçalanma və birləşmə reaksiyaları, zərrəciklərin bir-birinə çevrilməsi prosesləri və s. ola bilər. İstənilən proses müəyyən ətalət sistemində öyrənilir. Ətalət sistemlərində fəza bircins və izotropdur, zaman isə bircinsdir. Ona görə relyativistik fizikada da enerjinin, impulsun və impuls momentinin saxlaması qanunları ödənir. Biz zərrəciklərin bir-birilə qarşılıqlı təsir qüvvələrinin mahiyyətinə fikir verməyərək toqquşma, birləşmə və parçalanma proseslərinin kinematikası ilə məşğul olacağıq və prosesə aid dəyərli məlumatlar əldə edəcəyik. Zərrəciklərlə baş verən proseslərin (reaksiyaların) kinematikası bu prosesləri yaradan qüvvələrin (elektromaqnit, güclü, zəif q/t qüvvələri) təbiətindən asılı deyildir. Biz kinematik reaksiyalarda enerji, impuls və impuls momentinin saxlanması qanunları ilə yanaşı təbiətin ən fundamental qanunu olan elektrik yükünün (Q) saxlanması qanunundan da istifadə edəcəyik. Bu qanunu qısaca $\Delta Q=0$ şəklində yazırlar: prosesin əvvəlində və sonunda elektrik yükünün miqdarı eynidir, yəni onların fərqi sıfıra bərabərdir. Yeri gəlmişkən məlumat üçün fizikada mövcud olan iki ədəd saxlanma qanununu yada salaq. Bunlar reaksiyanın başlanğıcında və sonunda barionlar sayının (B) və leptonlar sayının (L) saxlanması qanunlarıdır. Qeyd edək ki, (bax Giriş) *barionlar* spin momenti $\frac{1}{2}\hbar$, $\frac{3}{2}\hbar$ və s. olan hadronlara deyilir (məs.: p, n, λ və Σ-hiperonlar və onların antizərrəcikləri). Barion kvant ədədi B barionlar üçün «+1» antibarionlar üçün «–1»-dir. Eynilə leptonlar üçün lepton kvant ədədi $L=+1$ və antileptonlar (pozitron, antineytrino və s.) üçün isə $L=-1$ qəbul edilir. Leptonlar halında elektron-leptonuna (L_e), μ-mezon leptonuna (L_μ) və τ-mezon leptonuna (L_τ) ayrıca baxırlar. Onda reaksiyalarda barionlar sayının və leptonlar sayının saxlanması qanunlarını qısaca belə yazırlar: $\Delta B=0$, $\Delta L_e=0$, $\Delta L_\mu=0$, $\Delta L_\tau=0$. Toqquşma proseslərini həm laborator («*l*-sistemi») və həm də ətalət mərkəzi sistemində («m-sistemi») aparmaq mümkündür. Laborator sistemi ölçü cihazlarının sükunətdə olduğu sistemdir və toqquşan zərrəciklərdən biri (hədəf) bu sistemdə sükunətdə götürülür (yəni, onun impulsu $\vec{p}=0$ olur). Ətalət mərkəzi sistemində isə toqquşan zərrəciklərin və ya reaksiyadan alınan zərrəciklərin impulslarının cəmi sıfırdır:

$$\vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'} + \ldots + \vec{p}_N^{\,'} = \sum_a^N \vec{p}_a^{\,'} = 0.$$

25.1 Ətalət mərkəzinin hərəkət sürəti

Sadə bir hal üçün ətalət mərkəzi sisteminin hərəkət sürətini tapaq. Fərz edək ki, N zərrəcikdən ibarət mexaniki sistem və ya cisim K' hesabat sistemində bir tam kimi sükunətdədir, yəni $\vec{P}' = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a^{\,'} = 0$. K hesabat sistemində bu cisim artıq sükunətdə olmayacaq və onun impulsunu $\vec{P} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a$ ilə işarə edək. Bu mexaniki sistemin K' və K-da tam enerjisini $\varepsilon' = \sum_{a=1}^N \varepsilon_a^{'}$ və $\varepsilon = \sum_{a=1}^N \varepsilon_a$ ilə işarə edək. Burada K' hesabat sistemi ətalət mərkəzi sistemi olacaqdır və xüsusi Lorens çevrilməsində o, x oxu boyunca V_x sürətilə hərəkət edir. İndi enerji və impuls üçün K-dan K' sisteminə keçid düsturlarını yazaq, yəni (24.7) düsturlarında $(\ldots)' \leftrightarrow (\ldots)$, $V \to -V$ əvəzləməsini aparaq:

$$P_x^{'} = 0 = \gamma\left(P_x - \frac{V_x \varepsilon}{c^2}\right), \quad P_y^{'} = 0 = P_y, \quad P_z^{'} = 0 = P_z, \quad \varepsilon' = \gamma(\varepsilon - V_x P_x).$$

Buradan $V_x = \dfrac{P_x c^2}{\varepsilon}$ alırıq. Əgər K' sistemi istənilən istiqamətdə hərəkət edərsə, onda

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}c^2}{\varepsilon} = \frac{c^2 \sum_{a=1}^N \vec{p}_a}{\sum_{a=1}^N \varepsilon_a} \tag{25.1}$$

olar. Bu ətalət mərkəzi sisteminin hərəkət sürətidir. Biz bunu relyativistik zərrəcik (və ya cisim) üçün $\vec{\upsilon}$, $\vec{p}$ və ε arasında əlaqəni göstərən (23.7) düsturundakı $\vec{\upsilon} = \dfrac{\vec{p}c^2}{\varepsilon}$ ifadəsində $\vec{p}$-ni $\sum_a \vec{p}_a$ və ε-nu $\sum_a \varepsilon_a$ ilə əvəz etməklə çox asanlıqla ala bilərdik. Qeyd edək ki, qarşılıqlı təsirdə olan zərrəciklər sisteminin enerjisi ümumiyyətlə additiv deyildir, lakin xüsusi hallarda additiv ola bilər.

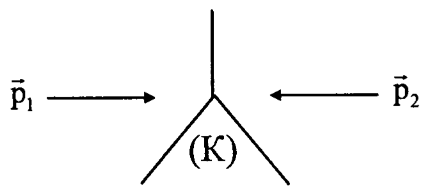
İndi bir neçə kinematik məsələyə nəzər salaq.

25.2. Eyni bir effektin alınması üçün lazım olan enerjinin ətalət mərkəzi və laborator sistemlərində ifadəsi

Belə məlum olur ki, iki elementar zərrəciyin toqquşması zamanı baş verən effektlər bu zərrəciklərin nisbi sürətindən asılıdır.

Fərz edək ki, iki zərrəcik iki müxtəlif sürətləndirici tərəfindən eyni bir p impulsuna qədər sürətləndirilərək bir-birilə qarşılaşır və K ətalət mərkəzi sistemində toqquşaraq müəyyən bir reaksiyaya səbəb olur. Zərrəciklərin kütlələrini m_1 və m_2 ilə işarə edək. Ətalət mərkəzi sistemində zərrəciklərin impulslarının cəmi $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ olur. Ətalət mərkəzi sistemi olaraq həm K-nı, həm də K'-i seçə bilərik.

Biz burada əlverişlilik üçün K-nı seçmişik. Şərti olaraq K-da $\vec{p}_1$ impulsunun sağ və $\vec{p}_2$ impulsunun sol tərəfə yönəldiyini fərz edək:



Şəkil **25.1.** Ətalət mərkəzi sistemi

İmpulsun saxlanması qanununda $-\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}$ olduğunu nəzərə alaq və K sistemində reaksiyanın getməsi üçün zərrəciklərin tam enerjisini yazaq: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Burada $\varepsilon_{1,2} = \sqrt{\vec{p}_{1,2}^{\,2}c^2 + m_{1,2}^2c^4} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m_{1,2}^2c^4}$. Toqquşan zərrəciklərin ətalət mərkəzində impulsları qiymətcə eyni istiqamətcə əks, kütlələri, enerjiləri və sürətləri isə müxtəlifdir. Zərrəciklərin sürətləri $\vec{\upsilon}_1 = \dfrac{\vec{p}_1c^2}{\varepsilon_1}, \vec{\upsilon}_2 = \dfrac{\vec{p}_2c^2}{\varepsilon_2}$ olur.

İndi həmin reaksiyanı laborator sistemində aparaq. Bu zaman m_1 zərrəciyini laborator sistemində (məs. K'-də) sükunətdə götürürlər və m_2-zərrəciyini çox böyük enerjiyə qədər sürətləndirərək onu m_1 ilə (hədəflə) toqquşdururlar və həmin reaksiyanın alınmasına nail olurlar. Bu zaman toqquşan zərrəciklərin laborator sistemində malik olduğu tam enerjini hesablayaq: $\varepsilon' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' = m_1c^2 + \varepsilon_2' = m_1c^2 + \dfrac{m_2c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon_{21}'^2}{c^2}}}$. Burada υ_{21}' laborator sistemində 2-ci zərrəciyin sürətidir. Birinci zərrəcik laborator sistemində sükunətdə olduğundan υ_{21}' əslində 2-ci zərrəciyin 1-ci zərrəciyə nəzərən sürətidir. 1-ci zərrəcik K-ya nəzərən $\vec{\upsilon}_1$ sürətinə malikdirsə, onda K sistemi 1-ci zərrəciyə nəzərən $-\vec{\upsilon}_1$ sürətinə malik olur. 1-ci zərrəcik K'-ə nəzərən sükunətdə olduğundan K sistemi elə K'-ə nəzərən $-\vec{\upsilon}_1$ sürətinə malikdir. Digər tərəfdən 2-ci zərrəcik K-ya nəzərən $\vec{\upsilon}_2$ sürətinə malikdir. Kollinear sürətlərin (16.8) toplanma düsturuna əsasən 2-ci zərrəciyin K' laborator sisteminə (yəni 1-ci zərrəciyə) nəzərən υ_{21}' hərəkət sürəti onun K-ya nəzərən $\vec{\upsilon}_2$ sürəti ilə K-nın K'-ə nəzərən «$-\vec{\upsilon}_1$» sürətinin «relyativistik cəminə» bərabərdir:

$$\vec{\upsilon}_{21}' = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{1-\dfrac{\vec{\upsilon}_1\vec{\upsilon}_2}{c^2}} = \frac{\vec{p}c^2\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}+\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)}{1+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{p^2c^4}{\varepsilon_1\varepsilon_2}} = \frac{\vec{p}c^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2+p^2c^2}.$$

Onda laborator sistemində tam enerji

$$\varepsilon' = m_1c^2 + \varepsilon_2' = m_1c^2 + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{\upsilon}_{21}'^2}{c^2}}} = m_1c^2 + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{p^2c^4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1\varepsilon_2+p^2c^2)^2}}} =$$

$$= m_1c^2 + \frac{m_2c^2(\varepsilon_1\varepsilon_2+p^2c^2)}{\sqrt{(\varepsilon_1\varepsilon_2+p^2c^2)^2 - p^2c^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}}$$

olur. Burada kəsirin surət və məxrəcində p^2c^2 kəmiyyətini zərrəciklərin relyativistik enerjiləri ilə ifadə etmək lazımdır. Əvvəlcə bunu surətdə edək:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + p^2c^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(p^2c^2+p^2c^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4 + \varepsilon_2^2 - m_2^2c^4) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - (m_1^2+m_2^2)c^4]$$

İndi məxrəcdə kökün içini sadələşdirək:

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2+p^2c^2)^2-p^2c^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2+p^2c^2(-\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)+p^4c^4=$$

$$=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2+p^2c^2(p^2c^2-\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)=\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2+p^2c^2(-m_1^2c^4-\varepsilon_2^2)=\varepsilon_2^2(\varepsilon_1^2-p^2c^2)-$$

$$-p^2c^2m_1^2c^4=\varepsilon_2^2m_1^2c^4-p^2c^2m_1^2c^4=m_1^2c^4(\varepsilon_2^2-p^2c^2)=m_1^2m_2^2c^8.$$

Nəticədə

$$\varepsilon'=m_1c^2+\frac{1}{2}\frac{m_2c^2[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-(m_1^2+m_2^2)c^4]}{m_1m_2c^4}=$$

$$=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2+c^4(m_1^2-m_2^2)}{2m_1c^2} \qquad (25.3)$$

olur. Bu verilmiş məsələnin ən ümumi həllidir. Xüsusi halda toqquşan zərrəciklərin sükunət kütlələri eyni olduqda bu düstur sadə şəklə düşür.

$$\varepsilon'=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{2m_1c^2}. \qquad (25.3a)$$

Qeyd edək ki, ətalət mərkəzində toqquşan zərrəciklərin bütün enerjisi reaksiyanın getməsinə sərf olunur, lakin laborator sistemində toqquşan zərrəciklərin enerjisinin bir hissəsi reaksiyanın gedişinə, digər hissəsi isə zərrəciklərin birgə irəliləmə hərəkətinə (təpmə enerjisi) sərf edilir. Fərz edək ki, toqquşan zərrəciklər elektronlardır. Onda

$$m_ec^2=9{,}1\cdot10^{-28}\cdot9\cdot10^{20}\,q\frac{cm^2}{san^2}=81{,}9\cdot10^{-8}\,erq=0{,}51\,Mev$$

olur. Tutaq ki, elektronlar ətalət mərkəzi sistemində $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0=$ $=100Mev$ enerjiyə qədər sürətləndirilir. Onda laborator sistemində bu elektronu $\varepsilon'\cong40000Mev$-ə qədər sürətləndirmək lazımdır. Beləliklə ətalət mərkəzi sistemində $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}=400$ dəfə kiçik enerjidən istifadə etmək lazımdır, yəni ətalət mərkəzində sürətləndiricinin gücünə 400 dəfə qənaət edilir. Ona görə müasir fizikada «m-sistemində» qarşılaşan zərrəciklər dəstəsi yaradan sürətləndiricilərə üstünlük verilir. Məs. DESY (AFR), SLAC (ABŞ), CERN (İsveçrə)-də qarşılaşan e^-e^+, e^-e^-, pp, $p\bar{p}$ dəstələri sürətləndiriciləri (kollayderləri) mövcuddur.

Biz burada məsələyə bir qədər geniş baxdıq. *l*- və m-sistemlərinə nəzər saldıq, birindən digərinə keçmək üçün sürətlərin relyativistik toplanma qaydasını təkrar etdik və məsələnin həllini uzatdıq. Əlbəttə (25.3) düsturunu daha qısa yolla almaq olar. Bunun üçün 4-ölçülü impuls və onun xassələrindən istifadə etmək lazımdır. 4-ölçülü impulsun kvadratı relyativistik invariantdır və həmişə $p_\mu^2 = \vec{p}^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m^2c^2$. Bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə 4-ölçülü impulslar dəyişir, lakin kvadratları dəyişilir: $p_\mu \neq p_\mu'$, $p_\mu^2 = p_\mu'^2 = inv$. Fərz edək ki, birinci zərrəcik laborator sistemində (K'-də) sükunətdədir yəni $\vec{p}_1' = 0$, $p_{1\mu}' = \left\{0, \frac{i}{c}\varepsilon_1'\right\}$, $\varepsilon_1' = m_1c^2$. 2-ci zərrəcik isə $\vec{p}_2' \neq 0$ impulsu ilə hərəkət edərək onunla toqquşur $p_{2\mu}' = \left\{\vec{p}_2', \frac{i}{c}\varepsilon_2'\right\}$.

Ətalət mərkəzi sistemində (K-da) toqquşan zərrəciklərin 3-ölçülü impulslarının cəmi sıfırdır $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ və ona görə $p_{1\mu} + p_{2\mu} = \left\{\vec{0}, \frac{i}{c}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right\}$ olacaqdır. Toqquşan bu iki zərrəciyin *l*- və m- sistemlərində 4-ölçülü impulslarının cəmi bir-birinə bərabər deyil, lakin cəminin kvadratları bərabər (çünki invariantdır):

$$(p_{1\mu}' + p_{2\mu}')^2 = (p_{1\mu} + p_{1\mu})^2 \text{ və ya } p_{1\mu}'^2 + p_{2\mu}'^2 + 2p_{1\mu}'p_{2\mu}' = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{c^2}.$$

Bərabərliyi sadələşdirək:

$$-m_1^2c^2 - m_2^2c^2 - 2\frac{m_1c^2\varepsilon_2'}{c^2} = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{c^2}$$

Buradan

$$\varepsilon_2' = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - c^4(m_1^2 + m_2^2)}{2m_1c^2} \qquad (25.3')$$

olur. Bu elə (25.3) düsturudur (əlbəttə, bərabərliyin sağ və sol tərəfinə m_1c^2 həddini əlavə etmək lazımdır).

25.3. *l*- və m-sistemlərində gedən 2 zərrəcikli reaksiyalar

Əvvəlcə 2 zərrəciyin elastiki və qeyri-elastiki toqquşma reaksiyalarına baxaq. Elastiki toqquşma zamanı zərrəciklərin sayı, növü və daxili enerji halları toqquşma nəticəsində dəyişmir. Qeyri-elastiki toqquşma zamanı bu üç kəmiyyətdən heç olmazsa biri (ümumiyyətlə isə hamısı) dəyişir. Toqquşmaya qədər zərrəciklərin 4-ölçülü impulslarını $p_{1\mu}$ və $p_{2\mu}$ ilə, toqquşduqdan sonra isə $p'_{1\mu}$ və $p'_{2\mu}$ ilə (ştrixlə) işarə edəcəyik. Ətalət mərkəzində (m-sistemində) uyğun impuls və enerjilərə «sıfır» indeksi (yuxarıda və ya aşağıda) əlavə edəcəyik (məsələn, $p^0_{1\mu}$, $p^{0'}_{1\mu}$ və s.).

a) Fərz edək ki, 2 zərrəcik m-sistemində elastiki toqquşur. Toqquşma prosesində zərrəciklər sisteminin enerjisi və impulsu (ümumiyyətlə 4-ölçülü impulsu) dəyişmir:

$$\begin{cases} \vec{p}_1^{\,0} + \vec{p}_2^{\,0} = 0 = \vec{p}_1^{\,0'} + \vec{p}_2^{\,0'}, \\ \varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0 = \varepsilon_1^{0'} + \varepsilon_2^{0'}. \end{cases}$$

Ətalət mərkəzi sistemində tam impuls sıfır olduğundan $\vec{p}_1^{\,0} = -\vec{p}_2^{\,0} \equiv \vec{p}^{\,0}$ və $\vec{p}_1^{\,0'} = -\vec{p}_2^{\,0'} \equiv \vec{p}^{\,0'}$ olur.

Düzxətt boyunca qarşı-qarşıya gələn zərrəciklər toqquşma nəticəsində öz hərəkət istiqamətlərini θ_0 bucağı qədər dəyişərək yenə düz xətt istiqamətində bir-birindən uzaqlaşırlar. Toqquşma nəticəsində impulsların qiyməti (modulu) dəyişmir və yalnız istiqamətləri dəyişir ($p^0 = p^{0'}$). Doğrudan da enerjinin saxlanması qanunundan bu aşkar görünür:

$$c\sqrt{p_0^2 + m_1^2c^2} + c\sqrt{p_0^2 + m_2^2c^2} = c\sqrt{p_0'^2 + m_1^2c^2} + c\sqrt{p_0'^2 + m_2^2c^2}$$

Bərabərliyin sol və sağ tərəfindəki ikinci hədlərin yerlərini qarşılıqlı dəyişərək yeni bərabərliyi kvadrata yüksəltsək, alarıq: $p_0^2 = p_0'^2$ və ya $p_0 = p_0'$.

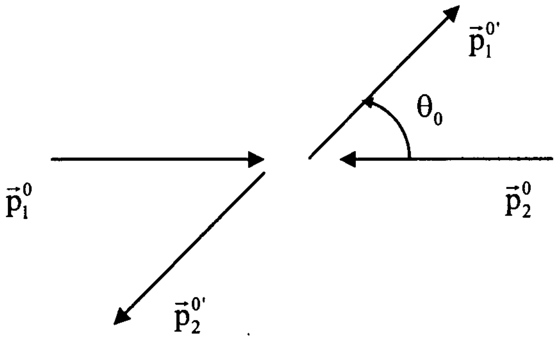
Bu o deməkdir ki, elastiki toqquşmada m-sistemində zərrəciyin enerjisi və impulsunun qiyməti dəyişmir: $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^{0'}$, $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^{0'}$, $p^0 = p^{0'}$.

b) İndi bu 2 zərrəciyin toqquşmasına laborator sistemində (*l*-sistemi) nəzər salaq. Fərz edək ki, bu sistemdə ikinci zərrəcik sükunətdədir: $\vec{p}_2 = 0$. Bu sistemdə enerji və impulsun saxlanması qanunlarını yazaq:

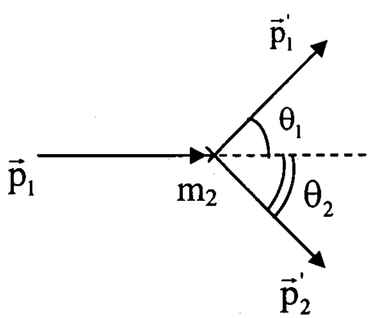
$$\begin{cases} \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \\ \varepsilon_1 + m_2c^2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'. \end{cases}$$

Bu dörd tənliyi birgə həll edərək biz 4 məchul kəmiyyəti təyin edə bilərik. Bu məchullar hansılardır və onların əhəmiyyəti nədir? sualına baxdığımız məsələnin qoyuluşu cavab verir. Qeyd edək ki, saxlanma qanunlarının 3-ölçülü şəkildə yazılışı bəzi məsələlərin həllində çox da əlverişli olmur və relyativistik invariantlıq şərtlərindən istifadə etməkdə müəyyən çətinlik yaradır. Ona görə biz çox vaxt saxlanma qanunlarının 4-ölçülü şəklindən istifadə edəcəyik:

$$p_{1\mu} + p_{2\mu} = p'_{1\mu} + p'_{2\mu}. \tag{25.4}$$



***Şəkil* 25.2.** *İki zərrəciyin m-sistemində elastiki səpilməsi*



***Şəkil* 25.3.** *2 zərrəciyin l-sistemində elastiki toqquşması*

Şəkil 25.3-dən aydındır ki, *l*-sistemində toqquşma zamanı zərrəciklərin impulsları və enerjiləri dəyişir və onlar müxtəlif bucaqlar altında səpilir. Səpilmə bucaqlarını tapmaq üçün (25.4) tənliyində növbə ilə əvvəlcə $p'_{2\mu}$ impulsunu sol tərəfə keçirərək bərabərliyi kvadrata yüksəltmək və sonra $p'_{1\mu}$ impulsu üçün də həmin əməliyyatı aparmaq lazımdır:

$$(p_{1\mu} + p_{2\mu} - p'_{2\mu})^2 = p'^2_{1\mu}$$

və ya

$$p_{1\mu}^2 + p_{2\mu}^2 + p_{2\mu}^{'2} + 2p_{1\mu}p_{2\mu} - 2p_{1\mu}p_{2\mu}^{'} - 2p_{2\mu}p_{2\mu}^{'} = p_{1\mu}^{'2}. \qquad (25.4a)$$

Burada

$$p_{1,2\mu}^2 = -m_{1,2}^2c^2,\ p_{1,2\mu}^{'2} = -m_{1,2}^2c^2,\ p_{2\mu} = \left\{\vec{0}, \frac{i}{c}m_2c^2\right\},\ p_{1\mu}p_{2\mu} = -m_2\varepsilon_1,$$

$$p_{2\mu}p_{2\mu}^{'} = -m_2\varepsilon_2^{'},\ p_{1\mu}p_{2\mu}^{'} = \vec{p}_1\vec{p}_2^{'} - \frac{1}{c^2}\varepsilon_1\varepsilon_2^{'} = p_1p_2^{'}\cos\theta_2 - \frac{1}{c^2}\varepsilon_1\varepsilon_2^{'}$$

olduğunu nəzərə alsaq $-m_2^2c^2 - m_2\varepsilon_1 - p_1p_2^{'}\cos\theta_2 + \frac{1}{c^2}\varepsilon_1\varepsilon_2^{'} + m_2\varepsilon_2^{'} = 0$ olar. Buradan

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{p_1p_2^{'}c^2}[(\varepsilon_1 + m_2c^2)(\varepsilon_2^{'} - m_2c^2)] \qquad (25.5)$$

alınır. İndi həmin əməliyyatı $p_{1\mu}^{'}$ üçün aparsaq

$$(p_{1\mu} + p_{2\mu} - p_{1\mu}^{'}) = p_{2\mu}^{'2}$$

və ya

$$p_{1\mu}^2 + p_{2\mu}^2 + p_{1\mu}^{'2} + 2p_{1\mu}p_{2\mu} - 2p_{1\mu}p_{1\mu}^{'} - 2p_{2\mu}p_{1\mu}^{'} = p_{2\mu}^{'2}. \qquad (25.4b)$$

Burada 4-ölçülü vektorların əvvəlki hasillərindən və əlavə hasillərindən və əlavə $p_{2\mu}p_{1\mu}^{'} = -m_2\varepsilon_1^{'},\ p_{1\mu}p_{1\mu}^{'} = \vec{p}_1\vec{p}_1^{'} - \frac{1}{c^2}\varepsilon_1\varepsilon_1^{'} = p_1p_1^{'}\cos\theta_1 - \frac{1}{c^2}\varepsilon_1\varepsilon_1^{'}$ ifadələrindən istifadə etsək $-m_1^2c^2 - m_2\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_1^{'} - p_1p_1^{'}\cos\theta_1 + \frac{1}{c^2}\varepsilon_1\varepsilon_1^{'} = 0$ olar. Bu bərabərlikdən

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{p_1p_1^{'}c^2}[\varepsilon_1^{'}(\varepsilon_1 + m_2c^2) - m_2c^2\varepsilon_1 - m_1^2c^4] \qquad (25.6)$$

alırıq. (25.5)-(25.6) düsturları zərrəciklərin səpilmə bucaqlarını zərrəciklərin toqquşma zamanı enerjilərinin dəyişməsi ilə əlaqələndirir. Bu bərabərlikləri tərsinə həll edərək zərrəciklərin $\varepsilon_1^{'}$ və $\varepsilon_2^{'}$ səpilmə enerjilərini onların θ_1 və θ_2 səpilmə bucaqları ilə ifadə edə bilərik.

(25.5)-i kvadrata yüksəldərək $c^2p_{1,2}^{'2} = \varepsilon_{1,2}^{'2} - m_{1,2}^2c^4$ və $c^2p_1^2 = \varepsilon_1^2 - m_1^2c^4$ ifadələrini nəzərə alsaq, $\varepsilon_2^{'}$ üçün tənlik alarıq. Bu tənliyi həll edərək $\varepsilon_2^{'}$-i θ_2 bucağı ilə ifadə edirik:

$$\varepsilon_2' = m_2c^2 \frac{(\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 + (\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4)\cos^2\theta_2}{(\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 - (\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4)\cos^2\theta_2}. \qquad (25.7)$$

(25.6) düsturu ilə həmin əməliyyatı, aparsaq ε_1' üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\varepsilon_1' = \frac{(\varepsilon_1 + m_2c^2)(\varepsilon_1 m_2c^2 + m_1^2c^4) \pm p_1^2 m_1 c^4 \cos\theta_1 \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \sin^2\theta_1}}{(\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 - (\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4)\cos^2\theta_1}. \qquad (25.8)$$

Düsturdan görünür ki, $m_1 > m_2$ olduqda (hədəf yüngül olduqda) θ_1 səpilmə bucağı məhdud qiymətlər alır:

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Bu zaman θ_1-in hər bir qiymətinə ε_1' enerjinin iki qiyməti uyğun gəlir. Əgər $m_1 = m_2$ olarsa, θ_1-in qiyməti $\pi/2$-dən böyük ola bilməz və θ_1-in hər bir qiymətinə enerjinin bir qiyməti uyğun gələr. Bu zaman (25.8) düsturunda «+» işarəsini saxlamaq lazımdır. Əgər «–» işarəsini saxlasaq, onda bucaqdan asılı olmadan həmişə $\varepsilon_1' = m_1c^2$ olar və bu da həqiqətə uyğun deyildir. Əgər $m_1 < m_2$ olarsa, θ_1 sıfırla π arasında istənilən qiyməti ala bilər və bu zaman iti bucaq üçün «+», kor bucaq üçün «–» işarəsini saxlamaq lazımdır.

Bu düsturlar istənilən kütləli zərrəciklərin elastiki səpilməsi üçün doğrudur. Xüsusi halda bu düsturlardan işığın kvant təbiətini aşkar etmək üçün Komptonun qoyduğu təcrübələrdən alınan effekti (Kompton effekti) nəzəri araşdırmaq üçün istifadə etmək olar.

c) Kompton 1923-cü ildə rentgen şüalarının $CaCO_3$ kristalından səpilməsi zamanı bu effekti kəşf etmişdir. Kvant nəzəriyyəsinə görə rentgen şüaları və ümumiyyətlə işıq şüaları fotonlar selindən ibarətdir. Fotonun (işıq kvantının) kütləsi sıfırdır və enerjisi $\hbar\omega$-dır. Burada $\omega = \frac{2\pi}{T}$ uyğun işıq şüasının tezliyidir. Fotonlar kristalın elektronlarından elastiki səpilir. Fotonun $\hbar\omega$ enerjisi elektronun kristalda rabitə enerjisindən böyükdürsə, elektronu sərbəst hesab etmək olar. Beləliklə kütləsi $m_1 = 0$, enerjisi $\varepsilon_1 = \hbar\omega$ və $p_1 = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\varepsilon_1}{c}$ impulsu olan foton sükunətdə olan

$m_2 \equiv m_e$ kütləli elektrondan θ_1 bucağı altında elastiki səpilir. Səpilən fotonun son enerjisini $\varepsilon_1' = \hbar\omega'$ ilə işarə edək. Dediklərimizi (25.8) düsturunda nəzərə alaq:

$$\varepsilon_1' = \frac{(\varepsilon_1 + m_2c^2)\varepsilon_1 m_2c^2 + p_1^2 m_2c^4 \cos\theta_1}{(\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 - \varepsilon_1^2 \cos^2\theta_1} =$$

$$= \varepsilon_1 m_2 c^2 \frac{\varepsilon_1 + m_2c^2 + \varepsilon_1 \cos\theta_1}{(\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 - \varepsilon_1^2 \cos^2\theta_1} =$$

$$= \frac{\varepsilon_1 m_2c^2}{m_2c^2 + \varepsilon_1(1-\cos\theta_1)} = \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{\varepsilon_1}{m_2c^2}(1-\cos\theta_1)}.$$

Bu bərabərliyi kəsirdən qurtaraq və alınmış ifadəni $\varepsilon_1'\varepsilon_1$ hasilinə bölək:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{m_2c^2}(1-\cos\theta_1) = \frac{1}{\varepsilon_1'}$$

Son bərabərlikdə $\varepsilon_1 = \hbar\omega = \hbar\frac{2\pi}{T} = \frac{hc}{\lambda}$, $\varepsilon_1' = \hbar\omega' = \frac{hc}{\lambda'}$ yazaraq bərabərliyin hər tərəfini hc-yə vuraq:

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \lambda_c(1-\cos\theta_1). \qquad (25.9)$$

Burada $\lambda = cT$ və $\lambda' = cT'$ işıq şüasının səpilmədən əvvəl və səpilmədən sonrakı dalğa uzunluğu, $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2{,}42 \cdot 10^{-10}$ cm sabiti isə elektronun Kompton dalğa uzunluğudur. (25.9) düsturundan görünür ki, səpilmə bucağından asılı olaraq işıq və ya rentgen şüasının dalğa uzunluğu artır. Səpilmə bucağının $\cos\theta_1 = \pi$ qiymətində bu artım maksimum qiymət alır:

$$\Delta\lambda_{max} = 2\lambda_c.$$

(25.9) düsturu istənilən uzunluqlu işıq dalğaları üçün doğrudur. Lakin Kompton effekti qısa dalğalar üçün daha çox nəzərə çarpır. Uzun dalğalar üçün ($\lambda >> \lambda_c$) Kompton effekti az əhəmiyyət kəsb edir və bu halda $\Delta\lambda \approx 0$, yəni $\lambda' \approx \lambda$ yazmaq olar. Bu zaman səpilmə Reley səpilməsinə uyğun gəlir.

Aldığımız kinematik (25.9) düsturu γ-kvantın (fotonun) elektrondan səpilməsi zamanı onun dalğa uzunluğunun və ya tezliyinin təcrübədə müşahidə olunan dəyişməsini düzgün izah edir.

Qeyd edək ki, Kompton effekti tam şəkildə kvant elektrodinamikası qanunları ilə təsvir olunur və bu prosesin effektiv kəsiyini, onun bucaq və enerjiyə görə paylanmasını ilk dəfə Kleyn, Nişina və Tamm vermişlər.

Əlbəttə bu münasibətləri biz fotonun sükunətdəki elektronla toqquşmasını ifadə edən $p_\mu^\gamma + p_\mu^0 = p_\mu^{'\gamma} + p_\mu$ saxlanma qanununda fotonun səpilmə impulsu $p_\mu^{'\gamma}$-nü sola keçirərək alınan ifadəni kvadrata yüksəltməklə hesablaya bilərdik ($p_\mu^0 = \left\{0, \frac{i}{c}mc^2\right\}$ sükunətdəki elektronun impulsudur). Lakin bizim məqsədimiz aldığımız düsturların istənilən iki zərrəcikli reaksiyaya tətbiq edilməsini göstərməkdir.

d) Biz iki zərrəciyin elastiki səpilmə prosesini həm ətalət mərkəzi sistemində («m»-də) və həm də laborator sistemində («*l*»-də) ayrılıqda tədqiq etdik. Belə məlum olur ki, 4-ölçülü impulsların hasilinin invariantlığından istifadə edərək eyni bir elastiki səpilmə prosesini «m»-də və «*l*»-də xarakterizə edən kəmiyyətləri bir-birilə əlaqələndirə bilərik. Məsələn, «*l*»-sistemində zərrəciklərin ε_1' və ε_2' elastiki səpilmə enerjilərini bu zərrəciklərin «m»-sistemindəki θ_0 səpilmə bucağı ilə ifadə etmək olar. Məlumdur ki, «m»-sistemində səpilən zərrəciklər bir ədəd θ_0 səpilmə bucağı ilə (bax: şəkil 25.2) xarakterizə olunur:

$$(p_{1\mu}^0 p_{1\mu}^{'0}) = \vec{p}_{10}\vec{p}_{10}' - \frac{1}{c^2}\varepsilon_{10}\varepsilon_{10}' = p_0^2\cos\theta_0 - \frac{1}{c^2}\varepsilon_{10}^2 = -p_0^2(1-\cos\theta_0) - m_1^2c^2 .$$

İndi (25.4b) düsturunda $(p_{1\mu}p_{1\mu}') = (p_{1\mu}^0 p_{1\mu}^{'0}) = \text{in var}$ olduğunu nəzərə alaq və bütün ifadəni sadələşdirək (m_2 sükunətdədir):

$$-\cancel{2m_1^2c^2} - \frac{2}{c^2}\varepsilon_1 m_2 c^2 + 2(p_0^2(1-\cos\theta_0) + \cancel{m_1^2c^2}) + \frac{2}{c^2}m_2c^2\varepsilon_1' = 0 .$$

Buradan ε_1' -i təyin edək: $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - \dfrac{p_0^2(1-\cos\theta_0)}{m_2}$.

Son ifadədə p_0-ı zərrəciklərin «*l*»-sistemindəki başlanğıc enerjiləri ilə ifadə etmək üçün $(p_{1\mu}p_{2\mu}) = (p_{1\mu}^0 p_{2\mu}^0) = \text{in var}$ bərabərliyindəki 4-ölçülü impulsların hasillərini aşkar şəkildə yazaq:

$$-\frac{1}{c^2}\varepsilon_1 m_2 c^2 = \vec{p}_{10}\vec{p}_{20} - \frac{1}{c^2}\varepsilon_{10}\varepsilon_{20} = -\vec{p}_0^{\,2} - \frac{1}{c^2}c^2\sqrt{(p_0^2 + m_1^2c^2)(p_0^2 + m_2^2c^2)}$$

və ya

$$\varepsilon_1 m_2 - p_0^2 = \sqrt{(p_0^2 + m_1^2c^2)(p_0^2 + m_2^2c^2)}\,.$$

Son ifadəni kvadrata yüksəldərək p_0^2-ni tyəin edək:

$$p_0^2 = \frac{m_2^2(\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4)}{2\varepsilon_1 m_2 + m_1^2c^2 + m_2^2c^2}\,.$$

Bunu yuxarıda ε_1'-in ifadəsində nəzərə alsaq

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - \frac{m_2(\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4)(1-\cos\theta_0)}{2\varepsilon_1 m_2 + m_1^2c^2 + m_2^2c^2} \qquad (25.10)$$

olur.

ε_2'-i hesablamaq üçün ya (25.4a) düsturunda analoji olaraq $(p_{1\mu}p_{2\mu}') = (p_{1\mu}^0 p_{2\mu}^{'0})$ bərabərliyindən istifadə edək və ya «*l*»-sistemində enerjinin $\varepsilon_1 + m_2c^2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$ saxlanma qanunundan alınmış $\varepsilon_2' = \varepsilon_1 + m_2c^2 - \varepsilon_1'$ bərabərliyində (25.10) düsturunu nəzərə alaq:

$$\varepsilon_2' = m_2c^2 + \frac{m_2(\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4)}{2m_2\varepsilon_1 + m_1^2c^2 + m_2^2c^2}(1-\cos\theta_0) \qquad (25.11)$$

Beləliklə (25.10) və (25.11) düsturları zərrəciklərin «*l*»-sistemində səpilmə enerjilərini onların «M»-sistemində yeganə səpilmə bucağı ilə ifadə edir. Biz (25.10) və (25.11) düsturlarını uyğun (25.8) və (25.7) düsturları ilə müqayisə edərək zərrəciklərin ətalət mərkəzi və laborator sistemlərindəki səpilmə bucaqları arasındakı əlaqələri bilavasitə tapa bilərik. Məsələn, (25.11) və (25.7) eyniliklərində bir qədər cəbri çevrilmə apararaq θ_0 və θ_2 səpilmə bucaqları arasında aşağıdakı əlaqəni tapanıq:

$$\cos\theta_0 = \frac{a - (2a-b)\cos^2\theta_2}{a - b\cos^2\theta_2}\,. \qquad (25.12)$$

Burada $a = (\varepsilon_1 + m_2c^2)^2$ və $b = \varepsilon_1^2 - m_1^2c^4$.

Buna oxşar əlaqə θ_0 və θ_1 səpilmə bucaqları arasında mövcuddur. Bu əlaqəni tapmağı oxuculara tapşırırıq.

25.4. Zərrəciklərin parçalanma və doğulma reaksiyaları

1. Kütləsi M olan zərrəcik kütlələri m_1 və m_2 olan iki zərrəciyə par-

çalanır. İlk zərrəciyin sükunətdə olduğu sistemdə parçalanma nəticəsində yaranan zərrəciklərin enerjilərini hesablayın. Məsələni 4-ölçülü impulsun saxlanması qanunundan istifadə edərək həll edəcəyik:

$$p_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}. \tag{25.13}$$

İlk zərrəciyin sükunətdə olduğu sistemdə zərrəciklərin 4-löçülü impulslarını yazaq: $p_\mu = \left\{0, \frac{i}{c}Mc^2\right\}$, $p_{1,2\mu} = \left\{\vec{p}_{1,2}, \frac{i}{c}\varepsilon_{1,2}\right\}$.

Birinci zərrəciyin enerjisini tapmaq üçün (25.13) tənliyində $p_{1\mu}$-nü sol tərəfə keçiririk və alınmış ifadəni kvadrata yüksəldirik: $(p_\mu - p_{1\mu})^2 = p_{2\mu}^2$. Burada $p_\mu^2 = -M^2c^2$, $p_{1,2\mu}^2 = -m_{1,2}^2c^2$ və $p_\mu p_{1\mu} = -M\varepsilon_1$ olduğunu nəzərə alaraq, çox asanlıqla ε_1-i hesablayırıq: $\varepsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}c^2$. Eyni əməliyyatı $p_{2\mu}$-impulsu üçün edərək ε_2-in hesablayırıq:

$$\varepsilon_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}c^2.$$

Bu məsələni (25.13) tənliyini 3-ölçülü

$$Mc^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

şəklində yazmaqla həll etmək olardı. Lakin yuxarıda apardığımız üsul daha asandır.

Aydındır ki, ilk zərrəciyin $\vec{v}$ sürətilə hərəkət etdiyi ətalət sistemində də ε_1 və ε_2-ni təyin etmək olar. Bunun üçün bizə ilk zərrəciyin v sürəti və onun $\vec{p}_1$ (və ya $\vec{p}_2$) impulsu ilə əmələ gətirdiyi θ bucağı verilməlidir. Doğrudan da indi $p_\mu p_{1\mu} = pp_1\cos\theta - \frac{1}{c^2}\varepsilon\varepsilon_1$ ifadəsindən görünür ki, ε_1-i təyin etmək üçün bizə p (və ya v) və cosθ məlum olmalıdır (yada salaq ki, $cp_1 = \sqrt{\varepsilon_1^2 - m_1^2c^4}$).

2. Sükunətdəki həyəcanlanmış nüvə (həyəcanlaşma enerjisi Δε) özündən γ-kvant şüalandırır. Bu γ-kvantın ω tezliyini tapın. Həyəcanlanmış nüvənin kütləsi m-dir.

Hansı səbəbə görə $\omega \neq \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar}$ bərabərsizliyi yaranır?

Məsələni həll etmək üçün həyacanlanmış nüvə, son nüvə və γ-kvantın 4-ölçülü impulslarını yazaraq:

$$p_\mu = \left(0, \frac{i}{c} mc^2\right), \; p_{1\mu} = \left(\vec{p}_1, \frac{i}{c}\varepsilon_1\right), \; p_\mu^\gamma = \left(\vec{p}^\gamma, \frac{i}{c}\hbar\omega\right),$$

4-ölçülü impulsların saxlanması qanunundan istifadə edəcəyik:

$$p_\mu = p_{1\mu} + p_\mu^\gamma. \qquad (25.14)$$

Son nüvənin kütləsi $m_1 = m - \frac{\Delta\varepsilon}{c^2}$ olur. (25.14) tənliyində p_μ^γ-nü sola keçirərək alınmış ifadəni kvadrata yüksəldək: $(p_\mu - p_\mu^\gamma)^2 = p_{1\mu}^2$ və ya $-m^2c^2 + 2m\hbar\omega = -\left(m - \frac{\Delta\varepsilon}{c^2}\right)^2 c^2$. Buradan $\hbar\omega = \Delta\varepsilon\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{2mc^2}\right)$ və ya $\omega = \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar}\left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{2mc^2}\right)$ alınır. γ-kvantın enerjisinin ifadəsindəki $-\frac{\Delta\varepsilon^2}{2mc^2}$ həddi son nüvənin təpmə enerjisidir. Əgər həyacanlanmış nüvə kristal qəfəslə sərt bağlanmış olarsa, onun kütləsi kristalın kütləsinə bərabər olacaqdır $m \to M_{kr}$. Onda γ-kvantın enerjisində və ya tezliyində iştirak edən $\frac{\Delta\varepsilon}{2M_{kr}c^2}$ həddi vahiddən çox kiçik olduğundan onu atmaq olar. Bu zaman $\omega = \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar}$ olur (Mözbauyer effekti).

İndi (25.14) tənliyində $p_{1\mu}$-nü sol tərəfə keçirərək alınmış ifadəni kvadrata yüksəldək və son nüvənin təpmə enerjisini bilavasitə hesablayaq:

$$(p_\mu - p_{1\mu})^2 = (p_\mu^\gamma)^2 \text{ və ya } -m^2c^2 + 2m\varepsilon_1 - \left(m - \frac{\Delta\varepsilon}{c^2}\right)^2 c^2 = 0.$$

Buradan son nüvənin ε_1 tam təpmə enerjisini tapırıq:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2m}\left\{2m^2c^2 - 2m\Delta\varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon^2}{c^2}\right\} = mc^2 - \Delta\varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon^2}{2mc^2}.$$

İndi təpmə kinetik enerjini hesablasaq

$$T_1 = \varepsilon_1 - m_1c^2 = mc^2 - \Delta\varepsilon + \frac{\Delta\varepsilon^2}{2mc^2} - mc^2 + \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon^2}{2mc^2}$$

olar.

3. Kütləsi m_1 olan sürətlənmiş zərrəcik sükunətdə olan m_2 kütləli zərrəciklə toqquşaraq kütlələrinin cəmi M olan bir neçə zərrəcik yaradır.

Əgər $M>m_1+m_2$ olarsa düşən zərrəciyin kinetik enerjisinin kiçik qiymətlərində bu reaksiya gedə bilməz. Çünki o, enerjinin saxlanması qanunu ilə qədağan olunub. Lakin kinetik enerjini artıraraq elə bir qiymətə çatdırmaq olar ki, bu qiymətdən etibarən reaksiya gedə bilsin (reaksiyanın hüdud enerjisi). Baxdığımız reaksiyanın hüdud enerjisini ($T_{1hüd}$) tapın.

Məsələnin həllinə hüdud enerjisi anlayışından başlayaq. Reaksiyanın hüdud enerjisi, tərifə görə elə minimum enerjidir ki, bu, reaksiyada kütlələrinin cəmi M olan zərrəcikləri yalnız doğurur (yaradır) və onlara kinetik enerji verə bilmir. Ona görə biz reaksiyanın gedişinə ətalət mərkəzi sistemində baxmalıyıq.

Toqquşan zərrəciklərin laborator sistemində tam 4-impulsunu $P_\mu = \left\{\vec{p}_1, \frac{i}{c}(\varepsilon_1 + m_2c^2)\right\}$ ilə işarə edək. Bu zərrəciklərin ətalət mərkəzi sistemində tam 4-impulsu $P'_\mu = \left\{\vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = 0, \frac{i}{c}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)\right\}$ olacaqdır. Bu sistemdə zərrəciklər qarşı-qarşıya gəlirlər və onların tam impuls vektoru sıfır olur: $\vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = 0$. Reaksiya ətalət mərkəzi sistemində gedir və reaksiya nəticəsində sükunət enerjilərinin cəmi Mc^2 olan çoxlu zərrəcik yaranır. Reaksiyadan sonra zərrəciklər sisteminin tam 4-impulsu $P^0_\mu = \left\{0, \frac{i}{c}Mc^2\right\}$ olur. Reaksiya nəticəsində enerji və impulsun saxlanması qanununa görə $P'_\mu = P^0_\mu$ olur. Lakin $P_\mu \neq P'_\mu$, çünki bunlar müxtəlif ətalət sistemlərində götürülmüş eyni zərrəciklərin tam 4-ölçülü impulslarıdır. Ancaq 4-ölçülü impulsun kvadratı relyativistik invariant olduğuna görə, bu tam 4-impulsların kvadratları bir-birinə bərabərdir. Ona görə aşağıdakı bərabərliyi yazırıq:

$$P^2_\mu = P'^2_\mu = P^{02}_\mu. \tag{25.15}$$

Baxdığımız məsələnin həlli üçün bu bərabərliyi $P^2_\mu = P^{02}_\mu$ şəklində yazaraq düşən zərrəciyin ε_1 tam enerjisini hesablayırıq:

$$P^2_\mu = P^{02}_\mu \text{ və ya } \vec{p}^{\,2}_1 - \frac{1}{c^2}(\varepsilon_1 + m_2c^2)^2 = -M^2c^2.$$

İfadəni sadələşdirərək ε_1-i hesablayaq:

$$\vec{p}^{\,2}_1 - \frac{\varepsilon^2_1}{c^2} - 2\varepsilon_1 m_2 - m^2_2c^2 = -M^2c^2 \text{ və ya } -m^2_1c^2 - 2\varepsilon_1 m_2 - m^2_2c^2 = -M^2c^2.$$

Nəticədə

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2m_2}(M^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2 \tag{25.15}$$

olur. Hüdud enerjisi düşən zərrəciyin kinetik enerjidir, yəni

$$T_{1hüd} = \varepsilon_1 - m_1c^2 = \frac{1}{2m_2}[M^2 - (m_1 + m_2)^2]c^2 . \tag{25.16}$$

25.5. Faza fəzasının və paylanma funksiyalarının çevrilməsi

Bir çox tətbiqi məsələlərdə, o cümlədən relyativistik kvant mexanikasında, statistik fizikada, plazma nəzəriyyəsində zərrəciklərin faza fəzasında, impuls fəzasında paylanması funksiyalarından istifadə edirlər. Belə məsələlərdə bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə bu funksiyaların çevrilməsi qanununu bilmək çox vacibdir. Əvvəlcə 3-ölçülü impuls fəzasından başlayaq. Bu elə abstrakt fəzadır ki, orada oxlar boyunca impulsun p_x, p_y, p_z komponentləri qeyd olunur. Bu fəzada $(d\vec{p}) \equiv d^3p \equiv dp_x dp_y dp_z$ həcmində yerləşən zərrəciklərin sayını belə təyin edirlər:

$$dN = f(\vec{p})(d\vec{p}). \tag{25.17}$$

Burada $f(\vec{p})$ paylanma funksiyasıdır. O, vahid impuls həcmində yerləşən zərrəciklərin sayıdır. (25.17)-ni impulsun bütün qiymətləri üzrə inteqrallayaraq, bu fəzada zərrəciklərin tam N sayını tapa bilərik. Zərrəciklərin tam sayı və ya onun kiçik dN hissəsi invariant olduğundan

$$dN = f(\vec{p})d^3p = f'(\vec{p}\,')d^3p' \tag{25.18}$$

yaza bilərik. Burada

$$f'(\vec{p}\,') = f(\vec{p})\frac{d^3p}{d^3p'} \tag{25.19}$$

alırıq. Yakobi teoreminə görə buradakı «həcm» elementləri belə təyin edilir

$$dp_x dp_y dp_z = J dp'_x dp'_y dp'_z . \tag{25.20}$$

Burada J Yakobiyanı köhnə koordinatların ştrixli koordinatlara görə törəməsindən təşkil edilmiş determinantdır:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial p'_x} & \frac{\partial p_x}{\partial p'_y} & \frac{\partial p_x}{\partial p'_z} \\ . & . & . \\ \frac{\partial p_z}{\partial p'_x} & \frac{\partial p_z}{\partial p'_y} & \frac{\partial p_z}{\partial p'_z} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \right|. \qquad (25.21)$$

Bu ümumiyyətlə belədir. Lakin xüsusi Lorens çevrilməsində yalnız p_x və p_4 dəyişdiyinə görə (24.7) çevrilmədən istifadə edərək biz bu Yakobiyanı çox asanlıqla hesablaya bilərik:

$$\frac{\partial p_x}{\partial p'_x} = \left\{ 1 + \frac{v}{c^2}\left(\frac{2p'_x c^2}{2\varepsilon'} \right) \right\} \gamma = \left(1 + \frac{vp'_x}{\varepsilon'} \right) \gamma = \frac{\varepsilon' + vp'_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Buradan $dp_x = dp'_x \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ alırıq. Bu ifadənin sol və sağ tərəfini $dp_y = dp'_y$ və $dp_z = dp'_z$ kəmiyyətlərinə vursaq

$$dp_x dp_y dp_z = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} dp'_x dp'_y dp'_z \text{ və ya } (d\vec{p}) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (d\vec{p}\,') \qquad (25.22)$$

alarıq. Deməli

$$\frac{(d\vec{p})}{\varepsilon} = \frac{(d\vec{p}\,')}{\varepsilon'} = \text{invar}. \qquad (25.23)$$

Bunu (25.19)-da nəzərə alsaq, impulsa görə paylanma funksiyasının çevrilmə (transformasiya) xassəsini taparıq:

$$f'(\vec{p}\,') = f(\vec{p}) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}. \qquad (25.24)$$

İndi faza fəzasında paylanma funksiyasına baxaq:

$$dN = f(\vec{p}, \vec{r})(d\vec{p})dV \qquad (25.25)$$

Faza fəzası 3-ölçülü impuls fəzası ilə 3-ölçülü koordinat fəzasının birləşməsidir. $(d\vec{p})dV = dp_x dp_y dp_z dxdydz$ faza fəzasının həcm elementidir. $f(\vec{p}, \vec{r})$ faza fəzasında zərrəciklərin paylanma funksiyasıdır. Faza fəzasında da zərrəciklərin N tam sayı və onun dN kiçik hissəsi invariant olduğundan

$$dN = f(\vec{r}, \vec{p})(d\vec{p})dV = f'(\vec{r}\,', \vec{p}\,')(d\vec{p}\,')dV' = \text{invar} \qquad (25.25')$$

yaza bilərik. Burada da koordinat fəzasının çevrilməsini Yakobiyan vasitəsilə ifadə edirlər. Lakin xüsusi Lorens çevrilməsində biz bu əməliyyatı çox asanlıqnla əldə edə bilərik.

Üç ədəd K^0, K və K' ətalət sistemi seçək. Fərz edək ki, K sistemi K^0-a nəzərən $\vec{v}$ sürətilə və K' sistemi K_0-a nəzərən $\vec{v}\,'$ sürətilə hərəkət edir. (12.1') düsturuna əsasən

$$dV = dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{və ya} \quad dV' = dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$$

yazırıq. Bu iki bərabərlikdən

$$dV' = dV\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = dV\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \qquad (25.26)$$

alırıq. Bunu (25.25')-də nəzərə alsaq

$$f(\vec{r},\vec{p})dpdV = f'(\vec{r}',\vec{p}')(d\vec{p})dV \qquad (25.27)$$

alarıq. Buradan

$$\begin{aligned} f(\vec{r},\vec{p}) &= f'(\vec{r}',\vec{p}') = \text{in var},\\ (d\vec{p})dV &= (d\vec{p}')dV' = \text{in var}, \end{aligned} \qquad (25.28)$$

olur. Beləliklə faza fəzasının həcm elementi də və burada zərrəciklərin paylanma funksiyası da relyativistik invariantdır.

Relyativistik fizikada razılaşmaya görə bəzən c=1 götürürlər. Bu zaman c-nin müxtəlif dərəcədən iştirak etdiyi düsturlar sadələşir. Məsələn, $\varepsilon=\sqrt{p^2+m^2}$, $\varepsilon=\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ və $p_\mu^2=-m^2$ olur. Onda enerji, impuls və kütlənin dimenzionu (ölçüsü) eyni olur. Razılaşıblar ki, enerjini, impulsu və kütləni enerji vahidlərində ölçsünlər. Gələcəkdə ehtiyac olarsa, biz bu yazılışdan istifadə edə bilərik.

V FƏSİL
XÜSUSİ NİSBİLİK NƏZƏRİYYƏSİ VƏ ELEKTROMAQNİT SAHƏSİNDƏ YERLƏŞMİŞ ELEKTRİK YÜKÜ

§26. Relyativistik fizikada sahə və elementar zərrəcik anlayışı

Sahə anlayışı fizikanın mühüm anlayışlarından biridir və o, öz real mənasını relyativistik nəzəriyyədə tapmışdır. Təbiətdə elektromaqnit sahəsi, qravitasiya sahəsi, şüalanma sahəsi, və s. kimi müxtəlif sahələr mövcuddur. Hər bir sahəyə tərif verəndə adətən bu sahəyə aid olan xassələri sadalayırlar. Lakin sahələrə ümumi (mücərrəd) tərif də vermək olar: Sahə fəzada (maddi mühitlərdə və xüsusən vakuumda) kəsilməz yayılan və həm fəzaya, həm də zamana görə dəyişən fundamental fiziki obyektdir. O, maddi cisimlərə təsir etməklə özünü büruzə verir. Riyazi olaraq sahə bir və ya bir neçə funksiyanın verilməsi ilə müəyyən edilir və bunlar *sahə funksiyaları* adlanır. Makroskopik mənada bizə iki fiziki sahə məlumdur: elektromaqnit və qravitasiya sahələri. Kvant nəzəriyyəsində bunlardan başqa digər sahələr də mövcuddur: skalyar sahə, vektoru sahə, spinor sahə, kalibrləşmə sahələri (Yanq-Mills tipli sahələr) və s. Sahələr onların təsir qüvvəsinin xarakteri, sahə funksiyalarının sayı və onların çevrilmə (transformasiya) xassələrinə görə bir-birindən fərqlənir. Biz burada yalnız elektromaqnit sahəsi ilə məşğul olacağıq və bu sahəyə elektromaqnit qüvvələrinin mövcud olduğu fəza oblastı kimi baxacağıq.

Fəlsəfi mənada sahə materiyanın formalarından biridir və fiziki reallıqdır.

Relyativistik nəzəriyyəyə görə zərrəciklər arasında qarşılıqlı təsir sahə vasitəsilə icra edilir. Sahə qarşılıqlı təsiri bir nöqtədən digər nöqtəyə ötürən agent rolunu oynayır. Relyativistik fizikada qarşılıqlı təsir sonlu c sürətilə yayılır və o, hər bir anda bir-birinə çox yaxın olan iki fəza nöqtəsi (qonşu nöqtələr) arasında baş verir, yəni qarşılıqlı təsir «yaxına» təsirdir. Elektrik yükləri e_1 və e_2 olan iki zərrəcik arasında qarşılıqlı təsiri belə təsəvvür etmək olar: e_1 yükü öz ətrafında elektromaqnit sahəsi yaradır və bu sahə sonlu c sürətilə yayılaraq e_2 yükünə çatdığı anda ona müəyyən qüvvə ilə təsir göstərir. Öz növbəsində e_2 yükü də sahə yaradır və bu sahə sonlu sürətilə hərəkət edərək e_1 yükünə çatdıqda ona təsir edir. Bir-birindən müəyyən məsafədə yerləşmiş iki yük bir-birinə birbaşa, ani təsir edə bilməz. Çünki təsir sahə vasitəsilə həyata keçirilir və sahənin sonlu sürətlə hərəkət edərək bir yükdən digərinə çatması üçün müəyyən zaman müddəti tələb olunur. Yəni e_1 yükünün halında baş verən dəyişikliyi e_2 yükü müəyyən müddət keçdikdən sonra «hiss» edir. Beləliklə, sahə, o cümlədən elektromaqnit sahəsi fiziki reallıq olur. Gələcəkdə görəcəyik ki, o, enerjiyə, impulsa, hərəkət miqdarı momentinə, kütləyə, spin və s. xassələrə malikdir. Qeyd edək ki, Qaliley-Nyuton mexanikasında da sahə (qüvvə sahəsi) anlayışı işlədilir. Lakin burada o, fiziki mahiyyət daşımayan, şərti bir məfhumdur. Çünki bu mexanikada iki cisim arasında qarşılıqlı təsir bir-başa, ani olaraq verilir və qarşılıqlı təsir sonsuz böyük sürətlə yayılır («uzağa» təsir). Bu, qeyri-relyativistik mexanikanın ən böyük qüsurudur!

Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi «mütləq bərk» cisim və «elementar zərrəcik» anlayışlarında da köklü dəyişikliyə səbəb olmuşdur.

Belə ki, relyativistik fizikada mütləq bərk cisim mövcud ola bilməz. İstənilən dərəcədə «bərk» cisim mütləq deformasiya etməlidir. Bunu sadə bir misalda izah edək. Fərz edək ki, müəyyən uzunluğa malik olan bərk cismi (çubuğu) xarici təsir vasitəsilə hərəkətə gətirmək istəyirik. Bunun üçün xarici təsir qüvvəsi əvvəlcə cismin bir ucuna, məsələn, sol ucuna təsir edərək o ucu hərəkətə gətirir. Xarici təsir sonlu sürətlə yayılaraq cismin sağ ucuna çatana qədər sol uc artıq hərəkətdə olur, sağ uc isə hələlik sükunətdə qalır. Qarşılıqlı təsir sağ uca çatdıqdan sonra o uc hərəkətə başlaya bilər. Beləliklə bərk cismin bütün nöqtələri eyni anda hərəkətə başlamayır. Bu o deməkdir ki, bərk cisim artıq deformasiya etmiş olur. «*Mütləq bərk*» cisim isə tərifə görə elə cismə deyilir ki, onun bütün nöqtələri eyni anda və eyni cür hərəkət etmiş olsun. Lakin qarşılıqlı təsirin sonlu sürətlə yayılması bunu qeyri-mümkün edir. Deməli, mütləq bərk cisim yoxdur. Buradan «elementar» zərrəcik anlayışı üçün yeni məna ortaya çıxır. Elementar zərrəcik dedikdə elə obyekt başa düşülür ki, o, özünü bir tam kimi aparır və onun mexaniki halı 3 ədəd koordinat (x,y,z) və sürətin 3 ədəd toplananı $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ ilə xarakterizə edilir. Onda relyativistik nəzəriyyəyə görə elementar zərrəcik $(e, \mu, p$ və s.) nöqtəvi olmalıdır. Əks halda, yəni elementar zərrəcik müəyyən ölçüyə malik olarsa, o, mütləq deformasiya etməlidir. Bu o deməkdir ki, elementar zərrəcik elementlərə (hissələrə) malikdir və onlar bir-birinə nəzərən hərəkət edir (deformasiya edir). Onda elementar zərrəcik özünü bir tam kimi apara bilməz və onun mexaniki halı x, y, z və $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ ilə xarakterizə edilə bilməz. Belə vəziyyət «elementarlıq» anlayışı ilə ziddiyyət təşkil edir. Bu ziddiyyəti aradan götürmək üçün fərz etmək lazımdır ki, relyativistik klassik (qeyri-kvant) fizikada elementar zərrəcik nöqtəvidir.

Əlbəttə, elementar zərrəciklərin xassələri və strukturu (quruluşu) haqda sahənin kvant nəzəriyyəsində müəyyən ciddi mülahizələr mövcuddur. Lakin orada da bir sıra riyazi çətinliklər ortaya çıxdığından struktura məsələsi hələlik özünün tam həllini tapmayıb. Belə məsələlər bu kitabın həcmindən kənara çıxdığına görə biz onlarla məşğul olmayacağıq.

§27. Yüklü zərrəciyin verilmiş elektromaqnit sahəsində təsir inteqralı, Laqranj funksiyası, enerjisi və impulsu

Yüklü zərrəciyin verilmiş elektromaqnit sahəsində hərəkətini təsvir etmək üçün onun təsir inteqralından istifadə edilər. Baxdığımız məsələ üçün təsir inteqralı iki hissədən ibarətdir – sərbəst relyativistik zərrəcik üçün təsir inteqralı və yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsi ilə qarşılıqlı təsirini ifadə edən təsir inteqralı:

$$S = S_s + S_{q/t}. \tag{27.1}$$

Sərbəst relyativistik zərrəcik üçün təsir inteqralı artıq məlumdur (bax. (23.1)):

$$S_s = -mc\int_a^b ds. \tag{27.2}$$

$S_{q/t}$ kəmiyyəti aşağıdakı real şərtləri ödəməlidir:

1) O, relyativistik invariant, yəni skalyar olmalıdır. Bu, xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin tələbidir.

2) Qarşılıqlı təsir inteqralına həm sahəni və həm də zərrəciyi xarakterizə edən kəmiyyətlər daxil olmalıdır.

3) $S_{q/t}$-in ifadəsini yazarkən bəzi təcrübi faktları nəzərə almaq lazımdır.

Təcrübələr göstərir ki, zərrəciyin elektromaqnit sahəsi ilə qarşılıqlı təsirini xarakterizə edən və zərrəciyə xas olan səciyyəvi invariant bir kəmiyyət mövcuddur. O, zərrəciyin *elektrik yükü* adlanır və qarşılıqlı təsirin ifadəsinə birinci dərəcədən daxil olur. Elektrik yükü adətən e ilə işarə edilir və o, müsbət, mənfi və sıfır ola bilər. Elektromaqnit sahəsinə aid təcrübələr və nəzəri mülahizələr göstərir ki, elektromaqnit sahəsini 4 ədəd skalyar funksiya ilə, yəni $\vec{A}(\vec{r},t) = (A_x, A_y, A_z)$ vektor potensialla və $\varphi(\vec{r},t)$ skalyar potensialla tam təsvir etmək mümkündür (bax §7).

Belə məlum olur ki, bu 4 funksiyadan istifadə edərək bir 4-ölçülü vektor təşkil etmək olar:

$$A_\mu(\vec{r},t)=\{\vec{A}(\vec{r},t),\, i\varphi(\vec{r},t)\}=\{A_1,A_2,A_3,i\varphi=A_4\}. \qquad (27.3)$$

Bu 4-ölçülü $A_\mu(\vec{r},t)$ vektoru elektromaqnit sahəsinin *4-ölçülü potensialı* adlanır. Onun komponentlərinə elektromaqnit sahəsinin *vektor* ($\vec{A}(\vec{r},t)$) və *skalyar* $\varphi(\vec{r},t)$ *potensialları* deyilir. Bu potensiallar fəza və zamanın funksiyaları olub, elektromaqnit sahəsini tam təsvir edirlər. Yadımıza salaq ki, elektrik kursunda elektrostatik sahənin yükü e olan zərrəciklə qarşılıqlı təsir enerjisi (yükün sahədə potensial enerjisi)

$$U=e\varphi \qquad (27.4)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada φ elektrostatik sahənin potensialıdır.

Biz zərrəciyin fəza-zamanda vəziyyətini 4-ölçülü $x_\mu=\{\vec{r},ict\}$ radius-vektorla, onun elementar yerdəyişməsini $dx_\mu=\{d\vec{r},icdt\}$ 4-ölçülü diferensial vektorla təsvir edəcəyik.

Bütün bu şərtləri ödəyən qarşılıqlı təsir inteqralını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$S_{q/t}=\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu. \qquad (27.5)$$

Bu ifadəyə $\frac{1}{c}$ vuruğu əlverişlilik üçün daxil edilmişdir. İnteqralın a və b sərhədləri yüklü zərrəciyin dünyəvi xətti üzərində götürülmüş iki nöqtədir (dünyəvi nöqtə). Təkrar olunan indeks üzrə cəm aparılır (μ=1, 2, 3, 4). (27.5)-in skalyar olması üçün $A_\mu dx_\mu$ hasili invariant olmalıdır. İnvariantlığı isbat etmək üçün Lorens çevrilməsini icra edək və çevrilmə matrislərinin ortoqonal olmasını nəzərə alaq:

$$A_\mu dx_\mu=L'_{\mu\nu}L'_{\mu\rho}A'_\nu dx'_\rho=\delta_{\nu\rho}A'_\nu dx'_\rho=A'_\nu dx'_\nu\equiv A'_\mu dx'_\mu=\text{in var}.$$

İndi (27.1) ifadəsini aşkar şəkildə yazaq:

$$S=\int_a^b\left\{-mcds+\frac{e}{c}A_\mu dx_\mu\right\}. \qquad (27.1')$$

Burada $ds = \sqrt{-dx_\mu^2} = cdt\sqrt{1 - \frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}}$ diferensial intervaldır. Qarşılıqlı təsir həmişə «yaxına» təsir olduğuna görə inteqral altında $A_\mu(\vec{r}, t)$ funksiyası zərrəciyin olduğu nöqtədə götürülür. Biz (27.1') ifadəsindən gələcəkdə geniş şəkildə istifadə edəcəyik. İndi isə inteqral altı ifadəni 3-ölçülü şəkildə yazaq və a, b dünyəvi nöqtələrə uyğun olan zaman anlarına t_1, t_2 deyək:

$$A_\mu dx_\mu = \vec{A}d\vec{r} - \varphi cdt = cdt(\vec{A}\frac{d\vec{r}}{cdt} - \varphi) = cdt(\vec{A}\frac{\vec{\upsilon}}{c} - \varphi),$$

burada $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – zərrəciyin sürətidir.

Bunları nəzərə alsaq, təsir inteqralı aşağıdakı şəklə düşər:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left\{-mc^2\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi\right\}dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(t)dt. \qquad (27.6)$$

Burada

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi \equiv L_s + L_{q/t} \qquad (27.7)$$

elektromaqnit sahəsində yerləşmiş yüklü zərrəcik üçün Laqranj funksiyasıdır. $L_s = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$ – sərbəst zərrəciyin Laqranj funksiyası, $L_{q/t} = \frac{e}{c}\vec{A}\vec{\upsilon} - e\varphi$ isə yükün sahə ilə qarşılıqlı təsirinin Laqranj funksiyasıdır.

Yüklü zərrəciyin xarici elektromaqnit sahəsində təsir inteqralını və Laqranj funksiyasını bilərək biz bu zərrəciyin enerjisini, impulsunu, Hamilton funksiyasını, hərəkət tənliyini və s. yaza bilərik. Biz adətən zərrəciyin dekart koordinatlarından istifadə edəcəyik. Klassik mexanikadan bilirik ki, impuls aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \upsilon_i}, \quad i = 1,2,3. \qquad (27.8)$$

Zərrəciyin sərbəstlik dərəcələrinin sayı üçdür. Sahədə zərrəciyin impulsunu böyük hərflə işarə edirlər və ona kanonik (və ya ümumiləşmiş) impuls deyirlər. (27.7) ifadəsində dekart koordinat sistemində

$\vec{A}\vec{\upsilon}=A_x\upsilon_x+A_y\upsilon_y+A_z\upsilon_z$ yazaraq sahədə kanonik impulsun P_x, P_y, P_z komponentlərini hesablayırıq və onları uyğun $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ortlarına vuraraq $\vec{P}$ impuls vektorunu tapırıq:

$$\vec{P}=\vec{i}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_x}+\vec{j}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_y}+\vec{k}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_z}=\vec{p}+\frac{e}{c}(\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z)=\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}. \quad (27.9)$$

Burada $\vec{p}=\dfrac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ – sərbəst zərrəciyin adi impulsudur.

Beləliklə sahənin zərrəciyin impulsuna verdiyi əlavə $\frac{e}{c}\vec{A}$ olur. Sahə olmadıqda kanonik impuls adi impulsa bərabər olur. Bəzən ədəbiyyatda sadəlik xətrinə aşağıdakı şərti, simvolik yazılışı qəbul edirlər:

$$\vec{P}=\vec{i}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_x}+\vec{j}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_y}+\vec{k}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_z}=\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}. \quad (27.10)$$

Biz də yeri gəldikdə belə şərti yazılışdan istifadə edəcəyik.

Klassik mexanikadan məlumdur ki, zərrəciyin enerjisi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\varepsilon_{tam}=\sum_{i=1}^{3}\upsilon_i\frac{\partial L}{\partial \upsilon_i}-L=\vec{\upsilon}\vec{P}-L=\vec{\upsilon}\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{\upsilon}\vec{A}-\frac{e}{c}\vec{\upsilon}\vec{A}+$$

$$+e\varphi+mc^2\sqrt{1-\beta^2}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\varphi=\varepsilon_s+e\varphi. \quad 27.11)$$

Beləliklə sahədə sərbəst zərrəciyin enerjisinə $\left(\varepsilon_s=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ $e\varphi$ həddi (potensial enerji) əlavə olunur. İndi (27.11) düsturunu başqa şəkildə yazaraq zərrəciyin sahədə Hamilton funksiyasını hesablayaq:

$$\varepsilon_{tam}=\sqrt{c^2\vec{p}^2+m^2c^4}+e\varphi=\sqrt{c^2\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+m^2c^4}+e\varphi=H. \quad (27.12)$$

Bu yüklü zərrəciyin sahədə Hamilton funksiyasının relyativistik ifadəsidir. Bildiyimiz kimi *Hamilton funksiyası* enerjinin impulsla ifadəsinə deyilir. Qeyri relyativistik hala keçmək üçün (27.12) ifadəsində $\upsilon\ll c$ və ya $|\vec{p}|=\left|\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right|\ll mc$ şərti daxilində kökü Nyuton binomu düsturu ilə

$\frac{1}{m^2c^2}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \ll 1$ həddinin üstlərinə görə sıraya ayırıb 2 hədlə kifayətlənmək lazımdır:

$$H_{q/r} = mc^2\sqrt{1+\frac{1}{m^2c^2}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi =$$

$$= mc^2\left\{1+\frac{1}{2m^2c^2}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \ldots\right\} + e\varphi =$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi.$$

Enerjini zərrəciyin sükunət enerjisindən etibarən hesablasaq

$$H'_{q/r} = H_{q/r} - mc^2 = \frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi(\vec{r},t) \qquad (27.13)$$

olar. Bu, yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində qeyri-relyativistik Hamilton funksiyasıdır. Kvant mexanikasında (27.13) düsturundan geniş istifadə olunur.

§28. Yüklü zərrəciyin verilmiş sahədə hərəkət tənliyi və Lorens qüvvəsi

Yüklü zərrəciyi elektromaqnit sahəsinə gətirdikdə sahə yükə müəyyən qüvvə ilə təsir etməklə yanaşı, yük də öz növbəsində sahəyə təsir edərək onu dəyişdirə bilər. Belə ki, zərrəciyin yükü sahənin mənbələrinə (sahəni yaradan yüklərə və cərəyanlara) təsir edərək onların paylanmasında müəyyən dəyişiklik yaradır və bu da mövcud sahənin dəyişməsinə səbəb olur. Əgər zərrəciyin yükü çox kiçikdirsə onun təsirini nəzərdən atmaq və mövcud sahədə heç bir dəyişikliyin olmadığını qəbul etmək olar. Biz burada məhz belə edəcəyik.

Beləliklə, biz yüklü zərrəciyin verilmiş elektromaqnit sahəsində hərəkət tənliyini axtarırıq. Bu tənlik məlum Laqranj tənliyi olacaqdır. Bu ~~(27.6)~~ təsir inteqralının variasiyasından alınır ~~(bax (22.10))~~:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_i} = 0, \quad i = 1,2,3. \qquad (28.1)$$

Biz 3 ədəd skalyar tənlik aldıq. Bu tənliklərdən birincini $\vec{i}$ -yə, ikincini $\vec{j}$ -yə, üçüncünü $\vec{k}$ -ya vurub toplasaq bir ədəd üç ölçülü vektori tənlik alarıq ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -ort vektorlardır). Vektori tənliyin birinci hissəsini yazaq:

$$\vec{i}\frac{\partial L}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial L}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial L}{\partial z}=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)L=\vec{\nabla}L.$$

Bəzən $\vec{\nabla}L \equiv \text{grad}L$ həddini şərti olaraq $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ şəklində yazırlar. Eyni qayda ilə vektori tənliyin ikinci hissəsindəki sürətlərə görə törəməni $\vec{i}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_x}+\vec{j}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_y}+\vec{k}\frac{\partial L}{\partial \upsilon_z}=\vec{P}=\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}$ simvolik şəkildə yaza bilərik (bax (27.10)).

İndi (28.1) tənliklər sistemini simvolik olaraq bir vektori tənlik şəklində yazaq:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}=0. \tag{28.2}$$

Yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində hərəkət (Laqranj) tənliyinin hər bir həddini ayrılıqda hesablayaraq bir-birindən çıxmaq lazımdır. Burada L (27.7) düsturu ilə ifadə olunur.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\equiv \vec{\nabla}L=\vec{\nabla}L_s+\vec{\nabla}L_{q/t}=\vec{\nabla}L_{q/t}=\frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{\upsilon}\vec{A})-e\vec{\nabla}\varphi.$$

L_s kəmiyyəti $\vec{r}$ -dən asılı deyildir və ona görə $\vec{\nabla}L_s=0$ olur. $\vec{\nabla}(\vec{\upsilon}\vec{A})$ -nı hesablamaq üçün vektor analizindən məlum olan düsturdan istifadə edək (bax Əlavə):

$$\vec{\nabla}(\vec{b}\vec{a})\equiv \text{grad}(\vec{b}\vec{a})=(\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a}+[\vec{b}\,\text{rot}\vec{a}]+(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b}+[\vec{a}\,\text{rot}\vec{b}].$$

Burada $\vec{b}$ və $\vec{a}$ ixtiyari funksiyalardır. Bizim baxdığımız halda $\vec{b}=\vec{\upsilon}$ funksiyası $\vec{r}$ -dən asılı deyildir və onun törəmələri sıfırdır (axırıncı 2 hədd), $\vec{a}=\vec{A}(\vec{r},t)$ isə $\vec{r}$ -in funksiyasıdır. Ona görə $\vec{\nabla}(\vec{\upsilon}\vec{A})=(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{A}+$ $+[\vec{\upsilon}\,\text{rot}\vec{A}]$ olur. $\text{rot}\vec{A}\equiv[\vec{\nabla}\vec{A}]$ (bax §3). Nəticədə

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\equiv \vec{\nabla}L=\frac{e}{c}(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{A}+\frac{e}{c}[\vec{\upsilon}\,\text{rot}\vec{A}]-e\vec{\nabla}\varphi \tag{α}$$

olur. İndi (28.2) tənliyinin ikinci həddini hesablayaq.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}}=\frac{d}{dt}\vec{P}=\frac{d}{dt}(\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t))=\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+$$

$$+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{e}{c}(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{A}. \qquad (\beta)$$

Burada $\dfrac{d\vec{A}(\vec{r},t)}{dt}$ törəməni hesablayanda nəzərə aldıq ki, $\vec{A}(\vec{r},t)$ potensialı həmişə zərrəcik olan nöqtədə götürülür, yəni potensialın $\vec{r}$ arqumenti zərrəciyin radius vektorudur və zərrəcik hərəkət etdiyinə görə $\vec{r}(t)$ zamanın funksiyasıdır (bax: yaxına təsir).

Ona görə $\vec{A}(\vec{r}(t),t)$ t-nin mürəkkəb funksiyası olur və ondan mürəkkəb funksiya kimi törəmə alanda əlavə hədlər, yəni

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\left(\upsilon_x\frac{\partial}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{A}=(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{A}$$

alınır. (28.2) hərəkət tənliyi simvolik olaraq (α)-(β)=0 və ya (β)-(α)=0 şəklində yazılır. Axırıncı bərabərliyi yazsaq

$$\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\cancel{\frac{e}{c}(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{A}}-\cancel{\frac{e}{c}(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{A}}-\frac{e}{c}[\vec{\upsilon}\,\mathrm{rot}\vec{A}]+e\vec{\nabla}\varphi=0$$

olar. Buradan aşağıdakı hərəkət tənliyi alınır:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=e\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi+\frac{1}{c}[\vec{\upsilon}\,\mathrm{rot}\vec{A}]\right\} \qquad (28.3)$$

Bu yüklü relyativistik zərrəciyin verilmiş elektromaqnit sahəsində 3-ölçülü vektori hərəkət tənliyidir. Sol tərəfdə zərrəciyin relyativistik $\vec{p}=\dfrac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ impulsunun zamana görə törəməsi yazılıb (burada $\vec{\beta}=\dfrac{\vec{\upsilon}}{c}$).

Sağ tərəfdə həmin zərrəciyə sahədə təsir edən qüvvə verilibdir. Bu Nyutonun ikinci qanununun relyativistik fizikada yazılışıdır. Sahənin $\vec{A}(\vec{r},t)$ və $\varphi(\vec{r},t)$ potensialları yalnız $\vec{r}$ və t-nin funksiyalarıdır. Sahədə zərrəciyə təsir edən qüvvə müxtəlif xarakterli iki hissədən ibarətdir: I hissə (sağda ilk iki hədd) yalnız koordinat və zamandan asılıdır, II hissə (üçüncü hədd) koordinat və zamandan əlavə həm də zərrəciyin sürətindən asılıdır (xətti asılılıq) və özü də sürətə perpendikulyardır. Bu qüvvələrdən istifadə edərək elektromaqnit sahəsinin vektori xarakteristikalarına tərif vermək olar.

Elektromaqnit sahəsində sükunətdə olan müsbət vahid yükə təsir edən qüvvəyə *elektrik sahəsinin intensivliyi* deyilir. Onu $\vec{E}(\vec{r},t)$ ilə işarə edirlər. Tərifə görə

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi(\vec{r},t). \qquad (28.4)$$

Biz $\vec{\nabla}\varphi \equiv \mathrm{grad}\varphi$ eyniliyindən istifadə etmişik. Maqnit sahəsində müsbət vahid yükə təsir edən qüvvənin vahid $\frac{\vec{\upsilon}}{c}$-yə düşən hissəsinə maqnit sahəsinin intensivliyi deyilir. Onu $\vec{H}(\vec{r},t)$ ilə işarə edirlər. Tərifə görə

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r},t). \qquad (28.5)$$

Maqnit sahəsində yükə təsir edən qüvvə, $\vec{\upsilon}$ və $\vec{H}$ sağ yivli burğu təşkil edir. (28.4) və (28.5) düsturları elektromaqnit sahəsinin intensivlik vektorları ilə sahənin potensialları arasındakı əlaqələri təsvir edir və bu düsturları elektrodinamikanın əlifbası adlandırmaq olar. ~~Biz bu düsturları başqa üsulla §7-də almışdıq~~. $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları fiziki məna daşıyır (qüvvəni təyin edirlər) və elektromaqnit sahəsini birqiymətli tam təsvir edirlər.

Elektromaqnit sahəsində əgər $\vec{E} \neq 0, \vec{H} = 0$ olarsa, bu sahə *elektrik sahəsi* adlanır; əgər $\vec{E} = 0, \vec{H} \neq 0$ olarsa, belə sahəyə *maqnit sahəsi* deyilir. Ümumiyyətlə elektromaqnit sahəsi elektrik və maqnit sahələrinin birləşməsidir. Burada elektrik və maqnit sahələri üzvü bir vəhdət təşkil edir. Elektromaqnit sahəsi vahid bir tamdır.

İndi ~~(28.3)~~ hərəkət tənliyini yığcam şəkildə yazmaq olar:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{\upsilon}\vec{H}]\right\}. \qquad (28.3a)$$

Tənliyin sağ tərəfindəki qüvvə *Lorens qüvvəsi* adlanır:

$$\vec{F}_l = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{\upsilon}\vec{H}]. \qquad (28.4a)$$

Bu ~~(28.4a)~~ düsturu təbiətin ən fundamental qanununu ifadə edir. İstənilən şəkildə hərəkət edən ixtiyari yüklü zərrəciyə elektromaqnit sahəsində Lorens qüvvəsi təsir edir. Bu klassik fizikanın ən gözəl düsturlarından biridir. O, kifayət qədər sadədir və həddən artıq ümumidir. İndi Lorens qüvvəsinin yüklü zərrəcik üzərində gördüyü işi hesablayaq. Bunun üçün zərrəciyin relyativistik kinetik enerjisinin vahid zamanda dəyişməsinə baxaq:

$$\frac{d\varepsilon^{kin}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-mc^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=$$

$$=mc^2\frac{\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}}{(1-\beta^2)^{3/2}}=mc^2\vec{\beta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\vec{\upsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Biz bu ifadəni (24.11) düsturunda başqa üsulla almışıq. Son ifadədə (28.3a) düsturunu nəzərə alsaq Lorens qüvvəsinin zərrəcik üzərində vahid zamanda gördüyü işi almış olarıq:

$$\vec{\upsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{\upsilon}\vec{F}_l=e\vec{\upsilon}\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{\upsilon}[\vec{\upsilon}\vec{H}]=e\vec{\upsilon}\vec{E}.$$

Burada $\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ zərrəciyin vahid zamanda getdiyi məsafədir. Son ifadədən görünür ki, maqnit sahəsinin zərrəcik üzərində gördüyü iş sıfırdır: $\frac{e}{c}\vec{\upsilon}\left[\vec{\upsilon}\vec{H}\right]=\frac{e}{c}[\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}]\vec{H}=0$.

Alınmış nəticəni yığcam şəkildə yazaq:

$$\frac{d\varepsilon^{kin}}{dt}=\vec{\upsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{\upsilon}\vec{F}_l=e\vec{\upsilon}\vec{E}. \qquad (28.5)$$

Yüklü zərrəcik üzərində yalnız elektrik sahəsi iş görür. Maqnit sahəsinin təsir qüvvəsi zərrəciyin sürətinə perpendikulyar olduğuna görə o, iş görmür və ancaq zərrəciyin hərəkət trayektoriyasını müəyyən istiqamətdə əyir. Yüklü zərrəciyin kinetik enerjisinin vahid zamanda dəyişməsi elektrik sahəsinin zərrəcik üzərində vahid zamanda gördüyü işə bərabərdir.

Qeyd edən ki, $\vec{E}$ və $\vec{H}$ müxtəlif xarakterli vektorlardır. (28.4)-dən görünür ki, $\vec{E}$ vektoru əks işarə ilə iki adi vektorun cəminə bərabərdir və o, əsil vektordur. Belə vektor *polyar vektor* adlanır. $\vec{H}$ vektoru isə iki polyar vektorun vektori hasilinə bərabərdir: $\vec{H}=\mathrm{rot}\vec{A}=[\vec{\nabla}\vec{A}]$. Belə vektor aksial vektor və ya *psevdovektor* adlanır. (bax: Əlavə). Fəzanın inversiyası zamanı $(x=-x', y=-y', z=-z')$, yəni sağ koordinat sistemindən sol koordinat sisteminə keçdikdə polyar vektor dəyişməz qalır, aksial vektor isə öz istiqamətini əksinə çevirir. Psevdotenzorların çevrilmə düsturları §14-də verilmişdir. Beləliklə $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları fəzanın inversiyasından başqa bütün digər çevrilmələrdə özlərini eyni cür aparır.

Bunu nəzərə almaq lazımdır.

Məlumdur ki, mexaniki sistem üçün Laqranj tənlikləri və Hamilton tənlikləri bir-birinə ekvivalentdir. Bu, elektrodinamikada da belədir. Yüklü zərrəciyin verilmiş sahədə Hamilton tənliklərini yazaq. ~~(27.12) ifadəsindən görünür ki,~~ Hamilton funksiyası $\vec{P},\vec{r}$ və t-nin funksiyasıdır. $\vec{H}(\vec{P},\vec{r},t)$ də $\vec{P}$ ilə $\vec{r}$ asılı olmayan ümumiləşmiş impuls və koordinat rolunu oynayır.

Hamilton tənlikləri aşağıdakı şəkildə yazılır ~~(bax: (22.17)).~~

$$\dot{\vec{P}}=-\frac{\partial H}{\partial \vec{r}},\quad \dot{\vec{r}}=\frac{\partial H}{\partial \vec{P}}. \tag{28.6}$$

Əlbəttə burada da vektorlara görə «törəmənin» simvolik yazıldığını nəzərə almaq lazımdır ((28.2) tənliyi ilə müqayisə et). Göstərmək olar ki, buradan da (28.3) hərəkət tənliyi alınır. Bunun isbatını oxuculara tapşırırıq.

§29. Potensialların qradiyent (kalibrləşmə) çevrilməsi

Biz gördük ki, yüklü zərrəciyin sahədə hərəkət tənliyi (27.1') düsturu ilə verilən S təsir inteqralının variasiyasından alınır. Aydındır ki, təsir inteqralı altındakı ifadəyə ixtiyari funksiyanın tam diferensialını əlavə etsək (ya çıxsaq) hərəkət tənliyi dəyişməz. Çünki əlavə edilən tam diferensialın inteqralı bir sabit verəcək və S-dən variasiya alanda bu sabitin variasiyası sıfır olacaqdır.

Dediklərimizi riyazi ifadə edək. $S=\int_a^b\left\{-mcds+\frac{e}{c}A_\mu dx_\mu\right\}$ ifadəsində inteqralaltı həddə $\frac{e}{c}df(\vec{r},t)$ şəklində tam diferensial əlavə edək və alınmış təsir inteqralını S' ilə işarə edək:

$$S'=\int_a^b\left\{-mcds+\frac{e}{c}A_\mu dx_\mu+\frac{e}{c}df(\vec{r},t)\right\}.$$

Burada $f(\vec{r},t)$ ixtiyari skalyar funksiyadır. Ona e/c sabiti əlverişlilik üçün vurulmuşdur. $df(\vec{r},t)$ tam diferensialı aşkar yazaq və 4-ölçülü vektorlarla ifadə edək: $df(\vec{r},t)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=\frac{\partial f}{\partial x_\mu}dx_\mu$. Burada axırıncı toplananı $\frac{\partial f}{\partial t}dt = \frac{\partial f}{\partial t}dt\frac{ic}{ic} = \frac{\partial f}{\partial x_4}dx_4$ şəklində yazdıq. Bunu inteqralaltında nəzərə alaq və inteqralı yığcam yazaq:

$$S' = \int_a^b \left\{ -mcds + \frac{e}{c}(A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu})dx_\mu \right\}.$$

Beləliklə S və S' eyni bir hərəkət tənliyini verir. Deməк S və S' bir-birinə ekvivalentdir, yəni eyni hüquqludur. Onların ifadələrindən görünür ki, A_μ və $A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ potensialları da eyni hüquqludur, yəni eyni nəticəyə gətərir. Bu o deməkdir ki, potensiallar aşağıdakı şəkildə çevrildikdə hərəkət tənliyi dəyişmir.

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}; \quad \mu = 1,2,3,4. \tag{29.1}$$

Bu, potensialların *qradiyent* və ya *kalibrləşmə çevrilməsi* adlanır. Deməli A_μ və A'_μ potensialları eyni dərəcədə doğrudur, eyni güclüdür, ekvivalentdir. Bu o deməkdir ki, elektromaqnit sahəsinin potensialları bir qiymətli təyin olunmur. Onlar ixtiyari skalyar $f(\vec{r},t)$ funksiyasının 4-ölçülü qradiyenti dəqiqliyi ilə təyin olunurlar ($\frac{\partial f}{\partial x_\mu}$ – *4-ölçülü qradiyent* adlanır). Yuxarıdakı (29.1) düsturu 4-ölçülü şəkildə qradiyent çevrilməsidir. Onu üç ölçülü şəkildə yazmaq üçün μ indeksinə növbə ilə 1,2,3,4 qiymətlərini vermək və $A_\mu = \{\vec{A}, i\varphi\}$, $x_\mu = \{\vec{r}, ict\}$ olduğunu nəzərə almaq lazımdır. Onda biz bir vektori (μ=1,2,3 olduqda) və bir ədəd skalyar (μ=4 olduqda) çevrilmə düsturlarını alırıq:

$$\begin{aligned} \vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \operatorname{grad} f, \\ \varphi \to \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \tag{29.2}$$

İndi göstərək ki, potensialların qradiyent çevrilməsi zamanı $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları dəyişmirlər.

Doğrudan da (28.4), (28.5) düsturları vasitəsilə $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ vektorlarını $\vec{A}', \varphi'$ ilə və $\vec{E}, \vec{H}$ vektorlarını $\vec{A}, \varphi$ ilə ifadə edərək və (29.2) çevrilməsini nəzərə alaraq buna nail olarıq:

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}f - \vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi = \vec{E};$$

$$\vec{H}' = \mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\vec{A} + \mathrm{rotgrad}f = \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{H}.$$

Burada $\frac{\partial}{\partial t}$ ilə $\vec{\nabla}$-nın yerini dəyişmişik və $\mathrm{rotgrad}f = [\vec{\nabla}\vec{\nabla}f] = 0$ olduğunu nəzərə almışıq. Beləliklə fiziki mənaya malik olan $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlik vektorları potensialların qradiyent çevrilməsində dəyişmirlər, invariant qalırlar.

Qeyd edək ki, klassik elektrodinamikada potensiallar köməkçi funksiyalardır və fiziki mənaya malik deyillər, lakin onların törəmələrindən təşkil edilmiş $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlikləri (bax: (28.4), (28.5) düsturları) fiziki mənaya malikdir və təcrübədə ölçülən kəmiyyətlərdir. Elektromaqnit sahəsi fiziki real sahədir və burada fiziki mənaya malik olan kəmiyyətlər, tənliklər, münasibətlər potensialların qradiyent çevrilməsi zamanı dəyişməməlidir. Elektrodinamika potensialların qradiyent (kalibrləşmə) çevrilməsinə nəzərən invariantdır.

Potensialların bir qiymətli təyin edilməməsindən istifadə edərək, yəni ixtiyarı $f(\vec{r},t)$ funksiyasını müəyyən şəkildə seçərək potensialların üzərinə bir ədəd əlavə şərt qoymaq olar.

Adətən bu şərti belə seçirlər:

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \qquad (29.3)$$

Bu, *Lorens şərti* və ya *Lorens kalbrləşməsi* (kalibrovkası) adlanır. Lorens şərti elektrodinamika tənliklərinin alınmasında və onların həllərinin sadələşdirilməsində çox mühüm rol oynayır. (29.3) tənliyi Lorens şərtinin 3-ölçülü şəkildə yazılışıdır. Bu şərti 4-ölçülü şəkildə yazmaq üçün $\mathrm{div}\vec{A}$-nın açıq yazılışından: $\mathrm{div}\vec{A} = (\vec{\nabla}\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ və $\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{i}{ic}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv \frac{\partial A_4}{\partial x_4}$ eyniliyindən istifadə edək:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0 \text{ və ya } \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (29.4)$$

Bu 4-ölçülü şəkildə Lorens şərtidir və onu sözlə belə ifadə edirlər: 4-ölçülü potensialın 4-ölçülü divergensiyası sıfıra bərabərdir. Təkrar olunan indeks üzrə cəm aparılır. Bəzən Lorens şərti əvəzinə potensialların üzərinə başqa şərt qoyurlar. Bu *Kulon şərti* və ya *Kulon kalibrləşməsi* (kalibrovkası) adlanır və aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0. \tag{29.5}$$

Son ifadə elektromaqnit sahəsinin həm də *eninəlik şərti* adlanır. Potensialların birqiymətli olmamasına baxmayaraq onlardan elktrodinamikada geniş istifadə edilir və bu da səbəbsiz deyildir. Məhz potensiallardan istifadə etdikdə elektromaqnit sahəsini təsvir edən məchul funksiyaların sayı altıdan ($\vec{E}$ və $\vec{H}$ altı funksiyadır) dördə qədər ($\vec{A}$ və φ) azalır. Potensialların ödədiyi diferensial tənliklər nisbətən sadə olur. Kvant mexanikası və kvant elektrodinamikasının əsas tənliklərinə intensivlik vektorları deyil, potensiallar daxil olur.

Bir az dərinə getsək görəririk ki, klassik elektrodinamikanın kalibrləşmə invariantlığı müasir fizikada kvant sahələri üçün lokal kalibrləşmə invariantlığı prinsipinin yaranmasına səbəb olmuşdur. Bu da öz növbəsində kalibrləşmə sahələri nəzəriyyəsinin inkişafına gətirib çıxarmışdır.

Elektromaqnit sahəsi ən bəsit və təbii kalibrləşmə sahəsidir. Daha mürəkkəb kalibrləşmə sahələri elektrodinamikaya oxşar şəkildə və onun kimi qurulur (bax: Giriş).

Bütün fundamental qarşılıqlı təsirlərin «Vahid nəzəriyyəsinin» qurulması istiqamətində kalibrləşmə sahələri nəzəriyyəsinin oynadığı rol təqdirə layiqdir!

§30. Sabit elektromaqnit sahəsi və bircins sahələr

Sabit elektromaqnit sahəsi dedikdə zamandan asılı olmayan sahə başa düşülür. Belə sahədə $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{A}$, φ yalnız koordinatın funksiyası olacaqdır. Sabit elektromaqnit sahəsində elektrik və maqnit sahələri ayrılıqda mövcud olur. Maqnit sahəsinin intensivliyi sabit vektor potensialdan, elektrik sahəsinin intensivliyi yalnız sabit skalyar potensialdan asılı olur:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}), \\ \vec{E} &= -\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}). \end{aligned} \tag{30.1}$$

Potensiallar birqiymətli təyin edilmədiyindən vektor potensiala sabit funksiyanın qradiyentini, skalyar potensiala isə hər hansı sabiti əlavə etmək olar. Adətən skalyar potensialı elə seçirlər ki, o sonsuzluqda sıfır olsun. Onda potensiala əlavə edilən sabit artıq məlum olur və bu xüsusi halda skalyar potensial birqiymətli təyin edilmiş olur. Lakin vektor potensialı hətta sabit sahələr halında birqiymətli etmək mümkün deyildir. Sabit sahələrə aid bir neçə sadə misala baxaq.

Sabit elektrik sahəsinin yüklü zərrəcik üzərində gördüyü işi potensialla ifadə edək. Yük $d\vec{r}$ qədər yerdəyişdikdə sahənin gördüyü elementar iş

$$dA = e\vec{E}d\vec{r} = -e\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = -e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -ed\varphi \qquad (30.2)$$

tam diferensial olur. Burada $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ və $\mathrm{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$ nəzərə alınmışdır. Əgər sahədə təsir edən qüvvə hər hansı skalyarın qradiyentidirsə, belə qüvvə potensiallı qüvvə və uyğun sahəyə *potensiallı sahə* deyilir. Onda elektrostatik sahə potensiallı sahə olur. Yük birinci nöqtədən ikinci nöqtəyə sonlu yerdəyişdikdə görülən iş

$$A = \int_1^2(-ed\varphi) = e(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (30.2')$$

olar. Görülən iş yolun formasından asılı olmayıb yalnız ilk və son nöqtələrin vəziyyətindən asılıdır. Onda sabit elektrik sahəsində qapalı yolda görülən iş sıfır olacaqdır. Sahənin gördüyü iş ilk və son nöqtələrin potensiallar fərqindən, yəni yükün potensial enerjiləri fərqindən asılıdır. Əgər yük sonsuzluğa gedirsə və sonsuzluqda potensial sıfırdırsa $(\varphi_2 \equiv \varphi_\infty = 0)$ $A = e\varphi_1$ olar. Onda ilk nöqtənin potensialı birqiymətli olur. Verilmiş nöqtənin potensialı müsbət vahid yük bu nöqtədən sonsuzluğa hərəkət etdikdə sahənin gördüyü işə bərabərdir.

İndi fərz edək ki, yük sonsuzluqdan (məs. birinci nöqtədən) verilmiş nöqtəyə (ikinci nöqtəyə) yerini dəyişir. Onda (30.2') düsturunda $(\varphi_1 \equiv \varphi_\infty = 0)$ yazmaq lazımdır. Bu zaman sahənin gördüyü iş $A = -e\varphi_2$ olur. Məlumdur ki, qapalı sistemində sahənin gördüyü işlə xarici qüvvələrin sahə üzərində gördüyü iş yalnız işarə ilə fərqlənir: $A_{xar} = -A = e\varphi_2$ olur.

Bu halda verilmiş nöqtənin potensialına belə tərif verirlər: verilmiş nöqtənin potensialı müsbət vahid yükü sonsuzluqdan həmin nöqtəyə gətirdikdə xarici qüvvələrin gördüyü işə bərabərdir. İndi enerji vahidi olan elektron volta (ev) tərif verək: elektron 1 volt potensiallar fərqini keçdikdə görülən iş (və ya zərrəciyin aldığı enerji) 1 ev adlanır: $1ev=4{,}8\cdot10^{-10}$ $(SGSE)_q\cdot1volt=4{,}8\cdot(SGSE)_q\cdot1/300(SGSE)_\varphi\cdot10^{-10}=1{,}6\cdot10^{-12}$erq. Qeyd edək ki 1 Kl yük 1V potensiallar fərqini keçdikdə görülən iş 1 Coul olur: $1C=10^7$ erq. Biz daha böyük enerji vahidlərindən də (Məs: 1 Mev$=10^6$ ev, 1Gev$=10^9$ ev, 1Tev$=10^{12}$ ev) istifadə edəcəyik.

Məlumdur ki, ixtiyari dəyişən elektromaqnit sahəsində yüklü relyativistik zərrəciyin enerjisi (27.11) düsturu ilə ifadə olunur:

$$\varepsilon_{tam}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\varphi(\vec{r},t)\,. \tag{27.11}$$

Təqdirə layiq haldır ki, sahənin varlığı nəticəsində yükün kinetik enerjisinə yalnız $e\varphi$ həddi, yəni yükün sahədə potensial enerjisi əlavə olunur. Beləliklə enerji yalnız skalyar potensialdan asılıdır, vektor potensialdan asılı deyildir. Bu o deməkdir ki, maqnit sahəsi yüklü zərrəcik üzərində iş görmür və onun enerjisini dəyişdirmir. Yalnız elektrik sahəsi zərrəciyin enerjisini dəyişdirə bilər.

Mexanikadan məlumdur ki, əgər sistemin Laqranj funksiyası zamandan aşkar asılı deyildirsə sistemin enerjisi (Hamilton funksiyası) saxlanır. Bunu bilavasitə (27.11)-dən zamana görə tam törəmə almaqla və Lorens qüvvəsindən istifadə etməklə də göstərə bilərik:

$$\frac{d\varepsilon_{tam}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\frac{d\varphi}{dt}=e\vec{E}\vec{\upsilon}+e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\varphi\right)=$$
$$=e\vec{E}\vec{\upsilon}+e\frac{\partial\varphi}{\partial t}+e\left(\vec{\upsilon}\left\{-\vec{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\}\right)=e\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{e}{c}\left(\vec{\upsilon}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right). \tag{30.3}$$

Biz $e(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\varphi$ həddində $\vec{\nabla}\varphi=-\vec{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ yazmışıq. Əgər elektromaqnit sahəsi zamandan aşkar asılı deyildirsə $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0\right)$

$$\frac{d\varepsilon_{tam}}{dt}=0 \text{ və ya } \varepsilon_{tam}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\varphi(\vec{r})=\text{const} \tag{30.4}$$

olar. Bu zaman ε_{tam} zərrəciyin sahədə tam enerjisi və $e\varphi$ isə yükün sahədə potensial enerjisi olur. Qeyd edək ki, sabit elektrik sahəsində yükə sabit qüvvə təsir edir və ona təcil verir, yəni yükün sürəti zaman keçdikcə dəyişir. Lakin (30.4) ifadəsi istənilən zaman anında eyni bir qiymət alır. Bunu izah etmək üçün yadımızda salaq ki, hər bir anda $\varphi(\vec{r})$ zərrəciyin olduğu nöqtədə götürülür. Məsələn: t_1 anında zərrəciyin sürəti $\vec{\upsilon}_1$-dir və o $\vec{r}_1$ nöqtəsindədirsə, potensial da $\varphi(\vec{r}_1)$ götürülür. t_1 və t_2 zaman anları üçün (30.4) saxlanma qanununu yazaq:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}+e\varphi_2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+e\varphi_1=\text{const}.$$

Kinetik enerjinin artıb-azalması yükün keçdiyi potensiallar fərqindən asılıdır:

$$mc^2(\gamma_2-\gamma_1)=e(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (30.5)$$

Burada $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – Lorens faktorudur. Zərrəciyin sürətlənməsi üçün o, yüksək potensialdan alçaq potensiala keçməlidir (bu mülahizə $e>0$ halına uyğundur).

Sabit elektromaqnit sahəsi sahələrin sadə növüdür və çox məsələlər belə sahələrdə öz həllini tapır. Sahələr içərisində bircins sahələr də mühüm rol oynayır və bu haqda bir neçə söz demək lazımdır. Əgər sahənin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlikləri fəzanın bütün nöqtələrində eyni bir qiymət alırsa, belə sahələr *bircins elektrik* və *maqnit sahələri* adlanır. Bircins sahələrdə potensiallar mütləq koordinatlardan asılı olmalıdır. Bircins elektrik sahəsində potensialın ifadəsini tapaq. Bunun üçün $\vec{E}=-\text{grad}\varphi$ ifadəsini elementar $d\vec{r}$ yerdəyişmə vektoruna vurub, qeyri müəyyən inteqral alaq (bax: (30.2)):

$$\int\vec{E}d\vec{r}=-\int\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r}+C=-\int d\varphi+C=-\varphi+C$$

Buradan

$$\varphi=-\int\vec{E}d\vec{r}+C=-\vec{E}\vec{r}+C \qquad (30.6)$$

olur. Bircins elektrik sahəsinin skalyar potensialı koordinatların xətti funksiyasıdır. C-ni məsələnin şərtindən təyin edirlər və ya C=0 yazırlar.

İndi bircins maqnit sahəsinin vektor potensialının ifadəsini hesablayaq. Burada (30.1) düsturlarının birincisindən istifadə edəcəyik:

$$\vec{H}=\text{rot}\vec{A}. \qquad (30.1a)$$

Bu, $\vec{A}$-nın ödədiyi xüsusi törəməli birinci tərtib sadə xətti diferensial tənlikdir və əlbəttə onu inqteqrallayaraq $\vec{A}$-nı tapmaq lazımdır. Lakin biz hələlik köməkçi üsuldan istifadə edərək $\vec{A}$-nı hesablayaq. Bircins sahədə $\vec{H}$ koordinatlardan asılı olmayan bir sabit vektordur. Sabit ixtiyari $\vec{C}$ vektorunu $\vec{r}$-ə vektori vuraq və hasilin rot-nu hesablayaq:

$$\mathrm{rot}[\vec{C}\vec{r}] = [\vec{\nabla}[\vec{C}\vec{r}]] = \vec{C}(\vec{\nabla}\vec{r}) - (\vec{C}\vec{\nabla})\vec{r} = 3\vec{C} - \vec{C} = 2\vec{C}.$$

Biz $\mathrm{div}\vec{r} = (\vec{\nabla}\vec{r}) = 3$ olduğunu nəzərə almışıq. Son ifadədən $\vec{C} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}[\vec{C}\vec{r}]$ alınır. İndi $\vec{C} \equiv \vec{H}$ qəbul edək: $\vec{H} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}[\vec{H}\vec{r}]$. Digər tərəfdən $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$ olmalıdır. Müqayisədən

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{H}\vec{r}] \tag{30.7}$$

alırıq. Bircins maqnit sahəsində vektor potensial koordinatların xətti funksiyası olur.

(30.7) düsturu (30.1a)-dan bilavasitə alınır. Bunun üçün (30.1a)-nı komponentlərində yazaraq $\vec{A}$-nın komponentləri üçün diferensial tənliklər almaq və $\vec{A}$-nı növbə ilə koordinat oxları boyunca yönəldərək tənlikləri inteqrallamaq lazımdır. Bunu tamamlamağı oxuculara tapşırırıq.

Qeyd edək ki, bircins sahə zamana görə dəyişən sahə də ola bilər.

Bircins sahə üçün $\vec{A}$-nı (30.7)-dən fərqli şəkildə seçmək olar. Bunun üçün $\vec{H}$-ı z oxu boyunca yönəldək və $f = -xyH_z/2$ funksiyasını seçək.

İndi (30.7) vektor potensiala $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$ qradiyent çevrilməsini tətbiq edərək

$$A'_x = -yH_z, \quad A'_y = A'_z = 0 \tag{30.8}$$

alırıq.

§31. Yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində 4-ölçülü hərəkət tənliyi. Elektromaqnit sahəsinin antisimmetrik tenzoru

Biz yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində 3-ölçülü hərəkət tənliyini aldıq və sahənin bəzi xassələri ilə tanış olduq. Lakin gələcəkdə elektromaqnit sahəsini tam təsvir edə bilmək və onun çox mühüm xarakteristikalarını öyrənmək üçün yükün sahədə 4-ölçülü hərəkət tənliyini araşdırmaq lazımdır. Yükün sahədə 4-ölçülü hərəkət tənliyini almaq üçün

~~(37.1') düsturu ilə~~ verilmiş yükün elektromaqnit sahəsində təsir inteqralının ümumi şəkildə variasiyasını hesablamaq və ən kiçik təsir prinsipini tətbiq etmək lazımdır. Əvvəlcə ~~(37.1') ifadəsinin~~ variasiyasını hesablayaq:

$$\delta S = \int_a^b \left(-mc\delta dS + \frac{e}{c} A_\mu \delta dx_\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx_\mu \right) =$$

$$= \int_a^b \left(mc \frac{dx_\mu}{dS} \delta dx_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \delta dx_\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx_\mu \right) =$$

$$= \int_a^b \left(mcu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) d\delta x_\mu + \int_a^b \frac{e}{c} \delta A_\nu dx_\nu =$$

$$= \left(mcu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta x_\mu \Big|_a^b - \int_a^b \left(mcdu_\mu + \frac{e}{c} dA_\mu \right) \delta x_\mu + \int_a^b \frac{e}{c} \delta A_\nu dx_\nu .$$

Biz burada məlum əməliyyatlardan istifadə etmişik: $\delta ds = \frac{-dx_\mu \delta dx_\mu}{ds}$, $\frac{dx_\mu}{dS} = u_\mu, \delta dx_\mu = d\delta x_\mu$. İnteqraldakı birinci iki həddi hissə-hissə inteqrallamışıq və 3-cü həddi ayrıca inteqral şəklində yazaraq, burada cəmləmə indeksi μ-nü ν-ilə əvəz etmişik (~~«dal» indeksi istənilən indekslə əvəz etmək olar~~).

İnteqrallarda iştirak edən A_μ və A_ν potensialları x_1, x_2, x_3, x_4-ün funksiyalarıdır və onların diferensialı və variasiyasını ümumi şəkildə yazmaq olar: $dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu, \delta A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \delta x_\mu$. Bu yazılışda təkrar olunan indeks üzrə cəm aparılır.

Axırıncı inteqralları birləşdirək, oxşar hədləri nəzərə alaq və ümumi vuruqları kənara çıxaraq:

$$\delta S = \left(mcu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta x_\mu \Big|_a^b - \int_a^b \left\{ mcdu_\mu - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) dx_\nu \right\} \delta x_\mu . \quad (31.1)$$

Biz sonuncu inteqralda $du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds$ və $dx_\nu = \frac{dx_y}{ds} ds = u_\nu ds$ yazacağıq.

İndi ~~(31.1) ifadəsinə~~ ən kiçik təsir prinsipini tətbiq edirik: a və b nöqtələri fiksə olunmuşdur, bütün trayektoriyalar bu nöqtələrdə görüşür və həqiqi hərəkət üçün S minimum qiymət alır ~~(bax: şək. 24.1)~~. Onda $\delta S_{min} = 0$, $\delta x_\mu(a) = \delta x_\mu(b) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq~~(31.1) belə yazılar:~~

$$0 = 0 - \int_a^b \left\{ mc\frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) u_\nu \right\} ds\delta x_\mu = 0.$$

İnteqrallanma oblastında δx_μ ixtiyari funksiyadır. İnteqralın sıfır olmasından və δx_μ-nin ixtiyariliyindən çıxır ki, inteqral altındakı böyük mötərizə sıfır olmalıdır.

$$\{\quad\} = 0 \text{ və ya } mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) u_\nu . \qquad (31.2)$$

Burada

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (31.3)$$

kəmiyyəti 4-ölçülü 2 ranqlı antisimmetrik tenzordur. Ona elektromaqnit *sahəsinin antisimmetrik tenzoru* deyilir. Bu fundamental bir kəmiyyətdir və elektrodinamikada çox mühüm rol oynayır. (31.2) tənliyi elektrik yükünün (yüklü zərrəciyin) elektromaqnit sahəsində 4-ölçülü hərəkət tənliyidir. Bu tənliyi qısaca belə yazırlar:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu . \qquad (31.4)$$

Burada u_μ və u_ν zərrəciyin 4-ölçülü sürətləridir. Tənliyin sol tərəfi zərrəciyin 4-ölçülü $p_\mu = mcu_\mu$ impulsunun intervala (məxsusi zamana) görə törəməsidir. Məlumdur ki, $\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu$ 4-ölçülü qüvvədir, (Minkovski qüvvəsi). Beləliklə (31.4) tənliyinin sağ tərəfi yüklü zərrəciyə elektromaqnit sahəsində təsir edən 4-ölçülü qüvvədir:

$$f_\mu = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu \qquad (31.5)$$

4-ölçülü təcil 4-ölçülü sürətə ortoqonal olduğundan $\left(u_\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0 \right)$, 4-

ölçülü qüvvə 4-ölçülü sürətə ortoqonaldır $u_\mu f_\mu = 0$.

$F_{\mu\nu}$ tenzorunun antisimmetrik olduğunu göstərmək üçün (31.3) düsturuna əsasən $F_{\nu\mu}$-nü yazaq:

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu = -\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu \right) = -F_{\mu\nu}.$$

Məlumdur ki, antisimmetrik tenzorun diaqonal elementləri sıfırdır ($F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$) və diaqonaldan sağdakı elementlər soldakı elementlərdən yalnız işarəcə fərqlənir ($F_{12} = -F_{21}$ və s.). Beləliklə 4-ölçülü 2 ranqlı $F_{\mu\nu}$ tenzorunun yalnız 6 ədəd asılı olmayan komponenti vardır. Qeyd edək ki, (31.4) hərəkət tənliyi kovariant şəkildə yazılmış tənlikdir və onun relyativistik invariantlığı aşkar görünür.

İndi $A_\mu = \{\vec{A}, i\varphi\}$ və $x_\mu = \{\vec{r}, ict\}$ ifadələrindən istifadə edərək $F_{\mu\nu}$ sahə tenzorunun komponentlərini hesablayaq. (31.3)-də μ=1 və ν=2 yazaraq ifadəni sadələşdirək:

$$F_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = (\mathrm{rot}\vec{A})_z = H_z = H_3.$$

Analoji olaraq $F_{23} = H_1 = H_x$ və $F_{31} = H_2 = H_y$. Bunlar $F_{\mu\nu}$ tenzorunun asılı olmayan fəza komponentləridir. Tenzorun antisimmetrikliyindən $F_{21} = -F_{12} = -H_z$, $F_{13} = -F_{31} = -H_y$, $F_{32} = -F_{23} = -H_x$ olur.

Burada müəyyən qanunauyğunluq vardır: $F_{ij} = H_k$ yazılışında ijk indeksləri 123 ədədlərinin müəyyən ardıcıllıqla dövri dəyişməsindən alınır. Məsələn i=1 və j=2 olduqda k=3 olmalıdır və s.

İndi (31.3)-də μ=4 və ν=1 yazaq:

$$F_{41} = \frac{\partial}{\partial x_4} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_4 = \frac{\partial}{ic\partial t} A_x - i\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= i\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = i\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \right)_x = iE_x.$$

Analoji olaraq $F_{42} = iE_y$, $F_{43} = iE_z$ alırıq. Bunlar $F_{\mu\nu}$-nün asılı olmayan zaman komponentləridir. Tenzorun antisimmetriliyindən $F_{14} = -F_{41} = -iE_x$, $F_{24} = -F_{42} = -iE_y$, $F_{34} = -F_{43} = -iE_z$ olur. Beləliklə $F_{\mu\nu}$ tenzorunun asılı olmayan komponentləri $\vec{H}$ və $\vec{E}$ vektorlarının toplananlarıdır. Aldıqlarımızı matris şəklində yazaq:

$$
(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad (31.6)
$$

Matrisdən görünür ki, elektrik və maqnit sahələrinin $\vec{E}, \vec{H}$ intensivlik vektorları vahid bir 4-ölçülü antisimmetrik tenzorun komponentləridir. Bu o deməkdir ki, elektrik və maqnit sahələri vahid bir tam təşkil edir. Buna görə də $F_{\mu\nu}$ elektromaqnit sahəsinin tenzoru adlanır.

İndi 4-ölçülü hərəkət tənliyində

$$
u_\mu = \left\{ \frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{1-\beta^2}}, i\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}, \quad ds = c\sqrt{1-\beta^2}dt, \quad \beta = \frac{\upsilon}{c}
$$

olduğunu nəzərə alaraq və $F_{\mu\nu}$ tenzorunun komopnentlərindən istifadə edərək müəyyən hesablamadan sonra aşağıdakı 3-ölçülü tənlikləri alırıq:

$$
\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left\{ \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{\upsilon}\vec{H}] \right\},
$$

$$
\frac{d\varepsilon}{dt} = e\vec{E}\vec{\upsilon}.
$$

Bu tənliklər bizə artıq məlumdur. Birinci tənlik yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində 3-ölçülü hərəkət tənliyidir. İkinci tənlik isə elektromaqnit sahəsinin yüklü zərrəcik üzərində vahid zamanda gördüyü işi ifadə edir.

İndi (31.1) ifadəsində fərz edək ki, trayektoriya həqiqi trayektoriyadır, a nöqtəsi fiksə olunmuşdur, b nöqtəsi cari nöqtədir (bax: Şək. 24.2). Bu halda S yuxarı sərhəddə zərrəciyin koordinatının funksiyası olacaq, $\delta x_\mu(a) = 0$, $\delta x_\mu(b) \equiv \delta x_\mu \neq 0$ və həqiqi trayektoriya üzərində zərrəciyin hərəkət tənliyi ödənəcəkdir, yəni inteqral altında böyük mötərizə sıfıra bərabər olacaqdır:

$$
\delta S(x) = \left(mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu \right)\delta x_\mu \quad \text{və ya} \quad \frac{\partial S}{\partial x_\mu}\delta x_\mu = \left(mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu \right)\delta x_\mu .
$$

Burada δx_μ ixtiyari olduğundan onun əmsalları bir-birinə bərabər olur.

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu. \qquad (31.7)$$

Məlumdur ki, (bax: §22) təsirin koordinata görə törəməsi həmin koordinata uyğun kanonik impulsu ifadə edir: $\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = P_\mu$. Bunu (31.7)-də nəzərə alaq:

$$P_\mu = mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu \equiv p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu. \qquad (31.8)$$

P_μ yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində ümumiləşmiş 4-ölçülü kanonik impulsudur. (31.8)-də μ=1,2,3 desək, biz kanonik impulsun fəza komponentlərini alarıq: $\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$. Bu bizə məlumdur. İndi kanonik impulsun dördüncü komponentini hesablayaq:

$$P_4 = p_4 + \frac{e}{c}A_4 = \frac{i}{c}\varepsilon + \frac{e}{c}i\varphi = \frac{i}{c}(\varepsilon + e\varphi).$$

Burada $\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$ sərbəst zərrəciyin enerjisi, $e\varphi$ isə onun sahədə potensial enerjisidir. $\varepsilon + e\varphi$ zərrəciyin sahədə tam enerjisidir: $\varepsilon_{tam} = \varepsilon + e\varphi$. 4-ölçülü ümumiləşmiş kanonik impulsu belə yazırlar:

$$P_\mu = \left\{\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A},\ \frac{i}{c}(\varepsilon + e\varphi)\right\} \equiv \left\{\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A},\ \frac{i}{c}\varepsilon_{tam}\right\}. \qquad (31.9)$$

(31.7)-də $\frac{e}{c}A_\mu$-nü sol tərəfə keçirib alınan ifadəni kvadrata yüksəltsək, elektromaqnit sahəsində Hamilton-Yakobi tənliyini alarıq:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c}A_\mu\right)^2 = -m^2c^2. \qquad (31.10)$$

§32. Elektromaqnit sahəsi üçün Lorens çevrilmələri

Elenktromaqnit sahənin yer şəraitində, səma cisimlərində və kosmik obyektlərdə gedən müxtəlif fiziki proseslərdə iştirakı onun bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə çevrilməsi qanununun öyrənilməsini çox mühüm bir problemə çevirir.

Məlumdur ki, elektromaqnit sahəsi həm sahənin 4-ölçülü $A_\mu(\vec{r},t)$ potensialları və həm də sahənin $\vec{E},\vec{H}$ intensivlik vektorları, yəni $F_{\mu\nu}(\vec{r},t)$ antisimmetrik tenzoru ilə tam təsvir edilir. Bir sistemdən digərinə keçdikdə A_μ və $F_{\mu\nu}$-nun Lorens çevrilməsi qanunları elə elektromaqnit sahəsinin çevrilməsini təmin edir. Əvvəlcə potensialların çevrilməsinə baxaq. O, 4-ölçülü vektor kimi (bax: (14.2')) çevrilir:

$$A_\mu(\vec{r},t) = L'_{\mu\nu}A'_\nu(\vec{r}\,',t'). \tag{32.1}$$

Bu düstur vasitəsilə sahənin K' ətalət sistemində potensiallarını bilərək, onun K ətalət sistemində potensiallarını hesablayırıq. Potensialların $A_\mu(\vec{r},t) = \{\vec{A},A_4\} \equiv \{\vec{A},i\varphi\}$ və $A'_\mu(\vec{r}\,',t') = \{\vec{A}\,',A'_4\} \equiv \{\vec{A}\,',i\varphi'\}$ ifadələrindən istifadə edərək xüsusi Lorens çevrilməsi üçün (32.1) düsturunu potensialın komponentləri üçün yazaq (bax: (14.2)):

$$\begin{cases} A_x \equiv A_1 = \dfrac{A'_1 - i\frac{v}{c}A'_4}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{A'_x + \frac{v}{c}\varphi'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ A_y \equiv A_2 = A'_2, \quad A_z \equiv A_3 = A'_3 \\ A_4 = \dfrac{A'_4 + i\frac{v}{c}A'_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ və ya } \varphi = \dfrac{\varphi' + \frac{v}{c}A'_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \end{cases} \tag{32.1'}$$

Son düsturdan görünür ki, K sistemində sahənin A_x vektor və ya φ skalyar potensialı K' sistemində hər iki potensialla (A'_x və φ') təyin edilir. Biz (32.1') düsturlarından istifadə edərək $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorlarının çevrilməsini təyin edə bilərdik. Lakin bu uzun vaxt tələb etdiyinə görə biz bu əməliyyatı $F_{\mu\nu}$ tenzoru vasitəsilə çox asan həyata keçirəcəyik.

Bilirik ki, elektromaqnit sahəsinin $\vec{E},\vec{H}$ intensivlikləri fiziki mənaya malikdir və elektromaqnit sahəsinin 2-ranqlı antisimmetrik $F_{\mu\nu}$ tenzorunu təşkil edirlər (bax: (31.6)). Ona görə bir ətalət sistemindən digərinə keçdikdə $\vec{E},\vec{H}$ vektorlarının çevrilməsi qanununu tapmaq üçün $F_{\mu\nu}$ tenzorunun Lorens çevrilməsi düsturunu yazmaq kifayətdir.

$F_{\mu\nu}(\vec{r},t)$ iki ranqlı tenzordur və K' ətalət sistemindən K ətalət sisteminə keçdikdə onun Lorens çevrilməsi düsturu aşağıdakı kimidir (bax: (14.8)):

$$F_{\mu\nu}(\vec{r},t) = L'_{\mu\alpha} L'_{\nu\beta} F'_{\alpha\beta} . \qquad (32.2)$$

Bu ümumi düsturdan istifadə edərkən yada salaq ki, xüsusi Lorens çevrilməsi zamanı vektor və tenzorların 2 və 3 indeksləri (komponentləri) dəyişmir (çevrilmir) və yalnız 1 və 4 indeksləri (komponentləri) dəyişir. Onda $H_x = F_{23} = F'_{23} = H'_x$ olur. $H_y = F_{31}$ və $H_z = F_{12}$ komponentləri isə A_1 kimi çevrilir (bax: (32.1)'):

$$H_y = F_{31} = \frac{F'_{31} - i\frac{v}{c}F'_{34}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{H'_y - \frac{v}{c}E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$H_z = F_{12} = \frac{F'_{12} - i\frac{v}{c}F'_{42}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{H'_z + \frac{v}{c}E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Biz apardığımız çevrilmələrdə $F_{\mu\nu}$ (və $F'_{\alpha\beta}$) antisimmetrik sahə tenzorunun (31.6) komponentlərindən istifadə etmişik.

Beləliklə $\vec{H}$ vektorunun çevrilməsi qanununu tapdıq. İndi $\vec{E}$ vektorunun Lorens çevrilməsi qanununa baxaq. $iE_x = F_{41}$ komponentində hər iki indeks (1 və 4) çevrilir və bu çevrilməni biz (32.2) düsturu vasitəsilə icra edəcəyik:

$iE_x = F_{41} = L'_{4\alpha} L'_{1\beta} F'_{\alpha\beta}$. Burada əvvəlcə β üzrə və sonra α üzrə 1-dən 4-ə qədər cəm aparacağıq və $L'_{12} = L'_{13} = L'_{42} = L'_{43} = 0$, $F'_{11} = F'_{44} = 0$ olduğunu nəzərə alacağıq. Son nəticədə $L'_{11} = L'_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ və $L'_{41} = -L'_{14} = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ olacaqdır ~~(bax: (14.1')). Beləliklə,~~

$$iE_x = F_{41} = L'_{4\alpha} L'_{1\beta} F'_{\alpha\beta} = L'_{4\alpha}(L'_{11}F'_{\alpha 1} + L'_{14}F'_{\alpha 4}) = L'_{44}L'_{11}F'_{41} + L'_{41}L'_{14}F'_{14} =$$

$$= F'_{41}\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}\right) = F'_{41} = iE'_x .$$

Burada $F'_{14} = -F'_{41}$ nəzərə alınmışdır.

Sonrakı hədlərdə $iE_y = F_{42}$ və $iE_z = F_{43}$ tenzorunun komponentləri A_4 kimi çevriləcəkdir:

$$iE_y = F_{42} = \frac{F'_{42} + i\frac{v}{c}F'_{12}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ və ya } E_y = \frac{E'_y + \frac{v}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$iE_z = F_{43} = \frac{F'_{43} + i\frac{v}{c}F'_{13}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ və ya } E_z = \frac{E'_z - \frac{v}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Aldığımız çevrilmələri sistem şəklində yazaq:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E'_x, & H_x &= H'_x, \\ E_y &= \frac{E'_y + \frac{v}{c}H'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, & H_y &= \frac{H'_y - \frac{v}{c}E'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ E_z &= \frac{E'_z - \frac{v}{c}H'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, & H_z &= \frac{H'_z + \frac{v}{c}E'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{32.2'}$$

Biz elektromaqnit sahəsinin xüsusi Lorens çevrilməsini araşdırdıq. Bu çevrilmədə K' sistemi K-ya nəzərən ox oxu boyunca V sürəti ilə hərəkət edir: $V_x=V$, $V_y=V_z=0$. (32.2') düsturundan aşağıdakı nəticələr çıxır. Lorens çevrilməsi zamanı elektromaqnit sahəsi intensivliklərinin ətalət sistemlərinin hərəkəti istiqamətindəki komponentləri (uzununa komponentlər) dəyişmir, invariant qalır. Lakin sahə intensivliklərinin eninə komponentləri Lorens çevrilməsi zamanı dəyişir. Bir ətalət sistemində (məs. K-da) elektrik və ya maqnit sahəsi digər ətalət sistemində (məs. K'-də) həm elektrik, həm də maqnit sahəsi ilə əlaqədardır. Elektromaqnit sahəsi vahid bir tamdır və o, yalnız seçilmiş ətalət sisteminə nəzərən iki hissəyə, yəni sırf elektrik sahəsi və sırf maqnit sahəsinə parçalama bilər. Elektrik və maqnit sahələri arasında sıx, üzvi bir əlavə mövcuddur. (32.2') düsturundan alınan başqa bir nəticəni araşdıraq. Fərz edək ki, K' sistemində $\vec{H}'=0$, $\vec{E}'\neq 0$, yəni sırf elektrik sahəsi mövcuddur. Yuxarıdakı düsturların köməyi ilə K-da $\vec{H}$ intensivliyini hesablayaq və $\vec{E}'$-dən $\vec{E}$-yə keçək:

$$H_y = \frac{-\frac{v}{c}E'_z}{\sqrt{\ }} = -\frac{v}{c}E_z = \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}\right]_y, \quad H_z = \frac{+\frac{v}{c}E'_y}{\sqrt{\ }} = +\frac{v}{c}E_y = \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}\right]_z.$$

Burada yazılmış vektoru hasillərdə $\vec{v}$-nin yalnız $V_x=V$ komponenti sıfırdan fərqlidir, digər komponentləri V_y, V_z sıfırdır.

Şərtə görə $H_x = H'_x = 0$. Bu komponenti başqa cür yazaq:

$$H_x = \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}\right]_x = H'_x = 0.$$

Burada $\frac{1}{\sqrt{\ }}$ – Lorens faktorudur.

Alınmış H_x, H_y, H_z komponentlərini ardıcıl olaraq $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlarına vurub toplasaq

$$\vec{H} = \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}\right] \qquad (32.2'')$$

ifadəsini alarıq. Demək, K' sistemindəki sırf elektrik sahəsi K sistemində intensivlikləri bir-birinə perpendikulyar olan elektromaqnit sahəsini induksiyalayır, yaradır. Əgər K' sistemində sırf maqnit sahəsi mövcuddursa $(\vec{E}' = 0, \vec{H}' \neq 0)$ analoji yolla göstərmək olar ki, K sistemində

$$\vec{E} = -\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}\right] \qquad (32.2''')$$

olur.

Bu nəticələri birləşdirərək belə demək olar: hər hansı ətalət sistemində mövcud olan sırf elektrik sahəsi və ya sırf maqnit sahəsi digər ətalət sistemində intensivlik vektorları bir-birinə perpendikulyar olan elektromaqnit sahəsini induksiyalayır.

Biz formal olaraq (32.2') düsturlarını vektori şəkildə yaza bilərik. Xüsusi Lorens çevrilməsində K' sistemi ox oxu boyunca $\vec{v}$ sürəti ilə hərəkət etdiyindən $\vec{i}$ ort vektoru $\vec{v}$-yə paralel, $\vec{j}$ və $\vec{k}$ ortları isə $\vec{v}$-yə perpendikulyar olacaqdır. Ona görə $\vec{i} = \vec{v}/v$ yazaraq, $\vec{i}E_x = \frac{\vec{v}}{v}E_x = \vec{E}_{\parallel}$, $\vec{j}E_y + \vec{k}E_z = \vec{E}_{\perp}$ olduğunu qəbul edə bilərik. Aydındır ki, $\vec{E}_{\parallel}$ və $\vec{E}_{\perp}$ vektorları $\vec{E}$-nin K' sisteminin sürətinə paralel və perpendikulyar toplananlarıdır: $\vec{E} = \vec{E}_{11} + \vec{E}_{\perp}$. Eyni əməliyyatı $\vec{H}$-ın proyeksiyaları və ştrixli sahə üçün edirik. Bundan əlavə yuxarıdakı kəsirlərin surətlərindəki ikinci hədlərin baxdığımız yaxınlaşmada $\frac{v}{c}H'_z = -\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}'\right]_y$, $-\frac{v}{c}H'_y = -\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}'\right]_z$, $-\frac{v}{c}E'_z = +\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}'\right]_y$ və $\frac{v}{c}E'_y = \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}'\right]_z$ olduğunu nəzərə alaraq xüsusi Lorens çevrilməsində (32.2') düsturlarını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\begin{aligned} &\vec{E}_{11} = \vec{E}'_{11}, \ \vec{E}_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}'_{\perp} - \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}'\right]\right), \\ &\vec{H}_{11} = \vec{H}'_{11}, \ \vec{H}_{\perp} = \gamma\left(\vec{H}'_{\perp} + \left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}'\right]\right). \end{aligned} \tag{32.3}$$

Burada $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – *Lorens faktorudur*. Bu düsturların ümumi halda, yəni $\vec{v}$-nin istənilən istiqamətə yönəldiyi halda doğru olduğunu hələlik şərti qəbul edirik. Bunu dəqiq sübut etmək üçün ümumi (16.3) Lorens çevrilməsində L' matrisinin ifadəsini tapmaq və bundan (32.2) ümumi çevrilmə düsturunda istifadə edərək $\vec{E}$ və $\vec{H}$-ın Lorens çevrilməsini icra etmək lazımdır. Dediklərimizi həyata keçirsək (32.3) ifadəsinin elektromaqnit sahəsi üçün ümumi Lorens çevrilməsi düsturu olduğunu yəqin edərik.

(32.3) düsturu K'-dən K-ya keçidi icra edir. Tərs keçidi müəyyən etmək üçün bu düsturda $(\cdots)' \leftrightarrow (\cdots)$ və $\vec{v} \to -\vec{v}$ yazmaq lazımdır.

Çox vaxt (32.3) düsturlarını tam $\vec{E} = \vec{E}_{11} + \vec{E}_{\perp}$ və tam $\vec{H} = \vec{H}_{11} + \vec{H}_{\perp}$ üçün yazırlar. Bunu etməyi oxuculara tapşırırıq.

§33. Elektromaqnit sahəsinin invariantları

~~Biz gördük ki~~, Lorens çevrilməsi zamanı elektromaqnit sahəsinin vektor potensialı A_μ və antisimmetrik tenzoru $F_{\mu\nu}$ müəyyən qanunla dəyişirlər. Lakin onlardan elə kombinasiyalar düzəltmək mümkündür ki, onlar Lorens çevrilməsi zamanı dəyişməsinlər, invariant qalsınlar. Bu kombinasiyalar *sahə invariantları* adlanır. Bu invariantlar elektromaqnit sahəsinin yaranmasında və inkişafında çox mühüm rol oynamışdır. Asılı olmayan elektromaqnit sahəsi invariantlarının sayı üçdür və onlar *Larmor invariantları* adlanır.

Birinci invariantı almaq üçün $F_{\mu\nu}$ antisimmetrik tenzorunu kvadrata yüksəldək və alınmış ifadənin relyativistik invariant olduğunu göstərək:

$$I_1 = F_{\mu\nu}^2 = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = L'_{\mu\rho}L'_{\nu\lambda}F'_{\rho\lambda}L'_{\mu\alpha}L'_{\nu\beta}F'_{\alpha\beta} =$$

$$= \delta_{\rho\alpha}\delta_{\lambda\beta}F'_{\rho\lambda}F'_{\alpha\beta} = F'_{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta} \equiv F'^2_{\mu\nu} = \text{in var}. \qquad (33.1)$$

Biz burada Lorens çevrilməsi matrislərinin ortoqonallığından, yəni $L'_{\mu\rho}L'_{\mu\alpha} = \delta_{\rho\alpha}$, $L'_{\nu\lambda}L'_{\nu\beta} = \delta_{\lambda\beta}$ bərabərliklərindən istifadə edərək, sonda α,β lal indekslərini μ,ν lal indeksləri ilə əvəz etmişik. Birinci invariantın aşkar şəklini almaq üçün təkrar olunan μ,ν indeksləri üzrə asılı olmadan 1-dən 4-ə qədər cəm aparaq və son nəticədə $F_{\mu\nu}$ tenzorunun komponentlərinin qiymətini (3.16)-dan istifadə edərək yerinə yazaq. Sadə hesablamadan sonra aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$I_1 = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) = 2(\vec{H}'^2 - \vec{E}'^2) = \text{in var}. \qquad (33.1')$$

I_1 həm Lorens çevrilməsinə görə, həm də fəza və zamanın inversiyasına görə invariantdır, yəni əsil skalyardır.

İkinci invariantı almaq üçün 4-ranqlı antisimmetrik vahid $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ tenzorundan (psevdotenzor) və iki ranqlı $F_{\mu\nu}$ elektromaqnit sahəsi tenzorundan istifadə edək. Burada da yuxarıdakına uyğun olaraq 4-ranqlı və 2-ranqlı tenzorların Lorens çevrilməsindən və Lorens matrislərinin ortoqonallığından istifadə edərək aşağıdakı nəticəni alırıq:

$$I_2 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = \varepsilon'_{\mu\nu\alpha\beta}F'_{\mu\nu}F'_{\alpha\beta} = \text{in var}. \qquad (33.2)$$

İkinci invariantın aşkar şəklini almaq üçün təkrar olunan indekslər üzrə cəm aparmaq, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ tenzorunun (bax: §14) və $F_{\mu\nu}$ antisimmetrik tenzorun (bax: (3.16)) qiymətlərindən istifadə etmək lazımdır. Burada müəyyən qədər hesablamadan sonra aşağıdakı son nəticəni alırıq:

$$I_2 = -8i(\vec{E}\vec{H}) = -8i(\vec{E}'\vec{H}') = \text{invar} \qquad (33.2')$$

I_2 Lorens çevrilməsinə görə invariantdır, lakin fəzanın inversiyasına görə invariant deyildir. Çünki $\vec{E}$ polyar vektorudur, $\vec{H}$ isə aksial vektorudur (psevdovektorudur). Ona görə I_2 psevdoskalyardır, yəni fəzanın inversiyası zamanı işarəsini dəyir. Lakin I_2-nin kvadratı əsil skalyardır. Üçüncü invariant olaraq 4-ölçülü potensialın kvadratı götürülür.

$$I_3 = -A_\mu^2 = -A_\mu'^2 = \varphi^2 - \vec{A}^2 = \varphi'^2 - \vec{A}'^2 = \text{invar}. \qquad (33.3)$$

I_3 əsil skalyardır, lakin potensialların qradiyent çevrilməsinə görə invariant deyildir.

Biz I_1-in aşkar şəklini hesablayanda $F_{\mu\nu}$-nün diaqonal elementlərinin sıfır olduğunu, diaqonaldan sağdakı və soldakı hədlərin yalnız işarə ilə fərqləndiyini və bu hədlərin kvadratlarının bir-birinə bərabər olduğunu nəzərə aldıqda, görürük ki, I_1-də hər bir hədd 2 dəfə iştirak edir:

$$I_1 = F_{\mu\nu}^2 = 2\left\{F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2\right\} =$$
$$= 2\left\{H_z^2 + H_y^2 + H_x^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right\} = 2\left\{\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right\}.$$

Eyni üsulla I_2-nin də aşkar şəklini hesablaya bilərik. (33.2) ifadəsində $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ tenzorunun indeksləri üzrə cəm apardıqda, görürük ki, bu vahid tenzorun sıfırdan fərqli yalnız 24 həddi vardır (12 hədd «+1»-ə və 12 hədd «–1»-ə bərabərdir). Onda (33.2)-dəki 24 hədd 8 ədəd üçhədliyə, yəni $-i(E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z)$-ə bərabər olur. Beləliklə (33.2') ifadəsinin doğruluğu isbat olunur. İnvariantları çox vaxt əmsalsız yazırlar:

$$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = \vec{H}'^2 - \vec{E}'^2 = \text{invar}, \quad (\vec{E}\vec{H}) = (\vec{E}'\vec{H}') = \text{invar}. \qquad (33.4)$$

Bu invariantlardan elektromaqnit sahəsi üçün çox mühüm nəticələr alınır:

1) Əgər hər hansı ətalət sistemində E=H olarsa, onda istənilən ətalət sistemində E'=H' olar.

2) Bir ətalət sistemində E>H (və ya E<H) olduqda digər ətalət sistemində də E'>H' (və ya E'<H') olar.

3) Hər iki invariant sıfırdırsa, onda bütün sistemlərdə $\vec{E} \perp \vec{H}$ və E=H olacaqdır.

4) Əgər bir ətalət sistemində $\vec{E}$ ilə $\vec{H}$ vektorları arasındakı bucaq itidirsə və ya kordursa $\left(\alpha \lessgtr \frac{\pi}{2}\right)$, onda digər ətalət sistemində də $\vec{E}'$ ilə

$\vec{H}'$ arasındakı bucaq iti və ya kor $\left(\alpha' \lessgtr \frac{\pi}{2}\right)$ olacaqdır. Lakin həmişə $\alpha \neq \alpha'$ olmalıdır.

5) Əgər K ətalət sistemində $\vec{E} \perp \vec{H}$ və E>H-dırsa (bax: (32.2")), onda elə sistem seçmək olar ki, (məs.: K' sistemi) orada sahə sırf elektrik sahəsi olsun $(\vec{H}'=0,\ \vec{E}' \neq 0)$.

6) Bir sistemdə $\vec{E} \perp \vec{H}$ və E<H olarsa (bax: (32.2"')), onda digər sistemdə (K'-də) sahə sırf maqnit sahəsi olar $(\vec{E}'=0, \vec{H}' \neq 0)$.

Qeyd edək ki, yuxarıda 5-ci və 6-cı bənddə haqqında danışılan K' ətalət sistemi istənilən sürətlə yox, müəyyən istiqamətə və qiymətə malik $\vec{v}$ sürətilə hərəkət etməlidir. Bu sürəti tapmaq üçün (32.2") düsturundan istifadə etmək lazımdır. Fərz edək ki, bu sürət $(\vec{E}, \vec{H})$ müstəvisinə perpendikulyardır. Onda (32.2") ifadəsini $\vec{E}$-yə vektoru vuraq və $\vec{v}$-ni tapaq: $[\vec{E}\vec{H}] = \left[\vec{E}\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{E}\right]\right] = \frac{\vec{v}}{c}E^2$ və $\frac{\vec{v}}{c} = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{E^2}$ olur. Deməli bu bərabərliyi ödəyən $\vec{v}$ sürətilə hərəkət edən K' sistemində sahə sırf elektrik sahəsi olacaqdır $(\vec{E}' \neq 0, \vec{H}'=0)$.

İndi (32.2"') bərabərliyini $\vec{H}$-a vektoru vuraq və $\vec{v}$-ni təyin edək: $[\vec{E}\vec{H}] = -\left[\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}\right]\vec{H}\right] = \frac{\vec{v}}{c}H^2$ və $\frac{\vec{v}}{c} = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{H^2}$ olur. Sonuncu ifadədəki $\vec{v}$ sürətinə malik K' sistemində sahə sırf maqnit sahəsi olacaqdır $(\vec{H}' \neq 0,\ \vec{E}'=0)$.

VI FƏSİL
ELEKTROMAQNİT SAHƏSİNİN TƏNLİKLƏRİ

§34. Kəsilməz paylanmış və diskret paylanmış yüklərin sıxlığı və δ-funksiyanın bəzi xassələri

Biz §1-də qeyd etmişdik ki, makroskopik elektrodinamikada elektrik yüklərinin kəsilməz paylandığı fərz edilir. Orada yükün sıxlığı

$$\rho(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} = \frac{de}{dV}. \qquad (34.1)$$

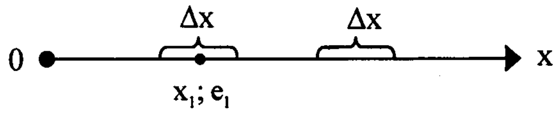
düsturu ilə təyin olunur. Burada Δe verilmiş t anında ΔV həcm elementində yerləşən yükün miqdarıdır. $\rho(\vec{r},t)$ kəmiyyəti t anında $\vec{r}$ nöqtəsində vahid həcmə düşən yükün miqdarıdır. Ona *elektrik yükünün həcmi sıxlığı* deyilir. Onda dV həcm elementində yerləşən yükün miqdarını aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$de = \rho(\vec{r},t)dV. \qquad (34.2)$$

Mikroelektrodinamika vakuumda yerləşmiş az sayda yüklü zərrəciklərin – elektronların, protonların, ionların, nüvələrin, atomların və s. eletkromaqnit sahəsi ilə məşğul olur. Mikroelektrodinamikada yüklər diskretdir və elementar zərrəciklər nöqtəvidir (nöqtəvi yük). Biz nöqtəvi yüklər halında da (34.2) düsturundan istifadə edəcəyik. Lakin nöqtəvi yüklərin sıxlığı sinqulyar xarakter daşıdığından belə yüklərin sıxlığını Dirakın sinqulyar δ-funksiyası ilə təsvir edəcəyik (bax: Əlavələr). Bu dediklərimizi açıqlayaq və δ-funksiyanın bəzi xassələrini araşdıraq. Əvvəlcə bir ölçülü δ-funksiyadan başlayaq.

Fərz edək ki, OX oxunun X_1 nöqtəsində nöqtəvi e_1 yükü yerləşmişdir. Bu yükün xətti sıxlığını belə təyin edirlər (şəkil 34.1):

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta x} = \begin{cases} 0 \text{ əgər } x_1 \notin \Delta x, \\ e_1 \cdot \infty \text{ əgər } x_1 \in \Delta x. \end{cases}$$



Şəkil 34.1

Baxdığımız halda nöqtəvi yükün sıxlığı sinqulyar xarakter daşıyır.

Dirak 1926-ci ildə məhz nöqtəvi obyektlərin (nöqtəvi yük, nöqtəvi kütlə, nöqtəvi dipol və s.) sıxlığını təyin etmək üçün elmə sinqulyar δ-funksiya anlayışı daxil edir. Dirakın δ-funksiyası aşağıdakı iki şərti ödəyir:

$$1)\ \delta(x-x_1)=\begin{cases}0 & \text{əgər } x\neq x_1,\\ \infty & \text{əgər } x=x_1,\end{cases} \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_1)dx=1. \tag{34.3}$$

Bu şərtlər δ-*funksiyanın xassələri* adlanır. Burada $(-\infty,+\infty)$ inteqrallanma oblastını x_1 nöqtəsini öz daxilində saxlayan [–a,+a] parçası ilə əvəz etmək olar. Əgər $x_1=0$ olarsa, onda (34.3) düsturları sadə şəklə düşər:

$$1)\ \delta(x)=\begin{cases}0 & \text{əgər } x\neq 0,\\ \infty & \text{əgər } x=0,\end{cases} \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1. \tag{34.3'}$$

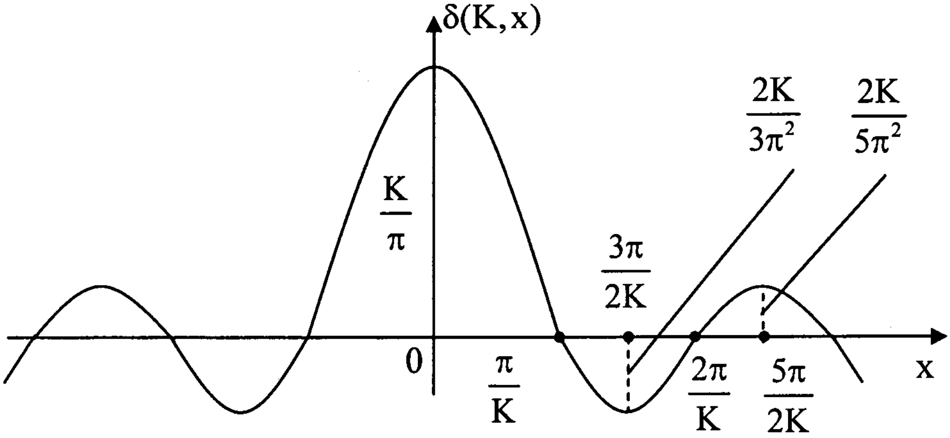
δ-funksiyanın arqumentinin sıfır olduğu nöqtədə bu funksiya sonsuzluğa bərabərdir, digər nöqtələdə sıfırdır və δ-funksiyanın inteqralı vahiddir.

δ-funksiyanın müxtəlif şəkilləri mövcuddur. Biz burada onun ən çox istifadə olunan bir şəkli ilə məşğul olacağıq. Aşağıdakı şəkildə köməkçi bir funksiya seçək:

$$\delta(K,X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{+K}e^{ikx}dk=\frac{1}{\pi}\frac{\sin KX}{X} \tag{34.4}$$

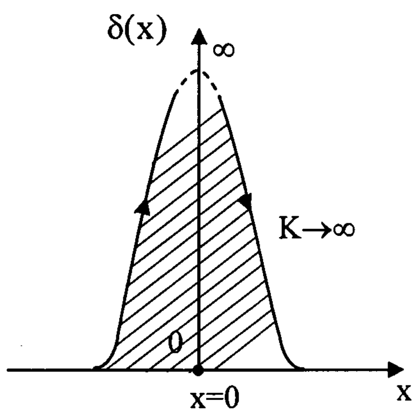
Bu funksiya X=0 nöqtəsində mərkəzi (əsas) maksimuma malik olur. Lopital qaydasını tətbiq edərək bu maksimum qiymətin K/π olduğunu tapırıq. Köməkçi funksiya $KX=\pm n\pi(n=1,2,3...)$ nöqtələrində sıfıra bərabər olur $\left(X=\pm\frac{n\pi}{K}\right)$. δ(K,X) funksiyasının kənar maksimum və minimumlarını tapmaq üçün onun X-ə görə törəməsini sıfıra bərabər etmək lazımdır. Bu zaman KX=tgKX tənliyini alırıq. Bu tənliyi qrafiki həll edərək, X-üçün aşağıdakı təqribi qiymətləri tapırıq: $X\approx\pm(2n+1)\frac{\pi}{2K}$ $(n=1,2,3...)$. Arqumentin (X-in) bu qiymətlərini (34.4)-də nəzərə alsaq kənar minimum və maksimum qiymətlər üçün $\pm\frac{2K}{3\pi^2}, \pm\frac{2K}{5\pi^2}$ və s. ədədləri alırıq.

Dediklərimizi nəzərə alaraq köməkçi δ(K,X) funksiyasının qrafikini quraq (şək. 34.2). Bu funksiya X-in müsbət və mənfi qiymətlərinə görə simmetrikdir və koordinat başlanğıcından uzandıqca sönür.



Şəkil **34.2**

İndi K parametrini sonsuz artırsaq şəkil 34.2-dəki qrafikdə sağ və sol kənar maksimum və minimumlar X=0 nöqtəsinə yığılar, bir-birini neytrallaşdırar və yalnız sonsuz artan mərkəzi maksimum qalar. Son nəticədə biz δ-funksiyanın qrafikini almış olarıq. Bu qrafiki şərti olaraq şəkil 34.3-də göstərmişik.



Şəkil **34.3**

Göstərək ki, son qrafikin X oxu ilə əmələ gətirdiyi fiqurun sahəsi vahidə bərabərdir. Bunun üçün köməkçi funksiyanın $K \to \infty$-da limitini X oxu boyunca $-\infty$-dan $+\infty$-a qədər inteqrallamaq lazımdır:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{K\to\infty} \delta(K,X)dX = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{K\to\infty} \frac{\sin KX}{X}dX = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}dy = 1. \quad (34.5)$$

Biz burada Kx=y əvəzləməsini etmişik və axırıncı inteqral məşhur Dirixle (bəzi ədəbiyyatda Eyler) inteqralıdır. Beləliklə $\lim\limits_{K\to\infty} \delta(K,x)$ əsil δ-funksiyanın (34.3') xassələrini ödəyir. Ona görə qəbul edirik:

$$\delta(x) = \lim_{K\to\infty} \delta(K,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKx}dK \quad (34.6)$$

Bu, bir ölçülü δ-funksiyanın ən sadə ifadəsidir. Burada $x \to x - x_1$ yazsaq,

$$\delta(x - x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK(x-x_1)}dK \quad (34.6')$$

alırıq.

İndi baxdığımız nöqtəvi e_1, yükünün xətti sıxlığını

$$\rho(x) = e_1\delta(x - x_1) \quad (34.7)$$

şəkilində yaza bilərik. Yükün sıxlığının fəza üzrə inteqralı fəzadakı yükün miqdarını verməlidir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = e_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_1)dx = e_1 \cdot 1 = e_1.$$

Doğrudan da bizim baxdığımız fəzada bir ədəd nöqtəvi e_1 yükü vardır. Əgər OX oxu üzərində bir neçə nöqtəvi yük yerləşmişdirsə, onların yaratdığı yük sıxlığı aşağıdakı düsturla ifadə olunacaqdır:

$$\rho(x) = \sum_{a=1}^{N} e_a\delta(x - x_a). \quad (34.8)$$

Burada x_a a-çı yükün koordinatıdır, N isə nöqtəvi yüklərin sayıdır.

Biz indiyə qədər bir ölçülü δ-funksiya ilə məşğul olduq. Fiziki proseslər 3-ölçülü Evklid fəzasında (əslində fəza və zamanda) baş verdiyindən və elementar zərrəciklər də bu fəzada diskret paylandığından biz burada 3-ölçülü δ-funksiyadan istifadə etməliyik. Biz bir ölçülü δ-funksiyanın (34.6) ifadəsində x əvəzində $\vec{r}$ radius vektorunu, yəni x_j (j=1,2,3) götürsək, K əvəzində K_j (j=1,2,3) asılı olmayan 3 parametr seçsək və bir ölçülü inteqralı dK_1, dK_2, dK_3 parametrləri üzrə aparılan 3-qat inteqralla əvəz etsək üç ölçülü δ-funksiyanı almış olarıq:

$$\delta(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dK_1e^{iK_1x_1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dK_2e^{iK_2x_2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dK_3e^{iK_3x_3}=$$

$$=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3).$$

Burada inteqral altında təkrar olunan indeks üzrə cəm apararaq $e^{iK_jx_j}=$ $=e^{i(K_1x_1+K_2x_2+K_3x_3)}=e^{iK_1x_1}\cdot e^{iK_2x_2}\cdot e^{iK_3x_3}$ yazmışıq. Alınmış 3-ölçülü δ-funksiyanı qısa şəkildə aşağıdakı kimi yazırlar:

$$\delta(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{i\vec{K}\vec{r}}(d\vec{K})=\delta(x)\delta(y)\delta(z). \tag{34.9}$$

Burada $\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z$ 3-ölçülü Evklid fəzasında müşahidə nöqtəsinin radius vektoru, $\vec{K}=\vec{i}K_x+\vec{j}K_y+\vec{k}K_z$ şərti götürülmüş 3-ölçülü dalğa ədədləri (və ya vektorları) fəzasında hər hansı vektor, $(d\vec{K})=dK_xdK_ydK_z=dK_1dK_2dK_3$ isə dalğa vektorları fəzasında həcm elementidir.

Gələcəkdə dalğa vektorları fəzasına impuls fəzası da deyiləcəkdir. Beləliklə istənilən ölçülü (məs: 4-ölçülü, n-ölçülü) δ-funksiyanı uyğun şəkildə qururlar.

(34.9) ifadəsində $\vec{r}$-ə $\vec{r}-\vec{r}_1$ deyərək δ-funksiyanın bizə lazım olan şəklini ala bilərik.

İndi 3-ölçülü fəzada diskret paylanmış yüklərin sıxlığını belə yazırlar

$$\rho(\vec{r})=\sum_a e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a). \tag{34.10}$$

Əgər yüklər hərəkət edirsə, onların sıxlığı həm $\vec{r}$-dən və həm də t-dən asılı olacaqdır:

$$\rho(\vec{r},t)=\sum_a e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)). \tag{34.10'}$$

Burada $\vec{r}$ müşahidə nöqtəsinin, $\vec{r}_a(t)$ isə hərəkət edən a zərrəciyinin radius vektorudur.

Biz δ-funksiyaya qeyri məxsus sinqulyar funksiya kimi baxacağıq. Lakin riyazi ədəbiyyatda δ-funksiyaya ümumiləşmiş funksiya kimi baxırlar.

δ-funksiyanın (34.3) düsturu ilə verilmiş 1) və 2) xassəsindən onun aşağıdakı iki xassəsi alınır (bax: Əlavələr):

3) Əgər $f(x)$ kəsilməz funksiyadırsa, onun δ-funksiya ilə birgə inteqralı çox asanlıqla aşağıdakı şəkildə açılır

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_1)dx = f(x_1). \qquad (34.11)$$

4) δ-funksiyanın arqumenti mürəkkəb F(x) funksiyasıdırsa, belə δ-funksiyanı sadə δ-funksiyaların cəmi şəklində aşağıdakı kimi göstərmək olar.

$$\delta(F(x)) = \sum_{i=1}^{S} \frac{\delta(x-x_i)}{|F'(x_i)|}. \qquad (34.12)$$

Burada x_i-lər F(x)=0 tənliyinin S-sayda sadə kökləridir və $F'(x_S) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_S}$. Burada δ-funksiyanın saydığımız dörd xassəsi bu funksiya ilə əlaqədar bütün məsələləri həll etməyə imkan verir. δ-funksiyanın dördüncü xassəsini sadə δ(ax) və $\delta(x^2-a^2)$ funksiyalarına tətbiq etsək

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad \delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|}$$

alarıq. Qeyd edək ki, δ-funksiya cüt funksiyadır: δ(–x)=δ(x).

Biz gələcəkdə δ-funksiyadan geniş istifadə edəcəyik. Ona görə burada δ-funksiya ilə əlaqədar 3 köməkçi düstur veririk.

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_a)dV = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_a)dx\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-y_a)dy\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(z-z_a)dz = 1. \qquad (34.13)$$

$$\int_V \rho(\vec{r})dV = \int_V \sum_a e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)dV = \sum_a e_a\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_a)dV = \sum_a e_a. \qquad (34.14)$$

$$\int_V \rho(\vec{r})f(\vec{r})dV = \int_V \sum_a e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)f(\vec{r})dV = \sum_a e_a f(\vec{r}_a). \qquad (34.15)$$

Axırıncı düsturda iştirak edən $f(\vec{r})$ ifadəsi həm adi funksiya, həm diferensial və həm də inteqral ifadə ola bilər.

Bu düsturları həm soldan sağa və həm sağdan sola tətbiq etmək lazımdır.

§35. 4-ölçülü cərəyan sıxlığı, elektrik yukünün saxlanması qanunu və kəsilməzlik tənliyi

Hərəkət edən elektrik yüklərinin yaratdığı 4-ölçülü cərəyan sıxlığını almaq üçün həm kəsilməz və həm də diskret (nöqtəvi) paylanmış yüklər üçün doğru olan

$$de = \rho(\vec{r},t)dV \tag{35.1}$$

düsturdan istifadə edirlər. ~~Elektrodinamikaya aid ədəbiyyatda təcrübi faktlara əsasən qəbul edilir ki~~, zərrəciklərin elektrik yükü relyativistik invariantdır, yəni yük bütün ətalət sistemlərində eyni bir qiymətə malikdir. ~~Qeyd edək ki, elektrik yükünün relyativistik invariant olmasını nəzəri olaraq isbat etmək mümkündür~~ və biz bunu gələcəkdə göstərəcəyik. Relyativistik invariant olan (35.1) bərabərliyini 4-ölçülü elementar radius vektora (dx_μ) vuraq və bərabərliyin sağ tərəfində $dx_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}dt$ yazaq:

$$de dx_\mu = dx_\mu \rho dV = \frac{dx_\mu}{dt}\rho dV dt. \tag{35.2}$$

Biz məxsusi Lorens çevrilməsi zamanı 4-ölçülü həcm elementi dVdt-nin invariant qalmasından istifadə edəcəyik. Belə ki, $dVdt = \frac{1}{ic}dVdx_4 =$ $= \frac{1}{ic}(dx_1dx_2dx_3dx_4) = \frac{1}{ic}(d^4x)$ 4-ölçülü həcm elementi Lorens çevrilməsi zamanı dəyişərək $\frac{1}{ic}(d^4x')$ olur. Bu həcmlər arasında əlaqəni Yakobi düsturu vasitəsilə tapırlar:

$$(d^4x) = J(d^4x').$$

Burada J çevrilmə Yakobyanıdır. O, köhnə koordinatların yeni koordinatlara görə törəmələrindən təşkil edilmiş determinantdır:

$$J = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \right| = | L'_{\mu\nu} | .$$

Lorens çevrilməsinin ortoqonal olması şərtindən alınan (17.4) düsturuna əsasən $| L_{\mu\nu} | = | L'_{\mu\nu} | = 1$ olmalıdır.

Beləliklə $(d^4x) = (d^4x') = \text{in var}$ olur. Biz bunu ümumi halda göstərdik. Xüsusi halda məxsusi zaman və məxsusi həcm elementindən istifadə edərək bu invariantlığı çox sadə göstərə bilərik. Doğrudan da $dV_{məx} dt_{məx} = \frac{dV}{\sqrt{1-\beta^2}} dt\sqrt{1-\beta^2} = dVdt = \text{in var} = \text{skalyar}$ alırıq.

(35.2) düsturunda sol tərəf 4-ölçülü vektordur və sağ tərəfdə $dVdt$ vuruğu skalyardır, onda sağ tərəfdəki $\rho \frac{dx_\mu}{dt}$ vuruğu 4-ölçülü vektor olmalıdır. Ona 4-ölçülü cərəyan sıxlığı vektoru deyirlər və j_μ ilə işarə edirlər:

$$j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt} . \qquad (35.3)$$

Beləliklə de elektrik yükünün relyativistik invariantlığı, yəni skalyar olması, j_μ kəmiyyətinin 4-ölçülü vektor olmasını təmin edir. İndi 4-ölçülü cərəyan sıxlığının komponentlərini hesablayaq. (35.3) düsturunda μ=1, 2, 3 desək, $j_1 = \rho \frac{dx_1}{dt} = \rho \upsilon_1 = \rho \upsilon_x$, $j_2 = \rho \upsilon_y$, $j_3 = \rho \upsilon_z$ alarıq. Bu ifadələri $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ort vektorlarına vurub toplasaq $\vec{j} = \rho \vec{\upsilon}$ vektorunu alırıq. Bu vektora adi 3-ölçülü keçiricilik cərəyanı *sıxlığı vektoru* deyilir. Bu haqda biz §1-də geniş danışmışıq. $\vec{j}$-nin mənası yüklərin hərəkətinə perpendikulyar qoyulmuş vahid səthdən vahid zamanda keçən elektrik yükünün miqdarıdır. İndi μ=4 desək $j_4 = \rho \frac{dx_4}{dt} = ic\rho$ alarıq. j_μ-nün 4-cü komponenti ic dəqiqliyi ilə elektrik yükünün sıxlığına bərabərdir. Onda j_μ vektorunu belə yaza bilərik:

$$j_\mu = \{ \vec{j} = \rho \vec{\upsilon}, ic\rho \} . \qquad (35.3')$$

Beləliklə keçiricilik cərəyanı sıxlığı ilə elektrik yükünün sıxlığı bir 4-ölçülü vektor təşkil edir.

İndi yadımıza salaq ki, elektrik yükü çox fundamental bir qanuna - elektrik yükünün saxlanması qanununa tab edir. Bu təbiətin ən fundamental qanunudur və onun səbəbi heç kəsə məlum deyil. Biz bu haqda §1-də danışmışıq. Təcrübələr göstərir ki, təbiətdə gedən bütün proseslərdə elektrik yükü saxlanır. Prosesin əvvəlindəki elektrik yükünün miqdarı prosesin sonunda onun miqdarına bərabərdir. Elektrik yükü heç nədən yarana bilməz və yox ola da bilməz. İstənilən qapalı sistemdə elektrik yükünün miqdarı sabit qalır. Bunu bütün təbiətə aid etmək olar. Bu qanunu sadə şəkildə $\Delta Q=0$ yazmaq olar. ΔQ prosesin əvvəlində və sonunda elektrik yüklərinin fərqidir.

Elektrik yükü yalnız cüt şəklində (eyni qədər «+» və eyni qədər «–» yük) «yarana» və cüt şəklində də «yox ola» bilər. Məsələn, elementar zərrəciklər fizikasında iki γ-kvant elektron-pozitron cütü yarada bilər: $\gamma_1+\gamma_2 \Rightarrow e^- + e^+$. Və yaxud e^-e^+ cütü 2γ-kvanta annihilyasiya edə bilər: $e^- + e^+ \Rightarrow \gamma_1+\gamma_2$. Yüklər fəzada hərəkət edərək müəyyən həcmə daxil ola və ya həcmdən kənara çıxa bilər. Yüklər hərəkət edərkən cərəyan yaradır və cərəyanın istiqaməti olaraq müsbət yükün hərəkət istiqamətini götürməyi şərtləşmişlər. Yükün saxlanması qanununun inteqral və diferensial şəkillərini yazmaq üçün biz §1-dən və şəkil 1.2-dən istifadə edəcəyik. İxtiyari götürülmüş V həcminin daxilində t anında yerləşən yükün miqdarı $q(t)=\int\limits_V \rho(\vec{r},t)dV$ olar. Bu yükün vahid zamanda dəyişməsini

$$\frac{dq(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho(\vec{r},t)dV=\int\limits_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}dV \tag{35.4}$$

şəklində göstərmək olar. V həcmində yükün vahid zamanda dəyişməsi onu əhatə edən qapalı S səthindən keçən yüklərin yaratdığı cərəyan şiddətinə bərabərdir. Vahid zamanda S səthindən keçən yüklərin miqdarını (yəni cərəyan şiddətini)

$$\oint\limits_S \vec{j}(\vec{r},t)d\vec{S}\equiv\oint\limits_S j_n(\vec{r},t)dS \tag{35.5}$$

şəklində hesablamaq mümkündür. Qeyd edək ki, qapalı səth halında səthin $d\vec{S}=\vec{n}dS$ səth elementini səthin xarici $\vec{n}$ normalı boyunca yönəlməyi şərtləşmişlər. (35.5) düsturundan görünür ki, yüklər səthdən xaricə çıxanda ($\vec{j}$ ilə $d\vec{S}$ arasındakı bucaq iti olduqda) səth üzrə inteqral müsbət və yüklər xaricdən səthə daxil olduqda isə bu inteqral mənfi qiymət alır. Lakin (35.4) düsturunda isə bu məsələ əksinə olur, yəni yüklər həcmdən xaricə çıxdıqda həcm üzrə inteqral mənfi və yüklər həcmə daxil olduqda bu inteqral müsbət olur. Beləliklə elektrik yükünün saxlanması qanununa görə (35.4) və (35.5) inteqralları qiymətcə bir-birinə bərabər, işarəcə isə əks olur.

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \vec{j} d\vec{S}. \tag{35.6}$$

Bu *yükün saxlanması qanununun inteqral şəklidir.* Bərabərliyin sağ tərəfində Qauss teoremindən istifadə edərək bunu başqa şəkildə yazmaq olar. Qauss teoreminə görə hər hansı vektorun qapalı səth üzrə inteqralı (yəni vektorun qapalı səthdən keçən seli) bu vektorun divergensiyasının həmin səthin daxilində qalan həcm üzrə inteqralına bərabərdir:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{j} dV. \tag{35.7}$$

Bunu (35.6)-da nəzərə alaq və həcm üzrə inteqralları birləşdirək.

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} \right\} dV = 0. \tag{35.8}$$

Bu inteqralın sıfır olmasından və inteqrallanma həcminin ixtiyariliyindən riyazi nəticə kimi çıxır ki, inteqral altındakı funksiya sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0. \tag{35.9}$$

Bu tənlik elektrik yükünün saxlanması qanununun diferensial şəklidir. Buna *kəsilməzlik tənliyi* deyilir. Bu tənliyi biz §1-də almışdıq (Bax: (1.4)). Bu çox mühüm tənlikdir və o, yalnız yük üçün deyil, fizikada istənilən saxlanan kəmiyyət üçün doğrudur.

Bu tənliyi stasionar cərəyan üçün yazaq. Yüklər stasionar hərəkət edərkən onlar heç bir nöqtədə toplanmır, vahid zamanda hər hansı nöqtəyə nə qədər yük gəlirsə elə o qədər də yük vahid zamanda həmin nöqtəni tərk edir. Başqa sözlə stasionar hərəkət zamanı yükün paylanma sıxlığı zamandan asılı olmur, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ şərti ödənir. Onda stasionar (sabit) cərəyan üçün kəsilməzlik tənliyi

$$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}) = 0 \qquad (35.10)$$

olur. Bu tənlik stasionar cərəyanın mənbəyinin olmadığını göstərir. Stasionar cərəyanın mənbəyi yoxdur. Elə bir mənbə yoxdur ki, stasionar cərəyan xətləri o mənbədən çıxsın. Ümumiyyətlə hər hansı vektorun divergensiyası o vektorun (sahənin və s.) mənbəyinin «gücünü», «intensivliyini» xarakterizə edir. (35.10) tənliyi stasionar cərəyan xətlərinin qapalı xətlər olduğunu göstərir. Doğrudan da (35.10) tənliyini hər hansı ixtiyari həcm üzrə inteqrallayaraq ona Qauss teoremini tətbiq etsək, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{j}dV = \oint_S \vec{j}d\vec{S} = 0. \qquad (35.11)$$

Cərəyanın qapalı səthdən keçən selinin sıfıra bərabər olması üçün cərəyan xətləri mütləq qapalı xətlər olmalıdır (bax: şəkil 1.2). Çünki qapalı xətlər qapalı səthi ən azı 2 nöqtədə (cüt sayda nöqtədə) kəsir və səthə daxil olduqda mənfi sel, səthdən çıxdıqda müsbət sel yaradır və bu sellər bir-birinə yox edir.

İndi (35.9) kəsilməzlik tənliyini 4-ölçülü şəkildə yazaq. Bunun üçün $\operatorname{div}\vec{j}$-ni açıq yazaq və tənlikdəki ikinci həddi ic-yə vuraq və ic-yə bölək: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho ic}{\partial tic} = \frac{\partial j_4}{\partial x_4}$. Onda tənlik aşağıdakı şəklə düşər:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial j_4}{\partial x_4} = 0 \text{ və } \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (35.12)$$

Beləliklə dördölçülü cərəyan sıxlığının 4-ölçülü divergensiyası sıfıra bərabərdir. Əlbəttə (35.12) tənliyini 4-ölçülü həcm üzrə inteqrallayaraq ona 4-ölçülü Qauss teoremini tətbiq etmək olardı. Lakin biz bunu gələcəkdə edə bilərik.

İndi 4-ölçülü cərəyan sıxlığı vektoru üçün Lorens çevrilməsi düsturlarını yazaq:

$$j_x = \frac{j'_x + V\rho'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ j_y = j'_y,\ j_z = j'_z,\ \rho = \frac{\rho' + \frac{V}{c^2}j'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (35.13)$$

Sonda qeyd edək ki, əgər keçiricilik cərəyanı bir ədəd nöqtəvi e_a yükünün hərəkəti nəticəsində yaranırsa, onda keçiricilik cərəyanı sıxlığı

$\vec{j}_a(\vec{r},t) = \upsilon_a \rho(\vec{r},t) = e_a \vec{\upsilon}_a(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$ olar. Əgər cərəyanın yaranmasında çoxlu sayda yük iştirak edirsə, onda keçiricilik cərəyanı sıxlığı $\vec{j}(\vec{r},t) = \sum\limits_a \vec{j}_a(\vec{r},t) = \sum\limits_a e_a \vec{\upsilon}_a(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t))$ düsturu ilə ifadə olunar. Bu dediklərimizi 4-ölçülü cərəyana da aid etmək olar.

§36. Elektromaqnit sahəsi və yüklü zərraciklərdən ibarət sistem üçün Lanqranj funksiyası

Elektromaqnit sahəsi və yüklü zərraciklərdən ibarət sistem üçün təsir inteqralı 3 ədəd relyativistik skalyar təsir inteqralının cəmi şəklində göstərilir:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 . \tag{36.1}$$

Burada S_1 sərbəst zərraciklərin (yüklərin) təsir inteqralıdır, S_2 isə sərbəst elektromaqnit sahəsinin (yüklərin olmadığı sahənin) təsir inteqralıdır. S_3 sahənin yüklərlə qarşılıqlı təsirini ifadə edən təsir inteqralıdır. Bir ədəd sərbəst zərracik halında S_1-in ifadəsi bizə məlumdur ~~(bax: (23.1'))~~. Bir ədəd a-cı sərbəst zərracik üçün onun ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$S_1^a = -\int_{t_1}^{t_2} m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon_a^2}{c^2}}\, dt .$$

Bunu zərraciklər sayı üzrə cəmləsək sərbəst zərraciklər üçün təsir inteqralını almış olarıq:

$$S_1 = \sum_{a=1}^{N} S_1^a = -\sum_{a=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{\upsilon_a^2}{c^2}}\, dt . \tag{36.2}$$

Relyativistik fizikada elementar zərraciklər nöqtəvi götürülür və ona görə də elementar zərraciyin e_a yükü də və m_a kütləsi də nöqtəvi olmalıdır. Əvvəlki §§-da nöqtəvi yüklərin paylanma sıxlığını

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \tag{36.3}$$

şəklində təyin etmişik. Buna uyğun olaraq nöqtəvi kütlələrin də paylanma sıxlığını δ-funksiya vasitəsilə təyin edəcəyik:

$$\eta(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}m_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)). \tag{36.4}$$

Bunu (36.2)-də nəzərə alsaq və nöqtəvi yüklər üçün yazılmış köməkçi (34.15) düsturunu nöqtəvi kütlələrə tətbiq etsək

$$S_1=\sum_{a=1}^{N}m_a\int_{t_1}^{t_2}\left(-c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon_a^2}{c^2}}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_V dVdt\left(-\eta(\vec{r},t)c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right) \tag{36.5}$$

ifadəsini alarıq.

Bir ədəd yüklü zərrəciyin xarici elektromaqnit sahəsi ilə qarşılıqlı təsirini ifadə edən təsir inteqralı bizə məlumdur (bax: (27.5)). Biz bunu bir ədəd a zərrəciyi üçün yazaq:

$$S_3^a=\frac{e_a}{c}\int A_\mu(x^a)dx_\mu^a.$$

Burada nəzərə alınmışdır ki, yaxına təsir nəzəriyyəsinə əsasən $A_\mu(x^a)$ potensialının qiyməti a zərrəciyinin olduğu nöqtədə götürülmüşdür. Bu təsir inteqralını bütün zərrəciklər üzrə cəmləsək və köməkçi (34.15) düsturunu nəzərə alsaq S_3 üçün aşağıdakı ifadəni yaza bilərik:

$$S_3=\sum_{a=1}^{N}S_3^a=\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{c}\int A_\mu(x^a)dx_\mu^a=\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{c}\int_{t_1}^{t_2}A_\mu(x^a)\frac{dx_\mu^a}{dt}dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_V dVdt\rho\frac{1}{c}A_\mu\frac{dx_\mu}{dt}=\int_{t_1}^{t_2}\int_V dVdt\frac{1}{c}A_\mu(\vec{r},t)j_\mu(\vec{r},t). \tag{36.6}$$

Bu ifadədə $A_\mu(\vec{r},t)$ ümumiyyətlə iki sahənin potensialının cəmi şəklində nəzərdə tutulmalıdır: A_μ(zər.)+A_μ(xar.). Burada A_μ(zər.) sistemdəki yüklü zərrəciklərin yaratdığı potensial, A_μ(xar.) isə xarici sahənin potensialıdır. Əgər xarici sahə yoxdursa və ya xarici sahəni nəzərə almırıqsa, onda $A_\mu(\vec{r},t)$ sistemdəki yüklərin yaratdığı sahənin 4-ölçülü potensialı olacaqdır.

Sərbəst elektromaqnit sahəsinin S_2 təsir inteqralını yazmaq üçün çox mühüm bir təcrübi faktı nəzərə almaq lazımdır. Təcrübələr göstərir ki, elektromaqnit sahəsi superpozisiya prinsipinə tabedir. Bu o deməkdir ki, yüklər sisteminin yaratdığı elektromaqnit sahəsi ayrı-ayrı yüklərin yaratdığı sahələrin cəminə bərabərdir. Başqa sözlə, yüklər sisteminin yaratdığı yekun sahənin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlikləri ayrı-ayrı yüklərin yaratdığı sahələrin intensivliklərinin vektori cəminə bərabərdir: $\vec{E}(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}\vec{E}_a(\vec{r},t)$ və $\vec{H}(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}\vec{H}_a(\vec{r},t)$.

Məlumdur ki, sahə tənliklərinin ixtiyari (hər cür) həlli təbiətdə mövcud ola bilən sahəni təsvir edir. Superpozisiya prinsipinə görə belə sahələrin istənilən cəmi də təbiətdə mümkün olan sahəni təsvir etməlidir. Riyaziyyatda xətti diferensial tənliklər nəzəriyyəsindən bilirik ki, xətti tənliyin istənilən sayda həllərinin cəmi də onun həllidir. Beləliklə, elektromaqnit sahəsinin tənlikləri xətti diferensial tənliklər olmalıdır.

Deyilənlərdən aydındır ki, S_2-yə sahənin kvadratı daxil olmalıdır. Çünki sahənin tənliklərini tapmaq üçün S_2-dən variasiya almaq lazımdır, variasiyanı hesablayanda sahənin üstü vahid qədər azalır və nəticədə xətti diferensial tənliklər alınır.

S_1 və S_3 kimi S_2 də relyativistik skalyar olmalıdır. S_2 inteqralına sahənin elə skalyarı daxil olmalıdır ki, bu skalyar sahə intensivliklərinin kvadratından asılı olsun. Belə yeganə invariant $F_{\mu\nu}^2$-dır. Onda S_2 təsir inteqralı aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$S_2=a\int_{t_1}^{t_2}\int_V dVdtF_{\mu\nu}^2. \tag{36.7}$$

Burada a ölçü vahidləri sisteminin seçilməsindən asılı olan sabitdir. Biz Qauss sistemindən istifadə edəcəyik və bu sistemdə $a=-\frac{1}{16\pi}$-dir. Qauss sistemində elektrik kəmiyyətləri SGSE, maqnit kəmiyyətləri isə SGSM sistemində yazılır (~~bax: §1~~).

İndi elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklər sistemi üçün təsir inteqralının son ifadəsini yazaq:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_V dVdt\left\{-\eta c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}^2+\frac{1}{c}j_\mu A_\mu\right\}. \tag{36.8}$$

Burada böyük mötərizənin içərisindəki kəmiyyəti $\mathcal{L}$ ilə işarə edərək

$$\mathcal{L}=-\eta c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}^2+\frac{1}{c}j_\mu A_\mu, \tag{36.9}$$

S-i yeni işarələrlə yazaq:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_V dV\mathcal{L}=\int_{t_1}^{t_2}dtL(t) \tag{36.8'}$$

Bu yazılışda $L(t)=\int_V dV\mathcal{L}$ sistemin Lanqranj funksiyası, $\mathcal{L}$ isə Lanqranj funksiyasının həcmi sıxlığıdır. Sahə nəzəriyyəsində adətən «Lanqranj funksiyası» olaraq relyativistik invariant olan $\mathcal{L}$-dən istifadə edirlər.

§37. Birinci növ (cüt) Maksvell tənlikləri, onların müxtəlif formaları, diferensial və inteqral şəkilləri

Elektromaqnit sahəsinin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivliklərinin $\vec{A}$ və φ potensiallarla olan ~~(28.4)-(28.5)~~ əlaqələrindən istifadə edərək intensivliklər üçün müəyyən diferensial tənliklər ala bilərik. Bu tənliklər *Maksvellin birinci növ tənlikləri* adlanır. Birinci növ tənliklərə sahənin mənbələri daxil olmur və bu tənliklər $\vec{E}$ və $\vec{H}$-ın bəzi xassələrini və onlar arasındakı əlaqəni təsvir edir. ~~Bu haqda biz kitabın əvvəlində §3 və §6-da söhbət etmişik.~~

$\vec{E}$-ni təyin edən ~~(28.4)~~ (1) ifadəsini yazaq:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\varphi\,. \qquad \cancel{(28.4)}$$

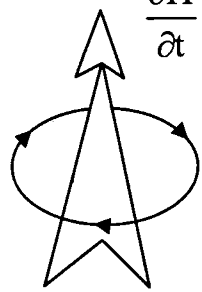
Bu ifadənin rotorunu hesablayaq:

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\varphi=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A}-[\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Burada biz rot ilə $\frac{\partial}{\partial t}$-nin yerlərini dəyişdik və $\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{H}$ olduğunu nəzərə aldıq. Alınmış

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{37.1}$$

diferensial tənliyi belə ifadə edirlər: maqnit sahəsinin zamana görə dəyişməsi burulğanlı elektrik sahəsini yaradır. «Burulğan» sözü hidrodinamikadan gəlib. Rotoru sıfırdan fərqli olan sahəyə *burulğanı sahə* deyilir. Bu tənlik Maksvellin birinci növ (cüt) tənliklərindən biridir və özü də Faradeyin elektromaqnit induksiyası qanununun diferensial şəklidir ~~(bax §3)~~. ~~Tənlikdən bilavasitə~~ görünür ki, $\vec{E}$-nin qüvvə xətləri $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ xətlərinə ~~perpendikulyar~~ olub, onlarla sol yivli burğu təşkil edir. Bu sxematik olaraq şəkil 37.1-də göstərilmişdir.



Şəkil **37.1**. Elektrik və maqnit qüvvə xətləri

İndi maqnit sahəsi intensivliyinin vektor potensialla olan ~~(28.5)~~ əlaqəsini

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r},t) \qquad \text{~~(28.5)~~}$$

yazaq və onun divergensiyasını hesablayaq:

$$\mathrm{div}\vec{H} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{A}] = [\vec{\nabla}\vec{\nabla}]\vec{A} = 0 .$$

Alınmış

$$\mathrm{div}\vec{H}(\vec{r},t) = 0 \qquad (37.2)$$

diferensial tənlik birinci növ Maksvell tənliklərinin ikinci hissəsidir. ~~Bu tənlik göstərir~~ ki, maqnit sahəsinin mənbəyi yoxdur, yəni sərbəst maqnit yükləri mövcud deyildir (bax: §5). Bilirik ki, divergensiya uyğun sahənin mənbəyinin «gücünü», «intensivliyini» xarakterizə edir.

Yuxarıda aldığımız (37.1)-(37.2) tənlikləri Maksvellin birinci növ (cüt) tənliklərinin diferensial şəklidir. Qeyd edək ki, bu tənliklər elektromaqnit sahəsini tam təsvir etmir, çünki bunlara sahə mənbələri və elektrik sahəsinin zamana görə dəyişməsi daxil deyildir. Maksvellin birinci növ tənlikləri yalnız sahənin yuxarıda qeyd edilmiş bəzi xassələrini təsvir edə bilər. Bu iki tənlik bir cüt təşkil edir. Doğrudan da elektromaqnit sahəsinin $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ antisimmetrik tenzorundan x_ρ-yə görə törəmə alaraq $\mu\nu\rho$ indekslərini dövri olaraq 2 dəfə dəyişsək aşağıdakı 4-ölçülü diferensial tənliyi alarıq:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (37.3)$$

Bu tənlikdə $F_{\mu\nu}$-lərin hesabına alınan 3 ədəd müsbət hədd 3 ədəd mənfi hədlə ixtisar olunur və tənlik həmişə ödənir. Tənlikdə $\mu\nu\rho$ indeksləri yalnız fəza qiymətlərini (yəni, 1, 2, 3 qiymətlərini) alarsa, biz (37.2) tənliyini almış olarıq. Əgər (37.3) tənlyiində iki indeks fəza, lakin üçüncü indeks zaman qiymətlərini alarsa, onda (37.1) tənliyi alınar. Məsələn, (37.3)-də μ=1, ν=2, ρ=4 desək $(\mathrm{rot}\vec{E})_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}$ tənliyini, yəni (37.1) tənliyinin z komopnentini alarıq. Beləliklə birinci növ Maksvell tənlikləri bir cüt təşkil edir və (37.3) tənliyi birinci növ Maksvell tənliklərinin 4-ölçülü şəklidir. Bilavasitə yoxlamaq olar ki, (37.3) ifadəsi $\mu\nu\rho$ indekslərinin hər üçünə görə antisimmetrik tenzor təşkil edir və bu 3-ranqlı antisimmetrik tenzoru $T_{\mu\nu\rho}$ ilə işarə edərək (37.3) tənliyini

$$T_{\mu\nu\rho} = 0 \qquad (37.3')$$

şəklində yazmaq olar.

Biz birinci növ Maksvell tənliklərinin diferensial şəkillərindən və onlardan alınan nəticələrdən danışdıq. İndi bu tənliklərin inteqral şəkillərini alaq. Bunun üçün (37.1) diferensial tənliyi hər hansı açıq S səthi üzrə inteqrallayaq və tənliyin sol tərəfində Stoks teoremindən istifadə edək:

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}d\vec{S}. \qquad (37.4)$$

Sol tərəfdə Stoks teoremindən istifadə etsək

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S} = \oint_L \vec{E}d\vec{\ell} \qquad (37.5)$$

alarıq. Burada L konturu S səthinin söykəndiyi qapalı xətdir (bax §3, şəkil 3.2). Məlumdur ki, $\vec{E}$ sahəsinin qapalı L konturu üzrə inteqralı (sirkulyasiyası) müsbət vahid yük qapalı kontur boyunca hərəkət etdikdə elektrik (elektromaqnit) sahəsinin gördüyü işə bərabərdir və buna L konturunda təsir göstərən *elektrik hərəkət qüvvəsi* (EHQ) deyilir. Yuxarıdakı iki tənliyi birləşdirərək, onu

$$\oint_L \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\oint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S} \tag{37.6}$$

şəklində yazırıq. Deməli L konturunda təsir göstərən induksiya EHQ-si «$-\frac{1}{c}$» dəqiqliyi ilə L-ə söykənən S səthindən keçən maqnit selinin vahid zamanda dəyişməsinə bərabərdir. Əgər L konturunu qapalı naqil boyunca aparsaq, onda (37.6) tənliyi Faradeyin təcrübi elektromaqnit induksiyası qanununu ifadə edəcəkdir. Bizim aldığımız (37.6) inteqral qanunda L və S ixtiyari (istənilən mühitdən, o cümlədən vakuumdan keçən) kontur və ona söykənən istənilən səthdir. Ona görə bu qanun Faradeyin elektromaqnit induksiyası qanunundan daha geniş tətbiq oblastına malikdir.

İkinci tənliyin inteqral şəklini almaq üçün (37.2) tənliyini hər hansı həcm üzrə inteqrallamaq və sonra Qauss teoremini tətbiq etmək lazımdır. Məlumdur ki, istənilən vektor üçün Qauss teoremi belə ifadə edilir: hər hansı vektorun qapalı səthdən keçən seli (yəni, səth üzrə inteqralı) bu vektorun divergensiyasının həmin səthin daxilində qalan həcm üzrə inteqralına bərabərdir. $\vec{H}$ sahəsi üçün bu teoremin riyazi ifadəsi belədir:

$$\oint_S \vec{H}d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{H}dV. \tag{37.7}$$

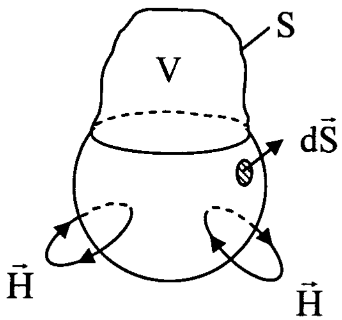
Qauss teoremini (37.2) tənliyinə tətbiq etsək

$$0 = \int_V \text{div}\vec{H}dV = \oint_S \vec{H}d\vec{S} \tag{37.8}$$

olar. Alınmış nəticəni konkret olaraq

$$\oint_S \vec{H}d\vec{S} = 0 \tag{37.9}$$

şəklində yazırıq. İxtiyari qapalı S səthindən keçən $\vec{H}$ vektorunun selinin sıfır olması üçün bu vektorun qüvvə xətləri mütləq qapalı olmalıdır. Çünki belə xətlər istənilən qapalı səthi cüt sayda nöqtədə kəsir və həcmə daxil olduqda bu xətlər mənfi sel, həcmidən xaricə çıxdıqda isə müsbət sel yaradır və bu sellər bir-birini neytrallaşdırır. Yadımıza salaq ki, səth qapalı olduqda $d\vec{S}$-in istiqaməti səthin xarici normalı istiqamətindədir (bax: §6). Maqnit sahəsinin qüvvə xətləri sxematik olaraq şəkil 37.2-də göstərilmişdir.



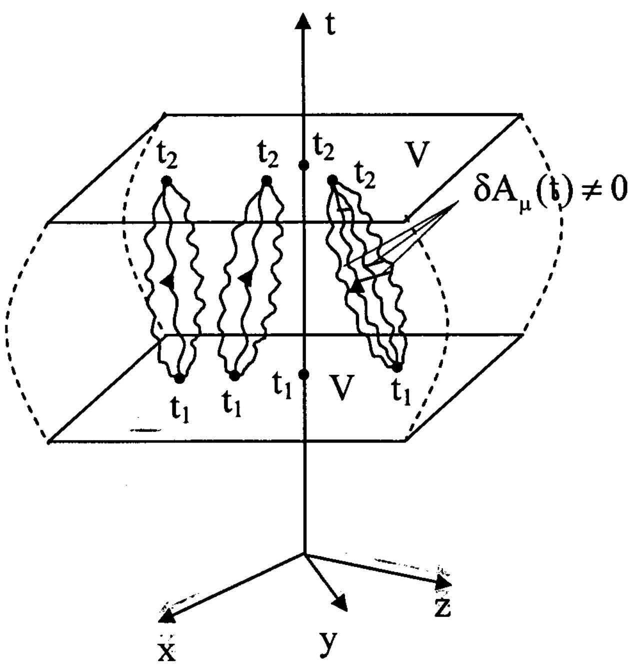
Şəkil **37.2.** Maqnit qüvvə xətləri qapalıdır

§38. İkinci növ (cüt) Maksvell tənlikləri, onların diferensial və inteqral şəkilləri və 4-ölçülü Qauss teoremi

Bu tənliklər ən kiçik təsir prinsipindən alınır, onlara elektromaqnit sahəsinin mənbələri bilavasitə daxil olur və bunlar sahənin hərəkət tənlikləri rolunu ifadə edir. Elektromaqnit sahəsi sonsuz böyük sərbəstlik dərəcəsinə malikdir. Çünki sahənin məlum olması üçün biz sahənin mövcud olduğu fəza oblastının bütün nöqtələrində istənilən zaman anında onun qiymətini bilməliyik. Belə nöqtələrin sayı sonsuz böyük olduğundan sahənin sərbəstlik dərəcəsi sonsuzdur. Sahənin ümumiləşmiş koordinatı olaraq onun 4-ölçülü $A_\mu(\vec{r},t)$ potensialı götürülür. Biz sahəni yaradan zərrəciklərin hərəkət qanunlarının məlum olduğunu bilərək, onların yaratdığı sahənin tənliklərini axtarırıq. Ona görə variasiya məsələsində zərrəciklərin hərəkətini təsvir edən kəmiyyətlərin variasiyası sıfır olmalıdır: $\delta\left(\eta c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)=0$, $\delta j_\mu(\vec{r},t)=0$. Digər tərəfdən biz sahənin başlanğıc (t_1) və son (t_2) zaman anlarında vəziyyətini fiksə etməli və onun t_2-t_1 zaman intervalında isə ixtiyari qanunla dəyişdiyini qəbul etməliyik:

$$\delta A_\mu(\vec{r},t_1)=\delta A_\mu(\vec{r},t_2)=0,\ \ \delta A_\mu(\vec{r},t)\neq 0,\ t_1<t<t_2.$$

Variasiya prinsipini elektromaqnit sahəsinə (sonsuz böyük sərbəstlik dərəcəsinə malik olan sistemə) tətbiq etdikdə sahənin trayektoriyası anlayışından danışmaq mənasızdır, çünki belə trayektoriyalar yoxdur. Lakin biz çox kobud da olsa «əyanilik» xətrinə şərti olaraq bir neçə «trayektoriya» çəkəcəyik. Minkovski fəzasında t_1 anında zaman oxuna $\perp$ olan bir müstəvi çəkək. Bu müstəvi t_1 anında 3-ölçülü V həcmini təsvir edəcəkdir. Həmin müstəvi Minkovski fəzasında fəzaya oxşar hipersəthdir. Minkovski fəzasında t_2 anında zaman oxuna $\perp$ yeni bir müstəvi keçirsək, o t_2 anında götürülmüş 3-ölçülü əvvəlki V həcmini təsvir edəcəkdir. Bu müstəvi Minkovski fəzasında fəzaya oxşar digər hispersəthdir. Bu hipersəthləri sonsuz uzadaraq bir-birilə birləşdirsək, Minkovski fəzasında 4-ölçülü R(4) həcmini əhatə edən qapalı hipersəth alarıq. Bu, sxematik olaraq Şəkil 38.1-də göstərilmişdir. Burada «əyanilik» xətrinə çəkilmiş trayektoriyaların sahə üçün heç bir rolu yoxdur. Bunlar yalnız sonlu sərbəstlik dərəcəsinə malik olan mexaniki sistemlər üçün müəyyən məna daşıya bilər. Yeganə onu deyə bilərik ki, t_1 və t_2 zaman anlarına uyğun «müstəvilər» (hipersəthlər) üzərində A_μ-nün variasiyası $\delta A_\mu(t_{1,2}) = 0$-dır, lakin səthlər arasındakı oblastda A_μ-nun variasiyası sıfırdan fərqlidir və ixtiyaridir: $\delta A_\mu(t) \neq 0$.



Şəkil **38.1**

Bir neçə kəlmə 4-ölçülü həcm və səth elementləri haqqında demək lazımdır. Tarixi ənənəyə görə 4-ölçülü həcm elementi $(d^4x) = dxdydzdt \equiv \equiv \frac{dVdx_0}{c}$ -dir. Burada $x_0 = ct$ zaman deyil, uzunluq ölçülüdür, c – işığının boşluqda yayılma sürətidir. 4-ölçülü hipersəth elementi olaraq $d\sigma_\mu = \frac{(d^4x)}{dx_\mu}$ qəbul edilir. 4-ölçülü uzunluq elementi dx_μ Enşteyn-Pauli metrikasında $\{d\vec{r}, idx_0\}$ və Byorken-Drell mentrikasında isə $\{dx_0, d\vec{r}\}$ -dir. Onda Enşteyn-Pauli metrikasında 4-ölçülü hipersəth elementi vektoru

$$d\sigma_\mu = \{d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4\} = \{dx_2dx_3dt,\ dx_1dx_3dt,\ dx_1dx_2dt,\ \frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3\}$$

olacaqdır (bax: Əlavə). Biz də gələcəkdə 4-ölçülü həcm və səth elementlərini yuxarıdakı kimi seçəcəyik.

İndi §36-da verilmiş elektromaqnit sahəsi və yüklər sistemi üçün təsir inteqralını yazaq:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_V dtdV\mathcal{L} \equiv \int_{R(4)} (d^4x)\mathcal{L}\left(\eta, j_\mu, A_\mu, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right). \tag{38.1}$$

Verilmiş V həcmində yerləşən kəsilməz sistemin S təsir inteqralı üçün ən kiçik təsir prinsipini ifadə edək: V həcmində yerləşmiş sistem t_2-t_1 zaman intervalında həqiqi hərəkət edərkən $A_\mu(\vec{r}, t)$ funksiyalarının elə şəklini (formasını) seçir ki, bu zaman S təsir inteqralı minimum (ekstremum) qiymət alır. Təsir inteqralı minimum qiymət aldıqda onun variasiyası sıfır olur: $\bar{\delta}S_{min} = 0$. Onda ən kiçik təsir prinsipinin riyazi ifadəsi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\bar{\delta}S = \bar{\delta}\int_{R(4)} (d^4x)\mathcal{L} = \int_{R(4)} (d^4x)\bar{\delta}\mathcal{L} = 0. \tag{38.2}$$

Variasiya formaya görə aparıldığından, onun inteqralla yerini dəyişirik. İndi $\mathcal{L}$-in ifadəsində zərrəciklərin hərəkəti ilə əlaqədar kəmiyyətlərin variasiyasını sıfır qəbul edərək, yalnız sahənin variasiyasını hesablayırıq və $F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu$ olduğunu nəzərə alırıq:

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\delta F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu = -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu + \frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\delta\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta A_\nu + \frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu .$$

Biz birinci və ikinci toplananda variasiya ilə törəmənin yerini dəyişdik. İndi birinci skalyar həddə lal $\mu\nu$ indekslərini lal $\nu\mu$ indeksləri ilə əvəz edək və sonra orada $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ yazaq:

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + \frac{1}{8\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu =$$

$$= \frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu .$$

Bu ifadəni (38.2)-də nəzərə alaq və birinci həddi hissə-hissə inteqrallayaq. Bunu aşkar həyata keçirmək üçün inteqralaltı ifadəyə eyni bir həddi $\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu\right)$ əlavə edək və çıxaq:

$$\bar{\delta}S = \int\limits_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{1}{4\pi}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu \pm \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\delta A_\mu\right) + \frac{1}{c}j_\mu\delta A_\mu\right\} =$$

$$= \int\limits_{R(4)}(d^4x)\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\mu\nu}\delta A_\mu)\right) + \int\limits_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{1}{c}j_\mu - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right\}\delta A_\mu =$$

$$= I_1 + I_2 = 0. \tag{38.3}$$

Birinci inteqralın, yəni $I_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R(4)}(d^4x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\mu\nu}\delta A_\mu) = 0$ olduğunu bu paraqrafın axırında göstərəcəyik. Onda (38.3)-dən alırıq:

$$\bar{\delta}S = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{4\pi}{c}j_\mu - \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right\}\delta A_\mu = 0 .$$

İnteqralın sıfıra bərabər olmasından və inteqral altında ixtiyari dəyişən δA_μ vuruğunun varlığından riyazi olaraq $\left\{\frac{4\pi}{c}j_\mu - \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right\} = 0$ tənliyi alınır. Bu elektromaqnit sahəsi üçün hərəkət tənliyidir. Onu adətən aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}(\vec{r},t)}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu(\vec{r},t). \qquad (38.4)$$

Bu, *Maksvellin ikinci növ (cüt) tənliklərinin* 4-*ölçülü şəklidir*.

Bu tənlikləri 3-ölçülü şəkildə yazaq. Bunun üçün tənlikdə $\mu=1$ yazaq və təkrar olunan ν indeksi üzrə cəmləyək ($\nu=1, 2, 3, 4$):

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1 .$$

Burada $F_{11}=0$, $F_{12}=H_z$, $F_{13}=-H_y$, $F_{14}=-iE_x$ və $j_1=j_x=\rho\upsilon_x$ olduğunu nəzərə alsaq (bax: (31.6)), tənlik aşağıdakı şəklə düşər:

$$\mathrm{rot}_x \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\upsilon_x .$$

İndi $\mu=2$ və $\mu=3$ yazaraq ν indeksi üzrə cəm aparsaq

$$\mathrm{rot}_y \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\upsilon_y \quad \text{və} \quad \mathrm{rot}_z \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\upsilon_z$$

tənliklərini alarıq. Bu tənlikləri növbə ilə $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ ort vektorlarına vurub cəmləsək, aşağıdakı vektori tənliyi alarıq:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\vec{\upsilon} . \qquad (38.5)$$

İndi (38.4) tənliyində $\mu=4$ yazaraq uyğun əməliyyatı aparsaq

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_4$$

tənliyini alarıq. Burada $F_{41}=iE_x$, $F_{42}=iE_y$, $F_{43}=iE_z$, $F_{44}=0$ və $j_4=ic\rho$ olduğunu nəzərə alsaq (bax: (31.6)), tənlik aşağıdakı şəklə düşər:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho . \qquad (38.6)$$

(38.5) və (38.6) tənlikləri 3-ölçülü şəkildə yazılmış *Maksvellin ikinci növ (cüt) tənlikləri* adlanır. Bu tənliklər birinci növ təkliklərlə birlikdə vakuumda elektromaqnit sahəsini tam təsvir edir. Maksvellin I və II növ tənlikləri dörd tənlikdən, yəni 2 ədəd vektori və 2 ədəd skalyar tənlikdən ibarətdir. Bu tənliklər klassik elektrodinamikanın əsas tənlikləridir və onların köməyi ilə müasir elektrodinamikanın bütün məsələləri öz dəqiq həllərini tapır. Qeyd edək ki, tənliklərə daxil olan $\vec{E}, \vec{H}, \rho, \vec{j} = \rho\vec{\upsilon}$ kəmiyyətləri ümumiyyətlə zaman və məkanın funksiyalarıdır.

Alınmış diferensial tənliklərin fiziki mənalarını aydınlaşdıraq. (38.5) tənliyindən aydın görünür ki, elektrik sahəsinin zamana görə dəyişməsi və keçiricilik cərəyanı eyni hüquqla burulğanlı maqnit sahəsini yaradır. Bu tənliyin sağ tərəfini başqa şəkildə yazsaq

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\rho\vec{\upsilon} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{38.5a}$$

olar. Tənliyin sağ tərəfində mötərizə içərisində iki növ cərəyan sıxlığının cəmi vardır. Onlardan birincisi bizim bildiyimiz keçiricilik cərəyanının $\vec{j}_{keç.} = \rho\vec{\upsilon}$ sıxlığıdır. İkinci cərəyanı isə Maksvell *dəyişmə cərəyanı sıxlığı* $\vec{j}_{dəy.} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ adlandırmışdı.

Maksvell bu cərəyanı aksiomatik üsulla kəşf etmişdir. Əslində xarici ədəbiyyatda bu cərəyan «*yerdəyişmə*» *cərəyanı* (*tok smeşeniya*) adlanır. Maksvell o dövrdə belə fərz edirdi ki, bu cərəyan efirin yerdəyişməsi nəticəsində yaranır. Lakin müasir fizikada efir anlayışı yoxdur, onun yerdəyişməsi də yoxdur, lakin bu cərəyan vardır. Ona görə biz bu cərəyana «dəyişmə cərəyanı» terminini vermişik (bax: §5). Bu iki cərəyan eyni hüquqla burulğanlı maqnit sahəsini yaradır. Maqnit sahəsini yaratmaq mənasında bu cərəyanlar oxşardır, ekvivalentdir. Lakin təbiətcə bu cərəyanlar bir-birindən kəskin fərqlənir. Biz bu haqda §5-də geniş danışmışıq. İndi qısaca bu iki cərəyanın fərqli cəhətlərini qeyd edək: 1) keçiricilik cərəyanı elektrik yüklərinin hərəkəti ilə əlaqədardır, dəyişmə cərəyanı isə yüklərlə əlaqədar deyildir; 2) keçiricilik cərəyanı naqil mühitdə mövcuddur, dəyişmə cərəyanı isə hər yerdə mövcuddur; 3) keçiricilik cərəyanı hesabına Coul-Lens istiliyi ayrılır, dəyişmə cərəyanı hesabına istilik ayrılmır. Bu iki cərəyanın cəminə *tam cərəyan sıxlığı* deyilir:

$$\vec{j}_{tam.} = \vec{j}_{keç.} + \vec{j}_{dəy.} = \rho\vec{\upsilon} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{38.7}$$

(38.5a) ifadəsindən görünür ki, maqnit qüvvə xətləri tam cərəyan xətlərinə dolanır və onlarla sağ yivli burğu təşkil edir.

(38.6) tənliyi göstərir ki, elektrik sahəsi mənbəyə malikdir və onun mənbəyi elektrik yükləridir.

İndi ikinci növ Maksvell tənliklərinin inteqral şəkillərinə baxaq.

(38.5a) tənliyini hər hansı açıq səth üzrə inteqrallayaq və sol tərəfdə Stoks teoremindən istifadə edək:

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{H}d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}_{tam.}d\vec{S} \text{ və ya. } \oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}_{tam.}d\vec{S}. \quad (38.8)$$

Elektrik sahəsi üçün $\text{EHQ} = \oint_L \vec{E}d\vec{\ell}$ düsturuna oxşar olaraq, $\vec{H}$ sahəsinin qapalı L konturu üzrə inteqralına (sirkulyasiyasına) maqnit sahəsinin L konturunda *maqnit hərəkətetdirici qüvvəsi* (MHQ) deyilir: $\text{MHQ} = \oint_L \vec{H}d\vec{\ell}$. Onda (38.8) tənliyini belə ifadə etmək olar: L konturunda təsir göstərən Maqnit hərəkət etdirici qüvvə (MHQ) bu kontura söykənən S səthindən keçən tam cərəyan şiddətinin $\frac{4\pi}{c}$-yə hasilinə bərabərdir.

(38.6) tənliyini hər hansı həcm üzrə inteqrallayaraq, ona Qauss teoremini tətbiq etsək, bu tənliyin inteqral şəklini almış olarıq:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{E}dV = 4\pi\int_V \rho dV = 4\pi Q \text{ və ya } \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q. \quad (38.9)$$

Qapalı S səthindən keçən elektrik sahəsinin seli həmin səthin daxilində yerləşən elektrik yükünün 4π-yə hasilinə bərabərdir.

(38.9) tənliyindən görünür ki, elektrik xətləri müsbət yüklərdən çıxır və mənfi yüklərə daxil olur. Doğrudan da fərz edək ki, səthin daxilindəki yük müsbətdir: Q>0. Onda tənliyin sol tərəfi də müsbət, yəni $\oint_S \vec{E}d\vec{S} > 0$ olacaqdır. Qapalı səth üçün $d\vec{S}$ həmişə xaricə yönəlir. Deməli $\oint_S \vec{E}d\vec{S}$ inteqralının müsbət olması üçün $\vec{E}$ vektoru $d\vec{S}$ ilə iti bucaq təşkil etməlidir, yəni o da səthdən xaricə yönəlməlidir, deməli müsbət yüklərdən çıxmalıdır.

Bir neçə kəlmə tam cərəyan haqqında deyək. (38.7)-ni (38.5a)-da nəzərə alsaq $\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{tam.}(\vec{r},t)$ olar. Bu tənlikdən div alaq:

$$\mathrm{divrot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\vec{j}_{tam.} \text{ və ya } \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{H}] = [\vec{\nabla}\vec{\nabla}]\vec{H} = 0 = \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\vec{j}_{tam.}$$

olur. Demək

$$\operatorname{div}\vec{j}_{tam.} = 0 \quad \text{və} \quad \oint_S \vec{j}_{tam.} d\vec{S} = 0 \tag{38.10}$$

~~tənlikləri ödənir. Bu o deməkdir ki,~~ $\vec{j}_{tam.}$ cərəyanın mənbəyi yoxdur, yaxud tam cərəyan xətləri qapalıdır. Deməli $\vec{j}_{tam.} = \vec{j}_{keç.} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ cərəyanda keçiricilik cərəyanı xətləri qırıldığı nöqtələrdə, onu dəyişmə cərəyanı xətləri davam etdirir və cərəyan xəttini tamamlayır. Məsələn, yüklənmiş kondensatoru məftil vasitəsilə boşaldanda bu proses baş verir. İndi 4-ölçülü ~~(38.4)~~ tənliyindən x_μ-yə görə törəmə alaq: $\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}$. Burada $F_{\mu\nu}$ antisimmetrik tenzor, $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ isə simmetrik tenzordur və onların hasili həmişə sıfırdır. Ona görə yuxarıdakı tənlikdən

$$\frac{\partial j_\mu(\vec{r},t)}{\partial x_\mu} = 0 \tag{38.11}$$

4-*ölçülü kəsilməzlik tənliyi* alınır. Bu tənlik bizə artıq məlum idi. Qeyd edək ki, (38.10) və (38.11) tənlikləri eyni bir hadisənin müxtəlif şəkilləridir.

İndi I_1=0 olduğunu göstərmək üçün inteqral altındakı 4-ölçülü divergensiyanı qısaca $\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}$ şəklində yazaq və onu açaq (burada $F_{\mu\nu}\delta A_\mu = B_\nu$ 4-ölçülü vektorudur):

$$4\pi I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dxdydz \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} + \frac{\partial B_4}{ic\partial t} \right\}.$$

İnteqrallanma koordinatlara görə sonsuz fəza üzrə, zamana görə isə t_1-dən t_2-yə qədər aparılır. İnteqral altında hər bir törəməyə görə bir dəyişən üzrə inteqral açılır. Məsələn, $\frac{\partial B_1}{\partial x}$ törəməsi olan həddə x üzrə inteqralı açsaq $\int_{-\infty}^{+\infty} dydz \int_{t_1}^{t_2} dt B_1 \Big|_{x_1=-\infty}^{x_2=+\infty}$ olar. Sahə (yəni $B_1 = F_{\mu 1}\delta A_\mu$) sonsuzluqda sıfır olduğundan, bu inteqral sıfıra bərabər olur. Analoji olaraq $\frac{\partial B_2}{\partial y}$ və

$\frac{\partial B_3}{\partial z}$ törəmələri olan inteqralları y-ə və z-ə görə açsaq, onların da sıfıra bərabər olduğunu görərik. İndi $\frac{\partial B_4}{ic\partial t}$ törəməsi olan inteqralı açaq: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxdydz\frac{B_4}{ic}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxdydz\frac{1}{ic}F_{\mu 4}\delta A_\mu(t)\Big|_{t_1}^{t_2}$. Ən kiçik təsir prinsipinin şərtinə görə $\delta A_\mu(\vec{r},t_1) = \delta A_\mu(\vec{r},t_2) = 0$ olmalıdır. Ona görə bu inteqral da sıfıra bərabərdir. Beləliklə I_1-dəki bütün inteqrallar sıfıra bərabərdir, yəni $I_1=0$ olur. Biz bunu qısa yolla da edə bilərdik. Məlumdur ki, 3-ölçülü Qauss teoreminə uyğun olaraq 4-ölçülü Qauss teoremi də mövcuddur (bax: Əlavə):

$$\int\limits_{R(4)} (d^4x)\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu} = \oint\limits_{\Sigma} d\sigma_\nu B_\nu \,. \qquad (38.12)$$

Burada Σ 4-ölçülü R(4) həcmini əhatə edən qapalı hipersəthdir, $d\sigma_\nu$ hipersəthin elementidir və özü də 4-ölçülü vektordur:

$$d\sigma_\nu = \left\{dx_2dx_3dt,\ dx_1dx_3dt,\ dx_1dx_2dt,\ \frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3\right\}.$$

Yuxarıdakı bərabərliyin sağ tərəfində bütün kəmiyyətlər hipersəthin üzərində götürülür və 4-ölçülü həcmin sərhədində, yəni hipersəthin üzərində sahə (yəni B_ν) və onun variasiyası sıfırdır.

§39. Elektromaqnit sahəsi üçün enerjinin saxlanması qanunu, sahə üçün kəsilməzlik tənliyi və Umov-Poyntinq vektoru

Biz göstərəcəyik ki, elektromaqnit sahəsi enerjiyə malikdir, bu enerji fəzada müəyyən sıxlıqla paylanır və sahə hərəkət edərək istənilən səthdən keçən enerji seli yarada bilir. Məlumdur ki, istənilən sahənin enerjisi bu sahəni yaratmaq üçün sərf edilməsi lazım olan tam işə bərabərdir. Fərz edək ki, elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklərdən ibarət sistem verilmişdir.

Bilirik ki, zərrəciyin relyativistik kinetik enerjisinin vahid zamanda dəyişməsi elektromaqnit sahəsinin zərrəcik üzərində vahid zamanda gördüyü işə bərabərdir (bax: (28.5)):

$$\frac{d\varepsilon^{rel.}_{kin.}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-mc^2\right)=\vec{\upsilon}\frac{d\vec{p}}{dt}=e\vec{E}\vec{\upsilon}.$$

Sistemdəki bütün yüklər üzərində sahənin gördüyü işi hesablamaq üçün yuxarıdakı düsturu zərrəciklərin sayı üzrə cəmləmək və §34-dəki δ-funksiyanın köməkçi düsturlarından istifadə etmək lazımdır:

$$\sum_{a=1}^{N}\frac{d}{dt}\varepsilon^{a}_{kin.}=\sum_{a=1}^{N}e_a\vec{\upsilon}_a\vec{E}=\int_V\rho\vec{\upsilon}\vec{E}dV=\int_V\vec{j}\vec{E}dV. \tag{39.1}$$

Burada $\rho(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))$ yüklərin sıxlığıdır, $\vec{j}(\vec{r},t)=\rho\vec{\upsilon}$ cərəyan sıxlığıdır. Bərabərliyin sağ tərəfi sahənin yüklər sistemi üzərində vahid zamanda gördüyü işdir. Məlumdur ki, sahə öz enerjisinin dəyişməsi hesabına iş görür. Sahənin enerjisinin vahid zamanda dəyişməsi əks işarə ilə onun yüklər üzərində vahid zamanda gördüyü işə bərabərdir:

$$\frac{d\varepsilon_{sah\partial}}{dt}=-\sum_{a=1}^{N}e_a\vec{\upsilon}_a\vec{E}=-\int_V\vec{j}\vec{E}dV. \tag{39.2}$$

Baxdığımız həcmdə sahənin enerjisini $\varepsilon_{sahə}$ ilə işarə edirik, onun konkret şəklini hələlik bilmirik, lakin axtarırıq. Bu düstur şüalanmayan qapalı sistem üçün doğrudur və biz də məhz belə sistem üçün bu düsturdan istifadə edəcəyik. Yuxarıdakı tənliyə $\vec{E}\vec{j}$ kəmiyyəti, yəni sahənin vahid həcmdə vahid zamanda yüklər üzərində gördüyü iş iştirak edir. Maksvell tənliklərindən istifadə edərək $\vec{j}\vec{E}$ kəmiyyəti iştirak edən tənlik alaq. Bunun üçün $\vec{H}$-ı $\mathrm{rot}\vec{E}$-yə və $\vec{E}$-ni $\mathrm{rot}\vec{H}$-a vuraq və onları bir-birindən çıxaq:

$$\vec{H}\mathrm{rot}\vec{E}-\vec{E}\mathrm{rot}\vec{H}=-\frac{1}{c}\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\frac{1}{c}\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}.$$

Burada vektor analizindəki $\vec{b}\mathrm{rot}\vec{a}-\vec{a}\mathrm{rot}\vec{b}=\mathrm{div}[\vec{a}\vec{b}]$, $\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}^2$ və s. ifadələrdən istifadə edək:

$$\mathrm{div}[\vec{E}\vec{H}]=-\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}^2+\vec{E}^2)-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}.$$

Bu ~~Son~~ düsturu $4\pi/c$-yə bölək və zamana görə törəmə iştirak edən həddi sol tərəfdə, qalan hədləri sağ tərəfdə yazaq:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right)=-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}]-\vec{j}\vec{E}. \qquad (39.3)$$

Bu diferensial şəkildə saxlanma qanunudur. Burada $\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}]=\vec{J}$ işarələnməsi qəbul edək, tənliyi ixtiyari V həcmi üzrə inteqrallayaq və sağda birinci həddə Qauss teoremini tətbiq edək:

$$\oint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right)dV=-\oint_S \vec{J}d\vec{S}-\oint_V \vec{j}\vec{E}dV. \qquad (39.4)$$

Bu düsturu araşdırmaq üçün əvvəlcə fərz edək ki, bizim sistemimiz qapalı sistemdir, yəni xarici mühitlə əlaqə (mübadilə) yoxdur. Bunu asan yolla icra etmək üçün fərz etmək lazımdır ki, inteqrallanma həcmi V_∞ və səthi S_∞ sonsuz böyükdür və bu sonsuz fəzada yalnız bizim sistemimiz mövcuddur. Sonsuzluqda sahə sıfır olduğuna görə (39.4)-də səth üzrə inteqral $\oint_S \vec{J}d\vec{S}=0$ olacaqdır və biz aşağıdakı ifadəni alacağıq:

$$\int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right)dV=-\int_{V_\infty} \vec{j}\vec{E}dV. \qquad (39.5)$$

~~Biz bu qapalı sistem üçün (39.2) düsturundan istifadə etsək~~

$$\int_{V_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right)dV=\frac{d\varepsilon_{\text{sahə}}}{dt}$$

bərabərliyini alarıq. Sonsuz V_∞ həcmi dəyişmədiyinə görə inteqral altındakı zamana görə xüsusi törəməni tam törəmə şəklində inteqraldan xaricə çıxardırıq və yuxarıdakı tənliyi zamana görə inteqrallayırıq:

$$\varepsilon_{\text{sahə}}=\int_{V_\infty}\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}dV+G.$$

İnteqrallanma sabiti olan G-ni tapmaq üçün fərz edirik ki, sahə yoxdursa (yəni E=H=0) onun enerjisi də yoxdur (yəni $\varepsilon_{\text{sahə}}=0$). Onda G=0 olur. Beləliklə, elektromaqnit sahəsinin enerjisi

$$\varepsilon_{\text{sahə}}=\int_{V_\infty}\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}dV \qquad (39.6)$$

olur. İnteqral altındakı ifadə enerjinin həcmi sıxlığı olur və onu w ilə işarə edirik:

$$w = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}. \tag{39.7}$$

Bu, fəzanın vahid həcmindəki elektromaqnit sahəsi enerjisidir. Biz indi (39.5) düsturunun sağ tərəfində (39.1) bərabərliyini nəzərə alaraq, hər iki həddə zamana görə törəməni birləşdirsək

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV + \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_{kin.}^{a}\right\} = 0 \tag{39.8}$$

saxlanma qanununu alırıq. Beləliklə, elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklərdən ibarət olan qapalı sistemdə sahənin enerjisi ilə yüklü zərrəciklərin relyativistik kinetik enerjilərinin cəmi saxlanır.

İndi fərz edək ki, baxdığımız sistem qapalı deyildir və o xarici mühitlə əlaqədədir. Yenidən (39.4) düsturuna qaydaraq fərz edəcəyik ki, V həcminin daxilində və xaricində sahə də var, zərrəciklər də vardır. V ixtiyari və sonlu həcm olduğundan onun səthi üzrə inteqral $\oint_S \vec{J}d\vec{S} \neq 0$ olmalıdır.

Biz (39.4) düsturunun sağ tərəfindəki sonuncu həddə (39.1) münasibətini nəzərə alaraq və zamana görə törəmə olan hədləri birləşdirərək, onları tənliyin sol tərəfində yazsaq, aşağıdakı daha ümumi inteqral saxlanma qanununu alarıq:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} dV + \sum_{a=1}^{N'}{}' \varepsilon_{kin}^{a}\right\} = -\oint_S \vec{J}d\vec{S}. \tag{39.9}$$

Bu tənliyin sol tərəfində V həcmində elektromaqnit sahəsinin enerjisi ilə bu həcmdə yerləşmiş zərrəciklərin (N' sayda) kinetik enerjiləri cəminin vahid zamanda dəyişməsi yazılmışdır. Sağ tərəfdə isə mənfi işarə ilə götürülmüş $\vec{J}$ vektorunun V həcminin S səthindən keçən seli verilmişdir. Fiziki məntiqə görə bu sel enerji seli olmalıdır. Vahid zamanda V həcmində enerjinin dəyişməsi vahid zamanda həmin həcmin S səthindən keçən enerjinin miqdarına, yəni enerji selinə bərabər olmalıdır. Seli ifadə edən $\oint_S \vec{J}d\vec{S}$ inteqralının altındakı $\vec{J}$ kəmiyyəti *selin sıxlığı* adlanır. Yəni

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}] \tag{39.10}$$

kəmiyyəti elektromaqnit enerjisi selinin sıxlığıdır, başqa sözlə vahid zamanda sahənin hərəkətinə perpendikulyar qoyulmuş vahid səthdən keçən sahənin enerjisinə bərabərdir. Yuxarıdakı $\vec{J}$ kəmiyyəti *Umov-Poyntinq vektoru* adlanır. Burada söhbət elektromaqnit enerjisi selindən gedir. Əgər S səthində zərrəciklər də olsaydı, onda zərrəciklərin də enerji selindən danışmaq olardı. Bərabərliyin sağ tərəfindəki mənfi işarəsi bərabərlikdə eyni işarəli kəmiyyətlərin bir-birinə bərabərliyini təmin edir. Doğrudan da, əgər sel müsbətdirsə bu, həcmdən enerjinin getməsinə, yəni sol tərəfdə törəmənin mənfi olmasına səbəb olur. Ona görə müsbət selin qabağındakı mənfi işarə sağ tərəfdə də ümumi işarənin mənfi olmasını təmin edir. Enerji seli mənfi də ola bilər: $\oint\limits_S \vec{J}d\vec{S} < 0$. Bu o deməkdir ki, $\vec{J}$ ilə $d\vec{S}$ vektorları arasındakı bucaq kordur, yəni $\vec{J}$ səthə və deməli həcmə daxil olur. Onda həcmdə enerjinin miqdarı artır və sol tərəfdə artan kəmiyyətin zamana görə törəməsi mübət olur. Tənliyin sağ tərəfi də müsbət olur: $-\oint\limits_S \vec{J}d\vec{S} > 0$ (mənfi selin mənfiyə hasilidir). Beləliklə (39.9) düsturu enerji üçün kəsilməzlik tənliyinin inteqral şəklidir.

Qeyd edək ki, $\frac{d\varepsilon_{kin.}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2\right) = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ olduğundan bizim düsturlarımızda $\varepsilon_{kin.}$ əvəzinə $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ yazmaq olar.

§40. Elektromaqnit sahəsi üçün Laqranj tənliyi

Mexaniki sistem üçün Eyler-Laqranj tənliyinin alınması üsulunu ümumiləşdirərək, istənilən sahə üçün Laqranj tənliyini almaq olar. Biz burada elektromaqnit sahəsi üçün Laqranj tənliyini, yəni sahənin «hərəkət tənliyini» alacağıq. Bunun üçün elektromaqnit sahəsinin §38-də verilmiş təsir inteqralına ən kiçik təsir prinsipini tətbiq edəcəyik. Elektromaqnit sahəsi üçün ümumiləşmiş koordinat olaraq sahənin 4-ölçülü $A_\mu(\vec{r},t)$ potensialı götürülür. Baxdığımız sistemin Laqranj funksiyasına potensialın 4-ölçülü koordinata görə birinci tərtib törəmələri daxildir. Bu törəmələri sadəlik xətrinə belə işarə edirik: $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = A_{\mu,\upsilon}$. Laqranj funksiyası lokaldır, yəni oraya sahənin potensialı və onun törəmələrinin verilmiş nöqtələrdə qiymətləri daxildir. Laqranj funksiyasına sahənin kvadratı daxil olur. Laqranj funksiyasının bu sadəlik xassələri nəticəsində sahə tənlikləri 2-ci tərtib xüsusi törəməli xətti diferensial tənliklər olacaqdır. Ən kiçik təsir prinsipində fərz edilir ki, sahəni yaradan zərrəciklərin hərəkət qanunları məlumdur, yəni zərrəciklərə aid olan kəmiyyətlərin variasiyası sıfırdır. Zərrəciklər və sahədən ibarət sistem qapalı olarsa, belə sistemin Laqranj funksiyası fəza-zaman koordinatlarından aşkar asılı olmayacaqdır. Bu, mexanikada qapalı zərrəciklər sistemi üçün Laqranj funksiyasının zamandan aşkar asılı olmamasına uyğun gəlir.

Elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklərdən ibarət sistem üçün §38-də verilmiş təsir inteqralını yazaq və ona ən kiçik (və ya stasionar) təsir prinsipini tətbiq edək:

$$S = \int_{R_{(4)}} (d^4x)\mathcal{L}(\eta, j_\mu, A_\mu, A_{\mu\nu})$$

$$\bar{\delta}S = \int_{R_4} (d^4x)\bar{\delta}\mathcal{L}(\eta, j_\mu, A_\mu, A_{\mu,\nu}) = 0. \tag{40.1}$$

Variasiya formaya görə aparıldığından inteqralla variasiyanın yerini dəyişmək olar. Laqranj funksiyasının variasiyasını məlum qaydaya əsasən hesablayırıq (bax: funksiyanın variasiyası):

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}\bar{\delta}A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\bar{\delta}A_{\mu,\nu}. \tag{40.2}$$

Burada funksiyanın η, j_μ arqumentlərinə görə variasiyası sıfır olduğundan onlar $\bar{\delta}\mathcal{L}$-də iştirak etmir. İkinci həddin sonuncu vuruğunda variasiya ilə törəmənin yerini dəyişək:

$$\bar{\delta}A_{\mu,\nu} = \bar{\delta}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\bar{\delta}A_\mu. \tag{40.3}$$

Bunu (40.2)-də nəzərə alaraq $\bar{\delta}\mathcal{L}$-in şəklini dəyişmək olar. Hesablamalarda formaya görə variasiya aparıldığını yadda saxlayaraq, bundan sonra $\bar{\delta}$ simvolunu δ ilə işarə edəcəyik:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta A_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\delta A_\mu\right\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\right\}\cdot\delta A_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\delta A_\mu\right\}+\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\right\}\delta A_\mu .$$

Bu ifadəni (40.1)-də yerinə yazaq və birinci mötərizədə 4-ölçülü həcm üzrə inteqraldan hipersəth üzrə inteqrala keçək (bax: əlavə):

$$\delta S=\oint_\Sigma d\sigma_\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\delta A_\mu\right)+\int_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\right\}\delta A_\mu=0. \quad (40.4)$$

4-ölçülü həcmin sərhədində, yəni Σ hiper səthin üzərində sahənin variasiyası sıfır olduğundan birinci inteqralı atırıq və

$$\delta S=\int_{R(4)}(d^u x)\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}\right\}\delta A_\mu=0 \quad (40.5)$$

olur. 4-ölçülü həcmin daxilində δA_μ ixtiyari funksiya olduğundan, inteqral altındakı böyük mötərizə sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\{\quad\}=0 \text{ və ya } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}}=0. \quad (40.6)$$

Bu, elektromaqnit sahəsi üçün Laqranj tənlikləridir. Burada ν üzrə cəm gedir və μ=1, 2, 3, 4 qiymətlərini alır. Əgər elektromaqnit sahəsini yox, istənilən digər sahəni götürsək və onun ümumiləşmiş koordinatını (sahə funksiyasını) ψ_μ ilə işarə etsək, istənilən sahə üçün Laqranj tənlikləri uyğun olaraq

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\mu,\nu}}=0 \quad (40.6')$$

şəklində yazılar. Burada μ indeksi ψ sahəsinin tenzor xarakterindən asılı olaraq qiymət alacaqdır (μ=1, 2, 3, 4, 5, 6, ...).

İndi göstərək ki, (40.6) Laqranj (hərəkət) tənlikləri elektromaqnit sahəsi üçün 2-ci növ Maksvell tənlikləridir. Bunun üçün elektromaqnit sahəsi və yüklü zərrəciklər sisteminin Laqranj funksiyasını açıq şəkildə yazaq:

$$\mathcal{L}=-\eta c^2\sqrt{1-\beta^2}-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}^2+\frac{1}{c}j_\alpha A_\alpha \quad (40.7)$$

Burada təkrar olunan indeksləri μ və ν-dən fərqli götürmüşük. Laqranj funksiyasından A_μ və $A_{\mu,\nu}$-yə görə törəməni hesablayanda biz $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} = \delta_{\alpha\mu}$ və $\frac{\partial x_{\alpha,\beta}}{\partial x_{\mu,\nu}} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}$ eyniliklərі nəzərə alacağıq:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial}{\partial A_\mu}\left(\frac{1}{c} j_\alpha A_\alpha\right) = \frac{1}{c} j_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\mu} = \frac{1}{c} j_\alpha \delta_{\alpha\mu} = \frac{1}{c} j_\mu . \tag{40.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial A_{\mu,\nu}} F_{\alpha\beta}^2 = -\frac{2}{16\pi} F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\mu,\nu}} =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial A_{\mu,\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} A_\alpha\right) = -\frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial A_{\mu,\nu}}(A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta}(\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}) = -\frac{1}{8\pi}(F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu}. \tag{40.9}$$

Biz $F_{\alpha\beta}^2$-dan $A_{\mu,\nu}$-yə görə törəməni hesablayanda, əvvəlcə $F_{\alpha\beta}^2$-ın öz arqumentinə (yəni $F_{\alpha\beta}$-ya) görə törəməsini alırıq və sonra bu arqumentin $A_{\mu,\nu}$-yə görə törəməsini hesablayırıq. Hər yerdə $\delta_{\beta\mu}$ simvolunun xassəsindən, yəni $A_\beta\delta_{\beta\mu}=A_\mu$ və s. istifadə etmişik, təkrar olunan indekslər üzrə cəm aparmışıq. Burada müxtəlif indeksli kəmiyyətlərə görə aparılan törəmələrə qəsdən geniş yer verdik ki, gələcəkdə belə kəmiyyətləri hesablaya bilək.

Bu törəmələri (40.6) düsturunda yerinə yazaraq

$$\frac{1}{c} j_\mu - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\nu} = 0 \text{ və ya } \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \tag{40.10}$$

tənliyini, yəni Maksvellin ikinci növ tənliyinin 4-ölçülü şəklini alırıq.

Bu üsulla biz istənilən sahə üçün Laqranj tənliklərini ala bilərik.

§41. Elektromaqnit sahəsi üçün enerji və impulsun saxlanması qanunu. Sahənin enerji-impuls-gərilmə tenzoru

Qeyd edək ki, istənilən sistem üçün, o cümlədən sahə üçün saxlanma qanunları fəza və zamanın simmetriya xassələri ilə əlaqədardır. Bu qanunlar 1918-ci ildə xanım Emmi Nöter tərəfindən verilmiş teoremdən bir nəticə kimi alınır. Nöter teoremindən belə məlum olur ki, elektrik yükünün saxlanmasını ifadə edən 4-ölçülü $\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0$ kəsilməzlik tənliyinə oxşar olaraq, sahə üçün saxlanma qanunları sahənin uyğun vektor və tenzorlarının 4-ölçülü divergensiyasının sıfıra bərabər olması ilə ifadə olunur.

Biz burada Nöter teoreminin yalnız adını çəkirik, lakin ondan istifadə etməyəcəyik. Saxlanma qanunlarını isə dolayı yolla alacağıq.

Fərz edək ki, elektromaqnit sahəsi qapalı sistem təşkil edir və onun Laqranj funksiyası sahənin potensialı və potensialın 4-ölçülü koordinatlara görə törəməsindən asılıdır: $\mathcal{L}(A_\alpha; A_{\alpha,\nu})$. Bilirik ki, qapalı sistemin Laqranj funksiyası 4-ölçülü koordinatdan aşkar asılı deyildir. İndi Laqranj funksiyasının x_μ-yə görə törəməsini hesablayaq:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\frac{\partial A_{\alpha,\nu}}{\partial x_\mu}$$

Bərabərliyin sol tərəfində $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}=\delta_{\mu y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}$ yazaq, sağ tərəfində isə hərəkət tənliyindən istifadə edərək $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\right)$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\delta_{\mu\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\right)\cdot A_{\alpha,\mu}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}A_{\alpha,\nu\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\right)\cdot A_{\alpha,\mu}+$$

$$+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_{\alpha,\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\cdot A_{\alpha,\mu}\right).$$

Tənliyin sol tərəfini sağ tərəfə keçirək və törəmələri birləşdirək:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}\cdot A_{\alpha,\mu}-\delta_{\mu\nu}\mathcal{L}\right\}=0.$$

Böyük mötərizənin içərisi

$$T_{\mu\nu}=A_{\alpha,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}-\delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{41.1}$$

iki ranqlı 4-ölçülü tenzordur və bu tenzor

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{41.2}$$

tənliyini ödəyir. Bu tənlik $T_{\mu\nu}$ tenzorunun diferensial şəkildə saxlanması qanunudur. Biz yuxarıda $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} = A_{\alpha,\mu}, \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \equiv A_{\alpha,\mu\nu} \equiv A_{\alpha,\nu\mu}$ qısa yazılışından istifadə etmişik. $T_{\mu\nu}$-nün (41.1) ifadəsində təkrar olunan α indeksi üzrə cəmləmə aparılır (α=1, 2, 3, 4). $T_{\mu\nu}$ tenzorunun mənasını aydınlaşdırmaq üçün $\mu=\nu=4$ yazaq və $x_4=ict$ olduğunu nəzərə alaq:

$$T_{44} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_4} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_4}\right)} - \mathcal{L} = \dot{A}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} - \mathcal{L}. \tag{41.3}$$

Burada $\dot{A}_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}$-dir, $\mathcal{L}$ isə sahənin Laqranj funksiyasının həcmi sıxlığıdır. Müqayisə üçün mexanikada zərrəciklər sisteminin enerji düsturunu yazaq:

$$\varepsilon^{zər.} = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{41.4}$$

Burada N – zərrəciklərin sayı, $\dot{q}_i$ – i-ci zərrəciyin ümumiləşmiş koordinatının zamana görə törəməsi, L – mexaniki sistemin Laqranj funksiyasıdır. Müqayisədən alınır ki, T_{44} elektromaqnit sahəsi enerjisinin həcmi sıxlığıdır. Onda $\varepsilon = \int_V T_{44} dV$ elektromaqnit sahəsinin tam enerjisi olacaqdır. Relyativistik mexanikadan məlumdur ki, $P_4^{zər.} = \frac{i}{c}\varepsilon^{zər.}$ şərti ödənir. Elektromaqnit sahəsinin 4-ölçülü impulsuna G_μ desək, onda analoji olaraq $G_4 = \frac{i}{c}\varepsilon = \frac{i}{c}\int_V T_{44} dV$ olar. Bunu ümumiləşdirərək

$$G_\mu = \frac{i}{c}\int_V T_{\mu 4} dV \tag{41.5}$$

yaza bilərik. G_μ elektromaqnit sahəsinin 4-ölçülü impulsudur və özü də saxlanan kəmiyyətdir (zamandan asılı deyildir). (41.5) ifadəsini ümumi halda aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$G_\mu = \frac{i}{c}\int_\sigma T_{\mu\nu}d\sigma_\nu = \text{const} \qquad (41.6)$$

Burada σ fəzaya oxşar hipersəthdir, $d\sigma_\nu$ isə onun səth elementi vektorudur. Beləliklə, elektromaqnit sahəsinin enerji və impulsunun saxlanması qanununu aldıq. Biz (41.2) tənliyini 4-ölçülü həcm üzrə inteqrallayaraq 4-ölçülü Qauss teoremindən istifadə etsək, (41.6) bərabərliyinin dəqiq ödəndiyini göstərə bilərik. Biz bunu məsələ həllində edəcəyik.

$T_{\mu\nu}$ tenzoru elektromaqnit sahəsinin *enerji və impuls tenzoru* adlanır. Bu tenzor simmetrik deyildir, lakin onu simmetrik etmək olar. Bunun üçün qeyd edək ki, (41.2) tənliyindən $T_{\mu\nu}$ tenzoru birqiymətli təyin edilmir, o, axırıncı 2 indeksə görə antisimmetrik olan üç ranqlı $f_{\mu[\nu\alpha]}$ tenzorunun x_α-ya görə 4-ölçülü divergensiyası dəqiqliyi ilə təyin olunur. Doğrudan da aşağıdakı kimi yeni tenzor təşkil etsək

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f_{\mu[\nu\alpha]}, \qquad (41.7)$$

onun da (41.2) tənliyini ödədiyini görmək olar. Bunun üçün (41.7)-dən x_ν-yə görə törəmə alaq:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} f_{\mu[\nu\alpha]}$$

Bərabərliyin sağ tərəfində axırıncı hədd simmetrik tenzorun antisimmetrik tenzora hasili olduğundan eynilik kimi sıfırdır: $\frac{\partial^2}{\partial x_\nu x_\alpha} f_{\mu[\nu\alpha]} \equiv 0$.

Onda $T'_{\mu\nu}$ və $T_{\mu\nu}$, hər ikisi eyni bir tənliyi ödəyir:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \qquad (41.2')$$

Adətən $T_{\mu\nu}$ kanonik, $T'_{\mu\nu}$ isə metrik enerji-impuls tenzoru adlanır.

Sərbəst elektromaqnit sahəsi üçün, yəni $\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{4\pi}{c} j_\nu = 0$ ($j_\nu=0$) olan sahə üçün $f_{\mu[\nu\alpha]} = \frac{1}{4\pi} A_\mu F_{\nu\alpha}$ şəklində seçərək, $T'_{\mu\nu}$ tenzorunun simmetrik olduğunu göstərək:

$$T'_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{4\pi}A_\mu F_{\nu\alpha}\right)=A_{\alpha,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}-\delta_{\mu\nu}\mathcal{L}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{4\pi}A_\mu F_{\nu\alpha}\right)=A_{\alpha,\mu}\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\nu}+A_{\mu,\alpha}\frac{1}{4\pi}F_{\nu\alpha}-\delta_{\mu\nu}\mathcal{L}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(A_{\alpha,\mu}-A_{\mu,\alpha}\right)F_{\alpha\nu}-\delta_{\mu\nu}\mathcal{L}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{\sigma\rho}\right).$$

Biz burada (40.9) bərabərliyindən istifadə edərək $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\nu}}=\dfrac{1}{4\pi}F_{\alpha\nu}$, $F_{\nu\alpha}=-F_{\alpha\nu}$ və $\mathcal{L}=-\dfrac{1}{16\pi}F^2_{\sigma\rho}$ şərtlərindən istifadə etmişik. Beləliklə, metrik tenzorun simmetrik olduğunu göstərdik:

$$T'_{\mu\nu}\equiv T'_{\nu\mu}=\frac{1}{4\pi}(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{\sigma\rho}).\tag{41.8}$$

Biz gələcəkdə elektromaqnit sahəsinin enerji-impuls tenzorunun (41.8) simmetrik şəklindən istifadə edəcəyik və sadəlik üçün tenzorun üstündəki ştrix indeksini yazmayacağıq. İndi (41.8)-də $\mu=\nu=4$ yazaraq və təkrar olunan indekslər üzrə cəm apararaq elektromaqnit sahəsinin enerji sıxlığını hesablayaq:

$$T_{44}=\frac{1}{4\pi}(F_{4\alpha}F_{\alpha 4}+\frac{1}{4}F^2_{\sigma\rho})=\frac{1}{4\pi}(\vec{E}^2+\frac{1}{4}\cdot 2(\vec{H}^2-\vec{E}^2))=$$

$$=\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{H}^2)=w\tag{41.9}$$

(41.8) ifadəsindən bilavasitə görünür ki, $T_{\mu\nu}$ tenzorunun diaqonal elementlərinin cəmi, yəni tenzorun izi (şpuru) sıfıra bərabərdir:

$$T_{\mu\mu}=\frac{1}{4\pi}(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\mu}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\mu}F^2_{\sigma\rho})=\frac{1}{4\pi}(-F^2_{\mu\alpha}+F^2_{\sigma\rho})=0\,.$$

Bunu qısa

$$T_{\mu\mu}=\mathrm{Sp}T=0\tag{41.10}$$

şəklində yazırlar. Elektromaqnit sahəsi impulsunun (41.5) ifadəsindən istifadə edərək, sahənin 4-ölçülü impuls sıxlığı üçün

$$g_\mu=\frac{i}{c}T_{\mu 4},\mu=1,2,3,4\tag{41.11}$$

düsturunu alırıq. Onda $g_k = \frac{i}{c} T_{k4}, k = 1,2,3$ sahənin 3-ölçülü impuls sıxlığı olacaqdır. İndi (41.2') tənliyini 3-ölçülü sonsuz fəza üzrə inteqrallayaraq, sistemin qapalı olduğunu nəzərə alaq və 3-ölçülü Qauss teoremini tətbiq edək:

$$0 = \int_{V_\infty} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} dV = \frac{1}{ic} \int_{V_\infty} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} dV + \int_{V_\infty} \frac{\partial T_{\mu k}}{\partial x_k} dV =$$

$$= \frac{1}{ic} \int_{V_\infty} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} dv + \oint_{S_\infty} T_{\mu k} dS_k = \frac{1}{ic} \int_{V_\infty} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} dV.$$

Biz sonsuzluqda sahənin sıfır olduğunu, yəni $T_{\mu k}(\infty)=0$ şərtini nəzərə almışıq. Yuxarıdakı ifadə qapalı elektromaqnit sahəsinin 4-ölçülü impulsunun saxlanması qanununu ifadə edir:

$$\frac{d}{dt} \frac{i}{c} \int_{V_\infty} T_{\mu 4} dV = \frac{d}{dt} G_\mu = 0 \text{ və ya } G_\mu = \frac{i}{c} \int_{V_\infty} T_{\mu 4} dV = \text{const}. \quad (41.12)$$

Elektromaqnit sahəsinin digər kəmiyyətlərini almaq üçün (41.2') tənliyini iki tənlik şəklində yazaq:

$$\frac{\partial T_{4\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \frac{\partial T_{k\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (41.2'')$$

Birinci tənliyi V həcmi üzrə inteqrallayaq və Qauss termini tətbiq edək:

$$0 = \int_V \frac{\partial T_{4\nu}}{\partial x_\nu} dV = \int_V \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} dV + \int_V \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} dV$$

və ya

$$0 = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \oint_V T_{44} dV + \oint_S T_{4k} ds_k.$$

Sonuncu tənliyi yenidən yazaq:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V T_{44} dV = -ic \oint_S T_{4k} dS_k. \quad (41.13)$$

Bu, yüklər olmadığı halda elektromaqnit sahəsinin v həcmindəki enerjisinin vahid zamanda dəyişməsi qanunudur. Əvvəlki bəhslərdən bilirik ki, enerjinin bu dəyişməsi vahid zamanda V həcmini əhatə edən S səthindən keçən enerji selidir, yəni Umov-Poyntinq vektorunun selidir. Bunu riyazi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$-ic\oint_s T_{4k}dS_k = -\oint_s \vec{J}d\vec{s} \equiv -\oint_s J_k dS_k .$$

Buradan Umov-Poyntinq vektorunun enerji-impuls tenzoru ilə əlaqəsini tapırıq:

$$J_k = icT_{4k} \equiv icT_{k4}. \qquad (41.14)$$

İndi (41.2") ifadəsində ikinci tənliyi sonlu V həcmi üzrə inteqrallayaq və Qauss teoremindən istifadə edək:

$$0 = \int_V \frac{\partial T_{k\nu}}{\partial x_\nu} dV = \int_V \frac{\partial T_{k4}}{\partial x_4} dV + \int_V \frac{\partial T_{k\ell}}{\partial x_\ell} dV$$

və ya

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int_V T_{k4}dV = \oint_S T_{k\ell}ds_\ell = -\oint_S (-T_{k\ell})ds_\ell .$$

Axırıncı tənliyi yenidən yazaq:

$$\frac{\partial}{\partial t}G_k = -\oint_S (-T_{k\ell})ds_\ell . \qquad (41.15)$$

Tənliyin sol tərəfi V həcmində sahənin 3-ölçülü impulsunun vahid zamanda dəyişməsidir. Onda tənliyin sağ tərəfi V-ni əhatə edən S səthindən vahid zamanda keçən impuls seli olmalıdır. Beləliklə, «$-T_{kl}$» elektromaqnit sahəsinin impuls selinin sıxlığıdır, yəni x_l oxuna perpendikulyar olan vahid səthdən vahid zamanda keçən impulsun k komponentidir. Beləliklə, enerji seli vektordur, özlüyündə vektor olan impulsun seli isə tenzordur. İmpuls selini xarakterizə edən T_{kl} tenzoru Maskvelin *gərilmə tenzoru* adlanır. Enerji-impuls tenzorunun fəza komponentləri olan T_{kl} gərilmə tenzorunu adətən aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$T_{kl} = \frac{1}{4\pi}\left\{E_k E_\ell + H_k H_\ell - \frac{1}{2}\delta_{k\ell}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\right\}; \; \ell, k = 1, 2, 3 . \qquad (41.16)$$

İndi sahənin 3-ölçülü impuls sıxlığı ilə Umov-Poyntinq vektoru arasındakı əlaqəni yazaq:

$$g_k = \frac{i}{c}T_{k4} = \frac{J_k}{c^2} \text{ və ya } \vec{g} = \frac{\vec{J}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}[\vec{E}\vec{H}] . \qquad (41.17)$$

Enerji-impuls tenzorunun komponentlərinin elektromaqnit sahəsinin fiziki parametrləri ilə əlaqəsini yenidən yazaq:

$$T_{44}=w,\quad T_{k4}=-icg_k,\quad T_{4k}=-\frac{i}{c}J_k,\quad T_{k\ell}-\text{gərilmə tenzoru};\ k,\ \ell=1,2,3.$$

Son ifadələri matrisa şəklində yazsaq, $T_{\mu\nu}$ tenzorunun komponentlərinin mənası daha aşkar görünər:

$$(T_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -\frac{i}{c}J_1 & -\frac{i}{c}J_2 & -\frac{i}{c}J_3 & w \end{pmatrix} \tag{41.18}$$

Qeyd edək ki, yuxarıda elektromaqnit sahəsi üçün aldığımız bütün ifadələrə uyğun münasibətləri istənilən sahə üçün də ala bilərik. Bunun üçün elektromaqnit sahəsinin ümumiləşmiş koordinatlarını, yəni sahə potensiallarını digər sahənin ümumiləşmiş koordinatları, yəni sahə funksiyaları ilə əvəz etmək lazımdır:

$$A_\alpha \to \psi_\beta,\ A_{\alpha,\nu} \to \psi_{\beta,\nu}.$$

Sonra digər sahənin Laqranj funksiyasını qurmaq ($L(\psi_\beta;\ \psi_{\beta,y})$) və onun sahə funksiyalarına görə törəmələrini, variasiyasını və s. uyğun qayda üzrə hesablamaq lazımdır. Nəzərə almaq lazımdır ki, elektromaqnit sahəsinin potensialları 4-ölçülü vektor olduğu halda, digər sahənin funksiyaları istənilən komponentli ola bilər, yəni ψ_β əvəzində $\psi_a(x)$, $a=1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ götürə bilərik.

§42. Elektromaqnit sahəsində yükün hərəkət tənliyinin Laqranj forması

Biz əvvəlki §-~~larda yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində 4-ölçülü hərəkət qanununu almışıq~~. İndi bu qanunu Laqranj tənlikləri vasitəsilə alacağıq və alınmış nəticələrdən gələcək bəhslərdə istifadə edəcəyik. Elektromaqnit sahəsi və yüklər sistemi üçün §-38-də verilmiş və ya (40.7) düsturu ilə ifadə olunan Laqranj funksiyasından istifadə edəcəyik:

$$\mathcal{L}=-\eta c^2\sqrt{1-\beta^2}-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}^2+\frac{1}{c}j_\alpha A_\alpha. \tag{40.7}$$

İndi fərz olunur ki, sahə məlumdur, lakin sahəni yaradan zərrəciklərin hərəkət tənliyi məlum deyildir. Baxacağımız variasiya məsələsində sahənin variasiyası sıfıra bərabər olacaqdır. Ona görə sahəni xarakterizə edən həddi nəzərə almayaraq, zərrəciklər üçün Laqranj funksiyasını aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\mathcal{L}' = -\eta c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{1}{c} j_\alpha A_\alpha . \qquad (42.1)$$

Biz zərrəciklərin koordinatları və surətlərinin məxsusi zamandan və ya intervaldan $\left(ds = c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt = c dt'_{\text{məx.}} \right)$ asılılığını nəzərə alaraq, zamana görə inteqrallanmanı məxsusi zamana və ya intervala görə inteqrallanmaya gətirəcəyik. Ona görə (42.1)-in şəklini bir az dəyişək:

$$c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{c^2 - V^2} = \frac{1}{dt}\sqrt{-dx_\mu^2} = \frac{ds}{dt}\sqrt{-\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)^2} = \frac{ds}{dt}\sqrt{-u_\mu^2},$$

burada $dx_\mu^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2, u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ – 4-ölçülü sürət, ds – diferensial interval; $j_\alpha = \rho\frac{dx_\alpha}{dt} = \rho\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = \rho u_\alpha \frac{ds}{dt}$ – 4-ölçülü cərəyan sıxlığıdır. Bunları yuxarıda nəzərə alaq və cəmləmə indeksi α əvəzinə μ götürək.

$$\mathcal{L}' = \left[-\eta c \sqrt{-u_\mu^2} + \frac{1}{c}\rho u_\mu A_\mu \right] \frac{ds}{dt} \equiv \mathcal{L}^z \frac{ds}{dt};$$

$$\mathcal{L}^z = -\eta c \sqrt{-u_\mu^2} + \frac{1}{c}\rho u_\mu A_\mu . \qquad (42.3)$$

Laqranj funksiyasını 4-ölçülü həcm üzrə inteqrallayaraq və ən kiçik təsir prinsipini tətbiq edək:

$$\delta S' = \delta \int\limits_{R(3+1)} \mathcal{L}' d^4x = 0 . \qquad (42.4)$$

Baxdığımız variasiya məsələsində A_μ sahəsi sabit qalır ($\delta A_\mu = 0$), lakin materiyanın (maddənin) dünyəvi xətləri dəyişir. Biz materiyanın Δv həcminə malik kiçik elementinin hərəkətini izləyək və onun dünyəvi xətlərinin yaratdığı nazik boruya nəzər salaq. (42.4)-də 4-ölçülü $R_{(3+1)}$ həcmini bu nazik borunun bir hissəsi kimi götürək və yuxarıdakı variasiyanı hesablayaq:

$$\delta S' = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\int(d\bar{r})\mathcal{L}^z\frac{ds}{dt} = \delta\int(d\bar{r})\int_{s_1}^{s_2}\mathcal{L}^z ds =$$

$$= \int(d\bar{r})\int_{s_1}^{s_2} ds\delta\mathcal{L}^z(x_\mu, u_\mu) = \int(d\bar{r})\int_{s_1}^{s_2} ds\left\{\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu}\delta\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right)\right\} =$$

$$= \int(d\bar{r})\int_{s_1}^{s_2} ds\left\{\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu}\frac{d}{ds}\delta x_\mu\right\}.$$

Biz zaman üzrə inteqraldan məxsusi zaman (daha doğrusu, interval (s)) üzrə inteqrala keçdik, forma variasiyası ilə inteqralın yerini dəyişdik, zərrəciklərin $\mathcal{L}^z(x_\mu,u_\mu)$ Laqranj funksiyasının zərrəciyin 4-ölçülü x_μ koordinatı və u_μ sürətinə görə variasiyasını hesabladıq və variasiya ilə törəmənin yerini dəyişdik. Son ifadəni hissə-hissə inteqrallayaraq və $\delta x_\mu(s_1)=\delta\, x_\mu(s_2)=0$ və $\delta\, x_\mu(s)\neq 0$ $(s_1<s<s_2)$ ixtiyari funksiya olduğunu nəzərə alaq:

$$0 = \delta S' = \int(d\bar{r})\int_{s_1}^{s_2} ds\left\{\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu}\delta x_\mu\right) - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu}\right)\delta x_\mu\right\} =$$

$$= \int(d\bar{r})\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu}\delta x_\mu\Big|_{s_1}^{s_2} + \int(d\bar{r})\int_{s_1}^{s_2} ds\left\{\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial x_\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu}\right\}\delta x_\mu.$$

Burada birinci inteqral eynilik kimi sıfırdır və ən kiçik təsir prinsipinə görə ikinci inteqralın sıfıra bərabər olmasından və inteqral altında $\delta x_\mu(S)$ funksiyasının ixtiyariliyindən çıxır ki, inteqral altındakı böyük mötərizə sıfır olmalıdır:

$$\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial x_\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial u_\mu} = 0. \qquad (42.5)$$

Zərrəciklər üçün yazılmış bu Laqranj tənliyindən istifadə edərək yüklü zərrəciklərin elektromaqnit sahəsində hərəkət tənliyini alaq. Bunun üçün zərrəciklərin $\mathcal{L}^z = -\eta c\sqrt{-u_\mu^2} + \frac{1}{c}\rho u_\mu A_\mu$ Laqranj funksiyası sıxlığının törəmələrini hesablayaq:

$$\frac{\partial \mathscr{L}^z}{\partial x_\mu}=\frac{1}{c}\rho u_\nu\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu};\quad \frac{\partial \mathscr{L}^z}{\partial u_\mu}=\frac{\eta c u_\mu}{\sqrt{-u_\mu^2}}+\frac{1}{c}\rho A_\mu;$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathscr{L}^z}{\partial u_\mu}=\frac{\eta c\dot{u}_\mu}{\sqrt{-u_\mu^2}}+\frac{\eta c u_\mu(\dot{u}_\nu u_\nu)}{(-u_\nu^2)^{3/2}}+\frac{1}{c}\rho\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{ds}=\frac{\eta c\dot{u}_\mu}{\sqrt{-u_\mu^2}}+\frac{1}{c}\rho\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}u_\nu$$

Burada $\dot{u}_\mu=\frac{du_\mu}{ds},(\dot{u}_\nu u_\nu)=0$, ehtiyac olduqda $u_\mu A_\mu=u_\nu A_\nu$ yazmışıq. Laqranj funksiyasında və onun törəmələrində $\sqrt{-u_\mu^2}$ vuruğu iştirak edir. Biz son nəticələrə qədər onu dəyişən kəmiyyət hesab edəcəyik və yalnız son nəticədə $u_\mu^2=-1$ yazacağıq. Aldığımız törəmələri (42.5)-də nəzərə alaq:

$$\frac{1}{c}\rho u_\nu\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\eta c\dot{u}_\mu}{\sqrt{-u_\mu^2}}-\frac{1}{c}\rho\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}u_\nu=0$$

və ya

$$\frac{\eta c\dot{u}_\mu}{\sqrt{-u_\mu^2}}=\frac{1}{c}\rho\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)u_\nu.$$

Son tənliyi qısa şəkildə yazsaq, elektromaqnit sahəsində yüklü zərrəciyin impuls sıxlığı ilə ona təsir edən qüvvənin sıxlığı arasında əlaqəni tapmış oluruq:

$$\frac{\eta c du_\mu}{ds}=\frac{1}{c}\rho F_{\mu\nu}u_\nu. \qquad (42.6)$$

Bu çox mühüm və dəqiq düsturdur və onun geniş tətbiq sahəsi mövcuddur. Qeyd edək ki, burada A_μ ümumi sahədir. O, ümumiyyətlə yüklü zərrəciklərin yaratdığı sahə ilə xarici sahənin cəminə bərabərdir: $A_\mu=A_\mu^{zər.}+A_\mu^{xar.}$. Eyni sözləri $F_{\mu\nu}$ üçün demək lazımdır: $F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^{zər.}+F_{\mu\nu}^{xar.}$. Biz əksər məsələlərdə xarici sahəni nəzərə almayacağıq.

(42.6) düsturunda η və ρ zərrəciklərin kütləsinin və yükünün sıxlığıdır. Nöqtəvi yüklər üçün onlar aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur.

$$\eta(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}m_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)),\rho(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t)) \qquad (42.7)$$

Burada N – zərrəciklərin sayıdır. Bu ifadələri (42.6) düsturunda yerinə yazaraq 3-ölçülü fəza üzrə inteqrallanma aparsaq, bir zərrəcik üçün aşağıdakı 4-ölçülü hərəkət tənliyini alarıq:

$$mc\frac{du_\mu}{ds}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu. \qquad (42.8)$$

Biz bu düsturu əvvəlki §-larda başqa üsulla almışdıq (bax: (31.4)). Düsturun sol tərəfi zərrəciyin 4-ölçülü $p_\mu=mcu_\mu$ impulsunun vahid məxsusi zamanda (daha doğrusu, vahid intervalda) dəyişməsidir, sağ tərəfi isə zərrəciyə elektromaqnit sahəsində təsir edən 4-ölçülü qüvvədir (f_μ).

Sonda qeyd edək ki, (42.5) Laqranj tənliyini aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial x_\mu}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}^z}{\partial\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial\tau}\right)}=0. \qquad (42.5')$$

Burada τ – məxsusi zamandır. Doğrudan da (42.5) düsturunda $ds=cdt'_{məx.}=cd\tau$ yazsaq və $\partial u_\mu=\partial\frac{dx_\mu}{ds}=\partial\frac{dx_\mu}{cd\tau}=\frac{1}{c}\partial\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)$ nəzərə alsaq, surətdə və məxrəcdə «c»-lər ixtisar olunar və yuxarıdakı tənlik alınar.

§43. Zərrəciklər sistemi üçün enerji-impuls tenzoru və elektromaqnit sahəsi və zərrəciklərdən ibarət sistem üçün enerjinin saxlanması qanunu

Fərz edək ki, qarşılıqlı təsirdə olmayan zərrəciklər sistemi verilmişdir. Bu sistemin enerji-impuls ~~tenzorunu~~ elektromaqnit sahəsinin enerji-impuls ~~tenzorunun~~ xassələrindən istifadə edərək qurmaq olar. Bu tenzoru $T^{zər.}_{\mu\nu}$ ilə işarə edək. Elektromaqnit sahəsinin impuls sıxlığı sahənin enerji-impuls tenzoru ilə $g_\mu=\frac{i}{c}T_{\mu4}$ şəklində əlaqədardır. Buna uyğun olaraq, zərrəciklər sisteminin impuls sıxlığı $\eta cu_\mu=\frac{i}{c}T^{zər.}_{\mu4}$ olacaqdır. Buradan $T^{zər.}_{\mu4}=\frac{1}{i}\eta c^2u_\mu$ alınır. Yük sıxlığı 4-ölçülü cərəyanın 4-cü komponenti ilə təyin olunur: $j_\mu=\rho\frac{dx_\mu}{dt}=\{\vec{j},ic\rho\}$ və $\rho=\frac{1}{ic}j_4=\frac{1}{ic}\rho\frac{dx_4}{dt}$. Yük kimi kütlə də relyativistik invariantdır və onunda sıxlığı 4-ölçülü kütlə «cərəyanı» sıxlığı vektorunun 4-cü komponenti ilə təyin olunmalıdır: $j_\nu^{(kut)} = \eta \frac{dx_\nu}{dt} = \left\{ \vec{j}^{(kut)}, ic\eta \right\}$ və $\eta = \frac{1}{ic} j_4^{(kut)} = \frac{1}{ic} \eta \frac{dx_4}{dt}$. Bunu yuxarıdakı $T_{\mu 4}^{z\partial r.} = \frac{1}{i} \eta c^2 u_\mu$-də yerinə yazaq.

$$T_{\mu\nu}^{z\partial r.} = \frac{1}{i^2 c} \eta \frac{dx_\nu}{dt} c^2 u_\mu = -\eta c u_\mu \frac{dx_\nu}{ds} \frac{ds}{dt} = -\eta c u_\mu u_\nu \frac{ds}{dt}$$

ifadəsini alırıq. Onda qarşılıqlı təsirdə olmayan zərrəciklər sistemi üçün enerji-impuls tenzoru

$$T_{\mu\nu}^{z\partial r.} = -\eta c u_\mu \frac{dx_\nu}{dt} \equiv -\eta c u_\mu u_\nu \frac{ds}{dt} \tag{43.1}$$

şəklində yazılır. Bu tenzor simmetrikdir. Onda bizim baxdığımız elektromaqnit sahəsi və zərrəciklərdən ibarət sistemin enerji və impuls tenzoru iki tenzorun cəmindən ibarət olacaqdır:

$$\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{z\partial r.} \tag{43.2}$$

Burada birinci hədd (41.8) düsturu ilə verilən elektromaqnit sahəsinin simmetrik enerji və impuls tenzorudur.

İndi göstərək ki, bu iki tenzorun cəmi saxlanır, yəni:

$$\frac{\partial \theta_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{43.3}$$

tənliyi ödənir. Əvvəlki §-larda göstərmişdik ki, yüklü zərrəciklər olmadığı halda, yəni sərbəst elektromaqnit sahəsi halında $T_{\mu\nu}$ tenzoru saxlanılırdı. Sahənin mənbələri (yüklər) iştirak etdiyi halda $T_{\mu\nu}$ tenzoru ayrılıqda saxlanmayacaqdır, lakin iki tenzorun cəmi saxlanacaqdır. Bunu isbat edək. Biz sahədə yükə təsir edən 4-ölçülü qüvvə anlayışından istifadə edirik:

$$F_{\mu\alpha} j_\alpha \frac{4\pi}{c} = F_{\mu\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}) - \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} F_{\alpha\nu}. \tag{43.4}$$

Burada 4-ölçülü şəkildə Maskvelin II növ tənliklərindən istifadə etdik. İndi ikinci toplananda cəmləmə indekslərində $\alpha \leftrightarrow \nu$ əvəzləməsini aparaq.

$$\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}F_{\alpha\nu}=\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}F_{\nu\alpha}\equiv\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}F_{\alpha\nu}.$$

Son həddə ona bərabər olan birinci həddi əlavə edək və alınmış cəmi 2-yə bölək. Sonra mötərizədəki iki həddin cəminə Maskvelin 4-ölçülü I növ tənliyini tətbiq edək:

$$\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}F_{\alpha\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right)F_{\alpha\nu}=-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu}F_{\alpha\nu}=$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(F_{\alpha\nu}F_{\alpha\nu})=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}F^2_{\alpha\beta}.$$

Bu həddi (43.4)-də nəzərə alaq:

$$F_{\mu\alpha}j_\alpha\frac{4\pi}{c}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu})+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}F^2_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{\alpha\beta}\right\}.$$

Burada $\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\delta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ şərtindən istifadə etmişik. 4-ölçülü qüvvədə 4π vuruğu artıqdır. Ona görə bərabərliyin hər tərəfini 4π-yə bölərək son nəticəni alırıq:

$$f'_\mu=\frac{1}{c}F_{\mu\alpha}j_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{1}{4\pi}\left\{F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{\alpha\beta}\right\}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}T_{\mu\nu}. \qquad (43.5)$$

$T_{\mu\nu}$ bizim əvvəlki §-larda aldığımız sahənin enerji-impuls tenzorudur. İndi $\frac{\partial}{\partial x_\nu}T^{zər.}_{\mu\nu}$ ifadəsini hesablayaq və onun (43.5)-dəki törəmədən yalnız işarə ilə fərqləndiyini göstərək:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}T^{zər.}_{\mu\nu}=-cu_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\eta\frac{dx_\nu}{dt}\right)-\eta c\frac{dx_\nu}{dt}\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Müasir relyativistik fizikada zərrəciklərin kütləsi relyavistik invariantdır, lakin saxlanmır. Yəni reaksiya nəticəsində zərrəciklər parçalanır və ya digər zərrəciklərə çevrilir və bu prosesdə kütlə saxlanmır. Əgər zərrəciklər qarşılıqlı təsirdə deyildirsə, onlarda çevrilmə prosesləri getmir və kütlə saxlanır. Bu o, deməkdir ki, kütlə üçün kəsilməzlik tənliyi ödənir, yəni $\frac{\partial}{\partial x_\nu}j^{(kut)}_\nu\equiv\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\eta\frac{dx_\nu}{dt}\right)=0$. Deməli yuxarıdakı bərabərlikdə birinci hədd sıfıra bərabərdir. Bərabərlikdəki ikinci həddin şəklini dəyişmək üçün §42-dəki (42.6) hərəkət tənliyindən və 4-ölçülü cərəyan sıxlığının $j_\alpha = \rho\frac{dx_\alpha}{dt} = \rho u_\alpha \frac{ds}{dt}$ ifadəsindən istifadə edəcəyik:

$$\frac{\partial}{\partial x_y} T_{\mu\nu}^{z\partial r.} = -\eta c \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{dt} = -\eta c \frac{du_\mu}{dt} = -\eta c \frac{du_\mu}{ds}\frac{ds}{dt} =$$

$$= -\frac{\rho}{c} F_{\mu\alpha} u_\alpha \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{c} F_{\mu\alpha} j_\alpha \tag{43.6}$$

(43.5) və (43.6) düsturlarından

$$\frac{\partial \theta_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{z\partial r.}) = 0 \tag{43.7}$$

tənliyi alınır. Beləliklə, teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, burada istifadə etdiyimiz 4-ölçülü $f_\mu^1 = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu$ qüvvəsi Minkovski qüvvəsindən $\left(f_\mu = \frac{dp_\mu}{ds}\right)$ müəyyən vuruqla fərqlənir.

İndi sadə misal olaraq yekun sistemin enerjisini və impulsunu hesablayaq:

$$\theta_{44} = T_{44} + T_{44}^{z\partial r.} = w - \eta c u_4 \frac{dx_4}{dt} = w - \eta c \frac{i}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cdot ic =$$

$$= \frac{E^2 + \vec{H}^2}{8\pi} + \frac{\eta c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{43.8}$$

$$\frac{i}{c}\theta_{\mu 4} = \frac{i}{c} T_{\mu 4} + \frac{i}{c} T_{\mu 4}^{z\partial r.} = g_\mu - \frac{i}{c}\eta c u_\mu \frac{dx_4}{dt} =$$

$$= g_\mu - \frac{i}{c}\eta c u_\mu ic = g_\mu + \eta c u_\mu = g_\mu + \pi_\mu . \tag{43.9}$$

Beləliklə, tam sistemin enerji sıxlığı sahənin enerji sıxlığı ilə zərrəciklərin enerji sıxlığının cəminə bərabərdir. Eynilə tam sistemin 4-ölçülü impuls sıxlığı da sahənin 4-ölçülü impuls sıxlığı ilə zərrəciklərin impuls sıxlığının həndəsi cəminə bərabərdir. Biz zərrəciklərin impuls sıxlığını şərti olaraq $\pi_\mu = \eta c u_\mu$ ilə işarə etmişik.

İndi (42.6) tənliyindən istifadə edərək yüklü zərrəciklərin mexaniki impuls sıxlığının sahədə hərəkət tənliyini araşdıraq. Bu tənlikdə $\frac{du_\mu}{ds} = \frac{du_\mu}{dt}\frac{dt}{ds}$ yazaraq, tənliyin hər tərəfini $\frac{dt}{ds}$-ə bölək:

$$\eta c \frac{du_\mu}{dt} = \frac{1}{c}\rho F_{\mu\nu} u_\nu \frac{ds}{dt}$$

Burada $\rho u_\nu \frac{ds}{dt} = j_\nu$ olduğunu nəzərə alsaq və $\eta c u_\mu = \pi_\mu$ yazsaq, yüklü zərrəciyin mexaniki impuls sıxlığının 4-ölçülü hərəkət tənliyi belə olar:

$$\frac{d\pi_\mu}{dt} = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu \qquad (43.10)$$

Burada $\frac{1}{c} F_{\mu\nu} j_\nu = f'_\mu$ yüklü zərrəciyə elektromaqnit sahəsində təsir edən 4-ölçülü Lorens qüvvəsinin sıxlığıdır. Bu qüvvənin üç ölçülü şəklini hesablayaq. Əvvəlcə onun x komponentini hesablayaq:

$$f'_x = \frac{1}{c} F_{1\nu} j_\nu = \frac{1}{c}\{F_{12} j_2 + F_{13} j_3 + F_{14} j_4\} =$$

$$= \frac{1}{c}\{H_z j_y - H_y j_z + c\rho E_x\} = \frac{1}{c}\{c\rho E_x + [\vec{j}\vec{H}]_x\}.$$

Onda 3-ölçülü Lorens qüvvəsinin sıxlığı aşağıdakı şəklə malik olur:

$$\vec{f}' = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]. \qquad (43.11)$$

Zərrəciyin (43.10) hərəkət tənliyi aşağıdakı kimi 3-ölçülü şəkildə yazılır:

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]. \qquad (43.12)$$

Bu tənliyi V həcmi üzrə inteqrallayaraq, bu həcmdə yerləşən zərrəciklərin hərəkət tənliyini alırıq:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]\right) dV. \qquad (43.13)$$

Burada $\vec{p}=\sum_a \vec{p}_a$ V həcmində yerləşən zərrəciklərin impulslarının cəmidir. Biz fərz etsək ki, V həcmini əhatə edən S səthindən zərrəciklərin seli keçmir, onda ümumi $\theta_{\mu\nu}$ tenzorundan istifadə edərək (41.15) bərabərliyinin əvəzində aşağıdakı ümumi düsturu alarıq:

$$\frac{d}{dt}(\vec{G}+\vec{P})_k=\oint_S \theta_{k\ell} ds_\ell . \tag{43.14}$$

Burada (43. 13)-ü nəzərə alsaq, ümumi halda

$$\oint_S \theta_{k\ell} ds_\ell=\int_V \left(\frac{d\vec{g}}{dt}+\rho\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}]\right)_k dV . \tag{43.15}$$

düsturunu almış olarıq. Beləliklə, elektromaqnit sahəsinin gərilmə tenzorunun S səthindən keçən seli bu səthin daxilindəki V həcmində yüklərə təsir edən tam qüvvəni və sahənin impulsunun dəyişməsini təmin edir.

§44. Maksvell tənliklərinin kovariantlığı

Relyativistik fizikada invariant və kovariant anlayışlarına çox rast gəlirik. Bu anlayışlar bir-birinə yaxındır, lakin eyni anlayış deyildir. Əgər hər hansı kəmiyyət Lorens çevrilməsi zamanı dəyişmirsə, yəni bütün ətalət sistemlərində eyni bir qiymət alırsa, deyirlər ki, bu kəmiyyət Lorens-invariantdır və ya skalyardır. Məsələn, interval $ds=\sqrt{-dx_\mu^2}$, iki vektorun skalyar hasili $A_\mu B_\mu$, sahənin Larmor invariantları $F_{\mu\nu}^2=$ $=2(\vec{H}^2-\vec{E}^2)$, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}=-8i(\vec{E}\vec{H})$ və s. Lorens-invariantlardır. Qeyd edək ki, $\vec{H}^2-\vec{E}^2=\vec{H}'^2-\vec{E}'^2=\mathrm{in\,var}$ və burada Lorens çevrilməsi zamanı $\vec{H}$ da, $\vec{E}$ də çevrilir, lakin onların kvadratlarının fərqi bütün ətalət sistemlərində eyni bir qiymət alır. Eyni sözləri $(\vec{E}\vec{H})=(\vec{E}'\vec{H}')=\mathrm{in\,var}$ ifadəsində $\vec{E}$ və $\vec{H}$ haqqında demək olar. Lorens çevrilməsi zamanı $\vec{E}$ də, $\vec{H}$ da çevrilir (dəyişir) lakin onların $(\vec{E}\vec{H})$ hasili dəyişmir, sabit qalır. Kovariantlıq anlayışı bir az fərqli xarakter daşıyır. Məsələn, bir tənlik verilmişdirsə və Lorens çevrilməsi zamanı bu tənliyin sol tərəfi də, sağ tərəfi də çevrilirsə və ya dəyişirsə və bu dəyişmə zamanı bərabərlik pozulmursa, deyirlər ki, bu tənlik Lorens-kovariantdır. Bu o deməkdir ki, Lorens çevrilməsi zamanı tənliyin sol tərəfi nə qədər artıb-azalırsa, sağ tərəfi də o qədər artıb-azalır və ya tənliyin sağ və sol tərəfi eyni transformasiya xassəsinə malikdir. Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin birinci postulatında deyilir ki, fizikanın qanunları bütün ətalət sistemlərində özlərini eyni cür aparır, eyni şəklə malikdir. Bu o deməkdir ki, fiziki qanunları təsvir edən diferensial tənliklər Lorens çevrilməsi zamanı kovariant qalır. Bir kəmiyyət invariantdırsa, müəyyən mənada o kəmiyyət kovariantdır demək olar, lakin tərsini demək olmaz.

Maksvell tənliklərinin kovariantlığını göstərmək üçün onların 4-ölçülü şəklindən istifadə etmək daha əlverişlidir. Əvvəlcə ikinci növ Maksvell tənliklərindən istifadə edək. K ətalət sistemində bu tənliklər aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu . \tag{44.1}$$

Bu tənlikləri K' sistemində yazmaq üçün, buraya daxil olan kəmiyyətlərə Lorens çevrilməsini tətbiq etmək lazımdır:

$$F_{\mu\nu} = L'_{\mu\alpha} L'_{\nu\beta} F'_{\alpha\beta}, \frac{\partial}{\partial x_\nu} = L'_{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial x'_\rho}, j_\mu = L'_{\mu\eta} j'_\eta .$$

Bu çevrilmələri (44.1) düsturunda yerinə yazaq və Lorens çevrilməsi matrislərinin ortoqonallığı şərtindən ($L'_{\nu\rho} L'_{\nu\beta} = \delta_{\rho\beta}$ və s.) istifadə edək:

$$L'_{\nu\rho} L'_{\mu\alpha} L'_{\nu\beta} \frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial x'_\rho} = \frac{4\pi}{c} L'_{\mu\eta} j'_\eta ; \quad \delta_{\rho\beta} L'_{\mu\alpha} \frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial x'_\rho} = \frac{4\pi}{c} L'_{\mu\eta} j'_\eta ; \quad L'_{\mu\alpha} \frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial x'_\beta} = \frac{4\pi}{c} L'_{\mu\eta} j'_\eta .$$

Alınmış son tənliyin sol və sağ tərəfini $L'_{\mu\nu}$ matrisinə vuraq və μ üzrə cəm aparaq (təkrar olunan indeks üzrə cəm aparıldığı fərz edilir) və ortoqonallıq şərtlərindən (məs.: $L'_{\mu\nu} L'_{\mu\alpha} = \delta_{\nu\alpha}$; $L'_{\mu\nu} L'_{\mu\eta} = \delta_{\nu\eta}$) istifadə edək:

$$\delta_{\nu\alpha} \frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial x'_\beta} = \frac{4\pi}{c} \delta_{\nu\eta} j'_\eta \quad \text{və ya} \quad \frac{\partial F'_{\nu\beta}}{\partial x'_\beta} = \frac{4\pi}{c} j'_\nu . \tag{44.2}$$

(44.2) tənliyi K' sistemində yazılmış Maksvell tənlikləridir və bunlar K-da yazılmış (44.1) tənliklərinə tamamilə oxşardır. Qeyd edək ki, biz tənliyin sol və sağ tərəfində cəmləmə və sərbəst indeksləri uyğun olaraq istədiyimiz şəkildə seçə bilərik. Məsələn, (44.2)-də cəmləmə indeksi β əvəzində ν və sərbəst ν indeksi əvəzində μ götürə bilərik. Onda (44.2) tənliyi belə yazılar:

$$\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial x'_\nu}=\frac{4\pi}{c}j'_\mu \,. \qquad (44.2')$$

Bu elə (44.1) tənliyinin özüdür, lakin başqa sistemdə (K'-də) yazılmışdır. Burada $F'_{\mu\nu} \neq F_{\mu\nu}, j'_\mu \neq j_\mu$, lakin tənliyin sol və sağ tərəflərinin bir-birinə bərabər olması bütün ətalət sistemlərində ödənir. Kovariantlığı adətən belə izah edirlər: Maksvell tənliyinin sol tərəfi $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ vektorunun $F_{\mu\nu}$ tenzoruna «hasilidir» və ν üzrə cəmləmə aparılır. Son nəticədə sol tərəf μ indeksli bir vektora ekvivalent olur. Tənliyin sağ tərəfi isə μ indeksli j_μ vektorudur ($\frac{4\pi}{c}$ sabit vuruğu dəqiqliyi ilə). Lorens çevrilməsində tənliyin sol tərəfi də, sağ tərəfi də bir vektor kimi çevrilir, yəni tənliyin hər iki tərəfi eyni transformasiya (çevrilmə) xassəsinə malikdir. Bu xassəyə görə də tənlik kovariantdır.

Elektrodinamikanın qanunlarını 4-ölçülü şəkildə yazdıqda, onlar ya Lorens-skalyarları bir-birlə, ya 4-ölçülü vektorları bir-birlə, ya da eyni ranqlı 4-ölçülü tenzorları bir-birilə əlaqələndirir. Beləliklə, bir qanuna (və ya tənliyə) eyni ranqlı kəmiyyətlər daxil olur və bu kəmiyyətlərin transformasiya xassələri eyni olduğundan baxdığımız qanun (tənlik) Lorens-kovariant olur. Məsələn, Maksvellin birinci növ tənliklərində bir həddi sağ tərəfə keçirərək onu

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu}=-\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} \qquad (44.3)$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənliyin hər iki tərəfində 3-ranqlı tenzor durur. Bu tenzorların transformasiya xassələri eyni olduğundan tənlik relyativistik kovariantdır. Əlbəttə bu kovariantlığı biz tenzorların Lorens çevrilməsini icra etməklə və çevrilmə matrislərinin ortoqonallıq şərtindən istifadə etməklə bilavasitə ala bilərdik. İndi zərrəciyin sahədə 4-ölçülü hərəkət tənliyinə baxaq:

$$mc\frac{du_\mu}{ds}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u_\nu \,.$$

Bu tənliyin sol tərəfi 4-ölçülü vektordur. Tənliyin sağ tərəfində 2-ranqlı $F_{\mu\nu}$ tenzoru ilə u_ν vektorunun hasilinin ν indeksi üzrə cəmi (tenzorla vektorun burulması («svertka»)) yazılmışdır. Son nəticədə sağ tərəf də özünü vektor kimi aparacaqdır. Tənliyin hər iki tərəfi eyni transformasiya xassəsinə malikdir və ona görə də tənlik relyativistik kovariantdır. Əlbəttə bunu bilavasitə çevrilmə yolu ilə də göstərmək olardı, lakin biz bunu etməyəcəyik.

Sonda nəticə kimi deyə bilərik ki, Elektrodinamikanın bütün əsas tənlikləri relyativistik kovariantdır.

§45. Elektrik yükünün Lorens invariantlığının nəzəri isbatı

Müxtəlif təcrübi faktlara istinad edərək fiziklər bu qərara gəliblər ki, elektrik yükü relyativistik invariant kəmiyyətdir. Məsələn, elektronun yükü onun hərəkət edib-etməməsindən asılı olmayaraq bütün ətalət sistemlərində eyni bir qiymətə malikdir.

Belə məlum olur ki, bunu heç bir təcrübi fakta istinad etməyərək nəzəri sübut etmək olar. Bunun üçün biz §1-də təsvir edilən elektrik yükünün saxlanması qanunundan və ya kəsilməzlik tənliyindən istifadə edəcəyik:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},\vec{t})}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0. \qquad (1.4)$$

Burada ρ və $\vec{j} = \rho\vec{v}$ adi qayda ilə təyin edilmiş yükün və cərəyanın sıxlığıdır. Qəbul edək ki, yükün saxlanması qanunu, yəni kəsilməzlik tənliyi istənilən ətalət sistemində doğrudur. (1.4) düsturunun K sistemində yazıldığını fərz edərək, onu K' ətalət sistemində yazaq:

$$\frac{\partial\rho'(\vec{r}',\vec{t}')}{\partial t'} + \operatorname{div}'\vec{j}'(\vec{r}',t') = 0. \qquad (1.4')$$

Biz bu tənlikləri çıxardanda yüklərin invariantlığından istifadə etməmişik. K sistemində dörd ədəd kəmiyyəti şərti olaraq belə işarə edək:

$$s_\mu = \{\rho\vec{v},\, ic\rho\}. \qquad (45.1)$$

Bu dörd kəmiyyətin 4-ölçülü vektor olduğunu bilmirik, yəni K-dan K'-ə keçdikdə bu kəmiyyətin çevrilməsi qanunu bizə məlum deyildir. K' sistemində də uyğun dörd kəmiyyəti s'_μ ilə işarə etsək, kəsilməzlik tənliklərini şərti olaraq qısa şəkildə aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\frac{\partial s_\mu}{\partial x_\mu}=0, \frac{\partial s'_\mu}{\partial x'_\mu}=0. \qquad (45.2)$$

Bu şərti yazılışa hələlik 4-ölçülü divergensiya kimi baxmaq olmaz, çünki s_μ və s'_μ kəmiyyətlərinin 4-ölçülü vektor olması bizə məlum deyildir. s'_μ-in s_μ-dən asılılığını naməlum f_μ funksiyası ilə işarə edək:

$$s'_\mu = f_\mu(s_1, s_2, s_3, s_4). \qquad (45.3)$$

Kəsilməzlik tənliklərinə görə bu funksiya

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x'_\mu}=0 \qquad (45.4)$$

tənliyini ödəyir. Yuxarıdakı yazılışa görə f_μ kəmiyyəti s_ν-nün funksiyasıdır, s_ν isə x_ρ-lardan asılıdır və Lorens çevrilməsinə görə x_ρ-lar da x'_μ-dən asılıdır. Ona görə f_μ-yə x'_μ-nün mürəkkəb funksiyası kimi baxaraq (45.4)-ü geniş şəkildə yazaq:

$$0=\frac{\partial f_\mu}{\partial x'_\mu}=\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial S_\nu}\right)\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial x_\rho}\right)\left(\frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu}\right)=\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial S_\nu}\right)\left(\frac{\partial S_\nu}{\partial x_\rho}\right)L'_{\rho\mu}=\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial S_\nu}\right)S_{\nu,\rho}L_{\mu\rho}. \qquad (45.4')$$

Burada $s_{\nu,\rho}\equiv\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\rho}$, $L'_{\rho\mu}=L_{\mu\rho}$ – Lorens çevrilməsi matrisidir. Kəsilməzlik tənliyinə görə:

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial x_\nu}\equiv S_{\nu,\nu}=0. \qquad (45.5)$$

Bu tənliyi $\lambda(s)$ Laqranj əmsallarına vuraq və (45.4')-dən çıxaq:

$$\left[\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial S_\nu}\right)L_{\mu\rho}-\lambda(S)\delta_{\nu\rho}\right]S_{\nu,\rho}=0. \qquad (45.6)$$

Bu bərabərlik S_ν və $S_{\nu,\rho}$-nun istənilən variasiyalarında ödənməlidir. Bu tənlikdən $S_{\nu,\rho}$-ya görə törəmə (variasiya) alaq:

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial S_\nu}\right)L_{\mu\rho}=\lambda(s)\delta_{\nu\rho}. \qquad (45.7)$$

Bu bərabərliyi $L_{\alpha\rho}$ Lorens çevrilməsi matrisinə vurub onların

$$L_{\alpha\rho}L_{\mu\rho} = \delta_{\alpha\mu}$$

ortoqonallıq şərtindən istifadə etsək

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial S_\nu} = \lambda(s)L_{\alpha\nu} \tag{45.8}$$

alarıq.

(45.7)-dən S_α-ya görə törəmə alaq:

$$L_{\mu\rho}\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial S_\alpha \partial S_\nu} = \frac{\partial\lambda}{\partial S_\alpha}\delta_{\nu\rho}. \tag{45.9}$$

Bu tənliyin sol tərəfi α və ν indekslərinə görə simmetrik olduğundan sağ tərəf də bu indekslərə görə simmetrik olmalıdır:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial S_\alpha}\delta_{\nu\rho} = \frac{\partial\lambda}{\partial S_\nu}\delta_{\alpha\rho}. \tag{45.10}$$

Bu bərabərlikdə $\alpha=\rho\neq\nu$ yazaraq

$$\frac{\partial\lambda}{\partial S_\nu} = 0 \tag{45.11}$$

alırıq. Beləliklə, λ kəmiyyəti S_ν-dən asılı olmur. (45.8)-i S_ν üzrə inteqrallayaraq

$$f_\alpha = \lambda L_{\alpha\nu}S_\nu + C \tag{45.12}$$

alırıq. Burada C inteqrallanma sabitidir. Əgər elektrik yükünün sıxlığı K-da sıfırdırsa (yəni, $s_\nu=0$) o, K'-də də sıfır olmalıdır (yəni, $s'_\alpha = f_\alpha = 0$). Deməli C=0 olur, və (45.12) ifadəsi aşağıdakı şəkildə yazılır.

$$f_\alpha = \lambda L_{\alpha\nu}S_\nu \text{ və ya } s'_\alpha = \lambda L_{\alpha\nu}s_\nu. \tag{45.13}$$

İndi s'_α -nı kvadrata yüksəldək və ortoqonallıq şərtini nəzərə alaq:

$$s'_\alpha s'_\alpha = \lambda^2 L_{\alpha\nu}s_\nu L_{\alpha\rho}S_\rho = \lambda^2\delta_{\nu\rho}s_\nu s_\rho = \lambda^2 s_\nu s_\nu. \tag{45.14}$$

Əgər biz $x \to -x$, $z \to -z$, $x' \to -x'$, $z' \to -z'$ inikasını etsək, (45.14)-də s'^2_α və s^2_ν dəyişməyəcək, lakin K və K' sistemləri öz rollarını dəyişəcəkdir (bax: intervalın invariantlığı). Onda (45.14)-ü aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\lambda^2 S'_\alpha S'_\alpha = S_\nu S_\nu . \qquad (45.15)$$

Bu iki tənlikdən $\lambda^4=1$ və $\lambda^2=\pm1$ alınır. Söhbət həqiqi kəmiyyətdən getdiyinə görə $\lambda^2=1$ olmalıdır. Buradan

$$\lambda=\pm1 \qquad (45.16)$$

alınır. Əgər (45.13) düsturunda $\lambda=1$ yazsaq

$$S'_\alpha = L_{\alpha\nu} S_\nu \qquad (45.13')$$

Lorens çevrilməsi düsturunu alırıq. Deməli s_ν 4-ölçülü polyar vektor kimi çevrilir. Bu vektor *4-ölçülü cərəyan sıxlığı vektoru* (j_μ) adlanır. İndi biz $S'^2_\alpha = S^2_\nu$ ifadəsini açıq yaza bilərik:

$$\rho'^2\left(1-\frac{\vec{V}'^2}{c^2}\right)=\rho^2\left(1-\frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)=\rho_0^2. \qquad (45.17)$$

Burada ρ_0 – yükün sükunətdə olduğu K^0 sistemində sıxlığıdır. Buradan

$$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (45.18)$$

alınır. İndi maddi mühitin dV həcm elementinin ρdV yükünə nəzər salaq. Əgər sükunətdəki sistemdə həcm elementi dv_0-dırsa, onda $dV = dV_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ olar. Burada (45.18)-i nəzərə alsaq yükün invariantlığının diferensial şəklini taparıq:

$$\rho dV = \rho_0 dV_0 = \text{in var}. \qquad (45.19)$$

Bunu inteqrallayaraq tam yükün də invariant olduğunu isbat etmiş oluruq:

$$e=e_0=\text{invar}. \qquad (45.20)$$

Beləliklə, elektrik yükü Lorens-invariantdır. Lakin bu invariantlıq daxilində yük həm skalyar və həm də psevdoskalyar ola bilər. Doğrudan da (45.16) ifadəsinə Lorens çevrilməsi matrisinin determinantı kimi baxaraq λ=det L yaza bilərik. Onda (45.13) bərabərliyi

$$S'_\alpha = (\det L) L_{\alpha\nu} S_\nu \qquad (45.13'')$$

şəklində yazılır (bax §14). Bu psevdovektorun Lorens çevrilməsi düsturudur. Deməli s_ν psevdovektor olur. Bu o deməkdir ki, s_ν-nün ifadəsinə daxil olan yük psevdoskalyardır. Psevdoskalyar skalyardan yalnız onunla fərqlənir ki, inversiya zamanı o, işarəsini dəyişir. Bu zaman 4-ölçülü A_μ potensialı psevdovektor, $\vec{H}$ – polyar vektor, $\vec{E}$ – aksial vektor, $F_{\mu\nu}$ – psevdotenzor olacaqdır. Lakin yükün sahədə hərəkət tənliyi dəyişməyəcəkdir, çünki yükə təsir edən qüvvə $f_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu$ polyar vektor olaraq qalır. Yükün hər iki variantında sahənin (41.8) enerji impuls tenzoru 2-ranqlı tenzor olaraq dəyişməz qalır. Qeyd edək ki, indiyə qədər (45.13") imkanından istifadə edilməmişdir. Yükün skalyar və ya psevdoskalyar olması məsələsi bu günə qədər açıq qalmışdır. Lakin müasir fiziklər yükün hələlik skalyar olduğunu qəbul edirlər. Əgər həm skalyar və həm də psevdoskalyar yük mövcud olarsa, onda fizika elmində nə baş verər? Bu zaman skalyar yüklə skalyar yükün və ya skalyar yüklə psevdoskalyar yükün annihilyasiya edib-etməməsi məsələsi ortaya çıxar, bir çox annihilyasiya və doğulma reaksiyalarına qadağan qoyular və bütün fizikaya yenidən baxmaq lazım gələr. Yəqin ki, bu cür məsələlər gələcək təcrübələrin və nəzəriyyənin problemidir.

§ 46. Elektrodinamikada əsas kəmiyyətlərin və düsturların Byorken-Drell metrikasında yazılışı

Biz bu kitabda bütün hesablamaları Pauli-Eynşteyn (PE) metrikasında aparmışıq. Lakin bəzi ədəbiyyatda hesablamaları və düsturları Byorken-Drell (BD) metrikasında verirlər. Bunu nəzərə alaraq, bir metrikadan digərinə keçidi ətraflı öyrənmək üçün kitabda əvvəllər aldığımız əsas kəmiyyətləri və düsturları Byorken-Drell metrikasında yazacağıq. Bu düsturların əvvəllki nömrələrini saxlayaraq, yeni yazılışda onlara BD (Byorken-Drell) hərf birləşməsini əlavə edəcəyik (bax §21).

Birinci kəmiyyət olaraq diferensial intervaldan başlayaq:

$$dS = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} =$$

$$= cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = in\,var. \qquad (18.8), (18.8')\ BD$$

Biz 21-ci §-dan bilirik ki, kontra- və kovariant diferensial radius vektorları belə yazırlar: $dx^\mu = \{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\} = \{dx^0, d\vec{r}\}$, $dx_\mu = \{dx_0, -dx_1, -dx_2, -dx_3\} = \{dx^0, -d\vec{r}\}$ burada $x_0=ct$. Yadımıza salaq ki, vektorun və tenzorun zaman komponentinin indeksini yuxarıdan aşağıya endirdikdə və ya aşağıdan yuxarıya qaldırdıqda heç bir dəyişiklik baş vermir. Lakin onların fəza komponentinin indeksini yuxarıdan aşağıya və ya aşağıdan yuxarıya apardıqda komponentin işarəsi dəyişir ($x^0=x_0$, $x^i=-x_i$, $i=1, 2, 3$). BD metrikasında təkrar olunan yuxarı və aşağı indeks üzrə sıfırdan üçə qədər cəm aparılır.

4-ölçülü vahid matrisin elementləri və onun xassələri aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & \text{əgər } \mu=\nu \\ 0, & \text{əgər } \mu\neq\nu \end{cases} \qquad (14.6)\ BD$$

$$A_\nu \delta_\mu{}^\nu = A_\mu \qquad (14.7)\ BD$$

4-ölçülü koordinatların (istənilən 4-ölçülü vektorun) Lorens çevrilməsi düsturları aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$x^\mu = \lambda_\nu{}^\mu x'^\nu. \qquad (14.1'')\ BD$$

Bu kontravariant vektorun Lorens çevrilməsi düsturudur. Kovariant vektorun Lorens çevrilməsi düsturunu almaq üçün yuxarıdakı düsturun sol və sağ tərəfində μ indeksini aşağı endirmək lazımdır:

$$x_\mu = \lambda_{\nu\mu} x'^\nu \equiv \lambda^\nu{}_\mu x'_\nu. \qquad (14.1''a)\ BD$$

Burada $\lambda_\nu{}^\mu$ və $\lambda^\nu{}_\mu$ – Lorens çevrilməsi matrisləridir (bax §21). Son düsturun yazılışında biz $a_\nu x^\nu \equiv a^\nu x_\nu$ eyniliyində istifadə etmişik. Bu çevrilmələrdən istifadə edərək Lorens çevrilməsi matrislərinin ortoqonallıq şərtini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\lambda_\nu{}^\mu \lambda^\rho{}_\mu = \lambda^\mu{}_\nu \lambda_\mu{}^\rho = \delta_\nu^\rho. \qquad (15.7)\ BD$$

Biz yuxarıda K'-dən K-ya keçid düsturlarını yazmışıq. İndi K-dən K'-ə keçid düsturlarını almaq üçün, yuxarıdakı Lorens çevrilməsi düsturlarını $\lambda^{\rho}{}_{\mu}$ və $\lambda_{\rho}{}^{\mu}$ matrislərinə vurub (15.7) BD ortoqonallıq şərtindən istifadə etməliyik. Bunu icra etsək

$$x'^{\rho} = \lambda^{\rho}{}_{\mu} x^{\mu} \text{ və } x'_{\rho} = \lambda_{\rho}{}^{\mu} x_{\mu}. \qquad (14.4)\text{ BD}$$

çevrilmə düsturlarını alarıq. Kovariant və kontravariant $A_{\mu} = \{A_0, -\vec{A}\}$ və $B^{\mu} = \{B_0, \vec{B}\}$ vektorlarının skalyar hasili

$$A_{\mu}B^{\mu} = A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 = A_0B_0 - \vec{A}\vec{B} \qquad \text{BD}$$

şəklində yazılır. Biz çox şeyləri 21-ci §-dan hazır götürəcəyik. 4-ölçülü 4-ranqlı vahid psevdotenzor $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ və $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ şəklində yazılır. Bu psevdotenzorun əsas komponenti $\varepsilon^{0123}=+1$-dir. 4-ölçülü kontravariant sürət vektoru aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\}. \qquad (15.1)\text{ BD}$$

Bu vektorun kovariant ifadəsi $U_{\mu} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{-\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\}$ şəklindədir. Bu iki vektorun skalyar hasili $U_{\mu}U^{\mu}=+1$ olur. Skalyar funksiyanın diferensialı skalyar olduğundan BD-də iki növ törəmədən istifadə edirlər. Doğrudan da $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$ ifadəsinin skalyar olması üçün $\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}$ kovariant vektor olmalıdır ki, onun dx^{μ} – kontravariant vektora hasili skalyar olsun. Ona görə $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \vec{\nabla} \right) \equiv \partial_{\mu}$ *kovariant törəmə* adlanır. Onda $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) \equiv \partial^{\mu}$ *kontravariant törəmə* olacaqdır. Bu iki törəmənin hasili: $-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv -\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} \equiv \square$ skalyar kəmiyyətdir və ona *Dalamber operatoru* deyilir (burada $x_0=ct$-dir). Onda $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}$ – invariant kəmiyyət olacaqdır və ona *4-ölçülü divergensiya* deyilir. Biz burada müxtəlif indekslər götürməklə $\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}, \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ kimi 2 ranqlı qarışıq, kontravariant və kovariant tenzorlar qura bilərik.

Biz (24.5) düsturundan görürük ki, 4-ölçülü impuls 4-ölçülü sürətlə mütənasibdir. Əgər 4-ölçülü sürəti kontravariant vektor kimi götürsək, onda 4-ölçülü kontravariant impulsu alarıq:

$$p^{\mu} = mcu^{\mu}. \qquad (24.5)\ \text{BD}$$

Bu ifadəni açıq yazsaq:

$$p^{\mu} = \left\{\frac{E}{c}, \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}, E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad (24.6)\ \text{BD}$$

ifadəsini alarıq. Bu impulsun fəza hissəsini mənfi işarə ilə götürərək kovariant impulsun ifadəsini almış olarıq.

Kontravariant impulsdan intervala görə törəmə alsaq 4-ölçülü qüvvəni tapmış olarıq:

$$f^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{dS} = \left\{\frac{\vec{v}\vec{F}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right\}. \qquad (24.12)\ \text{BD}$$

Bu vektorun da fəza hissəsini mənfi işarə ilə götürərək 4-ölçülü kovariant qüvvəni almış olarıq.

BD metrikasında kovariant və kontravariant vektorların hasili invariantdır, skalyardır. Ona görə yüklü zərrəciyin xarici elektromaqnit sahəsində (27.1') təsir inteqralında sahənin 4-ölçülü kovariant potensialını zərrəciyin 4-ölçülü kontravariant elementar radius vektoruna vurmalıyıq. BD metrikasında skalyar hasil PE metrikasındakı skalyar hasildən yalnız işarə ilə fərqləndiyindən (27.1')-də ikinci həddi mənfi işarə ilə götürəcəyik:

$$S = \int_a^b \left\{-mcds - \frac{e}{c}A_{\mu}dx^{\mu}\right\}. \qquad (27.1')\ \text{BD}$$

Yüklü zərrəciyin xarici elektromaqnit sahəsində yuxarıda yazılmış təsir inteqralının inteqral altı funksiyasına (yəni Lanqranj funksiyasına) hər hansı $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ skalyarının tam diferensialını əlavə etsək və ya çıxsaq hərəkət tənliyi dəyişməz (bax §29). Bu tam diferensialı əlverişlilik üçün $\frac{e}{c}df$ şəklində seçək və yuxarıdakı inteqralaltı funksiyaya əlavə edək. Burada nəzərə alaq ki, $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$ (μ üzrə cəmləmə aparılır; μ=0, 1, 2, 3). Tam diferensialı əlavə edək və ortaq vuruqları kənara çıxaraq:

$$S' = \int_a^b \left\{ -mcds - \frac{e}{c}\left(A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu \right\}. \qquad (27.1'') \text{ BD}$$

S və S'-in müqayisəsindən alınır ki, A_μ və $A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ eyni bir hərəkət tənliyinə gətirir. Yəni potensialların aşağıdakı çevrilməsi zamanı

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \qquad (29.1) \text{ BD}$$

yüklü zərrəciyin elektromaqnit sahəsində hərəkət tənliyi dəyişmir. Bu, potensialların *qradiyent* (*kalibrləşmə*) *çevrilməsi* adlanır. Deməli, potensiallar birqiymətli təyin olunmur. (29.1) BD-ni 3-ölçülü şəkildə yazaq:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f, \varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \qquad (29.2) \text{ BD}$$

Potensialın ödədiyi Lorens şərtini iki şəkildə yazmaq olar:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \text{ və } \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (29.4) \text{ BD}$$

Bunlar 4-ölçülü potensialın 4-ölçülü divergensiyalardır. Elektromaqnit sahəsində yüklü zərrəciyin 4-ölçülü hərəkət tənliyini almaq üçün (27.1') BD təsirinin variasiyasını hesablamalıyıq:

$$\delta S = \int_a^b \left\{ -mc\delta ds - \frac{e}{c} A_\mu \delta dx^\mu - \frac{e}{c}\delta A_\mu dx^\mu \right\} =$$

$$= \int_a^b (-mc\delta ds - \frac{e}{c} A_\mu d\delta x^\mu) - \int_a^b \frac{e}{c}\delta A_\nu dx^\nu.$$

Burada $\delta ds = \delta\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} = u_\mu d\delta x^\mu$ olduğunu nəzərə alaraq ($\delta ds = u^\mu d\delta x_\mu$ şəklində də yazıla bilər) birinci inteqralı hissə-hissə inteqrallayaq:

$$\delta S=-(mcu_\mu+\frac{e}{c}A_\mu)\delta x^\mu\Big|_a^b+\int_a^b(mcdu_\mu+\frac{e}{c}dA_\mu)\delta x^\mu-\frac{e}{c}\int_a^b\delta A_\nu dx^\nu.$$

Burada $dA_\mu=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu$ və $\delta A_\nu=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$ yazaraq, alınmış ifadəni §31-də etdiyimiz kimi sadələşdirsək

$$\delta S=-\left(mcu_\mu+\frac{e}{c}A_\mu\right)\delta x^\mu\Big|_a^b+$$

$$+\int_a^b\left\{mcdu_\mu-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)dx^\nu\right\}\delta x^\mu \qquad (31.1)\ \text{BD}$$

bərabərliyini alarıq. Sonuncu inteqralda $du_\mu=\frac{du_\mu}{ds}ds$ və $dx^\nu=\frac{dx^\nu}{ds}ds=u^\nu ds$ yazacağıq. Zərrəciyin a və b vəziyyətlərinin fiksə olunduğunu fərz etsək, $\delta x^\mu(a)=\delta x^\mu(b)=0$ və $\delta S_{min}=0$ olar. Onda 31-ci §-da olduğu kimi

$$\{\ \}=0 \text{ və ya } mc\frac{du_\mu}{ds}=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)u^\nu \qquad (31.2)\ \text{BD}$$

tənliyini alarıq. Burada

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \qquad (31.3)\ \text{BD}$$

sahənin 2 ranqlı antisimmetrik kovariant tenzordur. Biz (31.3) düsturundan $F_{\mu\nu}$ tenzorunun komponentlərini təyin edirik: $F_{01}=E_x$, $F_{02}=E_y$, $F_{03}=E_z$, $F_{12}=-H_z$, $F_{31}=-H_y$, $F_{23}=-H_x$, $F_{10}=-F_{01}$, $F_{32}=-F_{23}$ və s. Yükün xarici elektromaqnit sahəsində 4-ölçülü hərəkət tənliyini qısa şəkildə yazaq:

$$mc\frac{du^\mu}{ds}=\frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu. \qquad (31.4)\ \text{BD}$$

Bu tənliyi başqa şəkildə də yazmaq olar:

$$mc\frac{du_\mu}{ds}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu. \qquad (31.4)\ \text{BD}$$

$F^{\mu\nu}$ sahənin 2 ranqlı kontravariant tenzorudur və onu (31.3) BD-dən istifadə edərək aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}. \qquad (31.3')\ \text{BD}$$

Pauli-Eynşteyn (PE) metrikasından fərqli olaraq Byorken-Drell (BD) metrikasında elektromaqnit sahəsini iki tenzorla təyin edirlər. Bu tenzorlar bir-biri ilə belə əlaqədardır:

$F^{01}=-F_{01}$ və s., $F^{12}=F_{12}$ və s. Bu tenzorları matris şəklində yazaq:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}; \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}; \quad (31.6)\ \text{BD}$$

Elektromaqnit sahəsinin Lorens çevrilməsi düsturlarını almaq üçün biz §21-dən istifadə edərək $K' \to K$ keçidi üçün

$$A^{\mu} = \lambda'^{\mu}_{\nu} A'^{\nu}; \quad F^{\mu\nu} = \lambda'^{\mu}_{\alpha} \lambda'^{\nu}_{\beta} F'^{\alpha\beta} \qquad (32.1)\ \text{BD},\ (32.2)\ \text{BD}$$

yazmalıyıq. Buradakı ştirxli çevrilmə matrisləri §21-dəki ştrixsiz matrislərdə $\varphi \to -\varphi$ əvəzləməsini etməklə alınır (məsələn, $\lambda'^{\mu}_{\nu} \equiv \lambda^{\mu}{}_{\nu}(\varphi \to -\varphi)$). Biz bu üsulla $\vec{E}$ və $\vec{H}$-ın §31-də verilmiş çevrilmə düsturlarını almış oluruq. Elektromaqnit sahəsinin invariantları aşağıdakı şəkildə təyin edilir:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) = \text{in var}, \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = -8(\vec{E}\vec{H}) = \text{in var} \qquad (33.1')\ \text{BD},\ (33.2')\ \text{BD}$$

Kəsilməzlik tənliyi belə yazılır:

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \equiv \frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \qquad (35.12)\ \text{BD}$$

Burada kovariant və kontravariant 4-ölçülü cərəyan sıxlığı vektorları

$$j_{\mu} = \{c\rho, -\vec{j}\} \text{ və } j^{\mu} = \{c\rho, \vec{j}\} \qquad (35.3')\ \text{BD}$$

şəklində yazılır.

Elektromaqnit sahəsi və yüklərdən ibarət sistem üçün Laqranj funksiyasının sıxlığı aşağıdakı şəkildə ifadə edilir:

$$\mathcal{L} = -\eta c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu j^\mu. \qquad (36.9)\ \text{BD}$$

Birinci növ (cüt) Maksvell tənlikləri 4-ölçülü şəkildə aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} = 0. \qquad (37.3)\ \text{BD}$$

Maksvellin ikinci növ (cüt) tənliklərini almaq üçün biz §38-də göstərilən qayda ilə hərəkət edərək aşağıdakı variyasiyanı hesablayırıq:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{c}j^\mu\delta A_\mu = -\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu\delta A_\mu =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu\right) - \frac{1}{c}j^\mu\delta A_\mu = -\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu +$$

$$+\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu - \frac{1}{c}j^\mu\delta A_\mu = -\frac{1}{8\pi}F^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu - \frac{1}{c}j^\mu\delta A_\mu.$$

Biz birinci həddə $\mu\nu$ lal indekslərini $\nu\mu$ lal indeksləri ilə əvəz etmişik. İndi həmin həddə $F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}$ yazaq və onu ikinci hədlə toplayaq:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu - \frac{1}{c}j^\mu\delta A_\mu.$$

Alınmış ifadəyə $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\cdot\delta A_\mu$ həddini əlavə edək və çıxaq və $\delta\mathcal{L}$-in son ifadəsini (38.2) düsturunda nəzərə alaq:

$$\delta S = \int(d^4x)\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(F^{\mu\nu}\delta A_\mu)\right) -$$

$$-\int(d^4x)\left\{\frac{1}{c}j^\mu + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\right\}\delta A_\mu = I_1 + I_2 = 0. \qquad (38.3)\ \text{BD}$$

Biz I_1 inteqralının eynilik kimi sıfır olduğunu 38-ci paraqrafda göstərmişik. Onda (38.3) BD-dən

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi}\int_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{4\pi}{c}j^\mu + \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\right\}\delta A_\mu = 0$$

alırıq. 4-ölçülü həcmin daxilində δA_μ ixtiyari olduğundan

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=-\frac{4\pi}{c}j^{\mu} \qquad (38.4)\ BD$$

alınır. Bu *Maksvellin ikinci növ tənliklərinin* 4-*ölçülü şəklidir.*

Sahənin Laqranj tənliyini almaq üçün biz əvvəlcə ən kiçik təsir prinsipini BD metrikasında yazırıq:

$$\delta S=\int\limits_{R(4)}(d^4x)\delta\mathcal{L}\left(\eta, j^{\mu}, A^{\mu}, \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\equiv A^{\mu},\nu\right). \qquad (40.1)\ BD$$

Laqranj funksiyasının variasiyasının hesablayanda onun arqumentlərinin kontravariant A^{μ} potensialı və onun törəməsi olan $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\equiv A^{\mu},\nu$ qarışıq tenzoru olduğunu nəzərə almalıyıq:

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\mu}}\delta A^{\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)}\cdot\delta\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right). \qquad (40.2)\ BD$$

Hesablamada fəza koordinatlarına görə diferensiallamanı $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ üzrə apararaq aşağıdakı nəticəni alırıq:

$$\delta S=\oint\limits_{\Sigma}d\sigma_{\nu}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial A^{\mu}/\partial x^{\nu}\right)}\delta A^{\mu}\right\}+$$

$$+\int\limits_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\mu}}-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial A^{\mu}/\partial x^{\nu}\right)}\right\}\delta A^{\mu}=0. \qquad (40.4)\ BD$$

Burada birinci inteqralın eynilik kimi sıfır olduğunu bilərək (bax §40) ən kiçik təsir prinsipini

$$\delta S=\int\limits_{R(4)}(d^4x)\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\mu}}-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial A^{\mu}/\partial x^{\nu})}\right\}\delta A^{\mu}=0 \qquad (40.5)\ BD$$

şəklində yazırıq. 4-ölçülü həcmin daxilində δA^{μ} ixtiyari funksiya olduğundan

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^{\mu}}-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial A^{\mu}/\partial x^{\nu}\right)}=0 \qquad (40.6)\ BD$$

tənliyini alırıq. Bu elektromaqnit sahəsi üçün Laqranj tənliyidir.

Sərbəst elektromaqnit sahəsinin $\mathcal{L}$ Laqranj funksiyasının yalnız sahənin ümumiləşmiş A^α koordinatından (4-ölçülü potensialından) və onun $\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu} \equiv A^\alpha{}_{,\nu}$ törəməsindən asılı olduğunu fərz edərək, onun x_μ-yə görə törəməsini hesablayaraq sistemin enerji-impuls tenzorunu və onun saxlanması qanununu alırıq:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha}\cdot\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha{}_{,\nu}}\frac{\partial A^\alpha{}_{,\nu}}{\partial x^\mu} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A^\alpha{}_{,\nu})}\cdot\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha{}_{,\nu}}\cdot\frac{\partial A^\alpha{}_{,\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A^\alpha{}_{,\nu})}A^\alpha{}_{,\mu}\right).$$

Biz burada sahənin $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A^\alpha{}_{,\nu})} = 0$ hərəkət tənliyindən və $\frac{\partial A^\alpha{}_{,\nu}}{\partial x^\mu} \equiv A^\alpha{}_{,\nu,\mu} \equiv \frac{\partial A^\alpha{}_{,\mu}}{\partial x^\nu}$ eyniliyindən istifadə etmişik. İndi bərabərliyin sol tərəfində x^μ-yə görə törəmədən x^ν-yə görə törəməyə keçək, yəni $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \equiv \delta^\nu_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}$ yazaq və ilk bərabərliyin sol və sağ tərəflərini birləşdirək:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A^\alpha{}_{,\nu})}A^\alpha{}_{,\mu} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\right\} = 0$$

Böyük mötərizənin içərisi

$$T_\mu{}^\nu = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\nu}\right)} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L} \qquad \text{(41.1) BD}$$

elektromaqnit sahəsinin enerji-impuls tenzorudur və o

$$\frac{\partial T_\mu{}^\nu}{\partial x^\nu} = 0 \text{ və ya } \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \text{(41.2) BD}$$

saxlanma qanununu ödəyir. Bu iki ranqlı qarışıq tenzoru iki ranqlı kontravariant tenzor şəklində yazmaq olar:

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\right)}-g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \qquad (41.1')\ \text{BD}$$

Burada $g^{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x_{\mu}}$ -dür. Yada salaq ki, $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}=\delta^{\nu}_{\mu}$.

$T^{\mu\nu}$ tenzoru simmetrik deyildir. Lakin ona $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}f^{\mu[\nu\alpha]}$ funksiyasını əlavə edərək, onu simmetrik etmək olar. $f^{\mu[\nu\alpha]}$ $\nu\alpha$ indekslərinə görə antisimmetrikdir. Bu zaman $T^{\mu\nu}$-nün hərəkət tənliyi dəyişmir. Doğrudan da $T^{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}f^{\mu[\nu\alpha]}=T'^{\mu\nu}$ ilə işarə etsək

$$\frac{\partial T'^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\partial x^{\alpha}}f^{\mu[\nu\alpha]}=\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0 \qquad (\text{bax } (41.2)\ \text{BD})$$

olar. Burada sağdakı ikinci hədd simmetrik tenzorun antisimmetrik tenzora hasili olduğundan sıfıra bərabərdir.

$T^{\mu\nu}$ kanonik tenzor, $T'^{\mu\nu}$ isə *metrik tenzor* adlanır. $T^{\mu\nu}$ tenzoruna əlavə edilən $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}f^{\mu[\nu\alpha]}$ funksiyasını belə seçirlər:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(A^{\mu}F^{\nu\alpha})\equiv\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(A^{\mu}F^{\nu}{}_{\alpha})=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\alpha}}\cdot F^{\nu}{}_{\alpha}$$

Burada nəzərə alınmışdır ki, sahə sərbəstdir və onun tənliyi $\frac{\partial F^{\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}=0$ (və ya $\frac{\partial F^{\nu\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=0$) şəklindədir. $T^{\mu\nu}$ tenzoruna daxil olan sərbəst elektromaqnit sahəsinin $\mathcal{L}=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\beta}F^{\mu\beta}$ Laqranj funksiyasının törəməsini hesablayaq. (40.9) düsturunun alınmasına uyğun olaraq müəyyən qədər sadə hesablama vasitəsilə

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\right)}=-\frac{1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial(A^{\alpha},\nu)}(F_{\mu\beta}F^{\mu\beta})=$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial(A^{\alpha},v)}\cdot F^{\mu\beta} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial(A^{\alpha},v)}(A_{\beta,\mu} - A_{\mu,\beta})\cdot F^{\mu\beta} =$$

$$= \ldots = -\frac{1}{8\pi}(F^{v}{}_{\alpha} - F_{\alpha}{}^{v}) = \frac{1}{4\pi}F_{\alpha}{}^{v} = -\frac{1}{4\pi}F^{v}{}_{\alpha} \qquad (40.9)\ \text{BD}$$

bərabərliyini ala bilərik. Sonda simmetrik metrik tenzoru alırıq:

$$T'^{\mu v} \equiv T'^{v\mu} = T^{\mu v} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\alpha}}F^{v}{}_{\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}F^{v}{}_{\alpha} - g^{\mu v}\mathcal{L} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\alpha}}F^{v}{}_{\alpha} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\alpha}F^{v}{}_{\alpha} + \frac{1}{4\pi}g^{\mu v}F_{\rho\beta}F^{\rho\beta}\right). \qquad (41.8)\ \text{BD}$$

Biz gələcəkdə təsadüf olunan istənilən ifadəni Byorken-Drell (BD) metrikasında yaza bilərik.

VII FƏSİL
VAKUUMDA SABİT ELEKTROMAQNİT SAHƏSİ

§47. Sabit elektrik sahəsi. Laplas-Puasson tənliyi və onun həlli

Əvvəlki fəsildən bilirik ki, elektromaqnit sahəsi vahid bir tam təşkil edir. O hərəkət edən yüklər və cərəyanlar tərəfindən yaradılır, zamana görə dəyişən elektromaqnit sahəsində elektrik sahəsinin dəyişməsi maqnit sahəsini yaradır və əksinə, maqnit sahəsinin dəyişməsi elektrik sahəsini törədir. Elektromaqnit sahəsi 4 tənliklə – 2 ədəd vektori və 2 ədəd skalyar tənliklə təsvir olunur.

Əgər xüsusi halda (seçilmiş ətalət sistemində) sahənin mənbələri – yüklərin sıxlığı ρ və cərəyan sıxlığı $\vec{j} = \rho\vec{v}$ zamandan asılı deyildirsə, onların yaratdığı elektromaqnit sahəsi də – $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}$ və φ zamandan asılı olmayacaqdır. Bu zaman sabit elektromaqnit sahəsi alınacaqdır. Sabit elektromaqnit sahəsinin tənliklərini almaq üçün ümumi Maksvell tənliklərində $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ yazmaq lazımdır. Bu zaman Maksvell tənlikləri aşağıdakı iki qrup tənliyə parçalanır və elektrik sahəsi ilə maqnit sahəsi arasındakı əlaqə qırılır:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E} = 0, \\ \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r}) \end{cases} \tag{47.1}$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}), \\ \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{cases} \tag{47.2}$$

(47.1) sistemi sabit elektrik sahəsinin, yəni elektrostatikanın tənlikləridir, (47.2) sistemi isə sabit cərəyanın yaratdığı maqnit sahəsinin təsvir edir. Biz burada yalnız (47.1) sisteminin həlli ilə məşğul olacağıq. Deməli sükunətdə sabit $\rho(\vec{r})$ sıxlığı ilə paylanmış yüklər sabit elektrik sahəsi yaradır və o, (47.1) tənliklər sistemi ilə təsvir olunur. Sabit elektrik sahəsinin $\vec{E}$ intensivliyi ilə sahənin potensialı arasında əlaqə

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \tag{47.3}$$

şəklindədir. Biz $\vec{E}$-nin ümumi ifadəsində $-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$ olduğunu nəzərə almışıq. $\varphi(\vec{r})$ elektrostatik sahənin potensialıdır. ~~Əvvəlki bəhslərdən (§30) bilirik ki,~~ sabit elektrik sahəsinin yük üzərində gördüyü iş yükün getdiyi yolun şəklindən asılı olmayaraq yalnız başlanğıc və son nöqtələrdəki potensiallar fərqindən asılıdır. Qapalı yolda sahənin gördüyü iş sıfırdır. Elektrostatik sahə burulğansız sahədir.

Elektrostatik sahədə potensialın ödədiyi tənliyi almaq üçün (47.1) sisteminin ikinci tənliyində (47.3)-ü nəzərə almaq lazımdır:

$$\vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\varphi)=4\pi\rho \text{ və ya } \vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r})=-4\pi\rho(\vec{r}). \qquad (47.4)$$

Burada $\vec{\nabla}^2=(\vec{\nabla}\vec{\nabla})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – *Laplas operatoru* (Laplasian) adlanır.

(47.4) tənliyi *Laplas-Puasson tənliyi* adlanır. Əgər baxdığımız fəza oblastında yük yoxdursa, yəni $\rho=0$-dırsa, onda (47.4) tənliyi Laplas tənliyinə çevrilir:

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r})=0. \qquad (47.5)$$

Biz Laplas-Puasson tənliyinin sərhəd şərtlərini

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(r)\sim\frac{1}{r}\to 0\\ r\to\infty\end{array}\right\} \qquad (47.6)$$

sərhəd şərti daxilində həll edəcəyik.

Qeyd edək ki, (47.4) tənliyini sadə mülahizələrlə həll etmək olardı. Lakin biz bu tənliyin həllində Qrin funksiyasından istifadə edəcəyik. Çünki elektrodinamikanın və ümumiyyətlə nəzəri fizikanın bir-çox tənlikləri Qrin funksiyasının köməyi ilə həll edilir. Biz sadə məsələlərin həllinə Qrin funksiyasını tətbiq etməklə oxucuları Qrin funksiyası üsulu ilə tanış etmək istəyirik.

Əvvəlcə diferensial operatora «bölmək» və ya tərs diferensial operator anlayışı ilə tanış olaq. (47.4) tənliyində diferensial operator nabla üstü ikidir, yəni $\vec{\nabla}^2$-dir. Bunun tərs operatorunu $(\vec{\nabla}^2)^{-1}$ ilə işarə edək. Tərs operatorun təyin olunma qaydası belədir: tərs və düz operatorun ardıcıl olaraq eyni bir funksiyaya təsiri bu funksiyanı dəyişdirmir:

$$\vec{\nabla}^2(\vec{\nabla}^2)^{-1}f(\vec{r}) = (\vec{\nabla}^2)^{-1}\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = f(\vec{r}). \tag{47.7}$$

Sadə bir misalda bu əməliyyatı icra edək. Fərz edək ki, $f(\vec{r}) = e^{ikx}$. Onda tərs operatorun e^{ikx} funksiyasına təsirini aşağıdakı kimi həyata keçirmək lazımdır ki, (47.7) şərti ödənsin:

$$(\vec{\nabla}^2)^{-1}e^{ikx} = \left(\frac{1}{\vec{\nabla}^2 e^{ikx}}\right) = \frac{e^{ikx}}{-k^2}. \tag{47.8}$$

İndi (47.8)-ə $\vec{\nabla}^2$ ilə təsir edərək (47.7) münasibətinin ödəndiyini görərik. (47.8)-də punktir mötərizə «səhnə arxasında» qalır, onu heç kəs aşkar yazmır, lakin hesablamada ondan istifadə edirlər. (47.4) tənliyinə tərs operatorla təsir edərək tənliyin həllini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\varphi(\vec{r}) = -4\pi(\vec{\nabla}^2)^{-1}\rho(\vec{r}). \tag{47.9}$$

Biz burada $(\vec{\nabla}^2)^{-1}\vec{\nabla}^2\varphi(r) = \varphi(\vec{r})$ olduğunu nəzərə almışıq. Əgər $\rho(\vec{r})$ funksiyası məlumdursa, $(\vec{\nabla}^2)^{-1}\rho(\vec{r})$ ifadəsini hesablayaraq tənliyin (47.9) həllinin analitik şəklini almış oluruq. Lakin $\rho(\vec{r})$ funksiyasının aşkar şəklini bilmədən də (47.9)-un sağ tərəfini hesablamaq mümkündür. Bunun üçün $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ funksiyasının köməyi ilə $\rho(\vec{r})$-dən $\rho(\vec{r}')$-ə keçmək lazımdır və tərs operator yalnız $(\vec{r})$-dən asılı olan funksiyaya təsir etdiyindən (47.9)-un sağ tərəfində tərs operatoru inteqralın altında $(\vec{r})$-dən asılı olan $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ funksiyasının qabağında yazmaq kifayətdir:

$$\varphi(r) = -4\pi(\vec{\nabla}^2)^{-1}\int_V (d\vec{r}')\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -4\pi\int_V (d\vec{r}')\rho(\vec{r}')(\vec{\nabla}^2)^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}').$$

Bərabərliyin sağ tərəfində dayanan $-4\pi(\vec{\nabla}^2)^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ kəmiyyəti baxdığımız məsələnin *Qrin funksiyası* $(G(\vec{r},\vec{r}'))$ adlanır:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi(\vec{\nabla}^2)^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{47.10}$$

Onda məsələnin həlli olan $\varphi(\vec{r})$ aşağıdakı şəklə düşür:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V (d\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}'). \tag{47.11}$$

Qrin funksiyasının ödədiyi diferensial tənliyi tapmaq üçün (47.10) ifadəsinə soldan $\vec{\nabla}^2$ ilə təsir etmək lazımdır:

$$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \qquad (47.12)$$

(47.4) və (47.12) tənliklərinin müqayisəsindən görünür ki, Laplas-Puasson tənliyi üçün Qrin funksiyası da elə Laplas-Puasson tənliyini ödəyir, lakin burada tənliyin sağ tərəfində cari yüklərin $\rho(\vec{r})$ sıxlığı əvəzində müsbət vahid nöqtəvi yükün sıxlığı, yəni $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ dayanır. Beləliklə, baxdığımız məsələdə Qrin funksiyası müsbət vahid nöqtəvi yükün yaratdığı potensialıdır.

İndi (47.10) düsturundan istifadə edərək Qrin funksiyasını konkret hesablayaq

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi(\vec{\nabla}^2)^{-1}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}(d\vec{k}) = -4\pi\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}\frac{(d\vec{k})}{-\vec{k}^2}.$$

Son inteqralı açmaq üçün $\vec{k}$ fəzasında sferik koordinat sistemindən istifadə edəcəyik və polyar oxunu $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ vektoru boyunca yönəldəcəyik: $(d\vec{k}) = k^2 dk d\Omega$, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\alpha$, $\vec{K}\vec{R} = KR\cos\theta$, əvəz: $\cos\theta = x$, $-\sin\theta d\theta = +dx$. Bunları nəzərə alaraq inteqralı asanlıqla açırıq.

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{ikR\cos\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\int_{-1}^{+1} dx e^{ikRx} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\frac{1}{ikR}e^{ikRx}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\pi R}\int_0^\infty \frac{dk}{ik}(e^{iRk}-e^{-iRk}) = \frac{2}{\pi R}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\sin KR =$$

$$= \frac{2}{\pi R}\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}d\xi = \frac{2}{\pi R}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Biz burada $\frac{1}{2i}(e^{iRk}-e^{-iRk}) = \sin kR$, $\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}d\xi = \frac{\pi}{2}$ (Dirixle və ya Eyler inteqralı) olduğunu nəzərə almışıq.

Son nəticə

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (47.13)$$

şəklindədir. Bu (47.12) tənliyinin xüsusi həllidir. Operatora bölmə əməliyyatı birqiymətli deyildir. Bu zaman bircins

$$\vec{\nabla}^2 G_0 = 0$$

tənliyinin kökü itirilmiş olur. Bircins tənliyin həllini də nəzərə alsaq (47.12) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı şəkildə olur:

$$G_{\text{ümumi}}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + G_0 \tag{47.14}$$

G_0 həddi baxdığımız həcmdən kənardakı yüklərin təsirini xarakterizə edir və o, sərhəd şərtlərindən tapılır.

(47.14)-ü (47.11)-də nəzərə alsaq Laplas-Puasson tənliyinin ümumi həllini tapmış oluruq:

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(d\vec{r}') + \int\limits_V G_0\rho(\vec{r}')(d\vec{r}'). \tag{47.15}$$

Tapdığımız həllə (47.6) sərhəd şərtini tətbiq etsək

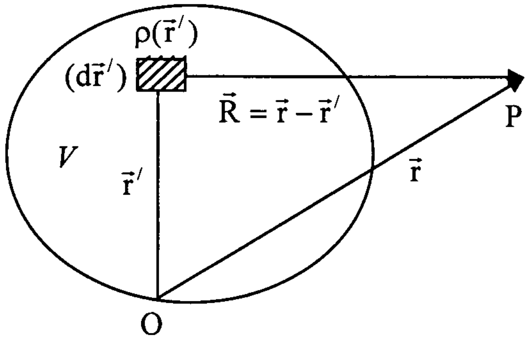
$$\int\limits_V G_0\rho(\vec{r}')(d\vec{r}') = 0$$

olduğunu görərik. Beləliklə, baxdığımız məsələnin tam həlli

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(d\vec{r}') \tag{47.16}$$

olur. Bu düstur sonlu V həcmində $\rho(\vec{r}')$ sıxlığı ilə paylanmış yükün fəzanın $\vec{r}$ müşahidə nöqtəsində yaratdığı elektrostatik sahənin potensialını ifadə edir. Müşahidə nöqtəsi V həcminin daxilində də və ondan xaricdə də ola bilər. P müşahidə nöqtəsini həcmdən kənarda götürərək (47.16) həllini qrafiki təsvir edək. V həcminin daxilində O koordinat başlanğıcından $\vec{r}'$ məsafəsində yerləşmiş $(d\vec{r}')$ həcm elementini götürək. Bu həcm elementində yerləşmiş elementar yük $\rho(\vec{r}')(d\vec{r}')$ olacaqdır. P müşahidə nöqtəsinin radius vektoruna $\vec{r}$ desək, onun $\rho(\vec{r}')(d\vec{r}')$ elementar yükdən olan məsafəsi $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ olacaqdır. Kulon qanuna görə bu elementar yükü $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ məsafəsinə bölsək həmin yükün müşahidə nöqtəsində yaratdığı elementar elektrostatik potensialı almış olarıq: $\dfrac{\rho(d\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

Yuxarıdakı (47.16) düsturunda yazılmış inteqral belə elementar potensialların superpozisiyasıdır, məcmuidir. Beləliklə, (47.16) ifadəsi Kulon qanunun geniş formasıdır. Bu düstur sükunətdəki elektrik yükləri kəsilməz paylandığı halda onların yaratdığı elektrostatik potensialı ifadə edir. Şəkil 47.1 bu düsturu qrafiki təsvir edir.



Şəkil **47.1**

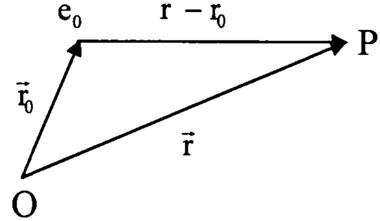
(47.16) düsturunda yüklərin münasib paylanma funksiyalarını ($\rho(\vec{r}')$) verməklə onların yaratdığı potensialları hesablaya bilərik. Ən sadə misal olaraq radius vektoru $\vec{r}_0$ olan nöqtəvi e_0 yükünün müşahidə nöqtəsində yaratdığı potensialı hesablayaq. Bunun üçün nöqtəvi yükün paylanma funksiyasını $\rho(\vec{r}') = e_0\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)$ şəklində seçmək lazımdır. Bunu (47.16)-da nəzərə alaraq $\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)$ funksiyasının köməyi ilə inteqralı açsaq

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{e_0\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}(d\vec{r}') = \frac{e_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \qquad (47.17)$$

alarıq. Əgər yük koordinat başlanğıcında yerləşirsə ($\vec{r}_0 = 0$)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e_0}{r} \qquad (47.17')$$

olar.



Şəkil **47.2**

Bu yükün yaratdığı sahənin intensivliyini hesablayaq.

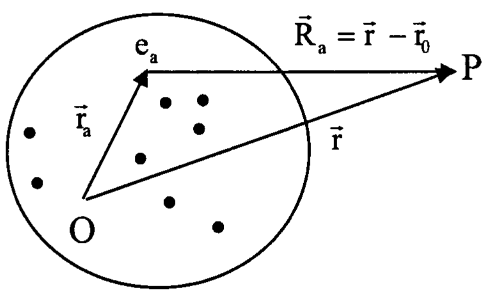
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\varphi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\frac{e_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{e_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}_0| =$$

$$= \frac{e_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \equiv \frac{e_0\vec{R}}{R^3},$$

burada $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$. İstənilən funksiyanın qradiyentini hesablayanda, yəni $\vec{\nabla}$ ilə funksiyaya təsir etdikdə əvvəlcə funksiyanın öz arqumentinə görə (bizdə arqument $|\vec{r}-\vec{r}_0|$-dır) törəməsini hesablayır və sonra $\vec{\nabla}$ ilə arqumentə təsir edərək nəticəni əvvəlki törəməyə vururlar. Burada $\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}_0| \equiv \vec{\nabla}|\vec{r}_0-\vec{r}| = \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$. Bu hesablamalarda dəyişən kəmiyyət müşahidə nöqtəsinin koordinatlarıdır (yəni $\vec{r}$-dir).

Yüklərin diskret paylandığı halda potensialın ifadəsini tapmaq üçün (47.16) düsturundan istifadə edəcəyik. Fərz edək ki, V həcmində N-sayda diskret nöqtəvi yük yerləşmişdir. Bu yüklərin sıxlığı δ-funksiya vasitəsilə aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a). \tag{47.18}$$



Şəkil 47.3

Burada e_a və $\vec{r}_a$ a-cı zərrəciyin yükü və radius vektorudur. Bu ifadəni (47.16) düsturunda nəzərə alaraq inteqralı δ-funksiya vasitəsilə hesablasaq

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (d\vec{r}') = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{R_a} \qquad (47.19)$$

alırıq. Burada $R_a = |\vec{r} - \vec{r}_a|$-dır. (47.19) düsturu diskret paylanmış yüklərin yaratdığı elektrostatik sahənin potensialıdır. Bu düstur şəkil 47.3-də qrafiki təsvir olunmuşdur.

§48. Elektrostatik sahənin enerjisi. Elektronun klassik radiusu

Biz elektromaqnit sahəsinin enerji sıxlığını $w = \dfrac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}$ şəklində yazmışıq ~~(bax: (39.7))~~. Burada $\vec{H} = 0$ yazaraq elektrostatik sahənin enerji sıxlığı üçün $w_{els} = \dfrac{\vec{E}^2}{8\pi}$ ifadəsini alırıq. Bu düsturdan istifadə edərək elektrostatik sahənin enerjisini potensiallar və yüklər vasitəsilə ifadə edəcək və elektrostatikanın əsas xarakteristikalarını çox asanlıqla alacağıq. Sonsuz fəzada yalnız elektrostatik sahə olduğunu fərz edərək onun tam enerjisini hesablayaq:

$$U = \int_{V_\infty} \frac{\vec{E}^2}{8\pi} (d\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \vec{E} \cdot \vec{E} (d\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \vec{E} \cdot (-\vec{\nabla}\varphi)(d\vec{r}) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int_{V_\infty} \left\{ \vec{\nabla}(\vec{E}\varphi) - \varphi(\nabla\vec{E}) \right\} dV = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \vec{E}\varphi d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \varphi\rho(d\vec{r}) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \varphi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) (d\vec{r}). \qquad (48.1)$$

Biz burada $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ olduğunu nəzərə aldıq, $\vec{E}(-\vec{\nabla}\varphi)$ ifadəsinin şəklini vektor analizindən istifadə edərək dəyişdik, alınmış birinci inteqrala Qauss teoremini tətbiq etdik və sonsuz sərhəddə sahə olmadığından bu inteqralı atdıq və ikinci inteqralda Maksvell tənliyindən $(\vec{\nabla}\vec{E}) \equiv \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ yazdıq. Sonuncu inteqralda yük sonlu V həcmində paylandığından $V_\infty = V$ qəbul etdik.

Enerjinin ifadəsini yığcam şəkildə yazaq:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec r)\varphi(\vec r)(d\vec r). \qquad (48.1')$$

Bu, yüklərin kəsilməz paylandığı hal üçün yazılmış elektrostatik sahənin enerjisidir. ~~Biz potensialın əvvəlki §-da verilmiş (47.16) ifadəsindən istifadə etsək~~, elektrostatik sahənin enerjisini başqa şəkildə yaza bilərik:

$$U = \frac{1}{2}\int_V\int_V \frac{\rho(\vec r)\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}(d\vec r)(d\vec r'). \qquad (48.1'')$$

İndi yüklərin diskret paylandığı hal üçün elektrostatik sahənin enerjisini yazaq. Fərz edək ki, N-sayda nöqtəvi e_1, e_2, ...e_n yükü fəzanın $\vec r_1, \vec r_2, ...\vec r_n$ nöqtələrində sükunət halında yerləşmişdir. Bu yüklərin paylanma sıxlığı

$$\rho(\vec r) = \sum_{a=1}^{N} e_a\delta(\vec r - \vec r_a) \qquad (48.2)$$

şəklində verilir. (48.2)-ni (48.1)-də nəzərə alaq və δ-funksiyanın köməyi ilə inteqralı açaq:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sum_{a=1}^{N} e_a\delta(\vec r - \vec r_a)\varphi(\vec r)(d\vec r) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} e_a\varphi(\vec r_a) \equiv \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} e_a\varphi_a. \qquad (48.3)$$

Burada $\varphi(\vec r_a) \equiv \varphi_a$ bütün yüklərin e_a yükünün yerləşdiyi nöqtədə yaratdığı potensialdır.

(48.3) düsturunu bir ədəd nöqtəvi yükə tətbiq etdikdə çox mühüm çətinliklə üzləşirik. Doğrudan da, fərz edək ki, bir ədəd elementar yük vardır. Onun yaratdığı elektrostatik sahənin enerjisi $U_1 = \frac{1}{2}e_1\varphi_1$ olacaqdır. Burada φ_1 e_1 yükünün özü olduğu nöqtədə yaratdığı potensialdır, yəni $\varphi_1 = \frac{e_1}{r_1}\underset{r_1\to 0}{\longrightarrow}\infty$! Deməli nöqtəvi yükün yaratdığı sahənin $U_1 = \frac{e_1 e_1}{2r_1}$ enerjisi sonsuz böyük olur. Bu enerjiyə *nöqtəvi yükün məxsusi enerjisi* deyilir. Deməli $U_{max} \to \infty$ olur. Bu, mənasız, absurd nəticədir!

Bu zərrəciyin kütləsinə məxsusi kütlə desək, o da sonsuz böyük olacaqdır:

$$m_{max.} = \frac{U_{max.}}{c^2} \to \infty!$$

Bu nəticə də mənasızdır. Bu onu göstərir ki, klassik elektrodinamika müəyyən tətbiq edilmə hüduduna, sərhədinə malikdir. Bu hüduddan kiçik məsafələrdə klassik elektrodinamika daxili ziddiyyətə malik olur; o, özü-özünə zidd olur. Bu hüdudu təyin etmək üçün fərz etmək lazımdır ki, nöqtəvi yük müəyyən şərti r_0 radiusuna, ölçüsünə malikdir. Onda nöqtəvi yükün yaratdığı elektrostatik enerji $U_1 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_0}$ olur. Əgər fərz etsək ki, nöqtəvi yükün bütün enerjisi yalnız elektromaqnit təbiətinə malikdir, onda gərək

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_0} \leq mc^2$$

olmalıdır. Burada mc^2 Eynşteynin verdiyi sükunət enerjisidir, m isə zərrəciyin kütləsidir. Buradan $\frac{1}{2}$ vuruğu dəqiqliyi ilə

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \tag{48.4}$$

alırıq. Bu üsulla tapılmış r_0 klassik elektrodinamikanın tətbiq edilmə hüdudunu ifadə edir. r_0-dan kiçik məsafələrə klassik elektrodinamikanı tətbiq etmək olmaz. Əgər biz Kvant effektlərini nəzərə alsaq, göstərə bilərik ki, elektrodinamikanın tətbiq edilmə hüdudu r_0-dan böyük olmalıdır. Yuxarıda apardığımız mülahizə «Kütlənin elektromaqnit nəzəriyyəsi» bəhsinə məxsusdur.

İndi nöqtəvi yük olaraq elektronu götürsək və (48.4) düsturunda $m=9{,}1\cdot10^{-28}$q, $c=3\cdot10^{10}\,\frac{sm}{san}\cdot e=-4{,}8\cdot10^{-10}(SGSE)_q$ yazsaq

$$r_0 = 2{,}8\cdot10^{-13}sm = 2{,}8f(\text{fermi})$$

alırıq. Bu elektronun klassik radiusudur. Digər zərrəciklərin (p, μ, τ və s.) kütlələri böyük olduğuna görə onların klassik radiusu elektronunkundan kiçik olacaqdır.

Qeyd edək ki, kvant-elektrodinamik proseslərin, məsələn Kompton effekti, elektron-pozitron cütünün ikifotonlu doğulmasının və s. effektiv kəsikləri πr_0^2 ilə mütənasibdir. Bu onu göstərir ki, elektronun klassik radiusu müəyyən dərəcədə realdır.

İndi (48.3) düsturunu 2 yükün olduğu hala tətbiq edək.

$$U=\frac{1}{2}(e_1\varphi_1+e_2\varphi_2)=\frac{1}{2}\{e_1(\varphi_{11}+\varphi_{12})+e_2(\varphi_{21}+\varphi_{22})\}=$$

$$=\frac{1}{2}(e_1\varphi_{11}+e_2\varphi_{22})+\frac{1}{2}(e_1\varphi_{12}+e_2\varphi_{21}). \qquad (48.5)$$

Bu yazılışda φ_{11} həddi e_1-nin özü olduğu nöqtədə yaratdığı potensial, φ_{12} həddi e_2-nin e_1-in olduğu nöqtədə yaratdığı potensialdır. Eyni şəkildə φ_{22} həddi e_2-nin özü olduğu nöqtədə yaratdığı potensial, φ_{21} isə e_1-in e_2 olduğu nöqtədə yaratdığı potensialdır. U-nun ifadəsində birinci mötərizə e_1 və e_2 yüklərinin məxsusi enerjilərinin cəmidir. Yuxarıda göstərdik ki, məxsusi enerji zərrəciyin sükunət enerjisidir. Ona görə baxdığımız birinci mötərizə $m_1c^2+m_2c^2$ olmalıdır və biz bunu atsaq, zərrəciklərin qarşılıqlı təsir enerjisi üçün

$$U'=\frac{1}{2}(e_1\varphi_{12}+e_2\varphi_{21})=\frac{e_1e_2}{r_{12}} \qquad (48.5)$$

ifadəsini alırıq. Burada $\varphi_{12}=\frac{e_2}{r_{12}}$ və $\varphi_{21}=\frac{e_1}{r_{21}}$-dir, $r_{12}=r_{21}$ isə e_2 ilə e_1 arasında və e_1 ilə e_2 arasındakı məsafədir: $\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$. Zərrəciklərin sayı çoxdursa U'-i belə yazmaq olar:

$$U'=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\ a\neq b}}\frac{e_ae_b}{r_{ab}}=\sum_{\substack{a,b\\ a\angle b}}\frac{e_ae_b}{r_{ab}}. \qquad (48.5'')$$

Beləliklə, zərrəciklərin (yüklərin) qarşılıqlı təsir enerjisi və ya baxdığımız sistemin potensial enerjisi (48.5") düsturu ilə ifadə olunur. Mexanikada olduğu kimi burada da a zərrəciyinə təsir edən qüvvəni aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

$$\vec{F}_a=-\vec{\nabla}_aU',$$

burada $\vec{\nabla}_a=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x_a}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y_a}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z_a}$ və şərti olaraq $\vec{\nabla}_a\to\frac{\partial}{\partial\vec{r}_a}$-dır.

Biz U ifadəsini ümumi halda (48.2) paylanmasını (48.1")-də nəzərə almaqla hesablaya bilərik:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} = \frac{1}{2}\sum_{a}\frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_a|} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\ a\neq b}}\frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}. \tag{48.6}$$

Burada birinci cəm zərrəciklərin məxsusi enerjisidir, yəni onların sükunət enerjilərinin cəmidir. Onu ataraq

$$U' = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\ a\neq b}}\frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} = \sum_{\substack{a,b\\ a\angle b}}\frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \tag{48.6'}$$

ifadəsini alırıq. Bu düstur (48.5") ilə üst-üstə düşür.

§49. Yüklər sisteminin dipol momenti və onun sahəsi

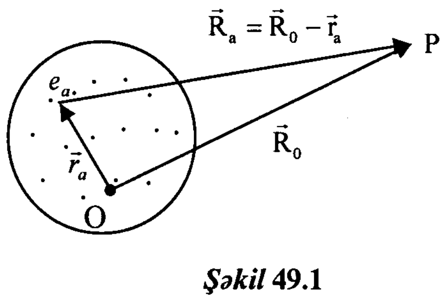
Biz yüklər sisteminin yaratdığı potensialdan istifadə edəcəyik və gələcəkdə həmişə O koordinat başlanğıcından müşahidə nöqtəsinə qədər olan məsafəyə $\vec{R}_0$ deyəcəyik: $\vec{r} \equiv \vec{R}_0$.

Bunu (47.19) ifadəsində nəzərə alsaq

$$\varphi(\vec{R}_0) = \sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|} \tag{49.1}$$

olar. Bu düstur superpozisiya prinsipini ifadə edir: yüklər sisteminin yaratdığı sahə ayrı-ayrı yüklərin yaratdığı sahələrin cəminə bərabərdir. Əgər yüklərin sayı çoxdursa və onlar bir-birinə çox yaxın yerləşmişdirsə bu düsturdan istifadə etmək əlverişli olmur. Onda yüklər sistemindən çox uzaq məsafədə sahəyə baxırlar (şəkil 49.1):

$$R_0, R_a >> r_a. \tag{49.2}$$



Şəkil **49.1**

Aşağıda göstərəcəyik ki, bu zaman $\varphi(\vec{R}_0)$ funksiyası sadələşir və bəsit sistemlərin cəmi şəklində göstərilir. Bunun üçün biz (49.1) ifadəsini kiçik $\frac{r_a}{R_0} << 1$ parametrinin üstlərinə görə üç qat Teylor sırasına ayıracağıq. (49.1) ifadəsində $\left|\vec{R}_0 - \vec{r}_a\right|^{-1}$ funksiyası iştirak edir. Gələcəkdə biz $\left|\vec{R}_0 \mp \vec{r}_a\right|$ arqumentindən asılı olan və yuxarıdakı funksiyaya oxşar olan funksiyalarla məşğul olacağıq. Bu funksiyaları şərti olaraq $f(\vec{R}_0 \mp \vec{r}_a)$ ilə işarə edək və sıraya ayıraq. Bu funksiyaların arqumentinin proyeksiyalarında sadəlik xətrinə o və a indekslərini yuxarıda yazacağıq: $\vec{R}_0 \mp \vec{r}_a \to X^0 \mp x^a, Y^0 \mp y^a, Z^0 \mp z^a$. İndi $f(\vec{R}_0 \mp \vec{r}_a)$ funksiyasını 3 arqumentə görə Teylor sırasına ayıraq:

$$f(\vec{R}_0 \mp \vec{r}_a) = f(\vec{R}_0) \mp x^a \frac{\partial f}{\partial X^0} \mp y^a \frac{\partial f}{\partial Y^0} \mp z^a \frac{\partial f}{\partial Z^0} + \frac{1}{2!}\left(x^{a2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^{02}} + \right.$$

$$\left. + y^{a2} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^{02}} + z^{a2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^{02}} + 2x^a y^a \frac{\partial^2 f}{\partial X^0 \partial Y^0} + \ldots \right) \mp \frac{1}{3!}\left(x^{a3} \frac{\partial^3 f}{\partial X^{03}} + \ldots \right) + \ldots =$$

$$= f(\vec{R}_0) \mp x_i^a \frac{\partial f}{\partial X_i^0} + \frac{1}{2!} x_i^a x_j^a \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^0 \partial X_j^0} \mp \frac{1}{3!} x_i^a x_j^a x_k^a \frac{\partial^3 f}{\partial X_i^0 \partial X_j^0 \partial X_k^0} + \ldots \quad (49.3)$$

Burada təkrar olunan i, j, k... indeksləri üzrə cəmləmə aparıldığı nəzərdə tutulur. Bu kitabda müxtəlif funksiyaların Teylor sırasına ayrılışında (49.3) düsturundan istifadə edəcəyik.

~~İndi bilavasitə~~ sistemin dipol momentini hesablayaq. ~~Bunun üçün~~ (49.3) düsturunu (49.1) ifadəsində yerinə yazaq və $f(\vec{R}_0 - \vec{r}_a) = \frac{1}{\left|\vec{R}_0 - \vec{r}_a\right|}$ ~~olduğunu nəzərə alaq~~:

$$\varphi(\vec{R}_0) = \frac{Q}{R_0} - \sum_{a=1}^{N} e_a x_i^a \frac{\partial}{\partial x_i^0} \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2!} \sum_{a=1}^{N} e_a x_i^a x_j^a \frac{\partial^2}{\partial x_i^0 \partial x_j^0} \frac{1}{R_0} + \ldots =$$

$$= \varphi^{(0)}(\vec{R}_0) + \varphi^{(1)}(\vec{R}_0) + \varphi^{(2)}(\vec{R}_0) + \varphi^{(3)}(\vec{R}_0) + \ldots \quad (49.4)$$

Biz yüklər sisteminin potensialını kiçik parametrin üstlərinə görə sıraya ayırdıq və bu sırada hər bir həddin konkret mənası vardır. Yüklər sisteminin tam yükünə $Q=\sum_{a=1}^{N} e_a$ deyək. (49.4) sırasının birinci həddi $\varphi^{(0)}(\vec{R}_0)=\frac{Q}{R_0}$-dır. Bu O nöqtəsində yerləşmiş nöqtəvi tam Q yükünün P müşahidə nöqtəsində yaratdığı sahənin potensialıdır. Bu, sıranın birinci həddidir və ən böyük kəmiyyətdir. Əgər sistem elektroneytraldırsa, yəni $Q=\sum_{a=1}^{N} e_a$ =0-dırsa bu hədd sıfır olur və sıra ikinci həddən başlayır.

Sıranın ikinci həddi $\varphi^{(1)}(\vec{R}_0)=-\sum_{a=1}^{N} e_a x_i^a \frac{\partial}{\partial X_i^0}\frac{1}{R_0}$-dır. Aşağıda görəcəyik ki, bu hədd yüklər sisteminin dipol momentini xarakterizə edir. Bu potensialın şəklini bir az dəyişdirək:

$$\varphi^{(1)}(\vec{R}_0)=-\sum_{a=1}^{N} e_a \vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}=-\vec{d}\vec{\nabla}\frac{1}{R_0}=\frac{\vec{d}\vec{R}_0}{R_0^3}. \qquad (49.5)$$

Burada

$$\vec{d}=\sum_{a=1}^{N} e_a \vec{r}_a \qquad (49.6)$$

kəmiyyəti yüklər sisteminin *elektrik dipolu momenti* adlanır. O, sistemin ölçüsündən və yüklərin paylanma xarakterindən asılıdır və elektroneytral sistemin birinci xarakteristikasıdır. Əvvəlki §-larda göstərdiyimiz kimi burada da

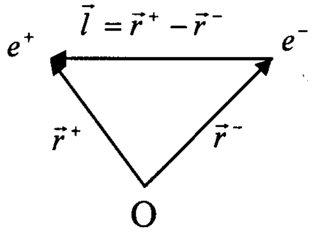
$$\vec{\nabla}\frac{1}{R_0}=-\frac{1}{R_0^2}\vec{\nabla}R_0=-\frac{1}{R_0^2}\cdot\frac{\vec{R}_0}{R_0}=-\frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

olur.

(49.5) ifadəsi O-da yerləşmiş elektrik dipolunun p müşahidə nöqtəsində yaratdığı elektrostatik sahənin potensialıdır. (49.6) düsturu xüsusi halda elementar dipol momentini təsvir edir. Doğrudan da fərz edək ki, sistem bir-birinə çox yaxın yerləşmiş, qiymətcə bərabər, işarəcə əks müsbət və mənfi iki yükdən, yəni $e_1=e^+$ və $e_2=e^-=-e^+$ yükündən ibarətdir. Onda (49.6) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

$$\vec{d}=e_1\vec{r}_1+e_2\vec{r}_2=e^+\vec{r}^{\,+}+e^-\vec{r}^{\,-}=e^+(\vec{r}^{\,+}-\vec{r}^{\,-})=e^+\vec{l}\,.$$

Burada $\vec{l}$ mənfi yükdən müsbət yükə yönəlmiş radius vektordur. Ona *dipolun qolu* deyilir (şəkil 49.2).



Şəkil **49.2**

Ümumi halda (49.6) ifadəsi çoxlu sayda elementar dipol momentlərinin vektorı cəmidir. Biz bu cəmi başqa bir şəkildə də ifadə edə bilərik. Fərz edək ki, yüklər sistemi elektroneytraldır:

$$\sum_{a=1}^{N} e_a = \sum_{a=1}^{f} e_a^+ + \sum_{a=f+1}^{N} e_a^- = 0, \text{ yəni } \sum_{a=f+1}^{N} e_a^- = -\sum_{a=1}^{f} e_a^+ .$$

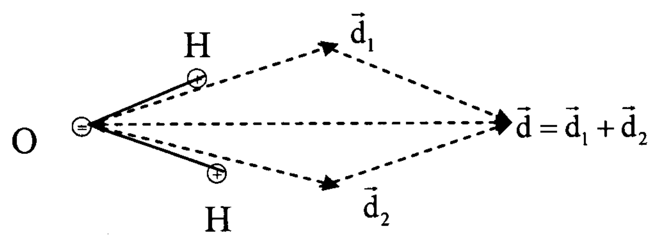
(49.6)-nın şəklini bir az dəyişdirək:

$$\vec d = \sum_{a=1}^{f} e_a^+ \vec r_a^+ + \sum_{a=f+1}^{N} e_a^- \vec r_a^- = \frac{\sum e_a^+ \vec r_a^+}{(\sum e_a^+)}(\sum e_a^+) + \frac{\sum e_a^- \vec r_a^-}{(\sum e_a^-)}(\sum e_a^-) =$$

$$= (\sum e_a^+)(\vec R^+ - \vec R^-) = Q^+ \vec{\mathscr{L}}^{+-}. \qquad (49.6')$$

Burada $\vec R^+$ və $\vec R^-$ müsbət və mənfi yüklərin paylanma mərkəzlərinin radius vektorlarıdır, yəni $\vec R^+ = \sum e_a^+ \vec r_a^+ / \sum e_a^+$ və s., $Q^+ = \sum_{a=1}^{f} e_a^+$ sistemin müsbət yükünün miqdarıdır, $\vec{\mathscr{L}}^{+-}$ mənfi və müsbət yük mərkəzləri arasındakı məsafədir, yəni böyük dipolun qoludur. Mənfi və müsbət yük mərkəzləri üst-üstə düşərsə $\vec{\mathscr{L}}^{+-} = 0$ olar və sistemin dipol momenti sıfıra çevrilər.

Beləliklə, hər cür neytral yüklər sistemi elektrik dipolu momentinə malik olmur. Məsələn, sərbəst atomların, eyni atomlardan təşkil olunmuş molekulların (H_2, O_2 və s.) dipol momentləri sıfırdır. Çünki bunlarda + və – yük mərkəzləri üst-üstə düşür. Lakin başqa növ molekullar (H_2O, HCl, NH_3 və s.) dipol momentinə malikdir. Su molekulunun dipol momenti ən böyük qiymətə malikdir və bu da su maddəsinin mürəkkəb quruluşa və müxtəlif növlərə malik olmasını və onun təbiətdə oynadığı mühüm rolu təmin edir. Sxematik olaraq su molekulu əmələ gələndə hər bir hidrogen atomu öz elektronunu oksigenə verərək müsbət iona çevrilir, oksigen atomu isə 2 qat mənfi iona çevrilir. Su molekulunun hər bir qolu dipol momentinə malik olur və bu moment qol boyunca yönəlir. Onların vektori cəmi olan tam moment $\vec d = \vec d_1 + \vec d_2$ qollar arasındakı bucağın bissektrisi boyunca yönəlir. Bu qolların uzunluğunu və onlar arasındakı bucağı şərti götürmüşük və qolların dipol momentlərini qırıq xətlə çəkmişik (şəkil 49.3).



Şəkil **49.3**

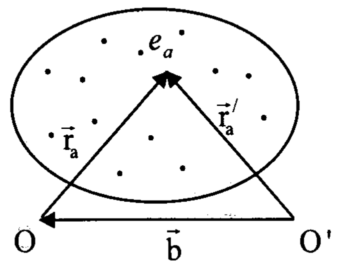
Dipol momentinin ölçü vahidi olaraq 1 Debay götürülür. Bunu müəyyən edək. Məlumdur ki, molekulda dipol momenti elektronun bir atomdan digərinə keçməsi zamanı yaranır və molekulda atomlar arasındakı məsafə atomun ölçüsü tərtibindədir. Onda bir elektronun keçməsi zamanı yaranan dipol momenti $\vec{d} = r_{atom} \cdot |e_{el}| = k \cdot 10^{-8}\text{sm} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}(\text{SGSE})_q =$ $= k' \cdot 10^{-18}\text{sm}\ (\text{SGSE})_q = k'\text{Debaj}$ olur. Burada 1 Debay$=10^{-18}(\text{SGSE})_q$sm-dir. Yuxarıda k ədədi atom radiusunun əmsalı və k'=4,8 k-dır.

Məlumdur ki, su molekulunun dipol momenti 2,6 Debaydır.

Təcrübələr göstərir ki, elementar zərrəciklərin (e, p, n və s.) elektrik dipolu momentləri sıfırdır, lakin maqnit dipolu momentləri sıfırdan fərqlidir.

Yüklər sisteminin dipol momentinin 2 mühüm xassəsini qeyd edək:

1. Elektroneytral sistemin dipol momenti koordinat başlanğıcının seçilməsindən asılı deyildir. Doğrudan da bir birindən $\vec{b}$ məsafəsində yerləşən O və O' koordinat başlanğıclarına nəzərən sistemin dipol momentini hesablayaq (şəkil 49.4).



Şəkil **49.4**

$$\vec{d}' = \sum_a e_a \vec{r}_a' = \sum_a e_a(\vec{r}_a+\vec{b}) = \sum_a e_a\vec{r}_a + \vec{b}\sum_a e_a = \sum_a e_a\vec{r}_a = \vec{d}. \qquad (49.7)$$

Burada $\vec{d}'$ və $\vec{d}$ sistemin O' və O başlanğıclarına görə dipol momentləridir, $\vec{r}_a' = \vec{b}+\vec{r}_a$ -dır və elektroneytrallığa görə $\sum_a e_a = 0$.

2. Elektroneytral olmayan yüklər sisteminin dipol momenti istənilən qiymət ala bilər. Doğrudan da əgər $\sum_a e_a \neq 0$ olarsa ~~(49.7) düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar~~. $\vec{d}' = \sum_a e_a\vec{r}_a + \vec{b}(\sum_a e_a)$. Burada $\vec{b}$-ni istənilən şəkildə seçsək $\vec{d}'$ ixtiyari qiymət alar. Xüsusi halda $\vec{b} = -\sum e_a\vec{r}_a / \sum e_a$ olarsa $\vec{d}'$ momenti sıfıra çevrilər:

$$\vec{d}' = \sum e_a\vec{r}_a - \frac{\sum(e_a\vec{r}_a)}{\sum e_a}(\sum e_a) = \sum e_a\vec{r}_a - \sum e_a\vec{r}_a = 0.$$

Ona görə elektrik dipolu momentini yalnız elektroneytral sistemlər üçün təyin edirlər.

Yüklər kəsilməz paylandıqda dipol momentini

$$\vec{d} = \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})(d\vec{r}) \qquad (49.6'')$$

şəklində yazmaq olar. Doğrudan da biz burada nöqtəvi yüklər üçün $\rho(\vec{r}) = \sum e_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$ yazsaq, çox asanlıqla (49.6) düsturunu alarıq.

Potensialın (49.5) ifadəsindən görünür ki, dipol momenti istiqamətində potensial maksimum qiymət alır. Potensialın ifadəsindən istifadə edərək dipolun yaratdığı sahənin $\vec{E}$ intensivliyini hesablayaq:

$$\vec{E}(\vec{R}_0) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{R}_0) = -\vec{\nabla}\frac{(\vec{d}\vec{R}_0)}{R_0^3} = -(\vec{d}\vec{R}_0)\vec{\nabla}\frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{R_0^3}\vec{\nabla}(\vec{d}\vec{R}_0).$$

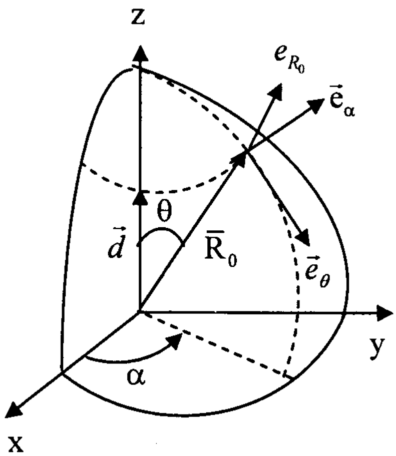
Buradakı sadə hesablamaları (bax əlavə) $\vec{\nabla}\frac{1}{R_0^3} = -3R_0^{-4}\vec{\nabla}R_0 = -\frac{3\vec{R}_0}{R_0^5}$ və $\vec{\nabla}(\vec{d}\vec{R}_0) = \vec{d}$ apararaq, nəticədə

$$\vec{E} = \frac{3\vec{R}_0(\vec{R}_0\vec{d}) - \vec{d}R_0^2}{R_0^5} \qquad (49.8)$$

ifadəsini alırıq. Bu ümumi ifadənin sferik koordinat sistemində (R, θ, α) proyeksiyalarını hesablayaq. Polyar oxunu $\vec{d}$ vektoru boyunca yönəldək və $\vec{d}$ ilə $\vec{R}_0$ (və ya $\vec{e}_{R_0}$) arasındakı bucağa θ deyək. $\vec{d}$ ilə $\vec{e}_\theta$ arasındakı bucaq $\theta+\pi/2$ olacaqdır. $\vec{E}$-nin $\vec{e}_{R_0}$ üzrə proyeksiyasına E_R, $\vec{e}_\theta$ üzrə proyeksiyasına E_θ və $\vec{e}_\alpha$ üzrə proyeksiyasına E_α desək (şəkil 49.5)

$$E_{R_0}=\frac{3R_0^2 d\cos\theta-R_0^2 d\cos\theta}{R_0^5}=\frac{2d}{R_0^3}\cos\theta,$$

$$E_\theta=-\frac{dR_0^2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{R_0^5}=\frac{d}{R_0^3}\sin\theta,\ E_\alpha=0, \tag{49.9}$$



Şəkil **49.5**

olar. Buradan görünür ki, $\vec{E}$ meridian (uzunluq) müstəvisində yerləşmişdir və $\vec{d}$ istiqamətində ($\theta=0$) ən böyük qiymətə malikdir. $E^2=\frac{d^2}{R_0^6}(1+3\cos^2\theta)$ ifadəsindən də görünür ki, $\theta=0$ olduqda E maksimum qiymət alır. Bu ifadələrdən çıxır ki, E ox simmetriyasına malikdir, yəni doğuranının uzunluğu R_0 və açılış bucağı 2θ olan konusun oturacaq çevrəsinin bütün nöqtələrində E eyni qiymətə malikdir. Dipolun yaratdığı sahənin potensialı və intensivliyinin məsafədən asılılığı $\sim\frac{1}{R_0^2}$ və $\sim\frac{1}{R_0^3}$ şəklindədir.

Sadə halda dipol iki polyuslu (2-pol) sistem deməkdir: $\oplus\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\ominus$. Bir-birinə çox yaxın yerləşmiş qiymətcə bərabər + və – yük dipol yaradır. Yüklərin sayı çox olduqda da sistem buna oxşar olur (bax: (49.6')).

§50. Yüklər sisteminin kvadrupol və multipol momentləri və onların sahələri

Yüklər sisteminin kvadrupol momenti və onun yaratdığı sahə [illegible] sıra[illegible]nın 3-cü həddi ilə təsvir edilir: $\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)=\frac{1}{2}\sum\limits_{a=1}^{N}e_a x_i^a x_j^a\frac{\partial^2}{\partial X_i^0 X_j^0}\frac{1}{R_0}$. Bu potensialın şəklini bir qədər dəyişdirək. Bunun üçün Qrin funksiyasının ödədiyi ~~(47.12)~~ tənliyində Qrin funksiyasının $G(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ([illegible]) ifadəsini nəzərə alaq: $\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$. Əgər $R=|\vec{r}-\vec{r}'|\neq 0$ olarsa, $\delta(\vec{r}-\vec{r}')=0$ olar və $\frac{1}{R}$ Laplas tənliyini ödəyər: $\vec{\nabla}^2\frac{1}{R}=0$. Beləliklə, sıfırdan fərqli istənilən R və ya R_0 Laplas tənliyini ödəyir. Laplas tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{R_0}\equiv\frac{\partial^2}{\partial X_i^{02}}\frac{1}{R_0}\equiv\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\frac{1}{R_0}=0.$$

Bu sıfırı $\frac{\nu}{2}$-yə vuraq və $\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)$ ilə toplayaq:

$$\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)=\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)+\frac{\nu}{2}\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\frac{1}{R_0}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{a=1}^{N}e_a x_i^a x_j^a+\delta_{ij}\nu\right)\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\frac{1}{R_0}. \qquad (50.1)$$

Burada mötərizə içərisindəki ifadə iki ranqlı tenzordur və onu K_{ij} ilə işarə edək. Ona daxil olan ν parametrini elə seçək ki, bu tenzorun diaqonal elementlərinin cəmi (izi) sıfır olsun:

$$K_{ii}=K_{11}+K_{22}+K_{33}=0. \qquad (50.2)$$

Bu bərabərlikdən ν-nü təyin edirik:

$$\sum_a e_a(x_1^{a2}+x_2^{a2}+x_3^{a2})+3\nu=0 \text{ və ya } \nu=-\frac{1}{3}\sum_a e_a\vec{r}_a^{\,2}$$

olur. Bunu (50.1)-də nəzərə alaq:

$$\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)=\frac{1}{6}\sum_a e_a(3x_i^a x_j^a-\delta_{ij}\vec{r}_a^{\,2})\frac{\partial^2}{\partial X_i^0 X_j^0}\frac{1}{R_0}. \qquad (50.1')$$

Burada a indekslərindən asılı olan cəm üç ölçülü iki ranqlı tenzordur və onu D_{ij} ilə işarə edək:

$$D_{ij}=\sum e_a(3x_i^a x_j^a-\delta_{ij}\vec{r}_a^{\,2}). \qquad \cancel{(50.3)}$$

Onda $\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)$ potensialı aşağıdakı şəklə düşür:

$$\varphi^{(2)}(\vec{R}_0)=\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\frac{1}{R_0}. \qquad (50.1'')$$

Yuxarıda yazılmış D_{ij} kəmiyyəti yüklər sisteminin *kvadrupol momenti* adlanır və (50.1") ifadəsi isə O nöqtəsində yerləşmiş kvadrupolun P müşahidə nöqtəsində yaratdığı elektrostatik sahənin potensialını təsvir edir. (50.1) və (50.1') ifadələrini müqayisə edərək $D_{ij}=3K_{ij}$ münasibətini alırıq. Buradan çıxır ki, D_{ij} tenzorunun da izi sıfırdır:

$$D_{ii}=0. \qquad (50.4)$$

Kvadrupol momenti elektroneytral sistemin ikinci əsas xarakteristikasıdır. Aşağıda göstərəcəyik ki, sferik simmetrik paylanmış yüklər sisteminin kvadrupol momenti sıfıra bərabərdir. Beləliklə, kvadrupol momenti sistemin yüklərinin sferik simmetriyadan fərqli paylanmasını xarakterizə edir.

Kvadrupol momentinin ifadəsindən görünür ki, o simmetrik tenzordur ($D_{ij}=D_{ji}$). Digər tərəfdən onun izi sıfırdır ($D_{ii}=0$). Bunları nəzərə aldıqda D_{ij} tenzorunun 9 komponentindən ümumi halda yalnız 5 komponenti bir-birindən asılı olmur. Xüsusi halda bu 5 komponentin sayını azaltmaq da mümkündür. Göstərmək olar ki, elektroneytral sistemin dipol momenti sıfırdırsa, belə yüklər sisteminin kvadrupol momenti koordinat başlanğıcının seçilməsindən asılı deyildir.

Məlumdur ki, istənilən iki ranqlı simmetrik tenzoru koordinat oxlarını seçməklə diaqonal şəklə (və ya baş oxlara) gətirmək mümkündür:

$$(D'_{ij}) \to (D_{ij}) = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Kvadrupolun sahəsinin məsafədən asılılığını öyrənmək üçün (50.1") ifadəsindəki koordinata görə törəmələri hesablayaq:

$$\frac{\partial}{\partial X_j^0}\frac{1}{R_0} = -\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial X_j^0}R_0 = -\frac{1}{R_0^2}\frac{x_j^0}{R_0} = -\frac{x_j^0}{R_0^3};\ \frac{\partial^2}{\partial X_i^0 \partial X_j^0}\frac{1}{R_0} = -\frac{\partial}{\partial X_i^0}\frac{X_j^0}{R_0^3} =$$

$$= -\frac{\delta_{ij}R_0^3 - X_j^0\frac{\partial}{\partial X_i^0}R_0^3}{R_0^6} = -\frac{\delta_{ij}R_0^3 - X_j^0 3R_0^2\frac{X_i^0}{R_0}}{R_0^6} = \frac{3X_j^0X_i^0 - \delta_{ij}R_0^2}{R_0^5}.$$

Bu ifadəni (50.1") düsturunda yerinə yazaq və $D_{ij}\delta_{ij}=D_{ii}=0$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\varphi^{(2)}(\vec{R}_0) = \frac{D_{ij}X_i^0X_j^0}{2R_0^5}. \qquad (50.1''')$$

Buradan görünür ki, müəyyən əmsalları nəzərə almasaq kvadrupolun sahəsinin məsafədən asılılığı $\sim\frac{1}{R_0^3}$ şəklindədir. Yüklər kəsilməz paylandıqda dipol momentinə oxşar olaraq kvadrupol momenti aşağıdakı kimi yazılır.

$$D_{ij} = \int_V (3x_ix_j - \delta_{ij}\vec{r}^2)\rho(\vec{r})(d\vec{r}). \qquad (50.3')$$

Bu düsturdan çox asanlıqla (50.3) düsturuna keçə bilərik. İndi kvadrupol momentinin D_{33} komponentini götürək və onunla əlaqədar bəzi mülahizələr aparaq:

$$D_{33} \equiv D_{zz} = \sum_a e_a(3z^{a^2} - \vec{r}_a^2) = \sum_a e_a(2z^{a^2} - x^{a^2} - y^{a^2}). \qquad (50.4)$$

İndi göstərək ki, yüklər sferik simmetrik paylandıqda D_{ij}-nin bütün komponentləri, o cümlədən D_{33} komponenti sıfırdır. Bunu həm diskret və həm də kəsilməz paylanma halında göstərmək olar. Lakin kəsilməz paylananda bu çox asan göstərilir. Sferik simmetrik paylanmada ρ yalnız radius vektorun uzunluğundan asılıdır, onun istiqamətindən, yəni bucaqlardan asılı deyil. Bunu nəzərə alaq və (50.4) ifadəsini kəsilməz paylanma üçün yazaq:

$$D_{zz} = \int_V \rho(2z^2 - x^2 - y^2)(d\vec{r}) = \int_0^\infty \rho r^2 dr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\theta d\theta (2z^2 - x^2 - y^2).$$

Burada z=rcosθ, x=rsinθcosα, y=rsinθsinα, əvəz: x=cosθ, dx=-sinθdθ şəklindədir. Bunları D_{zz}-də yerinə yazaq:

$$D_{zz} = 2\pi \int_0^\infty \rho r^4 dr \cdot \int_{-1}^{+1} dx (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2\pi \int_0^\infty \rho r^4 dr \int_{-1}^{+1} dx (3x^2 - 1) = 0$$

D_{ij}-nin istənilən komponenti bucaqlara görə inteqralın hesabına sıfıra bərabər olur.

İndi fərz edək ki, yüklər z oxuna nəzərən simmetrik paylanmışdır. Xüsusi halda yüklər z oxuna nəzərən fırlanma simmetriyasına malikdir. Z oxu boyunca dartılmış və ya sıxılmış nüvələr belə simmetriyaya malik olur. Belə simmetriyada $D_{zz} \neq 0$ olacaqdır. Fərz edək ki D_{ij}-ni diaqonal şəklə gətirmişik və $D_{ii}=0$ şərtindən istifadə edirik:

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0 \text{ və ya } D_{11}=D_{22}=-\frac{1}{2}D_{33}. \tag{50.5}$$

Beləliklə z oxuna görə simmetrik paylanmada kvadrupol momenti bir ədəd D_{33} komponenti ilə təyin olunur, onu D ilə işarə edir və özünə də sadəcə olaraq sistemin kvadrupol momenti deyirlər. Bu dediklərimizi kvadrupolun (50.1''') sahəsində nəzərə alaq:

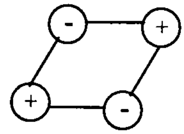
$$\varphi^{(2)}(\vec{R}_0) = \frac{D_{11}X_1^{0^2} + D_{22}X_2^{0^2} + D_{33}X_3^{0^2}}{2R_0^5} = \frac{D(2X_3^{0^2} - X_1^{0^2} - X_2^{0^2})}{4R_0^5} =$$

$$= \frac{D}{4R_0^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3}P_2(\cos\theta). \tag{50.6}$$

Burada koordinatların sferik sistemdəki $X_1^0 = R_0 \sin\theta\cos\alpha$, $X_2^0 = R_0 \times \sin\theta\sin\alpha$, $X_3^0 = R_0\cos\theta$ ifadələrindən istifadə etmişik və $P_2(\cos\theta) = = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ düsturunun ikinci tərtib Lejandr polinomu olduğunu nəzərə almışıq. İstənilən tərtib Lejandr polinomu

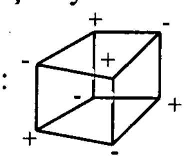
$$P_\ell^{(x)} = \frac{1}{2^\ell \cdot \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2 - 1)^\ell$$

şəklindədir.

Sadə kvadrupol 4 polyuslu (4-pol) sistemdir. Bir-birinə çox yaxın antiparalel yerləşmiş iki dipol kvadrupol əmələ gətirir: . Bu iki dipol bir-birini dipol kimi neytrallaşdırır, lakin özlərini kvadrupol kimi (büruzə verir) aşkar edir. Dipolların sayı çox olduqda da sistem buna oxşar olur.

(49.4) sırasında kvadrupoldan sonrakı hədd *oktupolun sahəsi* adlanır:

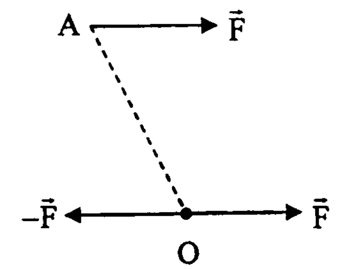
$$\varphi^{(3)}(\vec{R}_0) = -\frac{1}{3!}\sum_0 e_a x_i^a x_j^a x_k^a \frac{\partial^3}{\partial X_i^0 \partial X_j^0 \partial X_k^0}\frac{1}{R_0}.$$

Sadə oktupol 8 polyuslu (8-pol) sistemdir. Bir birinə çox yaxın və antiparalel yerləşmiş iki kvadrupol oktupol əmələ gətirir: . Oktupoldan sonra gələn hədlər *multipollar* adlanır. Ədəbiyyatda isə adətən kvadrupoldan sonra gələn hədlər *multipollar* adlanır. Multipol sahələrinin məsafədən asılılığı $\varphi^{(n)}(\vec{R}_0) \sim \frac{1}{R_0^{n+1}}$ şəklindədir.

§51. Klassik mexanikanın yüklər sisteminin momentlərinə tətbiqi.

Klassik mexanikadan məlumdur ki, cismin hər hansı nöqtəsinə təsir edən sərbəst qüvvəni müəyyən qanunla cismin digər nöqtəsinə köçürmək olar. Fərz edək ki, cismin A nöqtəsinə $\vec{F}$ qüvvəsi təsir edir. Bu qüvvəni O nöqtəsinə köçürmək üçün cismin O nöqtəsinə bir-birinin əksinə yönəlmiş iki qüvvə, yəni $-\vec{F}$ və $\vec{F}$ qüvvəsi ilə təsir edirlər. Bu zaman sistemin əvvəlki müvazinət halı pozulmur. Nəticədə biz O-ya təsir edən $\vec{F}$ qüvvəsini və $-\vec{F}$-lə A-ya təsir edən $\vec{F}$ qüvvələrinin yaratdığı $\vec{M}$ cüt qüvvə momentini almış oluruq. $\vec{M}$ momenti sistemi saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində burmağa çalışır. Bu dediklərimizi riyazi olaraq belə yaza bilərik (şəkil 51.1):

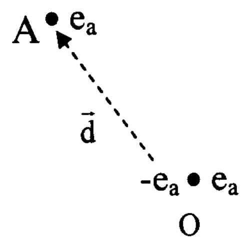
$$\vec{F}(A) - da = \vec{F}(O) - da + \vec{M}.$$



Şəkil 51.1

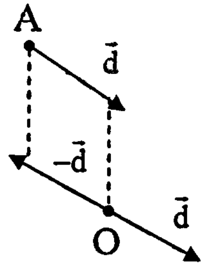
İndi biz bu əməliyyatı yüklərə və onların momentlərinə tətbiq edəcəyik. Əvvəlki §-lardan bilirik ki, müəyyən həcmdə yerləşmiş yüklərin uzaq P müşahidə nöqtəsində yaratdığı sahənin (49.1) potensialı O-da yerləşmiş bəsit sistemlərin P nöqtəsində yaratdığı sahələrin cəminə bərabərdir. Burada bəsit sistemlər aşağıdakılardır: yüklər sisteminin nöqtəvi tam $Q = \sum e_a$ yükü, yüklərin $\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a$ dipol momenti, yüklərin D_{ij} kvadrupol momenti və yüklərin bütün multipol momentləridir. Bəsit sistemlərin O-da yerləşməsi riyazi aparatın köməyi ilə, yəni yüklər sisteminin (49.1) düsturu ilə müəyyən edilən $\varphi(\vec{R}_0)$ potensialının kiçik $\frac{r_a}{R_0}$ parametrinin üstlərinə görə sıraya ayrılması ilə icra olunur. Bu riyazi cəhətdən doğru nəticədir. Lakin onun fiziki mənasının açılması da müəyyən maraq kəsb edir. Fərz edək ki, e_a yükü A nöqtəsində yerləşmişdir. Bu yükü O-ya köçürmək üçün O nöqtəsində bir-birini neytrallaşdıran $-e_a$ və $+e_a$ yüklərini yerləşdiririk. Nəticədə O-da yerləşmiş e_a yükünü və A-dakı e_a ilə O-dakı $-e_a$ yüklərinin yaratdığı elementar dipol momentini almış oluruq (şəkil 51.2):

$$e_a(A\text{-}da) = e_a(O\text{-}da) + \vec{d}.$$



Şəkil 51.2

Beləliklə biz bütün yükləri O nöqtəsinə köçürərək O-da $Q = \sum_a e_a$ yükünü və müxtəlif nöqtələrdə yerləşmiş çoxlu sayda dipol momentlərini almış oluruq. İndi bu dipolları O nöqtəsinə köçürək. A-da yerləşmiş elementar $\vec{d}$ dipolunu O-ya köçürmək üçün O-da bir-birini neytrallandıran $-\vec{d}$ və $+\vec{d}$ elementar iki dipol yerləşdirək. Nəticədə biz O-da yerləşmiş elementar $\vec{d}$ dipolunu və $-\vec{d}$ dipolu ilə A-dakı $\vec{d}$ dipolundan təşkil edilmiş elementar kvadrupol momentini almış oluruq: A-da $\vec{d}$ = O-da $\vec{d}$ + D_{ij} (şəkil 51.3).



Şəkil 51.3

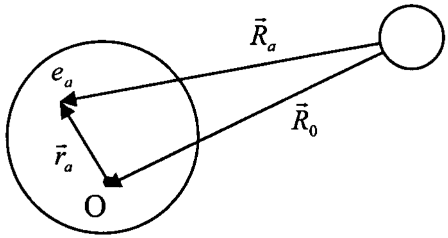
Bütün dipolları O-ya yığaraq biz O-da yekun $\sum_a e_a \vec{r}_a$ dipolunu və çoxlu sayda müxtəlif nöqtələrdə yerləşmiş kvadrupolları almış oluruq. İndi bu kvadrupolları O nöqtəsinə yığmaq lazımdır. A-dakı D_{ij} sadə kvadrupolu O nöqtəsinə köçürmək üçün O nöqtəsində bir-birini neytrallaşdıran və bir-birinin əksinə yönəlmiş $-D_{ij}$ və $+D_{ij}$ kimi iki sadə kvadrupol yerləşdirək. Nəticədə biz O-da yerləşmiş elementar D_{ij} kvadrupolunu və $-D_{ij}$ ilə A-dakı D_{ij} kvadrupolunun yaratdığı oktupolu almış oluruq. Bu prosesi ardıcıl davam etdirərək biz sistemin yüklərinin yaratdığı nöqtəvi yekun Q yükünü və bütün yük momentlərini O nöqtəsində yerləşdirə bilərik.

Biz bəsit sistemləri O nöqtəsinə köçürərkən riyaziyyatdan fərqli olaraq, $r_a << R_0$ şərtindən aşkar istifadə etməmişik.

§52. Xarici elektrik sahəsində yerləşmiş yüklər sistemi. Dipol-dipol qarşılıqlı təsiri

Fərz edək ki, diskret yüklər sistemi xarici elektrostatik sahədə yerləşmişdir. Xarici sahənin mərkəzinin yüklər sistemindən çox uzaqda olduğunu qəbul edək. Bu səbəbdən xarici sahə yüklər sisteminin yerləşdiyi həcmdə məsafəyə görə yavaş dəyişəcək və onu sıraya ayırıb bir neçə hədlə kifayətlənmək olar.

Diskret yüklər sisteminin daxilində O koordinat başlanğıcını seçək və cari e_a yükünün radius vektoruna $\vec{r}_a$ deyək. Xarici mənbədən e_a və O nöqtələrinə çəkilmiş radius vektorları $\vec{R}_a$ və $\vec{R}_0$ ilə işarə edək (şəkil 52.1):



Şəkil **52.1**

52.1-ci şəkildə $\vec{R}_a = \vec{R}_0 + \vec{r}_a$ və şərtə görə $r_a << R_a, R_0$ olur.

§27-dən bilirik ki, e_a yükünün xarici $\varphi(\vec{R}_a)$ sahəsi ilə qarşılıqlı təsir enerjisi $e_a\varphi(\vec{R}_a)$-dır. Onda yüklər sisteminin xarici sahə ilə tam qarşılıqlı təsir enerjisi

$$U = \sum_{a=1}^{N} e_a\varphi(\vec{R}_a) = \sum_{a=1}^{N} e_a\varphi(\vec{r}_a + \vec{R}_0) \tag{52.1}$$

olacaqdır. Bu yüklər sisteminin xarici sahədə potensial enerjisidir. Burada sistemin yüklərinin bir-biri ilə qarşılıqlı təsiri nəzərə alınmır.

İndi (52.1) ifadəsində xarici sahənin potensialını $\frac{r_a}{R_0} << 1$ parametrinin üstlərinə görə sıraya ayıraq:

$$U = \sum_{a=1}^{N} e_a \left\{ \varphi(\vec{R}_0) + x_i^a \frac{\partial}{\partial X_i^0}\varphi\Big|_{r_a=0} + \frac{1}{2!} x_i^a x_j^a \frac{\partial^2}{\partial X_i^0 \partial X_j^0}\varphi\Big|_{r_a=0} + \dots \right\} =$$

$$= \varphi(\vec{R}_0)\sum_{a=1}^{N} e_a + \sum_{a=1}^{N} e_a \vec{r}_a \vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{2!}\sum_{a=1}^{N} e_a x_i^a x_j^a \frac{\partial^2}{\partial X_i^0 \partial X_j^0}\varphi + \dots \tag{52.2}$$

~~Bu sıranın üçüncü həddinin şəklini 50-ci §-dakına uyğun qaydada dəyişək.~~ Yüklər sisteminin yerləşdiyi həcmdə xarici sahənin mənbəyi olmadığına görə, onun potensialı Laplas tənliyini ödəyir: $\vec{\nabla}^2\varphi = 0$. Bu tənliyi bir qədər açıq yazaq: $0=\vec{\nabla}^2\varphi=\frac{\partial^2}{\partial X_i^{02}}\varphi=\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\varphi$. ~~§50-də olduğu kimi~~ bu «sıfırı» $\frac{\nu}{2}$-yə vuraq və sıradakı üçüncü hədlə toplayaq. Sonra ν parametrini elə seçək ki, burada alınmış K_{ij} tenzorunun izi sıfır olsun. Nəticədə sıranın üçüncü həddi aşağıdakı şəklə düşür ~~(bax §50)~~: $\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\varphi$. Burada $D_{ij}=\sum_{a=1}^{N}e_a(3x_i^a x_j^a-\delta_{ij}\vec{r}_a^{\,2})$ yüklər sisteminin kvadrupol momentidir. İndi (52.2) sırasını yığcam şəkildə yazaq:

$$U=\varphi_0 Q-\vec{d}\vec{E}_0+\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\varphi+\ldots=U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+\ldots \quad (52.2')$$

Burada $Q=\sum_{a=1}^{N}e_a$ sistemin tam yükü, $\vec{d}=\sum_{a=1}^{N}e_a\vec{r}_a$ sistemin dipol momenti, $\varphi_0\equiv\varphi(\vec{R}_0)$ və $\vec{E}_0=-\vec{\nabla}\varphi_0$ xarici sahənin «O» nöqtəsində potensialı və intensivliyidir. Beləliklə yüklər sisteminin tam potensial enerjisi bəsit sistemlərin potensial enerjilərinin cəmi şəklində göstərilir. Bu sırada birinci hədd $U^{(0)}=\varphi_0 Q$ koordinat başlanğıcında (O nöqtəsində) yerləşmiş sistemin Q yükünün xarici sahədə potensial enerjisidir. Sistem elektroneytral deyildirsə bu enerji ən böyük qiymətə malikdir. Sıranın ikinci həddi koordinat başlanğıcında yerləşmiş sistemin $\vec{d}=\sum_a e_a\vec{r}_a$ dipol momentinin xarici sahədə potensial enerjisidir:

$$U^{(1)}=-\vec{d}\vec{E}_0. \quad (52.3)$$

Sıranın üçüncü həddi koordinat başlanğıcında yerləşmiş sistemin D_{ij} kvadrupol momentinin xarici sahədə potensial enerjisidir:

$$U^{(2)}=\frac{1}{6}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial X_i^0\partial X_j^0}\varphi_0. \quad (52.4)$$

Sıranın sonrakı hədləri O-da yerləşmiş multipolların xarici sahədə potensial enerjiləridir.

Biz (52.3) düsturundan istifadə edərək yükün dipolla və dipolun dipolla qarşılıqlı təsir enerjilərini hesablaya bilərik. Fərz etsək ki, $\vec{E}_0$ bir ədəd e yükü tərəfindən yaradılır, onda yükün dipolla qarşılıqlı təsir enerjisi

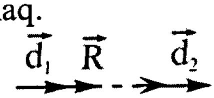
$$U = -\vec{d}\frac{e\vec{R}}{R^3} = -\frac{e\vec{d}\vec{R}}{R^3} = +\frac{e\vec{d}\vec{\vec{R}}}{\vec{\vec{R}}^3} \tag{52.5}$$

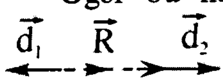
şəklində olur. Burada $\vec{R}$ yükdən dipola yönəlmiş, $\vec{\vec{R}}$ isə əksinə, dipoldan yükə yönəlmiş radius vektordur.

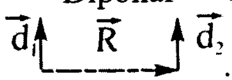
İki dipolun qarşılıqlı təsirini hesablayanda dipollardan birinin digərinin sahəsində yerləşdiyini fərz etmək lazımdır:

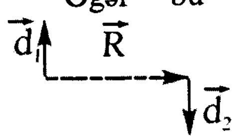
$$U = -\vec{d}_1\vec{E}_2 = -\vec{d}_2\vec{E}_1 = -\vec{d}_2\frac{3\vec{R}(\vec{d}_1\vec{R}) - \vec{d}_1R^2}{R^5} = \frac{(\vec{d}_1\vec{d}_2)R^2 - 3(\vec{d}_1\vec{R})(\vec{d}_2\vec{R})}{R^5}. \tag{52.6}$$

Burada $\vec{R}$ birinci dipoldan ikinci dipola və ya əksinə yönəlmiş radius vektordur. Qarşılıqlı təsir enerjisi dipollara nəzərən simmetrikdir. Bu qarşılıqlı təsir enerjisinin sadə hallarda ifadəsinə baxaq.

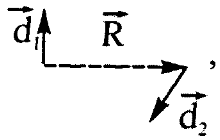
Dipol momentləri və $\vec{R}$ bir-birinə paraleldir: . Bu zaman potensial enerji $U = -\frac{2d_1d_2}{R^3} < 0$ olar və dipollar bir-birini cəlb edər.

Əgər bu halda dipol momentləri antiparalel olarsa, yəni onlar  şəklində yönələrsə, $U = \frac{2d_1d_2}{R^3} > 0$ olar və dipollar bir-birini dəf edər.

Dipollar bir-birinə paralel və $\vec{R}$-ə perpendikulyardır: . Bu zaman $U = \frac{d_1d_2}{R^3} > 0$ olar və dipollar bir-birini dəf edər.

Əgər bu halda dipollar antiparalel olarsa, yəni onlar  şəklində yönələrsə, $U = -\frac{d_1d_2}{R^3} < 0$ olar və dipollar bir-birini cəzb edər.

Əgər bu vektorların üçü də bir-birinə perpendikulyardırsa U=0 olar və dipollar bir-birinə təsir etməzlər. Bu, dipolların metastabil halıdır:



, $\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \perp \vec{R}$.

Dipolun xarici sahədə dayanıqlı halı

$$U = -\vec{d}\vec{E} = -dE\cos\theta \tag{52.3'}$$

qarşılıqlı təsir enerjisinin minimum qiymətilə təyin edilir. Burada $\theta=0$ olduqda $U_{min}=-dE$ olur. Beləliklə dipol momenti sahə istiqamətində yönəldikdə onun potensial enerjisi minimum olur və dipol dayanıqlı hala keçir. Xarici sahədə dipola təsir edən qüvvəni tapmaq üçün (52.3') düsturundan mənfi qrad almalıyıq (mexanikada olduğu kimi):

$$\vec{F} = -\text{qrad}U = +\vec{\nabla}(\vec{d}\vec{E}) = (\vec{d}\vec{\nabla})\vec{E} + [\vec{d}\,\text{rot}\vec{E}] = (\vec{d}\vec{\nabla})\vec{E}\,. \tag{52.7}$$

Burada biz §28-də verilmiş qrad $(\vec{b}\vec{a})$ düsturundan istifadə etmişik. Xarici sahədə dipol sahənin yüksək qiymət aldığı tərəfə yer dəyişir (sürüşür). Sahə bircinsdirsə, yəni $\vec{E}$ koordinatdan asılı deyildirsə, dipola təsir edən qüvvə $\vec{F} = 0$ olur. Lakin sistemə təsir edən qüvvə momenti sıfırdan fərqli olur. Doğrudan da qüvvə momenti

$$\vec{N} = \sum_{a=1}^{N} [\vec{r}_a e_a \vec{E}] = [\sum_{a=1}^{N} e_a \vec{r}_a \vec{E}] = \left[\vec{d}\vec{E}\right] \tag{52.8}$$

düsturu ilə ifadə olunur. Bu qüvvə momenti həm bircins və həm də qeyri-bircins sahə üçün doğrudur.

§53. Vakuumda sabit maqnit sahəsi. Bio-Savar-Laplas qanunu

Biz §47-də sabit elektromaqnit sahəsinin tənliklərini almaq üçün fərz etmişdik ki, sahənin ρ və $\vec{j}$ mənbələri zamandan asılı deyildir. Belə halın mümkün olması xatirinə biz elektromaqnit sahəsinin mənbələri olan və vakuumda ixtiyarı hərəkət edən elementar yüklü zərraciklərə «sükunətdə qal» və ya «sabit sürətlə hərəkət et» əmrini verə bilmərik. Burada bizim yeganə imkanımız hərəkət edən yüklər sisteminin xarakterik parametrlərini, yəni koordinatları, sürətləri, impulsları və s. böyük T zamanı üzrə ortalamaqdan ibarətdir. Doğrudan da fərz edək ki, sistemin yükləri finit hərəkət edirlər, yəni onlar sonlu oblastda (həcmdə) sonlu impulslarla hərəkət edir. Yüklər sisteminin istənilən xarakterik parametrlərini (onların yaratdığı sahə də daxil olmaqla) $\Psi(\vec{r},t)$ ilə işarə edək. Bu kəmiyyətin yüklərin mümkün olan kvaziperiodlarından (kvazidövrlərindən) çox-çox böyük olan T zamanı üzrə orta qiymətini hesablayaq:

$$\overline{\psi}_{(\vec{r},t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \psi(\vec{r},t)\,dt_{\;T\to\infty}. \tag{53.1}$$

Bu parametrlərin zamana görə törəməsinin orta qiymətini hesablasaq, onun sıfır olduğunu görərik:

$$\overline{\frac{d\psi}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\psi}{dt}dt_{\;T\to\infty} = \frac{\psi(\vec{r},T)-\psi(\vec{r},0)}{T}_{\;T\to\infty} \to 0. \tag{53.2}$$

Axırıncı ifadədə kəsirin surəti sonludur, məxrəci isə sonsuz artdığına görə nəticə sıfır olur. Bu düsturlar göstərir ki, $\overline{\psi}$ zamandan asılı deyil və ψ-nin zamana görə dəyişmə sürətinin orta qiyməti sıfırdır. İndi Maksvellin I və II növ tənliklərini zamana görə ortalasaq və $\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = \frac{\partial\overline{\vec{E}}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{\vec{H}}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{\vec{A}}}{\partial t} = 0$ olduğunu nəzərə alsaq bir-birindən asılı olmayan aşağıdakı iki qrup tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\overline{\vec{E}} = 0, \\ \operatorname{div}\overline{\vec{E}} = 4\pi\overline{\rho}(\vec{r}). \end{cases} \tag{53.3}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overline{\vec{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}(\vec{r}), \\ \operatorname{div}\overline{\vec{H}} = 0. \end{cases} \tag{53.4}$$

(53.3) tənlikləri isə elektrostatikanın tənlikləridir, çünki zamana görə ortalanmış $\overline{\vec{E}}$ və $\overline{\rho}$ yalnız $\vec{r}$ dən asılıdır və onlar §47-də verilmiş (47.1) tənliklərini ilə eynidir. Biz elektrostatikanı əvvəlki §-larda araşdırmışıq.

(53.4) tənlikləri sabit $\overline{\vec{j}}(\vec{r})$ cərəyanın yaratdığı sabit $\overline{\vec{H}}$ maqnit sahəsinin tənlikləridir. Biz kəsilməzlik tənliyini zamana görə ortalayaraq $\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} = 0$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0 \tag{53.5}$$

~~tənliyini alarıq~~. Bu stasionar cərəyanın ödədiyi tənlikdir. Deməli (53.4) tənlikləri stasionar cərəyanın yaratdığı sabit maqnit sahəsinin tənlikləridir. İndi Lorens şərtini ortalayaraq $\overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}} = 0$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\mathrm{div}\overline{\vec{A}} = 0 \tag{53.6}$$

şərtini alarıq. Beləliklə sabit sahələrdə Lorens və Kulon kalibrləşməsi üst-üstə düşür. Bu zaman maqnit intensivliyi ilə vektor potensial arasındakı əlaqə

$$\overline{\vec{H}} = \mathrm{rot}\overline{\vec{A}} \tag{53.7}$$

şəklində olur. $\overline{\vec{A}}$ -nın ödədiyi diferensial tənliyi almaq üçün (53.7)-ni (53.4)-də yerinə yazaraq

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\overline{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}} \quad \text{və ya} \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\overline{\vec{A}}) - \vec{\nabla}^2\overline{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}$$

tənliyini alırıq. Burada (53.6)-nı nəzərə alsaq

$$\vec{\nabla}^2\overline{\vec{A}}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c}\overline{\vec{j}}(\vec{r}) \tag{53.8}$$

olar. Beləliklə sabit maqnit sahəsinin vektor potensialı da skalyar potensial kimi Laplas-Puasson tənliyini ödəyir. Biz bu tənliyi təbii sərhəd şərti daxilində, yəni

$$\overline{\vec{A}}(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \underset{r\to\infty}{\sim} 0 \tag{53.9}$$

şərti ödəndiyi hal üçün həll edəcəyik. ~~§47-də~~ təbii sərhəd şərti daxilində skalyar potensial üçün

$$\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{53.10}$$

Laplas-Puasson tənliyini həll etmişik. Son iki tənliyin müqayisəsindən çıxır ki, əgər skalyar potensialın inteqral ifadəsində $\varphi(\vec{r}) \to \overline{\vec{A}}(\vec{r})$ və $\rho(\vec{r}) \to \dfrac{1}{c}\overline{\vec{j}}(\vec{r})$ əvəzlənməsini aparsaq, biz vektor potensialın aşağıdakı inteqral ifadəsini alarıq:

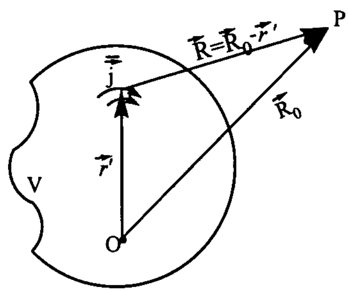
$$\vec{\vec{A}}(\vec{R}) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{\vec{j}}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{R}_0 - \vec{r}\,'\right|}(d\vec{r}\,'). \qquad (53.10)$$

Bu V həcmində axan stasionar cərəyanların yaratdığı maqnit sahəsinin vektor potensialının P müşahidə nöqtəsindəki ifadəsidir.

~~Vektor potensialın qrafiki təsviri şəkil 53.1-də göstərilmişdir.~~ Vektor potensialı bilərək maqnit sahəsinin intensivlik vektorunu hesablamaq olar:

$$\vec{\vec{H}}(\vec{R}_0) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\vec{A}}(\vec{R}_0) = -\frac{1}{c}\int_V \left[\vec{\vec{j}}(\vec{r}\,')\vec{\nabla}\frac{1}{\left|\vec{R}_0 - \vec{r}\,'\right|}\right](d\vec{r}\,') = \frac{1}{c}\int_V \frac{[\vec{\vec{j}}\vec{R}]}{R^3}(d\vec{r}\,'). \qquad (53.11)$$

Burada rot əməliyyatı müşahidə nöqtəsinin koordinatlarına görə (yəni, $\vec{R}_0$-a görə) aparılmışdır və $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}\,'$-dir. Bu ifadə *Bio-Savar-Laplas qanunu* adlanır. Biz gələcəkdə Makroskopik elektrodinamikada mühitin xarakteristikalarını nəzərə almaqla bu qanunu geniş tədqiq edəcəyik.



Şəkil 53.1

Qeyd edək ki, bizim indi baxdığımız mikroelektrodinamikada mühit və ya cisim anlayışı yoxdur. Bununla belə biz vakuumda şərti olaraq naqil mühitdə cərəyanın yaratdığı maqnit sahəsinə baxdığımızı fərz edərək, naqilin $(d\vec{r}\,') = dV$ həcm elementində axan cərəyanın yaratdığı $d\vec{H}$ intensivliyi üçün (53.11) düsturundan aşağıdakı diferensial münasibəti alırıq:

$$d\vec{\vec{H}} = \frac{1}{c}\frac{[\vec{\vec{j}}\vec{R}]}{R^3}dV. \qquad (53.11')$$

Baxdığımız hipotetik naqil mühiti sadəlik üçün en kəsiyi $\Delta\vec{S}$ olan uzun kvazixətti naqil kimi götürsək və cərəyana da kvazixətti cərəyan kimi (yəni $\vec{j} \| d\vec{l}$) baxsaq, $\vec{j}dV = \vec{j}(\overrightarrow{\Delta s \Delta l}) = (\overrightarrow{\vec{j}\Delta s})d\vec{l} = Jd\vec{l}$ olar. Burada $d\vec{l}$ xətti naqil elementinin uzunluğudur, J isə naqilin en kəsiyindən keçən cərəyan şiddətidir. Onda kvazixətti cərəyan elementinin yaratdığı maqnit sahəsinin intensivliyi aşağıdakı kimi ifadə olunar:

$$d\vec{H} = \frac{J}{c} \frac{[d\vec{l}\vec{R}]}{R^3}. \qquad (53.11'')$$

Burada $\vec{R}$ naqilin $d\vec{l}$ elementindən müşahidə nöqtəsinə çəkilmiş radius vektordur. Düsturdan görünür ki, $d\vec{H}$ sahəsi $d\vec{l}$ və $\vec{R}$ vektorları ilə sağ yivli burğu təşkil edir.

§54. Hərəkət edən yüklər sisteminin (və ya cərəyanların) maqnit dipolu momenti və onun sahəsi

Bu məsələni sadə həll etmək üçün biz vektor potensialın (53.10) ifadəsində yüklərin diskret paylandığı hala keçməliyik. Qeyd edək ki, mikrocərəyanların ortalanmaya qədər ifadəsi həm koordinatdan və həm də zamandan asılıdır: $\vec{j}(\vec{r}', t)$. Bir ədəd və ya e_a yükü $\vec{V}_a$ sürəti ilə hərəkət edirsə, onun yaratdığı mikrocərəyan sıxlığı.

$$\vec{j}_a(\vec{r}', t) = \rho\vec{v}_a = e_a\vec{v}_a(t)\delta(\vec{r}' - \vec{r}_a(t))$$

olar. Onda hərəkət edən N sayda elementar yükün yaratdığı mikrojərəyan sıxlığı

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = \sum_{a=1}^{N} \vec{j}_a = \sum_{a=1}^{N} e_a\vec{v}_a(t)\delta(\vec{r}' - \vec{r}_a(t)) \qquad (54.1)$$

şəklində göstərilə bilər. Burada $e_a, \vec{v}_a$ və $\vec{r}_a$ kəmiyyətləri a-cı zərrəciyin yükü, sürəti və radius vektorudur.(53.10) ifadəsində bu cərəyanın orta qiyməti iştirak edir. Ona görə (54.1)-i (53.10)-da yerinə yazaraq, zamana görə ortalama aparmaq lazımdır. Alınmış ifadədə inteqrallanmanı δ-funksiyanın köməyi ilə apararaq vektor potensialın diskret yüklər sistemi halında ifadəsini alırıq:

$$\overline{\vec{A}}(\vec{R}_0) = \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a\vec{v}_a}{c|\vec{R}_0 - \vec{r}_a|}} = \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a\vec{v}_a}{cR_a}}. \qquad (54.2)$$

Burada $R_a = \left|\vec{R}_0 - \vec{r}_a\right|$-dır. İndi vektor potensialın yüklər sistemindən çox uzaq məsafədə yaratdığı sahə ilə maraqlanaraq, (54.2) funksiyasını kiçik $\frac{r_a}{R_0} \ll 1$ parametri üzrə (49.3) Teylor sırasına ayırıb yalnız iki hədlə kifayətlənə bilərik:

$$\overline{\vec{A}}(\vec{R}_0) = \overline{\sum \frac{e_a \vec{v}_a}{c}\left(\frac{1}{R_0} - \vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\ldots\right)} = \overset{0}{\cancel{\frac{d}{dt}\overline{\sum_{a=1}^{N} \frac{e_a \vec{r}_a}{R_0}}}} - \overline{\sum_{a=1}^{N} \frac{e_a \vec{v}_a}{c}\left(\vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{c}\overline{\sum_{a=1}^{N} e_a \vec{v}_a\left(\vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)}.$$

Burada iştirak edən $\vec{v}_a\left(\vec{r}_a\, \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)$ həddinin şəklini aşağıdakı kimi dəyişək:

$$\vec{v}_a\left(\vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right) = \frac{1}{2}\left\{\vec{v}_a\left(\vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right) + \vec{r}_a\left(\vec{v}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\vec{v}_a\left(\vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right) - \right.$$

$$\left. - \vec{r}_a\left(\vec{v}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\vec{r}_a\left(\vec{r}_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left[[\vec{r}_a \vec{v}_a]\vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right]. \qquad (54.3)$$

Biz burada əvvəlcə eyni bir $\vec{r}_a\left(\upsilon_a \vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right)$ həddini əlavə etdik və çıxdıq, $\vec{\nabla}\frac{1}{R_0}$ vuruğunun zamandan asılı olmadığını nəzərə aldıq və axırıncı həddə üç vektorun iki qat vektori hasilindən istifadə etdik:

$$[\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\,]] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}) = -[[\vec{b}\,\vec{c}\,]\,\vec{a}\,].$$

(54.3) ifadəsini yuxarıda yerinə yazaq və birinci hədd zamana görə tam törəmə olduğundan onun orta qiymətinin sıfır olduğunu nəzərə alaq:

$$\overline{\vec{A}}(\vec{R}_0) = -\overline{\sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{2c}\left[[\vec{r}_a\, \vec{v}_a]\vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right]} = -\left[\overline{\vec{\mu}}\vec{\nabla}\frac{1}{R_0}\right] = \frac{[\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0]}{R_0^3}. \qquad (54.4)$$

Burada

$$\vec{\mu}=\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{2c}[\vec{r}_a\vec{v}_a] \qquad (54.5)$$

hərəkət edən yüklər sisteminin yaratdığı maqnit dipolu momentdir. (54.4) düsturu isə O-da yerləşmiş maqnit dipolunun P müşahidə nöqtəsində yaratdığı vektor potensialıdır. (54.4) ifadəsinə maqnit momentinin orta qiyməti daxildir. Orta qiymət isə sabitdir. Buradan bilavasitə alınır ki, maqnit dipolu momenti koordinat başlanğıcının seçilməsindən asılı deyildir. Doğrudan da aralarındakı məsafə $\vec{b}$ olan iki O və O' koordinat başlanğıcı seçsək $\vec{r}_a=\vec{r}_a'-\vec{b}$ olar (bax: şəkil 49.4). Bunu (54.5)-də nəzərə alaq və maqnit dipolunu ortalayaq:

$$\overline{\vec{\mu}}=\sum_{a=1}^{N}\overline{\frac{e_a}{2c}[\vec{r}_a'\vec{v}_a]}-\sum_{a=1}^{N}\underbrace{\overline{\frac{e_a}{2c}[\vec{b}\vec{v}_a]}}_{0}=\sum_{a=1}^{N}\overline{\frac{e_a}{2c}[\vec{r}_a'\vec{v}_a]}=\overline{\vec{\mu}}' \qquad (54.5')$$

olar. Burada $\overline{[\vec{b}\vec{v}_a]}=\overline{\frac{d}{dt}[\vec{b}\vec{r}_a]}=0$ olur.

İndi (54.4) düsturundan istifadə edərək maqnit dipolunun yaratdığı maqnit sahəsinin intensivlik vektorunu hesablayaq:

$$\overline{\vec{H}}(\vec{R}_0)=\operatorname{rot}\overline{\vec{A}}(\vec{R}_0)=\left[\vec{\nabla}\frac{[\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0]}{R_0^3}\right]=\frac{1}{R_0^3}\left[\vec{\nabla}[\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0]\right]-\left[[\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0]\vec{\nabla}\frac{1}{R_0^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{R_0^3}\{\overline{\vec{\mu}}(\vec{\nabla}\vec{R}_0)-(\overline{\vec{\mu}}\vec{\nabla})\overline{\vec{R}}_0\}+\left[[\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0]\frac{3\vec{R}_0}{R_0^5}\right]=\frac{2\overline{\vec{\mu}}}{R_0^3}+\frac{3}{R_0^5}\{-\overline{\vec{\mu}}R_0^2+(\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0)\vec{R}_0\}=$$

$$=\frac{3(\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0)\vec{R}_0-\overline{\vec{\mu}}R_0^2}{R_0^5}.$$

Son nəticəni yazaq:

$$\overline{\vec{H}}(\vec{R}_0)=\frac{3(\overline{\vec{\mu}}\vec{R}_0)\vec{R}_0-\overline{\vec{\mu}}R_0^2}{R_0^5}. \qquad (54.6)$$

Bu düstur tamamilə elektrik dipolunun yaratdığı elektrostatik sahənin elektrik intensivliyi düsturunun analoqudur (bax: (49.8)). $\vec{H}$-ın sferik sistemdə proyeksiyaları $\vec{E}$-ninki kimidir, yəni (49.9)-da $\vec{d}$ əvəzinə $\vec{\mu}$ yazsaq biz $\vec{H}$-ın proyeksiyalarını alarıq.

Yüklərin diskret paylandığı hal üçün yazılmış maqnit dipolu momentinin (54.5) düsturundan yüklərin kəsilməz paylandığı hala keçmək üçün köməkçi (34.15) bərabərliyindən istifadə etmək lazımdır:

$$\vec{\mu}=\frac{1}{2c}\int_V[\vec{r}\,\vec{j}]dV. \qquad (54.5'')$$

Beləliklə maqnit dipolunun çox uzaq məsafədə yaratdığı stasionar maqnit sahəsinin vektor potensialı və intensivliyi (54.4) və (54.6) düsturları ilə təsvir olunur.

İndi 2 ədəd sadə məsələyə baxaq. Fərz edək ki, xüsusi yükləri eyni olan $\left(\frac{e_1}{m_1}=\frac{e_2}{m_2}\ldots=\frac{e}{m}\right)$ və qeyri-relyativistik hərəkət edən $(v_a \ll c)$ yüklər sistemi verilmişdir. Göstərək ki, bu sistemin maqnit momenti onun mexaniki (orbital) momenti ilə mütənasibdir. Doğrudan da

$$\vec{\mu}=\frac{1}{2c}\sum_{a=1}^{N}e_a[\vec{r}_a\vec{v}_a]=\frac{1}{2c}\sum_{a=1}^{N}e_a[\vec{r}_a\vec{v}_a]\frac{m_a}{m_a}=\frac{e}{2mc}\sum_{a=1}^{N}[\vec{r}_a m_a\vec{v}_a]=$$

$$=\frac{e}{2mc}\sum_{a=1}^{N}[\vec{r}_a\vec{p}_a]=\frac{e}{2mc}\vec{L} \qquad (54.7)$$

Burada $\vec{P}_a=m_a\vec{v}_a$ a-cı zərrəciyin qeyri-relyativistik impulsu, $\vec{L}$ sistemin hərəkət miqdarı momentidir. $\frac{e}{2mc}$ vuruğu sistemin *qiromaqnit faktoru* adlanır.

Belə məlum olur ki, əksər elementar zərrəciklər (e, p, n və s) spin hərəkət miqdarı momenti $\vec{L}_s$ və spin maqnit momenti $\vec{\mu}_s$-ə malikdir. Spin kvantmexaniki kəmiyyətdir və hər növ zərrəcik üçün müəyyən qiymətə malikdir. Spin maqnit momenti də spin hərəkət miqdarı momenti ilə mütənasibdir, lakin mütənasiblik əmsalı müxtəlif zərrəciklər üçün müxtəlifdir. Elektronlar üçün bu münasibət

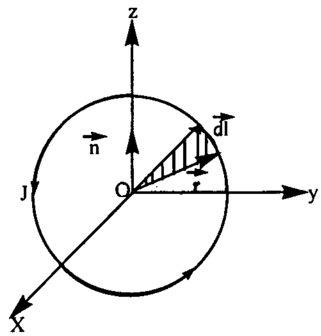
$$\vec{\mu}_s=\frac{e}{mc}\vec{L}_s \qquad (54.8)$$

şəklindədir.

İkinci məsələ olaraq kvazixətti şərti naqildən axan kvazixətti stasionar cərəyanın maqnit momentinə baxaq. Kvazixətti cərəyan halında $\vec{j}dV=J\vec{dl}$ olur (bax: (53.11′)). Bunu (54.5″) düsturunda nəzərə alaq:

$$\vec{\mu} = \frac{J}{c}\oint_L \frac{1}{2}\left[\vec{r}d\vec{l}\right].$$

Burada L xətti naqilin konturunun uzunluğudur, J isə naqilin en kəsiyindən keçən sabit cərəyan şiddətidir. Sadəlik üçün fərz edək ki, naqil müstəvidə (məs. xoy müstəvisində) yerləşir (şəkil 54.1). Vektori hasilin tərifinə görə $\frac{1}{2}\left[\vec{r}\,d\vec{l}\right] = d\vec{s}$ olur. $d\vec{s}$ modulca şəkildə göstərilən üçbucağın səthidir. Bu vektor $\vec{r}$ və $d\vec{l}$ ilə sağ yivli burğu təşkil edərək müstəvinin $\vec{n}$ normalı boyunca yönəlmişdir:



Şəkil 54.1

$d\vec{s} = \vec{n}\,ds$ və ds üçbucağın sahəsidir. Bu dediklərimizi yuxarıda $\vec{\mu}$-nün ifadəsində nəzərə alsaq:

$$\vec{\mu} = \frac{J}{c}\oint_L d\vec{s} = \frac{J}{c}S\cdot\vec{n} \tag{54.9}$$

olar. Burada S L konturu ilə hüdudlanmış səthin sahəsidir. Beləliklə cərəyanlı L konturunun yaratdığı maqnit momenti (1/c dəqiqliyi ilə) cərəyan şiddəti ilə konturla hüdudlanmış (vektori) səthin sahəsinin hasilinə bərabərdir.

§55. Maqnit sahəsində yerləşmiş maqnit dipolu, dipola təsir edən qüvvə və qüvvə momenti, iki maqnit dipolunun qarşılıqlı təsiri

Biz §52-də xarici elektrostatik sahədə yerləşmiş yüklər sistemini öyrəndik. İndi buna oxşar olaraq xarici sabit maqnit sahəsində yerləşmiş cərəyanlar sisteminə, yəni hərəkət edən yüklər sisteminə baxaq. Biz burada da şəkil 52.1-də göstərilən sxemdən istifadə edəcəyik. Xarici maqnit sahəsinin mənbəyinin cərəyanlar sistemindən çox uzaqda yerləşdiyini fərz edək. Cərəyanlar sisteminin daxilində O koordinat başlanğıcını seçək və $\vec{j}_a$ cərəyan elementinin (yəni hərəkət edən cari e_a yükünün) radius vektoruna $\vec{r}_a$ deyək. Xarici mənbədən $\vec{j}_a$ və O nöqtələrinə çəkilmiş radius vektorları $\vec{R}_a$ və $\vec{R}_0$ ilə işarə edək. Biz indi şəkil 52.1-də fərz edəcəyik ki, yüklər, o cümlədən cari e_a yükü müəyyən sürətlə hərəkət edərək cərəyan yaradır. Qəbul edəcəyik ki cərəyanlar sonlu V həcmində paylanmışdır. Şəkildən görünür ki, $\vec{R}_a = \vec{R}_0 + \vec{r}_a$ -dır.

Baxdığımız sistemin Laqranj funksiyasını yazaq.

$$\overline{\mathcal{L}} = -\sum_{a=1}^{N} m_a c^2 \overline{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}} + \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a}{c}\vec{v}\vec{A}(\vec{R}_a)} = L_s + \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a}{c} v_a \vec{A}(\vec{R}_a)}. \quad (55.1)$$

Biz stasionar cərəyanlara baxdığımıza görə zaman üzrə ortalama aparmışıq. Burada L_s sərbəst yüklərin Laqranj funksiyasıdır və $\vec{A}(\vec{R}_a) \equiv \vec{A}(\vec{R}_0 + r_a)$ xarici maqnit sahəsinin vektor potensialıdır. İndi (55.1)-də ikinci həddi ayrıca hesablayaq:

$$\sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a}{c}\vec{v}_a \vec{A}(R_0 + \vec{r}_a)} = \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a}{c}\vec{v}_a \{\vec{A}(\vec{R}_0) + (\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{R}_0) + \ldots\}}. \quad (55.2)$$

Biz $\vec{A}(\vec{R}_0 + \vec{r}_0)$ kəmiyyətini kiçik $r_a << R_0$ parametrlərinin üstlərinə görə Teylor sırasına ayıraraq iki hədlə kifayətlənmişik. Burada $\vec{A}(\vec{R}_0)$ zamandan asılı olmadığına görə birinci hədd $\overline{\frac{d}{dt}(\vec{r}_a \vec{A}(\vec{R}_0))} = 0$ olur və ikinci həddi (54.3) düsturuna əsasən

$$\overline{\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{R}_0)} = \frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}(\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{\nabla}))\vec{A}(\vec{R}_0)} + \frac{1}{2}\overline{[[\vec{r}_a\vec{v}_a]\vec{\nabla}]\vec{A}(\vec{R}_0)} \quad (55.3)$$

şəklində yazsaq, burada da birinci toplananın sıfır olduğunu görərik. (55.2) və (55.3) ifadələrini (55.1) düsturunda yerinə yazsaq

$$\overline{\mathcal{L}} = L_s + \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{e_a}{2c}[\vec{r}_a\vec{v}_a][\vec{\nabla}\vec{A}(\vec{R}_0)]} = L_s + (\overline{\vec{\mu}}\vec{H}(\vec{R}_0)) \quad (55.1')$$

alarıq. Laqranj funksiyasında qarşılıqlı təsir həddi əks işarə ilə potensial enerji olduğundan, buradakı

$$U_{\bar{\mu}} = -(\bar{\vec{\mu}}\vec{H}) \tag{55.4}$$

həddi cərəyanlar sisteminin maqnit momentinin xarici maqnit sahəsində potensial enerjisi və ya qarşılıqlı təsir enerjisidir.

Bu düstur sükunətdəki yüklər sisteminin dipol momentinin xarici elektrostatik sahədə (52.3) düsturu ilə təyin edilən

$$U^{(1)} \equiv U_{\vec{d}} = -\vec{d}\vec{E}_0 \tag{55.5}$$

potensial enerji düsturunun tam oxşarıdır. Maqnit dipoluna maqnit sahəsində təsir edən qüvvəni tapmaq üçün (55.4) düsturunun mənfi qradiyentini (mexanikada olduğu kimi) hesablamalıyıq:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{\bar{\mu}} = \vec{\nabla}(\bar{\vec{\mu}}\vec{H}) = (\bar{\vec{\mu}}\vec{\nabla})\vec{H} + \left[\bar{\vec{\mu}}\,\mathrm{rot}\,\overline{\vec{H}}\right] = (\bar{\vec{\mu}}\vec{\nabla})\vec{H}(\vec{R}_0) \tag{55.6}$$

Bu ~~hesablamada biz §28-də verilmiş~~ grad($\vec{b}\vec{a}$) ~~düsturundan istifadə etmişik.~~ Maqnit sahəsində maqnit dipolu sahənin yüksək qiymətə malik olduğu tərəfə yerdəyişir. Sahə bircins olduqda dipola təsir edən qüvvə sıfır olur. Lakin sistemə təsir edən qüvvə momenti həmişə sıfırdan fərqlidir. Doğrudan da hərəkət edən yüklərə (cərəyanlara) təsir edən qüvvə momenti aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\overline{\vec{N}} = \sum_a \frac{e_a}{c}\overline{[\vec{r}_a[\vec{v}_a H]]} = \sum_a \frac{e_a}{c}\overline{\{\vec{v}_a(\vec{r}_a H) - \vec{H}(\vec{r}_a\vec{v}_a)\}} = \sum_a \frac{e_a}{c}\overline{\{\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{H}) -}$$

$$\overline{- \frac{1}{2}\cancelto{0}{\vec{H}\frac{d}{dt}(\vec{r}_a^{\,2})}\}} = \sum_a \frac{e_a}{2c}\left\{\cancelto{0}{\overline{\frac{d}{dt}(\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{H}))}} + \left[\overline{[\vec{r}_a\vec{v}_a]}\vec{H}\right]\right\} = \left[\bar{\vec{\mu}}\vec{H}\right] \tag{55.7}$$

Biz burada ikiqat vektori hasili açıq yazdıq, $\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{H})$ həddinə (54.3) düsturunu tətbiq etdik və zamana görə törəmələrin orta qiymətinin sıfır olduğunu nəzərə aldıq. Qüvvə momenti maqnit dipolunu maqnit sahəsi istiqamətində yönəltməyə çalışır. Son düstur həm bircins və həmdə qeyri-bircins sahə üçün doğrudur. Maqnit qüvvə momenti və elektrostatikada elektrik dipoluna təsir edən qüvvə momentinin tam analoqudur. Beləliklə deyə bilərik ki, elektrostatika ilə maqnitostatika arasında böyük oxşarlıq mövcuddur.

Biz stasionar maqnit sahəsində bütün münasibətləri zamana görə ortalama yolu ilə çox asanlıqla aldıq. Belə məlum olur ki biz bu münasibətləri ortalama aparmadan da ala bilərik. Lakin bu zaman aşağıdakı eynilikdən istifadə etməliyik: Koordinatdan asılı olan hər hansı $\vec{J}$ vektoru V həcminin daxilində $\operatorname{div}\vec{J} = 0$ və həcmin səthində $J_n = 0$ ($\vec{n}$ səthin normalıdır) şərtlərini ödəyirsə, onda $\int\limits_V \vec{J}dv = 0$ şərti də ödənməlidir.

Doğrudan da ixtiyari sabit $\vec{a}$ vektoru götürək və $\vec{J}(\vec{a}\vec{r})$ hasilin divergensiyasını hesablayaq:

$$\operatorname{div}(\vec{J}\cdot(\vec{a}\vec{r})) = \vec{J}\vec{\nabla}(\vec{a}\vec{r}) = \vec{J}\vec{a}.$$

Alınmış ifadəni V həcmi üzrə inteqrallayaq və Qauss teoremini tətbiq edək:

$$\int\limits_V \operatorname{div}(\vec{J}(\vec{a}\vec{r}))dv = \oint\limits_S J_n(\vec{a}\vec{r})ds = 0 = \vec{a}\int\limits_V \vec{J}dV.$$

Buradan $\int\limits_V \vec{J}dv = 0$ alırıq.

~~İndi~~ iki maqnit dipolunun qarşılıqlı təsir enerjisini hesablayaq. Fərz edək ki $\vec{\mu}_1$ dipolu $\vec{\mu}_2$ dipolunun yaratdığı $\vec{H}_2$ maqnit sahəsində yerləşmişdir. Bu dipolların qarşılıqlı təsir enerjisi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$U_{\mu_1\mu_2} = -\vec{\mu}_1\vec{H}_2 = \frac{\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2 R^2 - 3(\vec{\mu}_1\vec{R})(\vec{\mu}_2\vec{R})}{R^5}. \qquad (55.8)$$

Burada $\vec{R}$ $\vec{\mu}_1$-dən $\vec{\mu}_2$-yə və ya əksinə yönəlmiş radius vektorudur.

Alınmış qarşılıqlı təsir enerjisi dipollara nəzərən simmetrikdir. Maqnit dipollarının (55.8) qarşılıqlı təsir enerjisi, elektrik dipollarının (52.6) qarşılıqlı enerjisi ilə tam oxşardır. Burada da maqnit dipollarının qarşılıqlı yönəlməsindən asılı olaraq onların bir-birini cəzb və ya dəf etməsi tamamilə elektrik dipollarında olduğu kimidir.

Elektromaqnit sahəsində təsir göstərən yeganə qüvvə Lorens qüvvəsidir. O, xarici görünüşcə çox sadə, lakin mənaca çox ümumidir. Elektromaqnit sahəsinin maddi mühitlə qarşılıqlı təsirində, cərəyanlı naqillərin bir-birinə etdiyi təsirdə və s.-də bu qüvvənin müxtəlif təzahür formalarına rast gəlirik. Bu formalardan biri Amper qüvvəsidir. Məlumdur ki, mikroelektrodinamikada mühit, cisim anlayışı yoxdur. Lakin bəzi düsturları almaq üçün burada hipotetik, şərti»mühitin»olduğunu fərz edirlər. Qəbul edək ki, belə şərti «mühitdə» xarici maqnit sahəsi mövcuddur və o hərəkət edən mikro yüklərə Lorens qüvvəsi ilə təsir edir. a-cı yükə təsir edən qüvvə

$$\vec{F}_a = \frac{e_a}{c}\left[\vec{v}_a \vec{H}\right]$$

olacaqdır. Bütün yüklərə təsir edən Lorens qüvvəsi bu qüvvələrin vektori cəminə bərabərdir:

$$\vec{F} = \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a}{c}\left[\vec{v}_a \vec{H}\right]$$

Biz burada (34.15) köməkçi düsturdan istifadə edərək diskret paylanmadan kəsilməz paylanmaya keçə bilərik:

$$\vec{F} = \int_V \frac{1}{c}\rho\left[\vec{v}\vec{H}\right]dV = \int_V \frac{1}{c}\left[\vec{j}\vec{H}\right]dV. \qquad (55.9')$$

İndi bu hipotetik «mühiti» en kəsiyi $\Delta\vec{S}$ olan kvazixətti naqil kimi təsəvvür etsək və naqildən axan cərəyana da kvazixətti cərəyan kimi baxsaq ($\vec{j} \| d\vec{l}$), naqilin $d\vec{l}$ uzunluqlu həcm elementi $dV = (\overrightarrow{\Delta s}\, d\vec{l})$ olar. Onda $\vec{j}dV = \vec{j}(\overrightarrow{\Delta s}\, \overrightarrow{dl}) = (\vec{j}\,\overrightarrow{\Delta s})\overrightarrow{dl} = J\overrightarrow{dl}$ yazmaq olar. Burada $J = (\overrightarrow{\Delta s}\,\vec{j})$ naqilin en kəsiyindən keçən xətti cərəyan şiddətidir. Bunları (55.9')-də nəzərə alaraq aşağıdakını yaza bilərik:

$$\vec{F} = \frac{J}{c}\oint_L [d\vec{\ell}\vec{H}]. \qquad (55.9'')$$

Burada L xətti konturun uzunluğudur. Cərəyanlı naqilin $d\vec{l}$ uzunluğuna təsir edən qüvvə

$$d\vec{F} = \frac{J}{c}[d\vec{\ell}\vec{H}] \qquad (55.9''')$$

olar. Bu *Amper düsturu* adlanır və $d\vec{F}$ qüvvəsinə Amper qüvvəsi deyilir. Biz (55.9') düsturundan istifadə etsək, cərəyan keçən «mühitin» vahid həcm elementinə təsir edən qüvvəni, yəni qüvvə sıxlığını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\vec{f} = \frac{1}{c}\left[\vec{j}\vec{H}\right]. \qquad (55.9^{IV})$$

§56. Larmor teoremi

Atomu və ya atomlar sistemini $\vec{H}$ maqnit sahəsinə daxil etdikdə zərrəciklərin halı dəyişir, çünki onlara $\vec{F}=\frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}]$ Lorens qüvvəsi təsir edir. Göstərəcəyik ki, maqnit sahəsinin təsiri altında sistemdəki bütün elektronlar eyni bir istiqamətdə $\vec{\omega}_L=\frac{e}{2mc}\vec{H}$ tezliyi ilə fırlanma (presesiya) hərəkəti edəcəklər. Bu fırlanma tezliyi *Larmor tezliyi* adlanır.

Fərz edək ki, xüsusi yükləri eyni olan $\left(\frac{e_1}{m_1}=\frac{e_2}{m_2}=\ldots=\frac{e_a}{m_a}=\frac{e}{m}\right)$ qeyri-relyativistik ($v_a \ll c$) yüklər sistemi sferik simmetrik elektrik sahəsində hərəkət edir. Simmetriya oxu olaraq oz oxunu seçək. Bu sistemin Laqranj funksiyası

$$L=\sum_{a=1}^{N}\frac{m_a v_a^2}{2}-U \tag{56.1}$$

olacaqdır. Burada U zərrəciklərin bir-birilə və həmdə xarici elektrik sahəsi ilə qarşılıqlı təsir enerjisidir, N isə zərrəciklərin sayıdır. İndi fırlanma oxu oz olan və $\vec{\omega}$ tezliyi ilə fırlanan koordinat sisteminə keçək. Sükunətdəki sistemdən fırlanan sistemə keçdikdə zərrəciklərin sürəti aşağıdakı kimi çevrilir:

$$\vec{v}_a=\vec{v}'_a+[\vec{\omega}\vec{r}'_a]. \tag{56.2}$$

Burada $\vec{v}_a$ sükunətdəki, $\vec{v}^1_a$ isə fırlanan sistemdə zərrəciyin sürətidir. Fırlanan koordinat sistemində sistemin Laqranj funksiyası

$$L_\omega=\sum_{a=1}^{N}\frac{m_a}{2}(\vec{v}^1_a+[\vec{\omega}\vec{r}'_a])^2-U' \tag{56.3}$$

şəklində yazılır. Qeyd edək ki, fırlanma zamanı zərrəciklər arasındakı məsafə və onların xarici elektrik sahəsi mərkəzindən olan məsafələri dəyişmir, yəni zərrəciklərin potensial enerjisi dəyişmir:

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots)=U'(\vec{r}'_1,\vec{r}'_2,\ldots).$$

Əgər fərz etsək ki, koordinat sisteminin fırlanma sürəti zərrəciklərin hərəkət sürətindən çox kiçikdir, yəni

$$[\vec{\omega}\vec{r}_a'\,] << \vec{v}_a' \tag{56.4}$$

şərti ödənir, onda (56.3) Laqranj funksiyasında ω-ya görə xətti hədlərlə kifayətlənmək olar:

$$L_\omega = \sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{m_a v_a'^2}{2} + m_a\vec{\upsilon}_a'\left[\vec{\omega}\vec{r}_a'\,\right]\right\} - U' \tag{56.3'}$$

İndi fərz edək ki, baxdığımız ilk yüklər sistemini bircins maqnit sahəsinə daxil edirik. Onda sistemin Laqranj funksiyası aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$L_H = \sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{e_a}{c}\vec{v}_a\vec{A}(\vec{r}_a)\right\} - U \equiv$$

$$\equiv \sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{e}{2mc}m_a\vec{v}_a\left[\vec{H}\vec{r}_a\right]\right\} - U \tag{56.5}$$

Biz burada maqnit sahəsinin bircins olması şərtindən, yəni $\vec{A}(\vec{r}_a) = \frac{1}{2}\left[\vec{H}\vec{r}_a\right]$ düsturundan istifadə edərək Laqranjianda ikinci həddin şəklini bir az dəyişdirmişik:

$$\sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{c}\vec{v}_a\vec{A}(\vec{r}_a) = \sum_{a=1}^{N}\frac{e_a}{2c}\vec{v}_a\left[\vec{H}\vec{r}_a\right]\cdot\frac{m_a}{m_a} = \frac{e}{2mc}\sum_{a=1}^{N}m_a\vec{v}_a\left[\vec{H}\vec{r}_a\right].$$

İndi L_H və L_ω Laqranj funksiyalarını bir-birinə bərabər götürək, yəni yüklər sisteminin maqnit sahəsində və fırlanan koordinat sistemində özlərini eyni şəkildə apardığını fərz etsək, son Laqranj funksiyalarının müqayisəsindən

$$\vec{\omega} = \frac{e}{2mc}\vec{H} = \vec{\omega}_L \tag{56.6}$$

bərabərliyini alırıq. Deməli, sferik simmetriyaya malik elektrik sahəsində yerləşmiş yüklər sistemini bircins maqnit sahəsinə daxil etdikdə, yüklər sistemi $\vec{\omega} = \frac{e}{2mc}\vec{H} = \vec{\omega}_L$ tezliyi ilə fırlanma hərəkəti edəcəkdir. Bu, *Larmor teoremi* adlanır və $\vec{\omega}$-ya *Larmor tezliyi* deyilir.

Larmor teoreminin doğru olması üçün mütləq (56.4) şərti ödənməlidir. Qeyd edək ki, Larmor teoremini müxtəlif üsullarla isbat etmək olar. Məsələn, əgər biz fırlanan Koordinat sistemini bircins $\vec{H}$ maqnit sahəsinə daxil etsəydik, Larmor tezliyi üçün $\vec{\omega}'_L = -\frac{e}{2mc}\vec{H}$ ifadəsini alardıq.

İndi sistemin mexaniki momentinin bircins maqnit sahəsində hərəkətinə baxaq. Mexanikadan bilirik ki, $\vec{L}$ mexaniki momentin zamana görə törəməsi sistemə təsir edən qüvvə momentinə bərabərdir:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\mu}\vec{H}].$$

Biz (54.7) və (56.6) düsturlarından $\vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{L}$ və $\vec{\omega}_L = \frac{e}{2mc}\vec{H}$ olduğunu bilərək

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -[\vec{\omega}_L \vec{L}] \qquad (56.7)$$

tənliyini alırıq. Tənlikdən görünür ki, sistemin $\vec{L}$ mexaniki momenti (və onunla birgə $\vec{\mu}$ maqnit momenti) $\vec{H}$ maqnit sahəsi ilə sabit bucaq təşkil edərək onun ətrafında $-\vec{\omega}_L$ tezliyi ilə fırlanır (Larmor presesiyası).

VIII FƏSİL
DƏYİŞƏN ELEKTROMAQNİT SAHƏSİ

§57. Sərbəst elektromaqnit sahəsi və onun tənlikləri

~~Əvvəlki fəsillərdən bilirik ki,~~ Elektromaqnit sahəsini elektrik yükləri və cərəyanlar yaradır və bunlar *elektromaqnit sahəsinin mənbələri* adlanır. Lakin belə məlum olur ki, xüsusi halda yüklər və cərəyanlar olmadıqda da elektromaqnit sahəsi mövcud ola bilər. Bu zaman sahə heç bir yüklə və cərəyanla əlaqədar olmur və ona görə də *sərbəst elektromaqnit sahəsi* adlanır. Bu sahənin tənliklərini almaq üçün ümumi şəkildə yazılmış Maksvell tənliklərində sahənin mənbələrinin sıfır olduğunu, yəni $\rho = \vec{j} = 0$ şərtini qəbul etmək lazımdır:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\\
&\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\vec{H} = 0,\\
&\operatorname{div}\vec{E} = 0.
\end{aligned}
\qquad (57.1)
$$

(57.1) tənliklərindən görünür ki, sərbəst elektromaqnit sahəsi zamana görə dəyişən sahə olmalıdır, yəni $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \neq 0$ və $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \neq 0$ şərti ödənməlidir. Əks halda yuxarıda yazılmış sərbəst Maksvell tənliklərinin həlli eynilik kimi sıfır olacaqdır ($\vec{E} = \vec{H} = 0$). Sərbəst elektromaqnit sahəsinə *elektromaqnit dalğaları* da deyilir, çünki ~~aşağıda görəcəyik ki,~~ (57.1) tənliklərinin həlləri yalnız dalğalar şəklində təsvir edilir. Təbiətdə sərbəst elektromaqnit sahəsinə aid misallar göstərmək olar. Məsələn, bir-birinin antizərrəciyi olan elektron və pozitron annihilyasiya edərək 2, 3, 4,....n sayda fotona çevrilə bilər ~~($e^- + e^+ \to 2\gamma, 3\gamma, \ldots, n\gamma$)~~. Yaranmış bu fotonlar özlüyündə sərbəst elektromaqnit sahəsidir. Ümumiyyətlə şüalanma sahəsi müəyyən yaxınlaşmada sərbəst elektromaqnit sahəsidir.

Sahənin tənliklərini sadələşdirmək üçün göstərək ki, sərbəst elektromaqnit sahəsinin 4-ölçülü potensialının 4-cü komponenti sıfıra bərabərdir. Bunun üçün potensialların ödədiyi

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \text{ və ya } \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0, \qquad (57.2)$$

Lorens şərtindən istifadə edək. Belə məlum olur ki, Lorens şərti potensialları birqiymətli təyin edə bilmir və burada müəyyən ixtiyarılıq qalır. Belə ki, Lorens şərtini ödəməklə yanaşı A_μ-nü xüsusi növ qradiyent çevrilməsinə tabe etmək olar:

$$A'_\mu=A_\mu+\frac{\partial f_0}{\partial x_\mu}. \qquad (57.3)$$

Burada $f_0(x)$ ixtiyari funksiya olmayıb, yalnız $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_\mu^2}=0$ tənliyinin həllidir. ~~§15-dən bilirik ki~~, $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}=\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\equiv\square$ – Dalamber operatorudur (Dalambertian). (57.3) bərabərliyindən x_μ-yə görə törəmə alsaq, görərik ki, A_μ Lorens şərtini ödəyirsə, onda A'_μ-də Lorens şərtini ödəyəcəkdir:

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial X_\mu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\mu}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial X_\mu^2}=\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\mu}=0. \qquad (57.2')$$

(57.3) bərabərliyində $\mu=4$ yazsaq,

$$A'_4=A_4+\frac{\partial f_0}{\partial x_4} \text{ və ya } \varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f_0}{\partial t} \qquad (57.4)$$

alırıq. Burada φ potensialı da f_0 funksiyası kimi $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}=0$ tənliyini ödəyir.

Bunu göstərmək üçün (57.1) sisteminin axırıncı tənliyində $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi$ yazaraq, (57.2) Lorens şərtini nəzərə almaq lazımdır. Beləliklə (57.4) bərabərliyinin sağ tərəfində φ və $\frac{1}{c}\frac{\partial f_0}{\partial t}$ eyni bir tənliyi ödədiyindən onları islah edərək

$$\varphi'=0 \qquad (57.5)$$

şərtini alırıq. Bu şərt yalnız sərbəst elektromaqnit sahəsi üçün doğrudur.

Potensialların qradiyent çevrilməsi zamanı $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları invariant qaldığına görə onları A'_μ potensialları ilə ifadə edə bilərik:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}, \qquad (57.6)$$
$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}'.$$

Bu yazılışda (57.5) şərtini nəzərə almışıq. (57.2') Lorens şərtində φ'=0 olduğunu nəzərə alsaq

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \text{ və ya } \mathrm{div}\vec{A}' = 0 \qquad (57.7)$$

münasibətini alırıq. Beləliklə sərbəst elektromaqnit sahəsi Kulon kalibrləşməsini ödəyir. Aşağıda göstərəcəyik ki, (57.7) Kulon kalibrləşməsi sərbəst sahənin eninəlik şərtidir. (57.1) sisteminin ikinci tənliyində $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorlarının (57.6) ifadələrini yerinə yazaraq, sahənin (57.7) eninəlik şərtini nəzərə alsaq sərbəst sahənin $\vec{A}'$ potensialı üçün aşağıdakı diferensial tənliyi almış oluruq:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} \to \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}') - \vec{\nabla}^2\vec{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}'$$

və ya

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}'(\vec{r},t) = 0. \qquad (57.8)$$

Buradakı axırıncı tənlik *sərbəst Dalamber tənliyi* adlanır və onu adətən □ Dalamber operatoru vasitəsilə yazırlar:

$$\square\vec{A}'(\vec{r},t) = 0. \qquad (57.8')$$

Riyaziyyatdan məlumdur ki, Dalamber tənliyi dalğa tənliyidir. Beləliklə sərbəst elektromaqnit sahəsinin potensialı sərbəst dalğa tənliyini ödəyir. İndi göstərək ki, sərbəst sahənin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlikləri də Dalamber tənliyini ödəyir. Bunun üçün (57.6) ifadəsindəki, $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ və rot operatorları ilə (57.8') Dalamber tənliyinə təsir edərək, bu operatorların □ Dalamber operatoru ilə kommutasiya etdiyini nəzərə alaq:

$$0 = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Box\vec{A}' \equiv \Box\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{A}' \equiv \Box\vec{E}(r,t)$$

və

$$0 = \mathrm{rot}\,\Box\vec{A}' \equiv \Box\,\mathrm{rot}\vec{A}' \equiv \Box\vec{H}(\vec{r},t).$$

Beləliklə sərbəst sahənin bütün vektorları sərbəst Dalamber tənliyini ödəyir:

$$\Box\vec{A}',\vec{E},\vec{H} = 0. \tag{57.9}$$

§58 Sərbəst Dalamber tənliyinin həlli. Qaçan dalğalar

Elektromaqnit sahəsinin vektor potensialının ödədiyi

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}'(\vec{r},t) = 0 \tag{58.1}$$

Dalamber tənliyinin həlli ilə məşğul olaq. İndidən etibarən potensialın üstündəki ştrixi ataraq, onu sadəcə $\vec{A}(\vec{r},t)$ ilə işarə edəcəyik ($\vec{A}'(\vec{r},t) \equiv \vec{A}(\vec{r},t)$). Sadəlik üçün fərz edək ki, sahə birölçülü fəzada x oxu boyunca yayılır, yəni sahə x və t-dən asılıdır: $\vec{A}(x,t)$. Bu zaman Dalamber tənliyi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(x,t) = 0 \tag{58.2}$$

şəklində yazılır. Məsələni asanlaşdırmaq üçün Dalamber operatorunu iki vuruğun hasili kimi yazırıq:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{A}(x,t) = 0. \tag{58.2'}$$

İndi x və t dəyişənləri əvəzinə yeni ξ və η dəyişənlərini

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \eta = t + \frac{x}{c} \tag{58.3}$$

şəklində daxil etsək, (58.2') tənliyi çox sadə şəklə düşər. Bunun üçün tənliyə daxil olan törəmələri ξ və η-ya görə törəmələrlə əvəz etmək lazımdır:

$$\frac{\partial\vec{A}(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\eta}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\vec{A}(\xi,\eta);$$

$$\frac{\partial\vec{A}(x_1 t)}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\vec{A}(\xi,\eta).$$

Bu törəmələri (58.2') tənliyində yerinə yazsaq

$$\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(-\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\vec{A}(\xi,\eta)=0 \text{ və ya } \frac{\partial^2\vec{A}(\xi,\eta)}{\partial\eta\partial\xi}=0 \tag{58.4}$$

tənliyini alırıq. Bu xüsusi törəməli 2-ci tərtib sadə diferensial tənlikdir. Tənliyi η üzrə inteqrallayaraq $\frac{\partial\vec{A}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=\vec{C}_1(\xi)$ alırıq. Alınmış ifadəni ξ üzrə inteqrallayaraq (58.4) tənliyinin ümumi həllini aşağıdakı səkildə yazırıq:

$$\vec{A}(\xi,\eta)=\int\vec{C}_1(\xi)d\xi+\vec{C}_2(\eta)=\vec{A}_1(\xi)+\vec{A}_2(\eta). \tag{58.5}$$

Burada $\vec{A}_1(\xi)$ və $\vec{A}_2(\eta)$ funksiyaları (58.4) tənliyinin bir-birində asılı olmayan həlləridir. Onlar hələlik ixtiyari funksiyalardır və onların şəkli (forması) məsələnin başlanğıc şərtlərindən asılıdır. Qeyd edək ki, bu həllər (58.4) tənliyinin inteqrallanma sabitləri kimi təyin edilir. Məsələn, $\vec{C}_1(\xi)$ baxdığımız diferensial tənliyin η-ya görə inteqrallanma sabitidir və $\vec{C}_2(\eta)$ isə tənliyin ξ-yə görə inteqrallanma sabitidir.Bu həlləri ayrılıqda təhlil edək.

Fərz edək ki, $\vec{A}_2(\eta)=0$. Onda $\vec{A}(\xi,\eta)=\vec{A}_1(\xi)=\vec{A}_1\left(t-\frac{x}{c}\right)$ olur. Bu həll yalnız $t-\frac{x}{c}$ ilə, yəni arqumentlərin fərqi ilə təyin edilir. Fərz edək ki, bu fərqin hər hansı seçilmiş sabit a qiymətində, məsələn, x_1 nöqtəsində və t_1 anında $\vec{A}_1$ həlli hər hansı ixtiyari şəklə (formaya) malikdir. Başqa sözlə $t_1-\frac{x_1}{c}=a$ qiymətində fərz olunur ki, $\vec{A}_1$-in şəkli bizə məlumdur. Bu şəkil zaman keçdikcə fəzanın digər nöqtələrində eynilə sönmədən təkrar olunmalıdır. Doğrudan da əgər $t_2 - \frac{x_2}{c} = a$ olarsa, bu şəkil t_2 anında x_2 nöqtəsində təkrar olunacaqdır. Bu iki münasibəti birləşdirərək $t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c} = a$ yazsaq, görərik ki, x_1 və x_2 nöqtələrində həmin şəkil təkrar olunur. Yazılışdan aydındır ki, $t_2 > t_1$ olduqda $x_2 > x_1$ olur, yəni zaman keçdikcə şəkil x oxunun müsbət istiqamətində hərəkət edir. Şəklin hərəkət sürətini tapmaq üçün yuxarıdakı münasibətdə x-ların fərqini t-lərin fərqinə bölmək lazımdır. Başqa sözlə $t - \frac{x}{c} = \text{const}$ ifadəsindən zamana görə törəmə almaq lazımdır: $v_1 = \frac{dx}{dt} = c$. Beləliklə $\vec{A}_1(t - \frac{x}{c})$ sahəsi x-ın müsbət istiqamətində $v_1 = c$ sürətilə yayılır. Sahənin asılı olduğu $t - \frac{x}{c}$ ifadəsinə *sahənin (dalğanın) fazası* deyilir. Faza sahənin (dalğanın) formasının fəza və zamana görə paylanmasını xarakterizə edir. Yuxarıdakıları yekunlaşdıraraq deyə bilərik ki, $\vec{A}_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ həlli X oxunun müsbət istiqamətində hərəkət edən dalğadır və onun $v_1 = c$ yayılma sürəti *faza sürəti* adlanır.

İndi ikinci həllə maraqlansaq, $\vec{A}(\xi, \eta) = \vec{A}_2(\eta) = \vec{A}_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ yazmalıyıq. A_2 sahəsi də başlanğıc şərtlərdən asılı olaraq müəyyən şəklə (formaya) malikdir. Fərz edək ki, $t_1 + \frac{x_1}{c} = b$ (sabit) halında A_2-nin şəkli bizə məlumdur. Bu şəklin t_2 anında x_2 nöqtəsində təkrar olunması üçün mütləq $t_2 + \frac{x_2}{c} = t_1 + \frac{x_1}{c} = b$ olmalıdır. Buradan çıxır ki, $t_2 > t_1$ olduqda $x_2 < x_1$ olur. Bu o deməkdir ki, zaman keçdikcə şəkil x-ın azalması istiqamətində hərəkət edir. Sahənin hərəkət sürətini tapmaq üçün $t + \frac{x}{c} = \text{const}$ ifadəsindən zamana görə törəmə alsaq $v_2 = \frac{dx}{dt} = -c$ olar. Sürətin mənfi olması X oxunun əksinə hərəkəti təsvir edir. $\vec{A}_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ sahəsi X oxunun əksinə işıq sürəti ilə hərəkət edir.

Beləliklə sərbəst Dalamber tənliyi xüsusi halda X oxun müsbət və mənfi istiqamətində işıq sürəti ilə hərəkət edən iki dalğanı təsvir edir. Bu dalğalar bir-birindən asılı deyil və ona görə də interferensiya edə bilməzlər. Bu dalğalar *qaçan dalğalar* adlanır.

İndi göstərək ki, sərbəst elektromaqnit sahəsi eninə sahədir. Baxdığımız halda potensial yalnız x və t-nin funksiyası olduğundan ($\vec{A}(x,t)$) (57.7) münasibəti aşağıdakı şəklə düşür:

$$\mathrm{div}\vec{A}(x,t) = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

Bundan x-a görə törəmə alsaq, $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 0$ olar. İndi (58.2) tənliyini $A_x(x,t)$ üçün yazaq və burada yuxarıdakı iki qat törəməni nəzərə alaq:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_x(x,t) = 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0.$$

Son ifadəni t-üzrə inteqrallayaraq $\frac{\partial A_x}{\partial t} = \mathrm{const} = -cE_x$ alırıq. 57-ci §-dan bilirik ki, sərbəst elektromaqnit sahəsi mütləq zamana görə dəyişən sahə olmalıdır, əks halda o sıfıra bərabərdir. Ona görə axırıncı ifadədən $E_x = 0$ və $\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0$ alırıq. Beləliklə $\vec{E}$ vektorunun yalnız E_y və E_z komponentləri sıfırdan fərqli ola bilər. Deməli, $\vec{E}$ vektoru OX oxuna perpendikulyardır, yəni $\vec{E}$ intensivliyi dalğanın yayılma istiqamətinə perpendikulyardır. İndi $\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0$ tənliyini zamana görə inteqrallasaq $A_x=$ $=$const olar. Yenə də nəzərə alaq ki, sabit sərbəst sahə ola bilməz. Ona görə $A_x=0$ olur. Beləliklə $\vec{A}$ vektoru da OX oxuna, yəni dalğanın yayılma istiqamətinə perpendikulyardır. Dalğanın yayılma istiqamətindəki (OX oxu) vahid vektora $\vec{i}$ deyərək gələcəkdə onu $\vec{n}$ ilə əvəz edəcəyik: $\vec{i} \equiv \vec{n}$. $\vec{n}$ həmişə sahənin, dalğanın yayılma istiqamətindəki vahid vektordur.

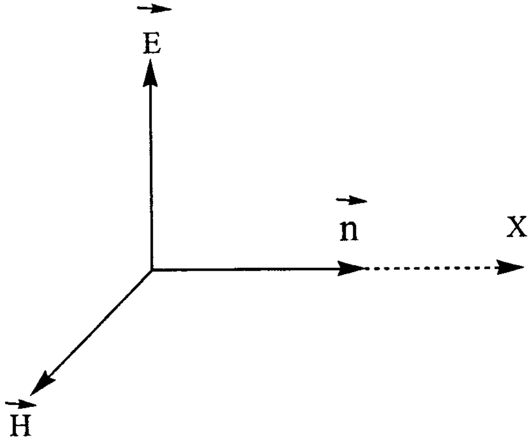
İndi $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlik vektorlarını $\vec{A}$ ilə ifadə edək:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}_\xi, \\ \vec{H} &= \mathrm{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla}\vec{A}\right] = \left[\vec{\nabla}\xi, \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi}\right] = \left[-\frac{\vec{i}}{c}\dot{\vec{A}}_\xi\right] = \left[\vec{n}\vec{E}\right]. \end{aligned} \tag{58.6}$$

Beləliklə sərbəst elektromaqnit sahəsinin üç vektoru da $\vec{n}$-ə perpendikulyardır: $\vec{A},\vec{E},\vec{H} \perp \vec{n}$. Sərbəst elektromaqnit sahəsi eninə sahədir. Biz yuxarıdakı axırıncı düsturun $\vec{n}$-ə vektori hasilini götürsək

$$\vec{E} = [\vec{H}\vec{n}] \tag{58.7}$$

ifadəsini alarıq. Əgər $\vec{H} = [\vec{n}\vec{E}]$ ifadəsini kvadrata yüksəltsək $\vec{H}^2 = \vec{E}^2$ bərabərliyi alınar. Yuxarıdakı münasibətlərdən görünür ki, $\vec{n},\vec{E},\vec{H}$ vektorları sağ yivli burğu təşkil edir (şəkil 58.1).



***Şəkil* 58.1**

Qeyd edək ki, bizim baxdığımız dalğa (sahə) əslində müstəvi dalğadır və bu haqda növbəti §-da ətraflı danışacağıq.

Son nəticədə sərbəst elektromaqnit sahəsi üçün Umov-Poyntinq vektorunu, yəni enerji seli sıxlığını və sahənin impuls sıxlığını hesablayaq:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}] = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}[\vec{n}\vec{E}]] = \frac{c}{4\pi}\{\vec{n}\vec{E}^2 - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})\} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^2 \cdot \vec{n} =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{2} \cdot \vec{n} = cw\vec{n}. \tag{58.8}$$

Burada $w = \dfrac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}$ sahənin enerji sıxlığıdır. Biz burada $\vec{E}^2 = \vec{H}^2$ bərabərliyindən və eninəlik şərtindən istifadə etmişik. (58.8) düsturundan görünür ki, elektromaqnit sahəsinin enerjisi vakuumda işıq sürətilə daşınır.

Elektromaqnit sahəsi impulsunun sıxlığı (41.17) düsturuna əsasən

$\vec{g}=\frac{\vec{j}}{c^2}$ şəklində təyin edilir. Burada (58.8) düsturunu nəzərə alsaq

$$\vec{g}=\frac{w}{c}\vec{n} \tag{58.9}$$

ifadəsi alınar. Sahənin impulsa malik olması onun təzyiqinin varlığını təmin edir (məs: işığın təzyiqi, Stoletov təcrübələri).

§59 Müstəvi monoxromatik dalğa

Elektromaqnit dalğaları içərisində çox mühüm yeri monoxromatik dalğalar tutur. Əgər dalğa (və ya sahə) zamanın sadə dövri (periodik) funksiyasıdırsa, o *monoxromatik dalğa* (sahə) adlanır. Monoxromatik yunanca eynirəngli deməkdir. Sadə dövri funksiyalar dedikdə $\sin\omega t$ və $\cos\omega t$ funksiyaları başa düşülür. Burada $\omega=\frac{2\pi}{T}$ sahənin dairəvi tezliyi, T isə sahənin dövridir (periodudur). Baxdığımız sərbəst sahələrdə t əvəzində $\xi=t-\frac{x}{c}$ və $\eta=t+\frac{x}{c}$ iştirak etdiyindən biz sadə dövri funksiya olaraq $\sin\omega\xi$, $\cos\omega\xi$, $\cos\omega\eta$ və s. götürə bilərik. Bu funksiyalardan hər-hansı birini, məsələn $\cos\omega\xi$-ni götürək və onu kompleks üstlü funksiyanın həqiqi (real) hissəsi kimi göstərək:

$$\cos\omega\xi=\mathrm{Re}\, e^{\pm i\omega\xi}=\mathrm{Re}\; e^{\pm i(\omega t-\frac{\omega}{c}x)}. \tag{59.1}$$

Burada $e^{\pm i\omega\xi}=\cos\omega\xi\pm i\sin\omega\xi$ olduğu nəzərə alınmışdır. Buradakı ± işarələrindən istənilən birisini seçə bilərik. Funksiyada iştirak edən $\frac{\omega}{c}=k$ kəmiyyəti *dalğa ədədi* adlanır. Onu bir az geniş yazsaq $k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{Tc}=\frac{2\pi}{\lambda}$ mənası aydın olar: dalğa ədədi 2π uzunluğunda yerləşmiş dalğaların sayıdır. Burada $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ dalğa uzunluğudur və o, sahənin fəzaya görə dövriliyini ifadə edir.

Yuxarıdakı funksiyanı sabit $\vec{A}_0$ vektoruna vuraraq sahənin vektor potensialını aşağıdakı kimi təsvir edə bilərik:

$$\vec{A}(x,t) = \mathrm{Re}\{\vec{A}_0 e^{-i(\omega t - kx)}\}. \qquad (59.2)$$

Sabit $\vec{A}_0$ vektoru *dalğanın amplitudu* adlanır. Ümumiyyətlə amplitud, kompleksi kəmiyyətdir, lakin xüsusi hallarda həqiqi də ola bilər. (59.2)-də $\omega t - kx$ *dalğanın fazası* adlanır. Burada yeganə məhdudiyyət sahənin X oxu boyunca yayılmasıdır. Bu məhdudiyyəti ləğv etmək üçün eyni başlanğıca malik iki ədəd üç ölçülü K' və K sistemləri götürək. Fərz edək ki, sərbəst sahəyə əvvəlcədən K' sistemində baxmışıq və görmüşük ki, dalğa X' oxu boyunca yayılır və $\vec{n}$ yayılma istiqamətində vahid vektordur. Fəzada P müşahidə nöqtəsi seçək.

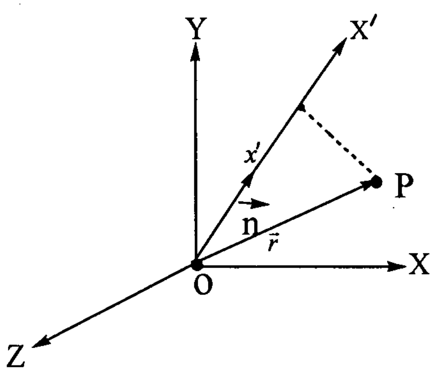
(59.2) ifadəsini X' oxu boyunca yayılan dalğa üçün yazaq:

$$\vec{A}(x',t) = \mathrm{Re}\{\vec{A}_0 e^{-i(\omega t - kx')}\}. \qquad (59.2')$$

P müşahidə nöqtəsinin OX' oxuna proyeksiyası x' koordinatı olacaqdır.

59.1 şəklindən görünür ki, $x' = (\vec{n}\vec{r})$. Bu ifadəni dalğanın fazasında nəzərə alsaq $\omega t - kx' = \omega t - k(\vec{n}\vec{r}) = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ olar. Burada $\vec{k} = \vec{n}k = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ *dalğa vektoru* adlanır. Dediklərimizi (59.2')-də nəzərə alaraq vektor potensialın ümumi ifadəsini yazırıq:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\}. \qquad (59.2'')$$



Şəkil **59.1**

Bu, koordinat sistemindən asılı olmadan yazılmış monoxromatik dalğanın ümumi ifadəsidir. Eyni əməliyyatı $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları ilə aparsaq onlar üçün monoxromatik dalğanın ümumi ifadəsini alarıq:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\},$$
$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\}. \qquad (59.3)$$

Burada $\vec{E}_0$ və $\vec{H}_0$ monoxromatik elektromaqnit dalğasında elektrik və maqnit sahələrinin sabit kompleks amplitudlarıdır. Qeyd edək ki, əgər sahə üzərində xətti əməliyyat (məsələn: toplama, çıxma, diferensiallama, inteqrallama) aparılarsa, onda xətti əməliyyatla Re əməliyyatı bir-birilə komutasiya edər: $L_{x\partial t}$Re(...)=Re $L_{x\partial t}$(...). Burada (...) monoxromatik kompleks funksiyadır. Bunu $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r},t)$ üçün göstərək. Sadəlik üçün $\vec{A}_0$ amplitudunu həqiqi götürək:

$$\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\,\mathrm{Re}\{\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\} = \vec{\nabla}\vec{A}_0 \cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t) = -\vec{k}\vec{A}_0 \sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t).$$

İndi bu hesablamanı $\vec{\nabla}$ ilə Re əməliyyatlarının yerlərini dəyişdirməklə aparaq:

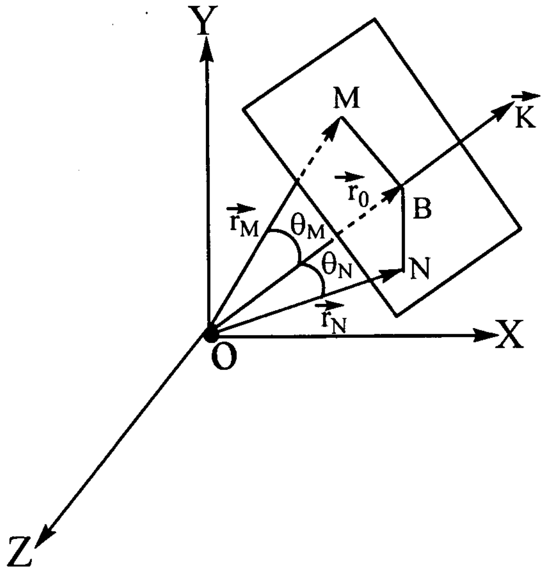
$$\mathrm{Re}\,\vec{\nabla}\{\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\} = \mathrm{Re}\{i\vec{k}\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\} = \mathrm{Re}\{i\vec{k}\vec{A}_0 \cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t) -$$
$$- \vec{k}\vec{A}_0 \sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\} = -\vec{k}\vec{A}_0 \sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t).$$

Bu iki son ifadə bir birinə bərabərdir.

Ona görə biz gələcəkdə sahə üzərində xətti əməliyyat apararkən Re anlayışına fikir vermədən yalnız sahənin kompleks şəkildə yazılmış ifadələri üzərində istədiyimiz hesablamaları aparacağıq. Çünki eksponensial funksiyaları diferensiallamaq, inteqrallamaq çox asandır. Əgər ehtiyac olarsa, sonda alınmış nəticənin Re hissəsini götürmək olar. Lakin çox vaxt sahə üzərində qeyri xətti əməliyyat aparmaq (məs: sahələri bir-birinə vurmaq, kvadrata yüksəltmək) lazım gəlir. Bu əməliyyatı sahənin Re hissəsi üzərində aparmaq lazımdır. Məsələn,

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathrm{Re}\,\vec{E}\,\mathrm{Re}\,\vec{H}\right], \qquad w = \frac{(\mathrm{Re}\,\vec{E})^2 + (\mathrm{Re}\,\vec{H})^2}{8\pi}.$$

İndi müstəvi dalğaya tərif verək: Dalğanın yayılma istiqamətinə perpendikulyar olan müstəvinin bütün nöqtələrində sahə eyni bir qiymətə malik olub, yalnız zamandan asılıdırsa, belə dalğaya *müstəvi dalğa* deyilir. Göstərək ki, $\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\}$ dalğası müstəvi monoxromatik dalğadır. Koordinat başlanğıcından $\vec{r}_0$ məsafəsində dalğanın $\vec{k}$ yayılma vektoruna perpendikulyar bir müstəvi keçirək (şəkil 59.2). Müstəvi üzərində ixtiyarı M və N nöqtələrini götürək. Onların radius vektorlarına $\vec{r}_M$ və $\vec{r}_N$ deyək və bunların $\vec{r}_0$-la əmələ gətirdiyi bucaqları θ_M və θ_N ilə işarə edək.



Şəkil **59.2**

Dalğanın $\vec{k}\vec{r}-\omega t$ fazası $\vec{r}$-dən asılıdır. Müstəvinin ixtiyari M və N nöqtələri üçün dalğanın fazasını hesablasaq, hər iki nöqtə üçün eyni bir qiymət alarıq. Doğrudan da $\vec{r}_0$ vektoru səthə normal olduğundan o, səthdəki bütün xətlərə perpendikulyardır və ona görə OBM və OBN bucaqları düz bucaq olur. Onda $\vec{k}\vec{r}_M = kr_M \cos\theta_M = kr_0$ və $\vec{k}\vec{r}_N = kr_N \cos\theta_N = kr_0$ olar. Beləliklə ixtiyari M və N nöqtələrində və deməli müstəvinin bütün nöqtələrində dalğanın fazası eyni bir qiymət alır və yalnız zamandan asılı olur. Bu müstəvi *faza müstəvisi* adlanır və o dalğa cəbhəsi ilə üst-üstə düşür. Əgər zamanın seçilmiş t_0 anında monoxromatik dalğanın fazasına baxsaq, onda biz faza müstəvisinin $\vec{k}\vec{r}-\omega t_0 = \mathrm{const}$ tənliyini almış oluruq.

İndi monoxromatik dalğanın fazasının relyativistik invariant olduğunu göstərək. Bunu ümumi halda sahə vektorlarının Lorens çevrilməsindən istifadə edərək göstərmək olar. Lakin biz çox sadə üsuldan istifadə edəcəyik. Dalğanın $\vec{k}\vec{r}-\omega t$ fazasında t-ni x_4-lə ifadə edək:

$$t = \frac{ict}{ic} = \frac{x_4}{ic}.$$

Onda $\vec{k}\vec{r}-\omega t=\vec{k}\vec{r}-\frac{\omega}{ic}x_4=\vec{k}\vec{r}+\frac{i\omega}{c}x_4$ olur. Burada dalğa vektoruna dördüncü komponenti $k_4=\frac{i\omega}{c}$ olan 4-ölçülü vektor kimi baxsaq $\vec{k}\vec{r}-\omega t=$ $=\vec{k}\vec{r}+k_4x_4=k_\mu x_\mu$ alarıq. 4-ölçülü vektorların hasili invariant olduğundan

$$\vec{k}\vec{r}-\omega t=k_\mu x_\mu=\text{in var} \tag{59.4}$$

şərtini alırıq. Beləliklə burada 4-ölçülü dalğa vektoru anlayışı daxil edilir:

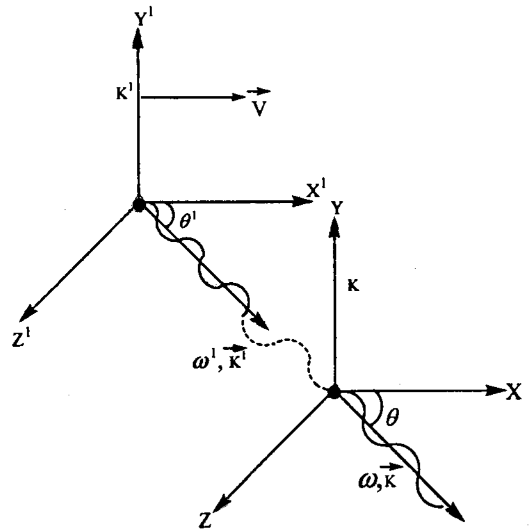
$$k_\mu=\{\vec{k},k_4\}=\left\{\vec{k},\frac{i\omega}{c}\right\}. \tag{59.5}$$

Bu vektorun kvadratı sıfırdır: $k_\mu^2=\vec{k}^2+k_4^2=\frac{\omega^2}{c^2}\vec{n}^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0$. Belə vektorlara *izotrop* və ya *işıq vektorları* deyilir.

§60. Dopler effekti

Təcrübələr göstərir ki, hərəkət edən mənbənin buraxdığı şüanı (dalğanı) qəbul edərkən, şüanın tezliyi müəyyən qədər sürüşmüş olur. Başqa sözlə qəbul edilən dalğanın tezliyi onun şüalanma tezliyindən fərqli olur: $\omega\neq\omega'$. Burada ω qəbul edilən dalğanın tezliyi, ω' isə şüalanan dalğanın tezliyidir. Bu hadisəyə *Dopler effekti* deyilir. Biz sadəlik xatirinə ω^1-ə şüalanma tezliyi ω-ya qəbul edilmə tezliyi deyəcəyik. Bu hadisə həm relyativistik həm də qeyri relyativistik fizikada mövcuddur. Hətta mexaniki dalğalarda, məsələn səs dalğalarında bu hadisə müşahidə olunur. Biz Dopler hadisəsini relyativistik fizika üçün tədqiq edəcəyik.

Fərz edək ki, nisbi $\vec{V}$ sürətinə malik K' sistemində yerləşən işıq mənbəyi hərəkət istiqaməti ilə θ' bucağı altında ω' tezliyinə və $\vec{k}'$ dalğa vektoruna malik şüa buraxır. K ətalət sistemində yerləşmiş müşahidəçi bu şüanı θ bucaq altında ω tezliyinə və $\vec{k}$ dalğa vektoruna malik dalğa kimi qəbul edir (şəkil 60.1).



Şəkil **60.1**

K' və K ətalət sistemlərində dalğanın 4 ölçülü dalğa vektorlarını uyğun olaraq $k'_\mu = \left(\vec{k}', i\frac{\omega'}{c}\right)$ və $k_\mu = \left(\vec{k}, i\frac{\omega}{c}\right)$ şəklində yazaraq və 4-ölçülü vektorların Lorens çevrilməsi üçün

$$k'_\mu = L_{\mu\nu} k_\nu \tag{60.1}$$

düsturlardan istifadə edərək (bax(14.4)) $\omega', \vec{k}'$ və $\omega, \vec{k}$ kəmiyyətləri arasındakı əlaqəni aşkar şəkildə veririk:

$$k'_x = \frac{k_x + i\frac{v}{c}k_4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ k'_y = k_y,\ k'_z = k_z,\ k'_4 = \frac{k_4 - i\frac{v}{c}k_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{60.2}$$

Axırıncı bərabərlikdə $k'_4 = i\frac{\omega'}{c}, k_4 = i\frac{\omega}{c}, k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ yazaraq ω' ilə ω arasındakı əlaqəni tapırıq:

$$\omega' = \frac{\omega(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{60.3}$$

Bu düstur nisbilik nəzəriyyəsində Dopler effektini təsvir edir. Praktiki məqsədlər üçün bu düsturu adətən aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}. \qquad (60.3')$$

Burada $\beta = \frac{v}{c}$. (60.3') düsturu çox mühüm relyativistik düsturdur. ~~(60.2) sistemində birinci düstur $\vec{k}'$ və $\vec{k}$ arasındakı əlaqəni ifadə edir. Biz bu düsturdan yalnız məsələ həllində istifadə edəcəyik.~~

İndi 3 xüsusi halı nəzərdən keçirək.

1. Fərz edək ki, $\theta = 0^\circ$. Bu mənbənin müşahidəçiyə yaxınlaşdığı halı təsvir edir. (60.3') düsturunda $\theta = 0^\circ$ yazaraq $\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \omega'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ alırıq. İfadədən görünür ki, $\omega > \omega'$, yəni mənbə yaxınlaşdıqda qəbul olunma tezliyi artır.

2. Əgər $\theta=\pi$ olarsa, bu mənbənin uzaqlaşdığını göstərir. Bu halda $\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \omega'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ olur. Bu o deməkdir ki, $\omega < \omega'$, yəni mənbə uzaqlaşdıqda qəbul olunma tezliyi azalır. Baxdığımız bu iki hal *uzununa Dopler effekti* adlanır.

3. $\theta=\frac{\pi}{2}$ olduğu *hal eninə Dopler effekti* adlanır. Bu halda $\omega = \omega'\sqrt{1-\beta^2}$ olur. Eninə Dopler effektində də qəbul olunma tezliyi azalır ($\omega < \omega'$). Qeyd edək ki, qeyri relyativistik fizikada yalnız uzununa Dopler effekti müşahidə olunur. Orada eninə Dopler effekti yoxdur.

(60.3') düsturunda $\beta << 1$ ($v << c$) yazaraq, qeyri relyativistik fizikada Dopler effektinin düsturunu ala bilərik. Bu yaxınlaşmada $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1$ və

$$\omega = \frac{\omega'}{1-\beta\cos\theta} \approx \omega'(1+\beta\cos\theta) \qquad (60.4)$$

olur. Son düsturu mexaniki dalğalara, məsələn səs dalğaların tətbiq etdikdə $\beta = \frac{\text{səs mənbəyinin sürəti}}{\text{səsin sürəti}}$ götürülməlidir.

Dopler effekti üçün relyativistik düsturun doğruluğunu ilk dəfə təcrübi olaraq 1938-ci ildə Ayvs isbat etmişdir. O anodun buraxdığı zərrəciklər dəstəsində hərəkət edən hidrogen atomunun buraxdığı şüanı sükunətdəki atomun buraxdığı şüa ilə müqayisə edərək (60.3') düsturunun ödəndiyini göstərmişdir.

Sonralar ~~(keçən əsrin 60-cı illərində)~~ Mözbauyer təcrübi kəşf etdiyi effektdə ~~(bax: §25, hissə 25.4 Mözbauyer effekti)~~ kristal qəfəslərdə yerləşən nüvələrdə gedən rezonans şüalanma və rezonans udulma proseslərinin nəzəri izahında (60.3')düsturundan istifadə etmiş və onun çox geniş oblastda doğru olduğunu göstərmişdir.

Dopler effektindən müasir relyativistik fizikada, elementar zərrəciklər fizikasında və astrofizikada geniş istifadə olunur.

§61. Elektromaqnit dalğasının xətti və dairəvi polyarizasiyası

Elektromaqnit dalğasının polyarizasiyası haqda Optika bəhsindən bizim bir qədər məlumatımız var. İndi isə müstəvi monoxromatik dalğanın polyarizasiya xassələrini ətraflı təhlil edəcəyik. Polyarizasiya xassələri yalnız elektromaqnit sahəsinə aid olmayıb, spinə malik istənilən sahəyə (zərrəciyə) məxsusdur. Fiziki proseslərin təhlilində polyarizasiya hadisələri çox mühüm elmi nəticələrə, kəşvlərə səbəb olmuşdur.

Müstəvi monoxromatik elektromaqnit dalğasını (59.3)-ə əsasən

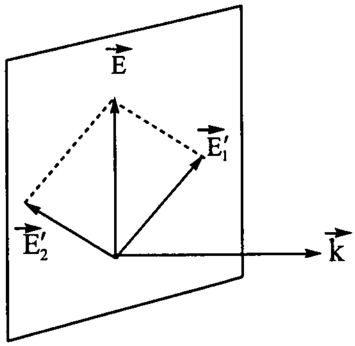
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\}, \tag{61.1}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\} \tag{61.2}$$

şəklində yazırıq. Sahə üzərində xətti əməliyyat apardıqda Re əməliyyatını son nəticədə nəzərə alacağıq. Elektromaqnit sahəsinin eninəlik şərti $\vec{E}(r,t)$ vektoru üçün $\mathrm{div}\vec{E}(r,t) = 0$ şəkilində yazılır. $\vec{E}_0$ amplitudunu $\vec{E}_0 = \vec{e}_0 E_0$ şəkildə yazaraq, $\vec{e}_0$-a vahid vektor deyəcəyik. Əgər $\vec{e}_0$ fiksə olunmuş sabit vektordursa,(61.1) dalğası xətti və ya *müstəvi polyarizasiya olunmuş dalğa* adlanır, $\vec{e}_0$-a *polyarizasiya vektoru* deyilir və o, $\vec{E}$ vektorunun rəqs etmə istiqamətini göstərir. $\vec{E}$ üçün eninəlik şərtini yazsaq

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0, \rightarrow \vec{k}\vec{E} = 0 \text{ və ya } \vec{k}\vec{e}_0 = 0 \tag{61.3}$$

olar. Biz Re anlayışını son nəticədə nəzərə ala bilərik. Yuxarıdakı yazılışdan aydın olur ki, $\vec{E}$ sahəsi eninədir və onun yalnız 2 ədəd asılı olmayan komponenti (toplananı) vardır. Başqa sözlə $\vec{k}$-ya perpendikulyar olan müstəvidə $\vec{E}$-ni iki perpendikulyar toplanana ayıra bilərik (şəkil 61.1).



Şəkil **61.1**

Bu toplananların hər birinə xətti polyarizasiya olunmuş dalğa kimi baxa bilərik:

$$\vec{E}_1'(\vec{r},t) = \vec{e}_1'E_{01}'e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)},$$
$$\vec{E}_2'(\vec{r},t) = \vec{e}_2'E_{02}'e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \qquad (61.4)$$

Burada $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ polyarizasiya vektorları bir-birinə və $\vec{k}$-ya perpendikulyardır:

$$\vec{e}_1' \perp \vec{e}_2' \perp \vec{k}.$$

Beləliklə müstəvi monoxromatik elektromaqnit dalğası bir-birindən asılı olmayan iki xətti polyarizasiyaya malikdir və polyarizasiya vektorları bir-birinə və dalğa vektorlarına perpendikulyardır.

İndi ümumi hala baxaq. Fərz edək ki, X və Y oxları istiqamətində xətti polyarizasiya olunmuş ($\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ polyarizasiya vektorlarına malik) və eyni bir $\vec{k}$ istiqamətində yayılan və müxtəlif başlanğıc fazalarına malik (E_{01} və E_{02} kompleks amplitudlar) iki müstəvi monoxromatik dalğa toplanır:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\vec{e}_1E_{01} + \vec{e}_2E_{02})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \qquad (61.5)$$

Kompleks amplitudları $E_{01} = b_1e^{i\delta_1}$ və $E_{02} = b_2e^{i\delta_2}$ şəklində yazaq. Burada b_1 və b_2 həqiqi amplitudlar, δ_1 və δ_2 isə toplanan dalğaların başlanğıc fazalarıdır.

Yekun dalğanın polyarizasiyası toplanan dalğaların δ_2-δ_1 fazaları fərqindən asılıdır. Fərz edək ki, fazalar $\delta_2 = \delta_1 \pm 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ şəklindədir. Onda (61.5) düsturunda $e^{i\delta_1}$ fazasını ortaq vuruq kimi kənara çıxartsaq və $e^{\pm i2\pi n} = 1$ olduğunu nəzərə alsaq bu düsturu təkrar aşağıdakı kimi yazarıq:

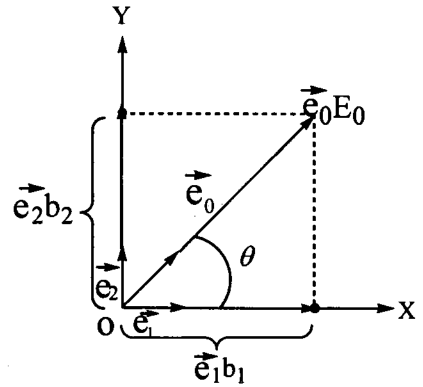
$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_1)} \equiv \vec{e}_0 E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_1)}. \qquad (61.5')$$

Bu yazılışda amplitudlar aşağıdakı bərabərliyi ödəyir:

$$\vec{e}_0 E_0 = \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2. \qquad (61.6)$$

Amplitudları XOY müstəvisində təsvir etsək görərik ki, yekun dalğa da xətti polyarizasiya olunmuş dalğadır və onun $\vec{e}_0$ polyarizasiya vektoru $\vec{e}_1$ oxu ilə θ bucağı təşkil edir (şəkil 61.2):

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{b_2}{b_1}.$$



Şəkil **61.2**

(61.6) bərabərliyini kvadrata yüksəldərək yekun dalğanın E_0 amplitudunu tapırıq:

$$E_0^2 = b_1^2 + b_2^2. \qquad (61.7)$$

Əgər $b_1^2 = b_2^2 = \frac{1}{2} E_0^2$ olarsa, (61.6) düsturundan

$$\vec{e}_0 = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{2}} \qquad (61.8)$$

bərabərliyini alırıq. Beləliklə $\vec{e}_0, \vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ yekun dalğanın və toplanan dalğaların vahid xətti polyarizasiya vektorlarıdır. Əgər $b_2/b_1 = \alpha$ olarsa, yekun dalğanın vahid polyarizasiya vektoru

$$\vec{e}_0 = \frac{\vec{e}_1 + \alpha \vec{e}_2}{\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad (61.8')$$

olar.

İndi fərz edək ki, toplanan dalğaların fazaları $\delta_2 = \delta_1 \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ şərtini ödəyir. Bu zaman yekun dalğa sağ və ya sol elliptik (dairəvi) polyarizasiya edilmiş olur. Bunu göstərmək üçün fərz edək ki, n=0. Onda $\delta_2 = \delta_1 \pm \frac{\pi}{2}$ olar. Bunu (61.5')-də nəzərə alaq və (61.1)-ə əsasən dalğanın həqiqi hissəsini hesablayaq:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 e^{\pm i\frac{\pi}{2}} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_1)}\} =$$
$$= \mathrm{Re}\{\vec{e}_1 b_1 \pm i\vec{e}_2 b_2\} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_1)} \equiv \mathrm{Re}\{\vec{e}_0 E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_1)}\}. \qquad (61.9)$$

Burada amplitudlar arasındakı əlaqə aşağıdakı şəkildədir:

$$\vec{e}_1 b_1 \pm i\vec{e}_2 b_2 = \vec{e}_0 E_0. \qquad (61.10)$$

Məsələnin qoyuluşdan aydındır ki, dalğa Z oxu boyunca yayılır. $\vec{E}(\vec{r},t)$ vektorunun E_x və E_y toplananları üçün

$$E_x(\vec{r},t) = b_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_1),\ E_y(\vec{r},t) = \mp b_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_1) \qquad (61.11)$$

münasibətini alırıq. Buradan ellipsin tənliyi alınır:

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1. \qquad (61.12)$$

Əgər toplanan dalğaların amplitudları bir-birinə bərabərdirsə ($b_1=b_2=b$), onda çevrənin tənliyini alırıq:

$$E_x^2 + E_y^2 = b^2.$$

Beləliklə toplanan dalğanın fazalar fərqi $\delta_2 - \delta_1 = \pm\pi/2$ (və ya $\delta_2 - \delta_1 = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$) olduqda yekun dalğanın $\vec{E}$ vektoru ellips (və ya çevrə) cızır. Belə dalğaya *ellips boyunca* (və ya dairə boyunca) *polyarizələnmiş dalğa* deyilir. Bəzən belə dalğalar *sirkulyar polyarizələnmiş dalğalar* adlanır.

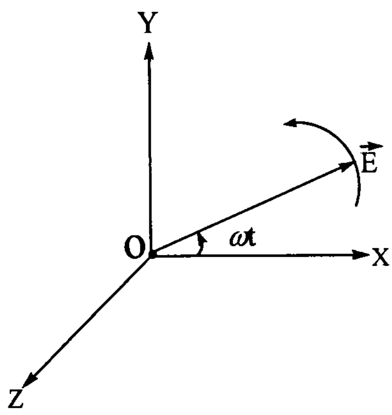
(61.10) bərabərliyində $b_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}E_0$ yazsaq,

$$\vec{e}_0 \equiv \vec{e}_\pm = \frac{\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} \qquad (61.13)$$

alarıq. Bu sirkulyar polyarizasiya halında polyarizasiya vektorudur. Yazılışdan görünür ki, $\vec{e}_+\vec{e}_+ = \vec{e}_-\vec{e}_- = 0$, $\vec{e}_+\vec{e}_- = 1$ olur. Burada «+» və «-» işarələri polyarizasiyanın istiqamətini, yəni $\vec{E}$ vektorunun fırlanma istiqamətini müəyyən edir. Doğrudan da (61.11) ifadəsində ikinci bərabərliyi birinciyə bölsək,

$$\frac{E_y/b_2}{E_x/b_1} = \mp tg(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha_1) \equiv tg\theta_0 \qquad (61.14)$$

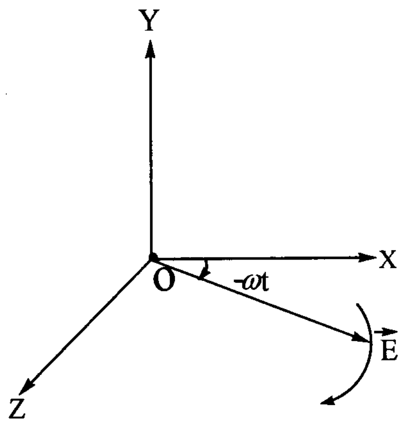
olar. Sadəlik üçün r=0, α_1=0 götürsək $\mp tg(-\omega t) = tg\theta_0$ alarıq. Birinci işarəni götürsək $-tg(-\omega t) = tg\omega t = tg\theta_0$ olar. Bucağın bu qiyməti polyarizasiya vektorunun $\frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}}$ qiymətinə uyğundur. Bu fırlanma şəkil 61.3-də göstərilmişdir.



Şəkil **61.3**

$\vec{e}_1 + i\vec{e}_2$

Zaman keçdikcə $\theta_0 = \omega t$ bucağı müsbət istiqamətində artır. Əgər biz dalğaya qarşıdan (Z oxunun ucundan) baxsaq $\vec{E}$ vektoru sol tərəfə (saat əqrəbinin əksinə) fırlanacaq, yəni $\vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ sol dairəvi polyarizasiyanı ifadə edəcək. Lakin biz dalğaya arxadan baxsaq, onda bizə nəzərən $\vec{E}$ vektoru sağ tərəfə fırlanacaq, yəni $\vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ sağ dairəvi polyarizasiyanı təsvir edəcək. İndi (61.14)-də ikinci işarəni götürsək, $tg(-\omega t) = tg\theta_0$ və $\theta_0 = -\omega t$ olar. Bucağın bu qiyməti polyarizasiya vektorunun $\frac{\vec{e}_1 - ie_2}{\sqrt{2}}$ qiymətinə uyğundur. Bu fırlanma şəkil 61.4-də göstərilmişdir.



Şəkil **61.4**
$\vec{e}_1 - i\vec{e}_2$

Zaman keçdikcə $\theta = -\omega t$ bucağı mənfi istiqamətdə artır. Analoji olaraq dalğaya qarşıdan baxsaq, $\vec{E}$ vektoru sağ tərəfə fırlanacaq, yəni $\vec{e}_1 - i\vec{e}_2$ sağ dairəvi polyarizasiyanı təsvir edəcək. Lakin arxadan baxsaq, $\vec{E}$ sola fırlanacaq, yəni $\vec{e}_1 - i\vec{e}_1$ sol dairəvi polyarizasiyanı ifadə edəcək.

Adətən dalğanı şüalandıraraq arxadan onu müşahida edirlər. Ona görə $\vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ sağ dairəvi və $\vec{e}_1 - i\vec{e}_2$ sol dairəvi polyarizə olunmuş dalğanı təsvir edir. Məlumat üçün deyək ki, kvant elektrodinamikasında elektromaqnit dalğasının $\vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ sağ dairəvi polyarizasiya halı fotonun spirallılığının (spinin impuls üzrə proyeksiyasının) +1-ə və $\vec{e}_1 - i\vec{e}_2$ sol dairəvi polyarizasiya halı isə spirallığın -1-ə bərabər olmasını göstərir. Dediklərimizi ümumiləşdirərək müstəvi monoxromatik dalğanı belə yazırıq:

$$\vec{E}_\alpha(\vec{r},t) = \vec{e}_\alpha E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta)}. \qquad (61.15)$$

Burada $\vec{e}_\alpha$ polyarizasiya vektoru yalnız iki qiymət ala bilər: ya α=1,2 iki ədəd xətti polyarizasiyanı, ya da α= +, - sağ və sol dairəvi polyarizasiyanı təsvir edir. e_α ortoqopallıq şərtini ödəyir:

$$\vec{e}^{\,*}_{\alpha'}\vec{e}_\alpha = \delta_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 1, & \alpha = \alpha' \text{ olduqda} \\ 0, & \alpha \neq \alpha' \text{ olarsa} \end{cases} \qquad (61.16)$$

Qeyd edək ki, xətti polyarizasiya üçün $\vec{e}_\alpha$ həqiqidir, yəni, $\vec{e}^{\,*}_\alpha = \vec{e}_\alpha$, dairəvi polyarizasiya üçün isə $\vec{e}_\alpha$ kompleks kəmiyyətdir. (61.16) şərti həm həqiqi və həm də kompleks $\vec{e}_\alpha$ üçün (məs: $\vec{e}^{\,*}_+ = \vec{e}_-$) doğrudur.

Beləliklə istənilən monoxromatik elektromaqnit dalğası bu və ya digər şəkildə polyarizasiyaya malik olmalıdır. Bu dalğanın yalnız $\vec{E}$ elektrik sahəsi intensivliyi yox, həm də $\vec{H}$ maqnit sahəsi intensivliyi polyarizasiya xassələrinə malikdir. Maqnit sahəsinin polyarizasiya vektorunu Maksvell tənliklərindən istifadə edərək $\frac{1}{k}[\vec{k}\vec{e}_\alpha]$ şəklində yazırıq.

Əgər elektromaqnit dalğası (sahəsi) monoxromatik deyildirsə, yəni o müəyyən $\Delta\omega$ tezlik intervalına malikdirsə, belə dalğa polyarizasiyaya malik ola bilməz. Çünki bu zaman uyğun fazalar fərqi sabit qalmır və o qeyri-qanuni, ixtiyari dəyişən funksiya olur. Buna misal olaraq təbii işığı göstərə bilərik.

IX FƏSİL
HƏRƏKƏT EDƏN YÜKLƏRİN YARATDIĞI SAHƏLƏR

§62. Gecikən və qabaqlayan potensiallar

Maksvell tənliklərindən bilirik ki, elektromaqnit sahəsinin mənbəyi yüklər və cərəyanlardır. Biz VII fəsildə sükunətdəki yüklərin və stasionar cərəyanların yaratdığı sabit elektromaqnit sahəsini öyrəndik və VIII fəsildə isə fəza və zamana görə dəyişən sərbəst (yəni mənbəsiz) elektromaqnit sahəsi ilə məşğul olduq. Bu fəsildə biz sonlu fəzada yerləşmiş zaman və məkana görə ixtiyari qanunla dəyişən yüklərin və cərəyanların sonsuz fəzada yaratdığı elektromaqnit sahəsini öyrənəcəyik.

İxtiyarı hərəkət edən yüklərin yaratdığı sahənin potensiallarını tapmaq üçün Maksvellin II növ tənliklərinin 4-ölçülü şəklindən istifadə edirik:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu . \qquad (62.1)$$

Burada $F_{\mu\nu}$ antisimmektrik tenzorun $F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x\nu} A_\mu$ ifadəsini yerinə yazaq və potensialların ödədiyi $\frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\nu = 0$ Lorens şərtini nəzərə alaq:

$$\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} = \frac{4\pi}{c} j_\mu .$$

Axırıncı tənlikdə $\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$ Dalamber operatorunu nəzərə alaraq 4-ölçülü potensialın ödədiyi diferensial tənliyi yazırıq:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu \text{ və ya } \Box A_\mu(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c} j_\mu(\vec{r},t) . \qquad (62.2)$$

Elektromaqnit sahəsinin 4-ölçülü potensialı qeyri bircins Dalamber tənliyini ödəyir. Burada 4-ölçülü potensialın və 4-cərəyan sıxlığının $A_\mu = \{\vec{A}, i\varphi\}$ və $j_\mu = \{\vec{j}, ic\rho\}$ ifadələrini nəzərə alsaq $\vec{A}$ vektor potensialın və φ skalyar potensialın qeyri-bircins Dalamber tənliyini ödədiyini görərik:

$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\,, \tag{62.3}$$

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)\,. \tag{62.4}$$

Beləliklə ixtiyari dəyişən $\vec{j}(\vec{r},t)$ cərəyan sıxlığı və $\rho(\vec{r},t)$ yük sıxlığı (62.3) və (62.4) tənliklərini ödəyən və zaman və fəzaya görə dəyişən sahənin $\vec{A}$ vektor və φ skalyar potensiallarını yaradır. Yuxarıdakı diferensial tənliklərin həllərinin birqiymətli olması üçün sahə funksiyalarının sərhəd və başlanğıc şərtlərini vermək lazımdır. Bu şərtləri formalaşdırmaq üçün aşağıdakı fiziki mülahizədən istifadə edirik. Fərz edək ki, t=0 anına qədər (yəni, $t \le 0$ üçün) yüklər ya stasionar hərəkət edir, ya da sükunətdədir. Belə yüklərin yaratdığı sahə sabit elektromaqnit sahəsidir və o sahə artıq bizə məlumdur (bax: VII Fəsil). Tutaq ki, t=0 anından etibarən (yəni, $t \ge 0$ üçün) yüklər və cərəyanlar ixtiyari hərəkət etməyə başlayır. Bununla əlaqədar olaraq elektromaqnit sahəsində müəyyən həyəcanlaşma baş verir. Bizi məhz bu həyəcanlaşmış sahə maraqlandırır. Bu sahədən tam istifadə etmək üçün t=0 anına qədər mövcud olan stasionar sahədən yaxa qurtarmalıyıq. Bunu sadə həyata keçirmək üçün fərz edək ki, t=0 anına qədər ($t \le 0$ üçün) yüklər də, sahə də sıfıra bərabərdir:

$$\rho(\vec{r},0) = \vec{j}(\vec{r},0) = \varphi(\vec{r},0) = \vec{A}(\vec{r},0) = 0\,,\ t \le 0 \text{ üçün.} \tag{62.5}$$

Buradan $\vec{A}(\vec{r},t)$ üçün başlanğıc şərti aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$\vec{A}(\vec{r},0) = \left.\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{62.6}$$

Bu yazılışda birinci hədd $\vec{H}(\vec{r},0) = 0$ və ikinci hədd isə $\vec{E}(\vec{r},0) = 0$ olduğunu göstərir. Sərhəd şərti yüklər sistemindən çox uzaqda istənilən zaman anında (məsələn: $t \ge 0$ üçün) sahənin sıfıra bərabər olmasını ifadə edir:

$$\vec{A}(\vec{r},t) \underset{r\to\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{r}\right) \to 0\,. \tag{62.7}$$

Skalyar potensial üçün başlanğıc və sərhəd şərtlərini analoji olaraq

$$\varphi(\vec{r},0) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{62.8}$$

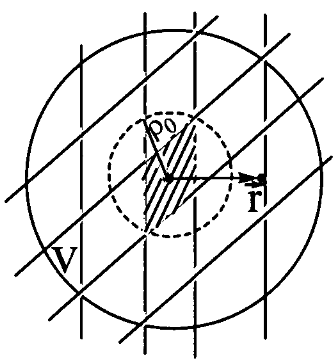
$$\varphi(\vec{r},t) \sim O\left(\frac{1}{r}\right) \to 0, \quad r \to \infty \tag{62.9}$$

şəklində yaza bilərik. İkinci tərtib diferensial tənliklərdə həm funksiyanın özünün, həm də onun törəməsinin başlanğıc anda qiyməti verilməlidir.

Baxdığımız tənliyi Qrin funksiyasının köməyi ilə dəqiq həll etmək olardı. Bu üsuldan gələcəkdə istifadə edəcəyik. İndi isə bəzi mülahizələrin köməyi ilə bu tənliyi sadə yolla həll edəcəyik. Əvvəlcə (62.4), (62.8), (62.9) başlanğıc və sərhəd məsələsinə baxaq. Hərəkət edən yüklərin yerləşdiyi sonlu V həcmini kiçik elementlərə bölək və bir ədəd ştrixlənmiş həcm elementini seçək. Yüklərin hərəkəti nəticəsində bu elementdə yerləşən yük zamandan asılı olacaqdır (Yüklər həcm elementinə daxil ola və elementdən kənara çıxa bilər). Hər hansı t anında ştrixlənmiş həcm elementində olan elementar yükün miqdarına de(t) deyək və onun sıxlığını $\rho_{ştrix}(\vec{r},t)$ ilə işarə edək. İxtiyarı hərəkət edən bu yükün yaratdığı sahənin tənliyini yazaq:

$$\square\varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho_{ştrix}(\vec{r},t)\,. \tag{62.4'}$$

Ştrixlənmiş həcm elementini ρ_0 radiuslu kiçik sfera ilə izolə edək və buradakı yükün yaratdığı sahəni sferadan xaricdə hər hansı $\vec{r}$ məsafəsində müşahidə edək (şəkil 62.1).



Şəkil **62.1**

Şəkildən görünür ki, r məsafəsində ştrixli həcm elementinin yükü yoxdur, yəni $\rho_{ştrix}(\vec{r},t)=0$ Onda (62.4′) tənliyi

$$\Box\varphi(\vec{r},t)=0 \qquad (62.4'')$$

şəklinə düşür. Bu tənlikdə r≠0 olur, yəni baxdığımız nöqtə ştrixli həcmdən xaricdədir. Biz V həcmini cox sayda kiçik elementlərə bölərək ona nail olarıq ki, baxdığımız ştrixli həcm elementi çox kiçik sferaya oxşar olsun. Son nəticədə bu kiçik sferanın yaratdığı sahə sferik simmetrik olacaqdır, yəni sahə bucaqlardan asılı olmayacaqdır: $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0$. İndi Dalamber operatoruna daxil olan $\vec{\nabla}^2$ operatorunu ($\Box=\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$) sferik koordinat sistemində yazaraq (bax: əlavə) tənliyi sadələşdirə bilərik:

$$\vec{\nabla}^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\vec{\nabla}^2{}_{\theta,\alpha}\ ;\ \vec{\nabla}^2{}_{\theta,\alpha}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

Burada bucaqlardan asılı olan operatoru ataraq (62.4″) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

Tənliyi daha da sadələşdirmək üçün yeni funksiya daxil edək:

$$\varphi(r,t)=\frac{f(r,t)}{r}.$$

Yeni funksiya üçün tənlik çox sadələşir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0. \qquad (62.4''')$$

Bu tənlik §58-dəki (58.2) tənliyinin eynidir. (58.2)-də olduğu kimi burada da $\xi=t-\frac{r}{c}$ və $\eta=t+\frac{r}{c}$ dəyişənləri daxil etsək (62.4‴) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial\eta\,\partial\xi}=0. \qquad (62.10)$$

Bu tənlik də tamamilə (58.4) tənliyi şəklindədir. (62.10) tənliyini η və ξ üzrə inteqrallayaraq onun

$$f(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)=f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{c}\right)$$

həllini alırıq. Beləliklə (62.4″) tənliyinin həlli

$$\varphi(r,t)=\frac{f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}+\frac{f_2\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r} \tag{62.11}$$

mərkəzdən qaçan və mərkəzə qaçan iki ədəd sferik dalğanın cəmindən ibarətdir. Qeyd edək ki, burada $r\neq 0$, çünki biz sahəni ştrixli elementar həcmdən xaricdə axtarırıq. Burada $f_2=0$ götürərək, birinci həllə məşğul olaq:

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f_1\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{62.12}$$

Bu həll $r\neq 0$ olan nöqtələr üçün tapılmışdır və $f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)$ funksiyasının şəkli hələlik bizə məlum deyildir. İndi f_1-i elə seçək ki, (62.12) ifadəsi r-nın istənilən qiyməti üçün (hətta $r\to 0$ olduqda da) doğru olsun və (62.4′) tənliyini ödəsin. Onda (62.12) funksiyasını (62.4′)-də yerinə yazırıq və $\rho_{ştrix}(\vec{r},t)=de(t)\,\delta(\vec{r})$ olduğunu nəzərə alırıq:

$$\vec{\nabla}^2\frac{f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}-\frac{1}{c^2r}\frac{\partial^2 f_1\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}=-4\pi de(t)\,\delta(\vec{r}).$$

Bu tənliyi $r\to 0$ olduqda araşdırırıq. Tənliyin birinci və ikinci hədlərində qismən limitə keçərək

$$\lim_{r\to 0} f_1(t)\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}>>\frac{1}{c^2r}\frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial t^2}$$

olduğunu görürük.

Tənliyin ikinci həddini ataraq, aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$f_1(t)\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}=-4\pi de(t)\,\delta(\vec{r}).$$

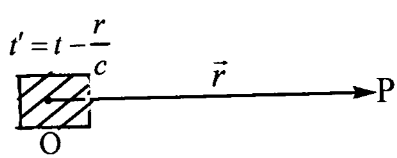
§47-dən bilirik ki, $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$. Bunu yuxarıdakı tənlikdə nəzərə alaraq, $f_1(t) = de(t)$ olduğunu yəqin edirik. Əgər t-ni $t - \frac{r}{c}$ ilə əvəz etsək, $f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) = de\left(t - \frac{r}{c}\right)$ olar. Bunu (62.12)-də nəzərə alaq:

$$\varphi(r,t) = \frac{de\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{62.12'}$$

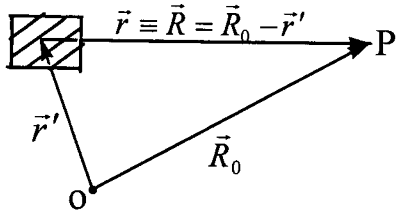
Bizdə de ştrixlənmiş həcm elementində yerləşmiş elementar yükdür. Elementar yükün yaratdığı sahə də elementar sahə olar. Ona görə elementar de yükünün yaratdığı φ sahəsini biz dφ ilə işarə edəcəyik. Onda (62.12′) düsturu məntiqi olaraq aşağıdakı şəkildə yazılar:

$$d\varphi(\vec{r},t) = \frac{de\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{62.13}$$

Beləliklə P müşahidə nöqtəsində t anında müşahidə edilən sahə ştrixli həcm elementində yerləşmiş yükün t-dən əvvəlki $t' = t - \frac{r}{c}$ zamanı anındakı qiymətilə müəyyən edilir (şəkil 62.2). Başqa sözlə ştrixli həcm elementində yerləşən de (t′) yükünün yaratdığı sahə O nöqtəsindən sferik dalğa şəklində c sürətilə yayılaraq P müşahidə nöqtəsinə ani olaraq çatmır, müəyyən $t - t' = \frac{r}{c}$ qədər gecikmə ilə çatır. Ona görə (62.13) potensialı *gecikən potensial* adlanır. Burada $\frac{r}{c}$ kəmiyyəti dalğanın r məsafəsini qəth etməsi zamanıdır.



***Şəkil* 62.2**



Şəkil **62.3**

İndi O nöqtəsini ştrixli həcm elementindən kənarda götürək və həcm elementinin radius vektoruna $\vec{r}^{\,1}$ deyək. O-dan P müşahidə nöqtəsinə çəkilmiş radius vektoru $\vec{R}_0$-la işarə edək və ştrixli həcm elementindən P-yə çəkilmiş $\vec{r}$ radius vektoruna $\vec{r} \equiv \vec{R}$ deyək (şəkil 62.3). İndi (62.13) düsturunu yenidən aşağıdakı kimi yazaq:

$$d\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62.13'}$$

Ştrixli həcm elementini $(d\vec{r}\,')$ ilə işarə etsək, bu elementdə yerləşmiş de yükünü onun sıxlığı ilə aşağıdakı şəkildə ifadə edə bilərik:

$$de\left(t - \frac{R}{c}\right) = \rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{c}\right)(d\vec{r}\,'). \tag{62.14}$$

Burada $\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{c}\right)$ gecikməni nəzərə almaq şərtilə ştrixli həcm elementində yükün paylanma sıxlığıdır, $(d\vec{r}\,')$ isə ştrixli elementin həcmidir.

V həcmində yerləşmiş bütün yüklərin yaratdığı elektromaqnit sahəsinin skalyar potensialını tapmaq üçün superpozisiya prinsipinə əsasən (62.13′) sahələrini cəmləmək və ya inteqrallamaq lazımdır:

$$\varphi_{gec}(\vec{R}_0, t) = \int d\varphi_{gec}(\vec{R}_0, t) = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}\,'). \tag{62.15}$$

Bu, V həcmində ixtiyari hərəkət edən yüklərin yaratdığı gecikən skalyar potensialın ifadəsidir. Sahə $t - \frac{R}{c}$ anında yaranır və biz onu müşahidə nöqtəsində t anında müşahidə edirik. Burada səbəbiyyət prinsipi tam şəkildə ödənir: səbəb nəticəni qabaqlayır. Bu həll tam fiziki məna daşıyır.

Əgər biz (62.11)düsturunda ikinci həlli, yəni

$$\varphi(r,t)=\frac{f_2\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}$$

həllini götürərək, onun üzərində uyğun əməliyyatı aparmış olsaq, qabaqlayan potensialın aşağıdakı ifadəsini almış olarıq:

$$\varphi_{qab}(\vec{R}_0,t)=\int_V\frac{\rho\left(\vec{r}',t+\frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}') . \tag{62.16}$$

Burada sahə $t+\frac{R}{c}$ anında yaranır, lakin biz onu yaranmazdan əvvəl, yəni t anında müşahidə etmiş oluruq. Burada səbəbiyyət prinsipi tamamilə pozulmuş olur. Bu həllin fiziki mənası yoxdur. Lakin qeyd edək ki, bu həll də relyativistik tənliyin həllidir ~~və ondan sahə nəzəriyyəsində bəzi məqsədlər üçün istifadə edirlə~~r.

~~Gecikən və qabaqlayan po~~tensiallar (62.4) tənliyinin xüsusi həlləridir. Riyaziyyatdan məlumdur ki,(62.4) tənliyinin ümumi həlli onun xüsusi həlləri ilə bircins tənliyin ümumi həllinin cəminə bərabərdir:

$$\varphi_{umumi}(\vec{R}_0,t)=a_1\varphi_{gec}(\vec{R}_0,t)+a_2\varphi_{qab}(\vec{R}_0,t)+\varphi_0(\vec{R}_0,t) . \tag{62.17}$$

Burada φ_0 bircins $\Box\varphi_0=0$ tənliyinin həllidir. Bu ümumi həllə ~~(62.8)~~ başlanğıc şərtini tətbiq edərək əmsallar üçün $a_1\neq 0$ ($a_1=1$) və $a_2=0$ qiymətlərini tapırıq.

$\vec{A}(\vec{r},t)$ və $\varphi(\vec{r},t)$ üçün diferensial tənliklər və başlanğıc şərtləri bir-birinə oxşar olduğundan φ-nin həllərində $\varphi\to\vec{A}$ və $\rho\to\frac{1}{c}\vec{j}$ əvəzləməsini apararaq vektor potensial üçün uyğun həlləri almış olarıq:

$$\vec{A}_{gec}(\vec{R}_0,t)=\frac{1}{c}\int_V\frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}'),$$
$$\vec{A}_{qab}(\vec{R}_0,t)=\frac{1}{c}\int_V\frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t+\frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}'). \tag{62.18}$$

Burada da $\vec{A}_{gec}$ fiziki mənaya malikdir, lakin $\vec{A}_{qab}$ potensialın elə bir fiziki mənası yoxdur. Buna baxmayaraq hər iki vektor potensial eyni bir relyativistik tənliyin həlləridir və $\vec{A}_{qab}$ potensialdan bəzi xüsusi məsələlərdə istifadə edirlər.

Gecikən və qabaqlayan potensiallarda zamandan asılılıq həlledici rol oynayır. Bu asılılığı aşkar göstərmək üçün bəzən onu indeks şəklində yazırlar:

$$\rho\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)\equiv\rho_{t-\frac{R}{c}}(\vec{r}'),\quad \vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)\equiv\vec{j}_{t-\frac{R}{c}}(\vec{r}').$$

Sonda məsələnin ümumi həllini gecikən potensiallar şəklində belə yaza bilərik:

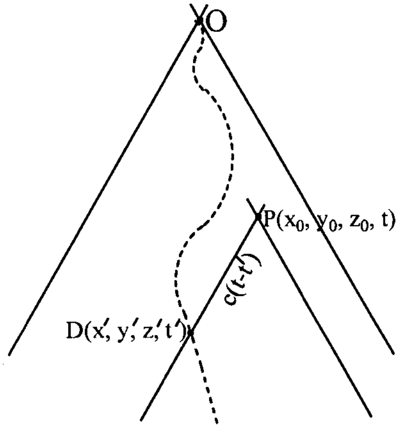
$$\varphi(\vec{R}_0,t)=\int_V\frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}(\vec{r}')}{R}(d\vec{r}')+\varphi_0,$$
$$\vec{A}(\vec{R}_0,t)=\int_V\frac{\vec{j}_{t-\frac{R}{c}}(\vec{r}')}{R}(d\vec{r}')+\vec{A}_0. \tag{62.19}$$

Burada φ_0 və A_0 bircins tənliyin həlləridir. Bəzən φ_0 və $\vec{A}_0$ potensiallarına sistemə təsir edən xarici sahə kimi baxırlar.

§63. Liyenar- Vixert potensialları

Bu potensiallar ixtiyari sürət və təcilə malik relyativistik nöqtəvi yüklü zərrəciyin sahəsini xarakterizə edir. Bu sahəni tapmaq üçün sistemin gecikən potensialında gecikməni səliqə ilə nəzərə alaraq sistemin ölçülərini sıfıra yaxınlaşdırmaq lazımdır. Biz bu üsuldan yox daha sadə üsuldan istifadə edərək Liyenar-Vixert potensiallarını hesablayacağıq.

Başlanğıcı O nöqtəsində olan işıq konusunu çəkək. Fərz edək ki, ixtiyari hərəkət edən elektronun dünyəvi xətti bu konusun daxilindədir (qırıq xətt). Tutaq ki, elektron dünyəvi D(x′, y′, z′, t′) nöqtəsində t′ anında elektromaqnit dalğası şüalandırır və dalğa t anında $P(x_0, y_0, z_0, t)$ dünyəvi nöqtəyə çatır (şəkil 63.1). Elektronun şüalandırdığı dalğa ikinci oxşar konusun D P doğuranı boyunca yayılır.



Şəkil **63.1**

D və P 4-ölçülü nöqtələr arasındakı 3-ölçülü məsafəni iki cür ifadə edə bilərik:

$$c(t-t')$$

və

$$R(t') = \left|\vec{R}_0 - \vec{r}'(t')\right| = \sqrt{(x_0 - x'(t'))^2 + (y_0 - y'(t'))^2 + (z_0 - z'(t'))^2}.$$

Bu məsafələr bir-birinə bərabərdir:

$$c(t-t') = R(t'). \tag{63.1}$$

Burada $x'(t'), y'(t'), z'(t')$ elektronun koordinatları, x_0, y_0, z_0 müşahidə nöqtəsinin koordinatları, t' dalğanın şüalanma zamanı və t dalğanın müşahidə edilmə zamanıdır. Yuxarıdakı bərabərlikdən şüalanma zamanını təyin edək:

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}. \tag{63.1'}$$

Fərz edək ki, elektron t' anında müşayiət edən ətalət sistemində sükunətdədir. Onda bu sistemdə elektronun sahəsi elektrostatik sahə olacaqdır:

$$\varphi = \frac{e}{R(t')} = \frac{e}{c(t-t')}, \vec{A} = 0. \tag{63.2}$$

İxtiyari sürətlə hərəkət edən elektronun yaratdığı sahəni tapmaq üçün elə bir 4-ölçülü kovariant vektor qurmalıyıq ki, onun ifadəsində

$\vec{\upsilon}=0$ yazdıqda φ və $\vec{A}$ -nın ~~(63.2) düsturu ilə~~ verilmiş qiyməti alınsın. 4-ölçülü kovariant potensialı aşağıdakı şəkildə seçirik:

$$A_\mu = -\frac{eU_\mu}{U_\nu R_\nu} \tag{63.3}$$

Burada $U_\mu = \left\{\frac{\vec{\upsilon}(t')}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}$ 4-ölçülü sürət, $R_\nu = \{\vec{R}(t'), ic(t-t')\}$ 4-ölçülü radius vektordur, $\beta = \frac{\upsilon(t')}{c}$. Əvvəlcə A_μ-nün məxrəcini hesablayaq.

$$U_\nu R_\nu = \frac{R(t')\vec{\upsilon}(t')}{c\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{c(t-t')}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(R(t') - \frac{\vec{\upsilon}(t')\vec{R}(t')}{c}\right).$$

Bunu $A_\mu = \{\vec{A}, i\varphi\}$-də nəzərə alaq. Biz sahəni P müşahidə nöqtəsində və t müşahidə anında axtarırıq. Sadə hesablama yolu ilə

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \left.\frac{e}{R(t') - \vec{\beta}\vec{R}(t')}\right|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}, \tag{63.4}$$

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \left.\frac{e\vec{\beta}}{R(t') - \vec{\beta}\vec{R}(t')}\right|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} = \vec{\beta}\varphi\Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}, \tag{63.5}$$

alırıq. Burada $\vec{\beta} = \frac{\vec{\upsilon}(t')}{c} = 0$ yazsaq (63.2) düsturunu alarıq. Bu cür hesablanmış (63.4) və (63.5) ifadələrinə *Liyenar-Vixert potensialları* deyilir. Bu potensialların sağ tərəfindəki bütün kəmiyyətlər t' zamanı anında hesablanır. Liyenar-Vixert potensiallarının 4-ölçülü kovariant vektor şəklində verilməsi onların doğru olmasını təmin edir. Bu potensialların başqa üsulla alınması məsələ həllində göstəriləcək.

§64. İxtiyari hərəkət edən relyativistik nöqtəvi yükün sahəsinin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlikləri

Biz (63.4) və (63.5) Liyenar-Vixert potensiallarından istifadə edərək elektromaqnit sahəsinin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivlik vektorlarını hesablayacağıq. Bu hesablamada $\vec{A}(\vec{R}_0,t)$ və $\varphi(\vec{R}_0,t)$-dən R_0 və t-yə görə (müşahidə nöqtəsinin koordinatları və müşahidə zamanına görə) $\frac{\partial}{\partial t}$, grad və rot almalıyıq. Lakin nəzərə alaq ki, potensialların sağ tərəfində iştirak edən kəmiyyətlər həm bilavasitə və həm də $R(t')$ və t' vasitəsilə $\vec{R}_0$ və t-dən asılıdırlar. Deyilənlərə əməl edərək $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorlarının hesablanmasını aparaq:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}\frac{dt'}{dt} - \operatorname{grad}_{R_0}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t'}\operatorname{grad}t', \tag{64.1}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla}_{R_0}\vec{A}\right] + \left[\vec{\nabla}t', \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}\right]. \tag{64.2}$$

Burada əlavə $\frac{dt'}{dt}$ və $\operatorname{grad}t' \equiv \vec{\nabla}t'$ hədləri ortaya çıxır və onları ayrıca hesablayacağıq. $\vec{\nabla}_{R_0}$ əməliyyatı R_0 –dan asılı olan kəmiyyətdən bilavasitə törəmə almaq deməkdir. $c(t-t') = R(t')$ bərabərliyindən t-yə görə törəmə alaq:

$$c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{\partial R(t')}{\partial t} \equiv \frac{\partial R(t')}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{\upsilon}(t')\vec{R}(t')}{R(t')}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Bərabərliyin sağında və solunda $\frac{\partial t'}{\partial t}$ həddini birləşdirərək aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\vec{\upsilon}\vec{n}}{c}}. \tag{64.3}$$

Burada $\vec{n} = \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$ vahid vektordur. İndi $c(t-t') = R(t')$ bərabərliyindən R_0 görə grad alaq:

$$-c\operatorname{grad}t' = \operatorname{grad}R(t') \equiv \operatorname{grad}_{R_0}R(t') + \frac{\partial R(t')}{\partial t'}\operatorname{grad}t' =$$

$$= \frac{\vec{R}(t')}{R(t')} - \frac{\vec{\upsilon}(t')\vec{R}(t')}{R(t')}\operatorname{grad}t'$$

Bərabərliyin hər iki tərəfindəki grad t'-i birləşdirərək

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\vec{n}}{c - \vec{n}\vec{\upsilon}} \tag{64.4}$$

münasibətini alırıq.

İndi (64.1) və (64.2) ifadələrindəki törəmələri bilavasitə hesablasaq və ~~burada (64.3) və (64.4) bərabərliklərini nəzərə alsaq~~ bir qədər uzun lakin sadə əməliyyatdan sonra $\vec{E}$ və $\vec{H}$ üçün aşağıdakı düsturları alarıq ~~(bax: əlavə)~~:

$$\vec{E}(\vec{R}_0,t) = \frac{e\left[\vec{R}\left[\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}}{c}R, \dot{\vec{\upsilon}}\right]\right]}{c^2\left(R - \frac{\vec{\upsilon}\vec{R}}{c}\right)^3} + \frac{e\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}}{c}R\right)}{\left(R - \frac{\vec{\upsilon}\vec{R}}{c}\right)^3} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \tag{64.5}$$

$$\vec{H}(\vec{R}_0,t) = [\vec{n}\vec{E}] = \vec{H}_1 + \vec{H}_2. \tag{64.6}$$

Qeyd edək ki, (64.5) və (64.6) düsturlarının sağ tərəfindəki bütün ifadələr $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ anında götürülür və $\vec{R}(t') = \vec{R}_0 - \vec{r}'(t')$, $\vec{n} = \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$, $\vec{\upsilon} \equiv \vec{\upsilon}(t')$, $\vec{R} \equiv \vec{R}(t')$, $R \equiv R(t')$. Yadda saxlayaq ki t' sahənin yük (məs. elektron) tərəfindən yaranması (şüalanması) anı, t isə bu sahənin müşahidə nöqtəsinə çatması anıdır. İxtiyari hərəkət edən yüklü zərrəciyin yaratdığı elektromaqnit sahəsi bir-birindən tamamilə fərqlənən iki hissədən ibarətdir.

Sahənin birinci hissəsi olan $\vec{E}_1(\vec{R}_0,t) = \dfrac{e\left[\vec{R}\left[\vec{R} - \frac{\vec{\upsilon}}{c}R, \dot{\vec{\upsilon}}\right]\right]}{c^2\left(R - \frac{\vec{\upsilon}\vec{R}}{c}\right)^3}$ məsafədən $\dfrac{1}{R}$ kimi asılıdır, $\vec{R}$ vektoruna perpendikulyardır və təcillə düz mütənasibdir. Bu hissə dalğa xarakteri daşıyır və zərrəciyi tərk edərək şüalanır. Onu şərti olaraq $E_1 \sim \dfrac{\dot{\upsilon}}{R}$ kimi yazırlar. Sahənin $\vec{E}_2 = \dfrac{e\left(1 - \frac{\vec{\upsilon}^2}{c^2}\right)\left(R - \frac{\vec{\upsilon}}{c}R\right)}{\left(R - \frac{\vec{\upsilon}\vec{R}}{c}\right)^3}$ ilə təsvir olunan ikinci hissəsi kvazistasionar xarakter daşıyır, məsafədən $\dfrac{1}{R^2}$

şəklində asılıdır və zərrəcikdən ayrılmayaraq onunla birgə hərəkət edir. Onu şərti olaraq $E_2 \sim \frac{1}{R^2}$ şəklində yazırlar.

Zərrəciyin təcili $\dot{\upsilon} = 0$ olduqda sahənin birinci hissəsi itir, ikinci hissə isə həmişə qalır. Sahənin maqnit intensivliyi elektrik intensivliyinə perpendikulyar olmaqla tamamilə eyni xarakterə malikdir.

§65. Sabit relyativistik sürətlə hərəkət edən yüklü zərrəciyin sahəsi

Biz bu sahəni tapmaq üçün adətən K′ sistemində sükunətdə olan zərrəciyin sahəsini (məs. $\vec{E}' = \frac{e\vec{R}'}{R'^3}$) əsas götürərək sahənin və koordinatların Lorens çevrilməsindən istifadə edərək bütün kəmiyyətləri K sistemində yazırıq. Burada müəyyən qədər uzun hesablamalardan sonra son nəticəni alırıq.

İndi isə uzun hesablamalar aparmadan (64.5) və (64.6) düsturlarından istifadə edərək həmin nəticəni çox asanlıqla alacağıq. Zərrəcik sabit sürətlə hərəkət etdiyindən ($\dot{\vec{\upsilon}} = 0$) onun yaratdığı sahə $\vec{E}_2(R_0, t)$ olacaqdır. Bu düstura daxil olan kəmiyyətləri sahənin yarandığı t′ və onun müşahidə olunduğu t anında yazaq. Fərz edək ki, yüklü zərrəcik t′anında Q′ nöqtəsində olarkən elektromaqnit sahəsi yaradır. Bu sahə c sürətilə hərəkət edərək t anında P müşahidə nöqtəsinə çatdıqda, zərrəcik də $\vec{\upsilon}$ sürətilə hərəkət edərək t anında Q nöqtəsinə çatır (şəkil 65.1).

Q′Q P üçbucağından

$$\vec{R}\,(t') = \vec{\upsilon}(t - t') + \vec{R}(t) \tag{65.1}$$

olur. Bu bərabərliyi $\vec{\upsilon}/c$-yə vektori vursaq

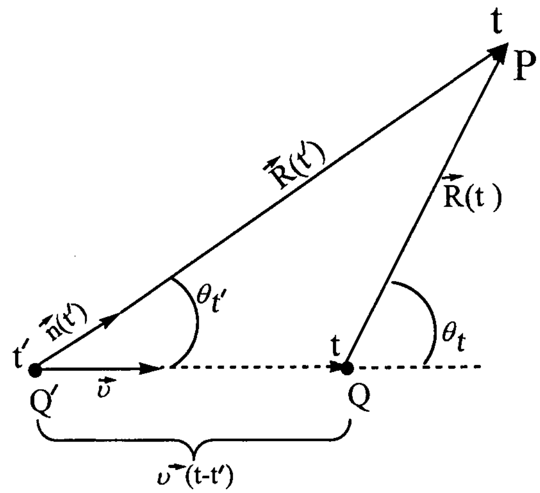
$$\left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\vec{R}(t')\right] = \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\vec{R}(t)\right] \tag{65.2}$$

alınar. $R(t') = c(t - t')$ olduğunu bilərək aşağıdakı bərabərliyi hesablayaq:

$$\vec{R}^2(t) - \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\vec{R}(t)\right]^2 = (\vec{R}(t') - \vec{\upsilon}(t - t'))^2 - \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\vec{R}(t')\right]^2 \equiv$$

$$\equiv R^2(t') - 2\vec{R}(t')\vec{\upsilon}\frac{R(t')}{c} + \frac{\upsilon^2}{c^2}\cancel{R^2}(t') - \frac{\upsilon^2}{c^2}\cancel{R^2}(t') + \frac{(\vec{\upsilon}\vec{R}(t'))^2}{c^2} =$$

$$= (R(t') - \frac{\vec{R}(t')\vec{\upsilon}}{c})^2 .$$



Şəkil **65.1**

Buradan

$$R(t') - \frac{\vec{\upsilon}\vec{R}(t')}{c} = \sqrt{R^2(t) - \left[\frac{\vec{\upsilon}}{c}\vec{R}(t)\right]^2} = R(t)\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta_t} . \quad (65.3)$$

(65.1) və (65.3) ifadələrini $\vec{E}_2(R_0, t)$-nin yazılışında nəzərə alsaq,

$$\vec{E}_2(\vec{R}_0, t) = \frac{e(1-\beta^2)\left(\vec{R}(t') - \frac{\vec{\upsilon}}{c}R(t')\right)}{\left(R(t') - \frac{\vec{\upsilon}\vec{R}(t')}{c}\right)^3} = \frac{e(1-\beta^2)\vec{R}(t)}{R^3(t)(1-\beta^2\sin^2\theta_t)^{3/2}} . \quad (65.4)$$

olar. Son ifadədə bütün kəmiyyətlər t müşahidə anı üçün yazılmışdır. Düsturdan görünür ki, verilmiş məsafədə sahənin qiyməti zərrəciyin sürətinin müşahidə istiqamətilə əmələ gətirdiyi bucaqdan kəskin asılıdır. Zərrəciyin sürətinə perpendikulyar istiqamətdə $\left(\theta_t = \frac{\pi}{2}\right)$ sahə ən böyük qiymətə malikdir:

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Zərrəciyin sürəti istiqamətdə $\theta_t = 0$ sahə ən kiçik qiymət alır:

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2}(1-\beta^2).$$

Uzununa sahə zərrəciyin ultrarelyativistik sürətlərində ($\beta \to 1$) sıfıra yaxınlaşır. Ona görə deyirlər ki, hərəkət istiqamətində eyni məsafədə sahə yastılaşaraq sıfıra yaxınlaşır.

Maqnit sahəsi $\vec{H}(\vec{R}_0, t) = [\vec{n}\vec{E}]$ düsturu ilə təyin edilir.

§66. Sahənin spektral ayrılışı

Biz əvvəllər monoxromatik sahə, müstəvi monoxromatik dalğa anlayışlarından istifadə etmişik. Lakin fizikada sırf monoxromatik sahə və sırf müstəvi monoxromatik dalğa mövcud deyildir. Çünki monoxromatik dalğa dedikdə sonsuz fəzada və sonsuz zamanda eyni bir tezliklə harmonik dəyişən və aşağıdakı düsturla ifadə edilən proses başa düşülür:

$$f = f_0 \sin(\omega_0 t - kx) \ ; -\infty \le t \le +\infty, -\infty \le x \le +\infty. \qquad (66.1)$$

Bu prosesin nə əvvəli nə də sonu vardır. Bu, riyazi cəhətdən ideallaşmış bir prosesdir. Real fiziki proseslər isə nə vaxtsa başlayır və nə vaxtsa qurtarır. Fiziki prosesləri belə bir ideal düsturla ifadə etmək mümkün deyil. İstənilən fiziki prosesdə bir yox, müəyyən intervalda yerləşmiş bir neçə tezlik iştirak edir. Ona görə real mənbələr tərəfindən yaradılan elektromaqnit sahəsi ümumiyyətlə qeyri monoxromatik sahədir. Lakin riyaziyyatdan məlumdur ki, istənilən elektromaqnit sahəsini Furye inteqralına (xüsusi halda Furye sırasına) ayırmaq olar. Furye inteqralına ayırmaq üçün funksiya sonlu olmalıdır, o ya kəsilməz və ya da sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtələrinə malik olmalıdır, arqumentin sonsuz böyük qiymətlərində funksiya sıfıra yaxınlaşmalıdır. Bu şərtlər riyaziyyatda *Direxle şərtləri* adlanır. Birinci növ kəsilmə nöqtələrində funksiyanın sağ limiti sol limitinə bərabər deyildir, lakin hər iki limit sonludur. Furye inteqralı kəsilməz sıra təşkil edən müxtəlif tezlikli monoxromatik funksiyaların cəmidir.

Furye inteqralına ayırmaqla biz istənilən fiziki prosesi sadələşdirməyə və diferensial tənlikləri cəbri tənliklərlə əvəz etməyə nail oluruq.

Fərz edək ki, elektromaqnit sahəsinin zamandan asılılığı hər hansı həqiqi f(t) funksiyası ilə təsvir edilir. Bu funksiyanı aşağıdakı şəkildə Furye inteqralına ayırırlar:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}f(\omega)\,d\omega. \qquad (66.2)$$

Burada f(ω) *Furye əmsalı* (*Furye obraz*) adlanır və o f(t), funksiyası vasitəsilə belə təyin edilir:

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt. \qquad (66.3)$$

Biz (66.2) bərabərliyini $e^{i\omega' t}$-yə vurub t üzrə inteqrallasaq və sağ tərəfdə alınmış δ-funksiyanın xassəsindən istifadə etsək (66.3) ifadəsini alarıq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega' t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)d\omega\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\omega-\omega')}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)d\omega\,\delta(\omega-\omega')=f(\omega').$$

Bu axırıncı ifadənin sağ və sol tərəfində ω'=ω desək (66.3) bərabərliyini alarıq. Elektromaqnit sahəsi həqiqi sahədir və bunu (66.2)-də nəzərə alaq:

$$f(t)=f^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\omega)e^{+i\omega t}d\omega. \qquad (66.2')$$

Axırıncı həddə, ω→-ω əvəzləməsini aparaq:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} f^*(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega.$$

Bunu (66.2')-də yerinə yazsaq, sağda və solda yazılmış eyni inteqralların bərabərliyindən $f(\omega)=f^*(-\omega)$ olduğunu görərik. Bu bərabərlikdən kompleks qoşma alsaq

$$f(-\omega)=f^*(\omega) \qquad (66.4)$$

olar. Gələcəkdə sahənin tam enerjisini və ya intensivliyini hesablayanda $f^2(t)$-nın zamana görə inteqralı iştirak edəcəkdir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\omega')d\omega' \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\omega-\omega')}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\omega')d\omega'\delta(\omega-\omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)f^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\omega)|^2 d\omega.$$

Beləliklə

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\omega)|^2 d\omega \equiv \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega. \qquad (66.5)$$

Aldığımız düsturlar *spektral ayrılış (paylanma) düsturları* adlanır. Əgər f(t) funksiyası müəyyən T perioduna malikdirsə, yəni $f(t) = f(t+T)$ olarsa, onda (66.2) Furye inteqralı Furye sırasına çevrilər. Lazım gəlsə biz Furye sırasını ayrıca araşdırarıq. Qeyd edək ki, Furye inteqralı kəsilməz spektr üçün, Furye sırası isə diskret spektr üçün işlədilir.

Məlumdur ki, elektromaqnit sahəsi yalnız zamana görə deyil, həm də fəzaya görə dəyişir. Elektromaqnit sahəsi vektorlarının hər hansı toplananına $F(\vec{r},t)$ desək, bu funksiyanı da Furye inteqralına ayırmaq olar. Bu zaman bir qat yox, 4-qat Furye inteqralı iştirak edəcəkdir, yəni hər bir arqumentə (x, y, z, t) bir ədəd Furye inteqralı uyğun gələcəkdir. Fiziki olaraq deyə bilərik ki, elektromaqnit sahəsinə uyğun olan Furye inteqralı 4-qat kəsilməz sıra təşkil edən müxtəlif tezlik və dalğa vektorlarına malik müstəvi monoxromatik dalğaların cəmidir:

$$F(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}d\omega\, dk_x\, dk_y\, dk_z \qquad (66.6)$$

Burada 4-qat inteqrallanma aparılır, lakin sadəlik üçün bir ədəd inteqral işarəsi göstərilmişdir. Dalğa vektorunun komponentləri üçün həcm elementi $dk_x dk_y dk_z$ və ya d^3k və ya $(d\vec{k})$ şəklində yazılır. $F(\vec{k},\omega)$ sahə üçün Furye əmsalıdır və onu

$$F(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{r},t)\, e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}dtd^3x \qquad (66.7)$$

şəklində təyin edirlər. Son düsturu almaq üçün (66.6) bərabərliyini $e^{-i(\vec{k}'\vec{r}-\omega' t)}$-yə vurub $\vec{r}$ və t-üzrə inteqrallamaq lazımdır (bax: əlavə).

Elektromaqnit sahəsi həqiqi olduğuna görə

$$F(-\vec{k},-\omega) = F^*(\vec{k},\omega) \tag{66.8}$$

olmalıdır.

Son düsturdan istifadə edərək, biz Qrin funksiyasının köməyi ilə gecikən və qabaqlayan potensialların daha ümumi və dəqiq ifadələrini alacağıq.

Biz $F(\vec{r},t)$ elektromaqnit sahəsinin bir arqumentini dəyişməz saxlayaraq digər arqumentə görə Furye əmsalını hesablasaq əlavə iki ədəd Furye əmsalı əldə edə bilərik: $F(\vec{r},\omega)$ və $F(\vec{k},t)$.

§67. Dalamber tənliyinin Qrin funksiyaları, gecikən və qabaqlayan potensiallar

Biz §62-də qeyri-bircins Dalamber tənliklərini sadə mülahizələrin köməyi ilə, o qədər də dəqiq olmayan üsulla həll edərək gecikən və qabaqlayan potensialların ifadələrini aldıq. İndi isə (62.3) və (62.4) qeyri-bircins Dalamber tənliklərini Qrin funksiyasının köməyi ilə daha dəqiq üsulla həll edəcəyik.

Əvvəlcə (62.4), (62,8), (62,9) başlanğıc və sərhəd məsələsinin dəqiq həlli ilə məşğul olaq. İlk növbədə §47-də Laplas-Puasson tənliyinin həllində etdiyimiz kimi (62.4) tənliyini operatora bölmə yolu ilə həll edək:

$$\varphi(\vec{r},t) = -4\pi\Box^{-1}\rho(\vec{r},t) = -4\pi\int \rho(\vec{r}\,',t')\,\Box^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')dt'(d\vec{r}\,') =$$

$$= \int G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\rho(\vec{r}\,',t')(d\vec{r}\,')dt'. \tag{67.1}$$

Burada

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = -4\pi\,\Box^{-1}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t'), \tag{67.2}$$

sistemin Qrin funksiyasıdır. (67.2) tənliyinə $\Box$-Dalamber operatoru ilə təsir etsək Qrin funksiyasının ödədiyi dalğa tənliyini alarıq:

$$\Box G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t'). \tag{67.3}$$

Yada salaq ki, düz və tərs operatorlar $\Box\Box^{-1}f = \Box^{-1}\Box f = f$ şərtini ödəyir. (67.3) tənliyinin həllərinin sayı çox ola bilər. Lakin bizim baxdığımız məsələyə adekvat olan yeganə həlli tapmaq üçün məsələnin sərhəd şərtlərinə ekvivalent olan müəyyən fiziki mülahizələrdən istifadə etmək lazımdır. Əgər biz verilmiş mənbələr tərəfindən hec bir sərhəd qoyulmayan sonsuz fəzada şüalandırdığı elektromaqnit dalğalarına baxırıqsa, bizə lazım olan yeganə həllin tapılması üçün səbəbiyyət prinsipini əsas götürmək lazımdır. Səbəbiyyət prinsipi tələb edir ki, səbəb (mənbədə zərrəciklərin şüalanmaya səbəb olan hərəkəti) nəticədən (müşahidə nöqtəsində sahənin mövcud olmasından) əvvəl baş versin. Bu şərti ödəyən potensiallar *gecikən potensiallar* adlanır.

Yeni $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$ və $T=t-t'$ dəyişənlər daxil edərək (67.3) tənliyini aşkar şəkildə yazaq:

$$\left(\nabla_R^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\right)G(\vec{R},T)=-4\pi\delta(\vec{R})\delta(T). \qquad (67.4)$$

(67.4) tənliyini həll etmək üçün Qrin funksiyasını Furye inteqralına ayıraq:

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega T)}d\omega d^3k. \qquad (67.5)$$

Burada $G(\vec{k},\omega)$ Furye əmsalı aşağıdakı kimi təyin edilir (bax:§66):

$$G(\vec{k},\omega)=\int G(\vec{R},T)e^{-i(\vec{k}\vec{R}-\omega T)}d^3RdT. \qquad (67.6)$$

(67.4) tənliyində istirak edən δ-funksiyaları aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\delta(\vec{R})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{R}}d^3k,\quad \delta(T)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega T}d\omega$$

və (67.5) Qrin funksiyasını (67.4) tənliyində nəzərə alaq. Bu zaman $\vec{\nabla}_R^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}$ operatoru inteqralla yerini dəyişərək inteqral altındakı $e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega T)}$ funksiyasına təsir edəcəkdir. Bu təsiri sadə şəkildə hesablamaq üçün nəzərə alaq ki, törəmələr aşağıdakı şəkildədir:

$$\vec{\nabla}_R e^{i\vec{k}\vec{R}}=i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{R}},\quad \vec{\nabla}_R^2 e^{i\vec{k}\vec{R}}=-\vec{k}^2e^{i\vec{k}\vec{R}},$$

$$\frac{\partial}{\partial T}e^{-i\omega T}=-i\omega e^{-i\omega T},\quad \frac{\partial^2}{\partial T^2}e^{-i\omega T}=-\omega^2e^{-i\omega T}.$$

Bunları nəzərə alaraq (67.4) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\frac{1}{2\pi^4}\int\left(-\vec{k}^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\cdot G(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega T)}d^3kd\omega=-4\pi\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(\vec{k}\vec{R}-\omega T)}d^3kd\omega.$$

Sağ və sol tərəfin müqayisəsindən aşağıdakı cəbri tənliyi alırıq:

$$(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2})G(\vec{k},\omega) = 4\pi. \qquad (67.7)$$

Bu cəbri tənliyin həlli məsələnin Qrin funksiyasıdır. Qeyd edək ki, operatora bölmə əməliyyatı birqiymətli deyildir və bu zaman biz bircins tənliyin həllini itirmiş oluruq. Bu o deməkdir ki, biz (67.4) və (67.7) tənliklərinə uyğun bircins tənlikləri nəzərə almalıyıq. Məsələn (67.7)-yə uyğun bircins cəbri tənlik

$$(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2})G_0(\vec{k},\omega) = 0 \qquad (67.8)$$

şəklindədir. Bircins tənliyin $G_0(\vec{k},\omega)$ həlli baxdığımız məsələnin həllinin tamlığı və yeganəliyini təmin edir. δ-funksiyanın $x\delta(x)=0$ xassəsindən (bax: əlavə) istifadə edərək $G_0(\vec{k},\omega)$ həllini ümumi şəkildə yazırıq:

$$G_0 = F_0(\vec{k},\omega)\delta(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}). \qquad (67.9)$$

Burada $F_0(\vec{k},\omega)$ hələlik ixtiyari funksiyadır. (67.7) tənliyinin həlli qeyri bircins tənliyin xüsusi həllidir:

$$G_{xüs}(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \qquad (67.10)$$

(67.9) və (67.10) həllərinin cəmi məsələnin ümumi Qrin funksiyası olur.

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + F_0(\vec{k},\omega)\delta\left(\vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2}\right). \qquad (67.11)$$

Biz baxdığımız məsələnin Qrin funksiyasının Furye əmsalını ümumi şəkildə aldıq. İndi (67.11)-i $\vec{k}$ və ω üzrə inteqrallayaraq Qrin funksiyasının $\vec{R},T$ fəzasında son ifadəsini hesablaya bilərik.

Bizim gələcək məqsədimiz üçün ümumi Qrin funksiyası deyil, (67.10) düsturu ilə verilmiş xüsusi Qrin funksiyası kifayətdir. Bu xüsusi hal üçün (67.5) Qrin funksiyasını açıq şəkildə yazaq:

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3ke^{i\vec{k}\vec{R}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}G(\vec{k},\omega)e^{-i\omega T}. \tag{67.12}$$

Daxili Qrin funksiyasını ayrıca hesablayaq:

$$G(\vec{k},T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}G(\vec{k},\omega)e^{-i\omega T}=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c^2d\omega}{\omega_k^2-\omega^2}e^{-i\omega T}. \tag{67.13}$$

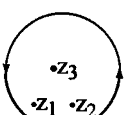
Burada $kc=\omega_k$ işarələnməsini qəbul etmişik. Düsturdan görünür ki, daxili Qrin funksiyasının həqiqi ox üzərində 2 ədəd polyusu (qütbü) vardır:

$$\omega_1=-\omega_k=-kc \text{ və } \omega_2=\omega_k=+kc.$$

Bu polyusları dolanma, aşma qaydasından asılı olaraq biz gecikən (ingiliscə *Retarded*) və qabaqlayan (*Advanced*) Qrin funksiyalarını alacağıq. Polyusda funksiyanın qiymətini çıxıqlar üsulu ilə hesablayırlar. Fizikada, xüsusilə nəzəri fizikada bu üsuldan geniş istifadə olunduğuna görə burada qısaca onun tərifini veririk.

Kompleks müstəvidə z_1, z_2, z_3, nöqtələri analitik funksiyanın sadə polyus nöqtələridirsə, onda analitik funksiyanın qapalı C konturu üzrə inteqralı onun bu polyuslarda çıxıqlarının cəminə bərabərdir:

$$\oint_C\frac{f(z)}{\Psi(z)}dz=2\pi i\sum_k \text{res}\equiv 2\pi i\sum_k\frac{f(z_k)}{\psi'(z_k)};\ \psi(z_k)=0,\ \psi'(z_k)\neq 0,\ k=1,2,3,...$$



C Konturu dolanma istiqaməti saat əqrəbi istiqamətində olarsa, çıxıq mənfi işarə ilə götürülür.

İndi ω-ya kompleks dəyişən kimi baxaq: $\omega=\omega'+i\omega''$, ω' və ω'' həqiqidir. (67.13) düsturunda inteqrallanma həqiqi ox üzrə aparılır və biz polyus nöqtələrini yuxarı müstəvidə kiçik yarım çevrələr üzrə dolanırıq, aşırıq (şəkil 67.1). Əgər T>0 olarsa, onda biz (67.13) düsturundakı inteqrallanma konturunu aşağı müstəvidə sonsuz böyük $|\omega|\to\infty$ radiuslu yarım çevrə ilə qapayaraq (qırıq xəttlə) qapalı C_R konturunu alırıq. Qırıq xətt üzərində aşağı müstəvidə $\omega=\omega'-i\omega''(\omega''>0)$ olduğundan $e^{-iT(\omega'-i\omega'')}_{|\omega|\to\infty}\to e^{-T\omega''}\to 0$ olur. Qırıq xətt üzərində inteqral sıfırdır, yəni bu xətt (67.13) inteqralına heç bir əlavə vermir, lakin C_R konturunun qapalı olmasını təmin edir. C_R boyunca fırlanma saat əqrəbi istiqamətində olduğundan, çıxıqlar mənfi işarə ilə götürülür. İndi (67.13) düsturunu belə yazırıq:

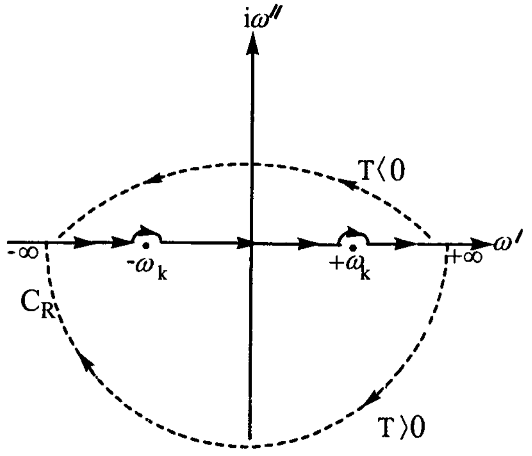
$$G(\vec{k},T)=2c^2\oint\limits_{C_R}\frac{d\omega}{\omega_k^2-\omega^2}e^{-i\omega T}=2c^2(-2\pi i)\left\{\frac{e^{-i\omega T}}{-2\omega}\bigg|_{\omega=-\omega_k}+\frac{e^{-i\omega T}}{-2\omega}\bigg|_{\omega=\omega_k}\right\}=$$

$$=2c^2(-2\pi i)\left\{\frac{e^{i\omega_k T}}{2\omega_k}-\frac{e^{-i\omega_k T}}{2\omega_k}\right\}=4\pi c^2\frac{\sin(\omega_k T)}{\omega_k},\ T\rangle 0.$$

Əgər T<0 olarsa, onda biz qırıq xətlə çəkilmiş böyük radiuslu qapayıcı yarım çevrəni yuxarı müstəvidə götürəcəyik. Yuxarı müstəvidə $\omega=\omega'+i\omega''$ olduğundan bu qırıq xətt üzərində $e^{-iT(\omega'+i\omega'')}\big|_{|\omega|\to\infty}\to e^{T\omega''}\to 0$ (çünki T<0). Yəni bu qırıq xətt üzərində də inteqral sıfırdır. İndi alınmış qapalı konturun daxilinə polyus nöqtələri, yəni çıxıqlar düşmür. Ona görə də T<0 halında $G(\vec{k},T)=0$ olur. Beləliklə (67.13)-dəki daxili inteqral aşağıdakı şəklə düşür.

$$G^R(\vec{k},T)=\begin{cases}\dfrac{4\pi c^2\sin(\omega_k T)}{\omega_k}, & T>0\\ 0, & T<0\end{cases}\qquad (67.14)$$

Bu, gecikən Qrin funksiyasıdır, çünki burada T>0, yəni t-t'>0 və ya t>t' olur.



Şəkil **67.1**

(67.12) ifadəsində d^3k üzrə inteqralı hesablamaq üçün $\vec{k}$ fəzasında polyar oxu k_z boyunca yönəlmiş sferik koordinat sistemini seçək və $\vec{R}$

vektorunu polyar oxa paralel götürək:

$$d^3k = dk_x dk_y dk_z = k^2 dk\, d\Omega = k^2 dk \sin\theta\, d\theta\, d\alpha .$$

(67.12)-də bucaqlar üzrə inteqralı ayrıca açaq:

$$\int e^{i\vec{k}\vec{R}}\, d\Omega = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta e^{ikR\cos\theta} = \frac{4\pi}{kR}\sin(kR). \qquad (67.15)$$

Biz bu növ sadə inteqralı §47-də Laplas-Puasson tənliyinin həllində açmışıq. İndi (67.14), (67.15) və $d^3k=k^2dkd\Omega$ ifadələrini (67.12)-də yerinə yazaraq $T > 0$ olduqda Qrin funksiyası üçün aşağıdakı düsturu alarıq:

$$G^R(\vec{R},T) = \frac{2c}{\pi R}\int_0^\infty \sin(kR)\sin(kcT)dk =$$

$$= \frac{c}{\pi R}\int_0^\infty [\cos(kR - kcT) - \cos(kR + kcT)]dk.$$

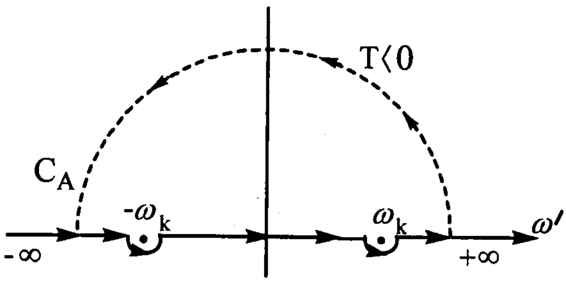
Burada $\omega_k=kc$ və $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ bərabərliklərindən istifadə etmişik. İndi δ-funksiyanın $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(kx)\cdot dk = \delta(x)$ xassəsindən istifadə edək (bax: əlavə):

$$G^R(\vec{R},T) = \begin{cases} \frac{c}{R}[\delta(R - cT) - \delta(R + cT)], & T > 0 \\ 0, & T < 0 \end{cases} \qquad (67.16)$$

Bu ifadədə $R>0$ və $\delta(R+cT)=0$ və $\delta(R - cT) = \frac{1}{c}\delta\left(\frac{R}{c} - T\right) \equiv \frac{1}{c}\delta\left(T - \frac{R}{c}\right)$ (δ-funksiya cüt funksiyadır) olduğunu nəzərə alaraq gecikən Qrin funksiyasının aşkar ifadəsini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$G^R(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right). \qquad (67.17)$$

İndi polyusları sonsuz kiçik yarımçevrələr üzrə aşağıdan dolanaq. Biz $T<0$ halı ilə maraqlanaraq həqiqi ox boyunca yönəlmiş düz xətli konturu sonsuz böyük radiuslu yarımçevrə ilə yuxarı müstəvidə qapayaq (qırıq xətlə). Əvvəldə olduğu kimi burada da qırıq xətli yarımçevrə üzərində Qrin funksiyası sıfıra bərabərdir, lakin bu yarımçevrə düzxətli konturu qapayaraq qapalı C_A konturu əmələ gətirir (şəkil 67.2).



***Şəkil* 67.2**

Burada polyuslar qapalı konturun daxilindədir, dolanma istiqaməti saat əqrəbinin əksinədir və ona görə də çıxıqlar müsbət işarə ilə götürülür. Analoji yolla aşağıdakı Qrin funksiyasını alırıq:

$$G^A(\vec{r}-\vec{r}',t-t')=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(t-t'+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right),T<0. \qquad (67.18)$$

Bu qabaqlayan Qrin funksiyasıdır. Bir halda ki, G^R və G^A eyni bir qeyri-bircins (67.3) tənliyinin həlləridir, deməli onların G^R-G^A fərqi bircins Dalamber tənliyini ödəməlidir:

$$\Box(G^R-G^A)=0. \qquad (67.19)$$

Biz məxsusi nöqtələri müxtəlif növ dolanma üsulları seçməklə Kvant sahə nəzəriyyəsində istifadə olunan müxtəlif Qrin funksiyalarını ala bilərik. Lakin bizim məşğul olduğumuz klassik elektrodinamikada əsas etibarilə gecikən və qabaqlayan Qrin funksiyalarından istifadə olunur.

Qrin funksiyalarını bilərək (67.1) düsturundan istifadə etməklə çox asanlıqla gecikən və qabaqlayan potensialları yaza bilərik:

$$\varphi^R(\vec{r},t)=\int\frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)(d\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$\varphi^A(\vec{r},t)=\int\frac{\rho\left(\vec{r}',t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(d\vec{r}'). \qquad (67.20)$$

Vektor potensialı almaq üçün (67.1) düsturunda $\rho\rightarrow\frac{1}{c}\vec{j}$ əvəzləməsini etmək lazımdır:

$$
\begin{aligned}
A^R(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})(d\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \\
\vec{A}^A(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})(d\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.
\end{aligned}
\qquad (67.21)
$$

Bizim əvvəlki düsturlarımızda müşahidə nöqtəsinin radius vektoru olaraq $\vec{r}$ yox $\vec{R}_0$ götürülmüşdür. Gecikən potensialların $(\varphi^R, \vec{A}^R)$ zaman arqumentindən görünür ki, sahənin $\vec{r}$ müşahidə nöqtəsində t zaman anında qiyməti mənbələrin t-dən əvvəlki $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ anındakı qiyməti ilə təyin edilir. Burada $|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ kəmiyyəti sahənin mənbədən müşahidə nöqtəsinə yayılması zamanıdır. Gecikən potensiallar səbəbiyyət prinsipini tam ödəyir. Qabaqlayan potensiallarda $(\varphi^A, \vec{A}^A)$ səbəbiyyət prinsipi tamamilə pozulur, belə ki, burada sahəni onun yaranmasından əvvəl müşahidə edirik. Qabaqlayan potensialdan yalnız bəzi məsələlərdə istifadə olunur. Gecikən potensiallar isə hər yerdə öz tətbiqini tapır və xüsusilə onlar şüalanma nəzəriyyəsinin əsasını təşkil edir.

X FƏSİL
ELEKTROMAQNİT DALĞALARININ ŞÜALANMASI VƏ SƏPİLMƏSİ

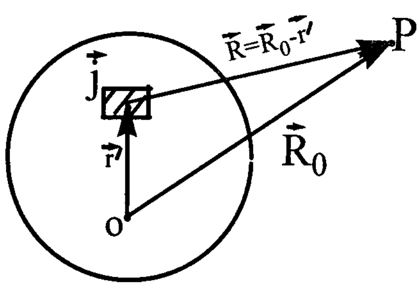
§68. Elektrik dipolunun şüalanması

68.1. Yüklər sistemindən çox uzaq məsafələrdə elektromaqnit sahəsi. Dipol yaxınlaşması. Dalğa zonası

Yüklər sisteminin şüalanma sahəsi gecikən potensiallarla təsvir olunur. Gecikən potensialların ifadəsi o qədər də sadə deyildir. Potensiallara yüklər sistemindən çox uzaq məsafədə baxdıqda, onları sistemin ölçülərinə görə sıraya ayıraraq bir-neçə hədlə kifayətlənmək olar. Müəyyən yaxınlaşmada bu potensiallar sistemin dipol momenti ilə ifadə olunur. Bu yaxınlaşma dipol yaxınlaşması və uyğun şüalanma isə *dipol şüalanması* adlanır.

Biz adətən gecikən vektor potensialdan istifadə edəcəyik (şəkil 68.1):

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t)=\frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}_{t-R/c}(\vec{r}\,')}{R}(d\vec{r}\,'). \tag{68.1}$$



Şəkil 68.1

Burada $\vec{r}\,'$ cərəyan elementinin radius vektorudur və o, yüklər (cərəyanlar) sisteminin ölçüsü tərtibindədir. P müşahidə nöqtəsi sistemdən çox uzaqda yerləşərsə

$$R, R_0 >> r' \tag{68.2}$$

olar, yəni müşahidə nöqtəsinə qədər olan məsafə sistemin ölçülərindən çox böyükdür. Biz məhz belə uzaq məsafələrdə yüklər sisteminin yaratdığı sahəni tədqiq edəcəyik. Cərəyan elementindən P-yə qədər olan

$R=\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|$ məsafəni kiçik r' parametrinin üstlərinə görə Teylor sırasına ayırıb iki hədlə kifayətlənəcəyik (bax: §49):

$$R=\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|\cong R_0-\vec{r}'\nabla R_{|r'=0}=R_0-\vec{r}'\frac{\vec{R}_0}{R_0}=R_0-\vec{r}'\vec{n}. \qquad (68.3)$$

Burada $\vec{n}=\dfrac{\vec{R}_0}{R_0}$–vahid vektordur. (68.3)-ü (68.1)-də yerinə yazaraq, $\vec{r}'\vec{n}<<R_0$ olduğundan məxrəcdə onu atırıq, lakin surətdə cərəyanın arqumentində $\vec{r}'\vec{n}$ həddini hələlik saxlayırıq:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t)=\frac{1}{cR_0}\int_V \vec{j}^{(\vec{r}')}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}}(d\vec{r}'). \qquad (68.4)$$

Bu yazılışda $\dfrac{\vec{r}'\vec{n}}{c}$ *daxili gecikmə zamanı* adlanır. Əgər cərəyan zamana görə tez dəyişirsə daxili gecikməni atmaq olmaz. Fərz edək ki, sistemdə cərəyanların (yüklərin) paylanması xarakteristik $T_{\text{yük}}$ müddəti ərzində nəzərə çarpacaq dərəcədə dəyişir. Əgər

$$\frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}<<T_{\text{yük}} \qquad (68.5)$$

olarsa, onda (68.4)-də daxili gecikməni atmaq olar.

Qeyd edək ki, sistemin yükləri, cərəyanları hansı qanunla dəyişirsə, onların yaratdığı sahə də həmin qanunla dəyişəcəkdir, yəni $T_{\text{sahə}}\sim T_{\text{yük}}$ olacaqdır. Burada $T_{\text{sahə}}$ cərəyanların yaratdığı sahənin xarakteristik şərti periodudur. Gələcəkdə $T_{\text{yük}}\sim T_{\text{sahə}}\sim T$ yazacağıq. Yüklər sisteminin xətti ölçülərinin tərtibinə a desək, $\vec{r}'\vec{n}\sim a$ olar. İndi (68.5)-i belə yazırıq:

$$\frac{a}{c}<<T \text{ və ya } a<<cT=\lambda. \qquad (68.5')$$

Əgər sistemin ölçüləri onun şüalandırdığı dalğanın uzunluğundan çox kiçikdirsə, onda daxili gecikməni atmaq olar. (68.5′) şərtini başqa şəkildə də yazırlar. Yüklərin orta hərəkət sürətinə $\bar{\upsilon}$ desək, sistemin xətti ölçüləri, məsələn sistemin radiusu, diametri, çevrənin uzunluğu $a\sim\bar{\upsilon}T$ olar. Bunu (68.5′)-də yerinə yazsaq aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\frac{\bar{\upsilon}T}{c} \ll T \quad \text{və ya} \quad \frac{\bar{\upsilon}}{c} \ll 1. \qquad (68.5'')$$

Beləliklə sistemin yükləri qeyri-relyativistik ($\upsilon \ll c$) hərəkət edərsə, onda daxili gecikməni nəzərə almamaq olar. Biz burada məhz belə sistemlərin şüalanması ilə məşğul olacağıq.

(68.5) şərtini (68.4)-də nəzərə alaq.

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t) = \frac{1}{cR_0}\int_V \vec{j}^{(\vec{r}')}_{t-\frac{R_0}{c}}(d\vec{r}') = \frac{1}{cR_0}\int_V \vec{j}^{(\vec{r}')}_{\tau}(d\vec{r}'). \qquad (68.6)$$

Biz gecikmə zamanını τ ilə işarə etmişik: $\tau = t - \frac{R_0}{c}$.

Son düsturda $\vec{j}^{(\vec{r}')}_{\tau} = \sum\limits_a e_a\vec{\upsilon}_a(\tau)\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_a(\tau))$ yazaraq yüklərin diskret paylandığı hala keçək:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t) = \frac{1}{cR_0}\sum_a e_a\vec{\upsilon}_a(\tau) = \frac{1}{cR_0}\frac{d}{d\tau}\vec{d}_\tau = \frac{1}{cR_0}\dot{\vec{d}}_\tau. \qquad (68.7)$$

Baxdığımız yaxınlaşmada vektor potensial sistemin $\vec{d}_\tau = \sum\limits_a e_a\vec{r}_a(\tau)$ elektrik dipolu momentinin törəməsi ilə ifadə olunur. İndi sahənin intensivlik vektorlarını hesablayaq:

$$\vec{H}(\vec{R}_0 t) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{R}_0,t) = [\vec{\nabla}\,\vec{A}] = \left[\vec{\nabla}R_0, \frac{d\vec{A}}{dR_0}\right] = \left[\vec{n}\frac{d\vec{A}}{dR_0}\right]. \qquad (68.8)$$

Burada $\vec{A}$-nın R_0-a görə tam törəməsi

$$\frac{d\vec{A}}{dR_0} = \frac{-1}{cR_0^2}\dot{\vec{d}}_\tau + \frac{1}{cR_0}\frac{d\dot{\vec{d}}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dR_0} = -\frac{1}{cR_0^2}\dot{\vec{d}}_\tau - \frac{1}{c^2R_0}\ddot{\vec{d}}_\tau \qquad (68.8a)$$

olur. Son ifadədə böyük məsafələrdə birinci hədd ikinci həddən kiçikdir. Bu şərti dəqiqləşdirməkdən ötrü sistemin $\vec{d}(\tau)$ dipol momentini Furye inteqralına ayıraraq (bax: (66.2))

$$\vec{d}_{(\tau)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{d}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega$$

və bunu (68.8_a)-da nəzərə alaq:

$$\frac{d\vec{A}}{dR_0}=\frac{1}{cR_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{d}(\omega)e^{-i\omega\tau}\cdot\left\{\frac{i\omega}{R_0}+\frac{\omega^2}{c}\right\}d\omega.$$

İnteqral altında birinci həddin ikinci həddən çox kiçik olması şərtini yazaq:

$$\frac{\omega}{R_0}<<\frac{\omega^2}{c}\text{ və ya }R_0>>\frac{c}{\omega}=\frac{c}{2\frac{\pi}{T}}=\frac{cT}{2\pi}=\frac{\lambda}{2\pi}=\lambda\!\!\!^{-}.$$

Bu şərti yığcam belə yazırıq:

$$R_0>>\lambda\!\!\!^{-}>>a. \qquad (68.5''')$$

Müşahidə nöqtəsinə qədər olan məsafə həm sistemin şüalandırdığı dalğanın uzunluğundan, həm də sistemin ölçülərindən çox böyükdür. Bu şərti ödəyən fəza nöqtələrinə *dalğa zonası* deyilir. Dalğa zonasında (68.8a)-da birinci həddi ikinciyə nəzərən ataraq maqnit sahəsi intensivliyi üçün son ifadəni alırıq:

$$\vec{H}(R_0,t)=\frac{1}{c^2R_0}[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]. \qquad (68.8')$$

Dalğa zonasında böyük radiuslu sferanın kiçik hissəsinə müstəvi kimi baxaraq sferik və müstəvi dalğalar arasında əlaqə yarada bilərik. Sərbəst elektromaqnit sahəsi və müstəvi dalğalar bəhsində müstəvi dalğanın maqnit intensivliyini aşağıdakı kimi yazmışdıq (bax(58.6)):

$$\vec{H}=\left[-\frac{\vec{i}}{c}\dot{\vec{A}}_\xi\right]=\left[\vec{n}\vec{E}\right]. \qquad (58.6)$$

Burada $\vec{i}=\vec{n}$ dalğanın yayılma istiqamətidir, $\xi=t-\frac{x}{c}$-dir. Biz (68.8′) düsturunu tamamilə bu yazılışa uyğun şəkildə təsvir edə bilərik.

$$\vec{H}(\vec{R}_0,t)=\left[-\frac{\vec{n}}{c}\frac{1}{cR_0}\frac{d}{d\tau}\dot{\vec{d}}_\tau\right]=\left[-\frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right]=\left[-\frac{\vec{n}}{c}\dot{\vec{A}}_\tau\right]. \qquad (68.8'')$$

Burada $\vec{A}=\frac{1}{cR_0}\dot{\vec{d}}_\tau,\tau=t-\frac{R_0}{c}$. Bizdə dalğa R_0 istiqamətində yayılan sferik dalğadır, (58.6)-da isə X oxu istiqamətində yayılan müstəvi dalğadır. Dalğa zonasında bu dalğalar bir-birinə oxşardır. Bu yaxınlaşmada

$\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}$ vektorları arasındakı münasibət də oxşar olacaqdır. (bax: (58.57) və şəkil 58.1):

$$\vec{E} = [\vec{H}\vec{n}] = \frac{1}{c^2 R_0}[[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]\vec{n}], \vec{H} = [\vec{n}\vec{E}], \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{n}, E^2 = H^2. \quad (68.9)$$

Biz bu münasibətləri dalğa zonasında dalğaların oxşarlığından istifadə edərək yazdıq.

İndi göstərək ki, (68.9) münasibətlərini oxşarlıqdan istifadə etmədən bilavasitə hesablama yolu ilə almaq olar. Bunun üçün əvvəlcə $\varphi(R_0,t)$–ni sıraya ayıraraq dalğa zonasında onun ifadəsini almaq lazımdır:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{R_0}\int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{R_0}{c} + \frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}\right)(d\vec{r}') = \frac{1}{R_0}\int_V \left(\rho(\vec{r}', \tau) + \frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\right)(d\vec{r}').$$

Biz yüklər sisteminin elektroneytrallığından, $\frac{\vec{r}'\vec{n}}{R_0} << 1$ şərtindən, kəsilməzlik tənliyindən və Qauss teoremindən istifadə edərək:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \vec{n}\vec{A}(R_0, t) \quad (68.10)$$

alırıq. Burada $\vec{A}(R_0,t)$ (68.6) və ya (68.7) düsturu ilə ifadə olunur. İndi $\vec{E}(R_0,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$-grad$\varphi$ düsturundan istifadə edərək elektrik sahəsinin intensivliyini hesablayaq:

$$\vec{E}(R_0, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt} - \vec{\nabla}(\vec{n}\vec{A}) = -\frac{1}{c^2 R_0}\ddot{\vec{d}}_\tau - \vec{\nabla}\tau\left(\frac{d}{d\tau}\vec{n}\vec{A}\right).$$

Biz $\frac{1}{R_0^2}$ ilə mütənasib olan hədləri ataraq dalğa zonasında $\vec{E}$-üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$\vec{E}(\vec{R}_0, t) = -\frac{1}{c^2 R_0}\ddot{\vec{d}}_\tau + \frac{\vec{n}}{c^2 R_0}(\vec{n}\ddot{\vec{d}}_\tau) = -\frac{1}{c^2 R_0}\{\ddot{\vec{d}} - \vec{n}(\vec{n}\ddot{\vec{d}})\} =$$

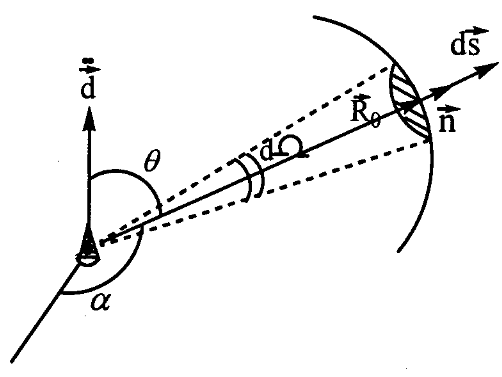
$$= -\frac{1}{c^2 R_0}[\vec{n}[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]] = \frac{1}{c^2 R_0}[[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]\vec{n}] = [\vec{H}\vec{n}]. \quad (*)$$

Bu düstur ilə (68.9) düsturu üst-üstə düşür.

Beləliklə dalğa zonasında elektromaqnit sahəsi (68.7), (68.8'), (68.9) və (68.10) düsturları ilə təsvir olunur.

68.2 Elektrik dipolunun şüalanma intensivliyi

Sistemin şüalandırdığı elektromaqnit dalğaları özləri ilə müəyyən qədər enerji daşıyır. Bu enerjini hesablamaq üçün Umov-Poyntinq vektorundan istifadə edəcəyik. Umov-Poyntinq vektoru elektromaqnit sahəsi enerji selinin sıxlığıdır, yəni sahənin yayılma istiqamətinə perpendikulyar olan vahid səthdən vahid zamanda keçən enerjinin miqdarıdır. Onu $\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}\right]$ düsturu ilə təyin edirlər. Onda $d\vec{s}$ səthindən vahid zamandan keçən (və ya şüalanan) enerjinin miqdarı $\vec{J}d\vec{s}$ olar. Əvvəlcə dl diferensial şüalanma intensivliyinin tərifini verək. Vahid zamanda $d\Omega$ – cisim bucağı daxilində şüalanan enerjiyə, yəni R_0 radiuslu şüalanma sferasının $d\vec{s} = R_0^2 d\,\Omega\,\vec{n}$ səth elementindən vahid zamanda keçən şüalanma enerjisinin miqdarına *şüalanmanın diferensial intensivliyi* deyilir. Burada $\vec{n}$ səth elementinin normalıdır, $d\Omega$ cisim bucağıdır. Diferensial şüalanma intensivliyini dI ilə işarə edirlər. Şüalanmanın sxemi şəkil 68.2-də göstərilmişdir.



***Şəkil* 68.2**

Sistemin dipol momenti polyar oxu boyunca yönəlmişdir. Şüalanma $\vec{n} \equiv \frac{\vec{R}_0}{R_0}$ istiqamətində baş verir. θ şüalanmanın polyar bucağını, α isə azimutal bacağını göstərir. Bilavasitə şüalanma intensivliyini hesablayaq:

$$dI = \vec{J}d\vec{s} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}]d\vec{s} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}[\vec{n}\vec{E}]]d\vec{s} = \frac{c}{4\pi}\{\vec{n}\vec{E}^2 - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})\}d\vec{s} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^2\vec{n}d\vec{s}.$$

Burada $\vec{E}^2 = \vec{H}^2 = \frac{1}{c^4R_0^2}[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]^2 = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{c^4R_0^2}\sin^2\theta$ və $d\vec{s} = R_0^2 d\,\Omega\vec{n}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$dI = \frac{\ddot{\vec{d}}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3}d\,\Omega \qquad (68.11)$$

olar. Vahid cisim bucağı altında şüalanma intensivliyinə *şüalanma intensivliyi sıxlığı* deyilir:

$$I_{\text{sıx}}(\theta,\alpha) = \frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^2}\sin^2\theta. \qquad (68.12)$$

Bu kəmiyyət dipol şüalanmasının enerjiyə və bucaqlara görə paylanmasını xarakterizə edir. O, dipol momentinin ikinci tərtib törəməsinin, təcilinin kvadratı ilə düz mütənasibdir. Dipol təcillə hərəkət etməsə sistem dipol kimi şüalana bilməz. Digər tərəfdən $\ddot{\vec{d}}_\tau$ kəmiyyəti $\tau = t - \frac{R_0}{c}$ gecikmə zamanından asılıdır. Dipolun $t - \frac{R_0}{c}$ anında şüalandırdığı enerjini müşahidəçi t anında (yəni gecikərək) müşahidə edir. Əgər dipol momentini Furye inteqralına ayırsaq və ya onun harmonik rəqs etdiyini qəbul etsək, $\ddot{\vec{d}}^2 \sim \omega^4\vec{d}^2$ olar. Yəni Dipol şüalanması tezliyin 4-cü dərəcəsi ilə baş verir.

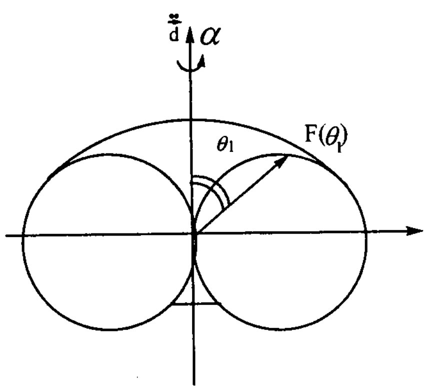
Dipol şüalanmasının bucaqlara görə paylanmasından görünür ki, bu şüalanma azimut bucağına görə izotropdur (yəni α-dan asılı deyildir), lakin polyar bucaqdan $\sin^2\theta$ şəklində kəskin asılıdır. Dipolun oxu (yəni dipolun rəqs etdiyi xətt) istiqamətində ($\theta=0^\circ$ və 180°) şüalanma baş vermir. Lakin dipolun oxuna perpendikulyar istiqamətdə şüalanma maksimum qiymət alır:

$$\theta = \frac{\pi}{2}\text{-də } I_{\text{sıx}}^{\max} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}.$$

Şüalanmanın istiqamətlənmə diaqramını və ya şüalanma intensivliyi sıxlığının vektor diaqramını qursaq bucaqlardan asılılıq daha aşkar olar. Müstəvidə bir-birinə perpendikulyar ordinat və absis oxlarını götürək və $\ddot{\vec{d}}$ vektorunu ordinat oxu boyunca yönəldək. Polyar bucağı $\ddot{\vec{d}}$ oxuna nəzərən hesablayaq. θ–ya qiymətlər verməklə hər bir θ_i üçün (i=1, 2, 3...)

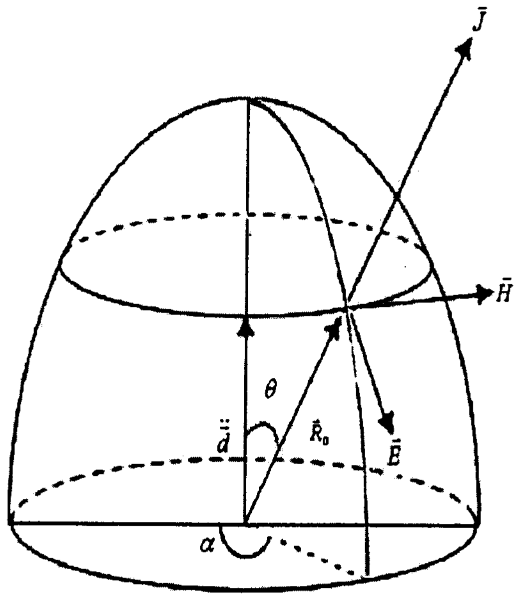
$$F(\theta_i,\alpha)=\frac{I_{\text{şıx}}(\theta_i,\alpha)}{I_{\text{şıx}}^{\max}}=\sin^2\theta_i$$

nisbətini hesablayaq ($-\pi\leq\theta_i\leq\pi$). Hər bir θ_i üçün alınmış F-in qiymətini koordinat başlanğıcından çıxan oxlar dəstəsi şəklində göstərək və bu oxların uclarını hamar əyri ilə birləşdirək. Bu zaman biz bir-birinə toxunan iki çevrə alacağıq. Bu şəkil α-nın istənilən qiyməti üçün çəkilmişdir. Şüalanma α-ya görə izotrop olduğundan, biz bu şəkli $\ddot{\vec{d}}$ ətrafında tam 2π bucağı qədər ($0\leq\alpha\leq 2\pi$) fırladaraq müəyyən fəza fiquru alırıq. Bu fəza fiquru ortadan sıxılmış sferik bulkaya və ya avtomobil şininə oxşayır. Şəkil 68.3-də bu fiqurun kəsiyi göstərilmişdir. Dipol şüalanmasının bucaqlara görə paylanması şəkil 68.3-də göstərilən kimidir.



Şəkil **68.3**

Dipol şüalanmasında $\vec{E},\vec{H}$ və $\vec{J}$ vektorlarının vəziyyətini müəyyən etmək üçün həmin kəmiyyətlərin düsturlarına müraciət etmək lazımdır. Əvvəlcə onu qeyd edək ki, bu üç vektor sağ yivli burğu təşkil edir. $\vec{H}$-ın (68.8′) ifadəsindən ($\vec{H}\sim[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]$) görünür ki, bu vektor meridian (uzunluq) xəttinə perpendikulyar olmaqla paralelə (en) toxunan istiqamətdə sağ tərəfə yönəlmişdir. $\vec{E}=[\vec{H}\vec{n}]$ ifadəsindən görünür ki, bu vektor meridiana toxunan istiqamətdə aşağı yönəlmişdir. $\vec{J}$ vektoru isə bunların hər ikisinə perpendikulyar olmaqla $\vec{R}_0$ (və ya $\vec{n}$ şüalanma vektoru) istiqamətində sferadan xaricə yönəlmişdir. Biz bu vektorların istiqamətini və bucaqları şəkil 68.4-də çəkilmiş yarım sferada göstərmişik



Şəkil **68.4**

İndi elektrik dipolunun tam şüalanma intensivliyini tapmaq üçün (68.11) ifadəsini bütün bucaqlar üzrə inteqrallamaq lazımdır.

$$I = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{8\pi}{3} = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2}{3c^3}. \qquad (68.13)$$

İnteqral intensivlik adlanan I kəmiyyəti dipolun vahid zamanda bütün istiqamətlərdə şüalandırdığı elektromaqnit sahəsinin enerjisini ifadə edir. Bu enerjini dipol öz enerjisinin azalması hesabına şüalandırır. Ona görə baxdığımız yüklər sisteminin enerjisinin saxlanması qanununu aşağıdakı şəkildə yazırıq.

$$-\frac{dE_{zər}}{dt} = I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2. \qquad (68.14)$$

Burada $E_{zər}$ şüalanan zərrəciklər sisteminin enerjisidir.

Dipol şüalanmanın mövcud olması üçün

$$\ddot{\vec{d}} = \sum_a e_a \ddot{\vec{r}}_a = \sum_a e_a \vec{w}_a$$

ifadəsində görünür ki, zərrəciklər təcillə hərəkət etməlidir, yəni, zərrəciyin təcili $\vec{w}_a \neq 0$ olmalıdır. Bu zəruri şərtdir, lakin kafi deyil. Doğrudan da əgər yüklər sistemi qapalıdırsa, zərrəciklərin $\frac{e_a}{m_a}$ xüsusi yükü eynidirsə və $\upsilon_a \ll c$-dirsə, belə sistem dipol kimi şüalana bilməz. Bunu isbat etmək üçün sistemin dipol momentinin şəklini bir az dəyişək:

$$\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a = \sum_a e_a \vec{r}_a \frac{m_a}{m_a} = \frac{e}{m} \sum_a \vec{r}_a m_a = \frac{e}{m} \frac{\sum_a \vec{r}_a m_a}{(\sum_a m_a)} (\sum_a m_a) =$$

$$= \vec{R}_{ə.\mu} \frac{e}{m} \sum_a m_a$$

Beləliklə yüklər sisteminin dipol momenti həmin sistemin ətalət mərkəzinin radius vektoru $\vec{R}_{ə.\mu}$ ilə mütənasibdir. Yuxarıdakı ifadədən zamana görə iki qat törəmə alsaq:

$$\ddot{\vec{d}} = \ddot{\vec{R}}_{ə.\mu} \frac{e}{m} \sum_a m_a = 0$$

olar. Çünki məlumdur ki, qapalı sistemin ətalət mərkəzi bütün proseslərdə ya sükunətdə qalır, ya da bərabər surətli düz xətli hərəkət edir. Beləliklə baxdığımız sistemdə $\ddot{\vec{d}} \sim \ddot{\vec{R}}_{ə.\mu}$ və deməli I=0 olur. Belə yüklər sistemi dipol kimi şüalana bilməz və o, öz artıq enerjisini başqa yolla, məs., kvadrupol kimi şüalandıra bilər.

Xüsusi halda yüklər sistemi bir yükdən (elektrondan) ibarət olarsa dipol şüalanması intensivliyini hesablayaq. Bir yük halında $\vec{d} = e\vec{r}$ və $\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}}$ olur. Bunları (68.14)-də nəzərə alsaq

$$-\frac{dE_{zə}}{dt} = I = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}^2 \tag{68.15}$$

olar. Burada $\ddot{\vec{r}}$ zərrəciyin təcilidir. Biz şüalanmanın klassik nəzəriyyəsinə aid düsturları aldıq. Klassik nəzəriyyədə keçidlər kəsilməzdir və bu düsturları kvant nəzəriyyəsindəki diskret keçidlər halına həmişə tətbiq etmək olmaz. Aldığımız düsturların müəyyən tətbiq edilmə oblastları mövcuddur. Onu deyə bilərik ki, yüksək səviyyədə (Kvant mexanikasındakı enerji səviyyələri) yaxın keçidlərdə klassik nəzəriyyənin düsturları kvant nəzəriyyəsi düsturları ilə üst-üstə düşür.

Bu düsturların çoxlu sayda sadə tətbiqləri vardır. Müxtəlif qüvvələrin təsiri altında təcil alan yüklü zərrəciklərin, müxtəlif növ ossilyatorların və s. elektromaqnit şüalanması bu düsturlarla təsvir olunur. Yadda saxlamaq lazımdır ki, bu düsturlar qeyri-relyativistik şüalanmaları ifadə edir. Relyativistik zərrəciklərin şüalanmasına biz gələcəkdə baxacağıq.

§69. Yüklər sisteminin kvadrupol və maqnit dipolu şüalanması

Biz yenə də yüklər sisteminin özündən çox uzaq məsafədə yaratdığı elektromaqnit sahəsi ilə maraqlanırıq. Burada biz sahənin ifadəsində dipol şüalanmasında olduğu kimi kiçik $\frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}$ daxili gecikməni artıq atmırıq və (68.4) vektor potensialını kiçik $\frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}$ parametrinin üstlərinə görə sıraya ayıraraq 2 hədlə kifayətlənirik:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t)=\frac{1}{cR_0}\int_V(d\vec{r}')\left\{\vec{j}_\tau^{(\vec{r}')}+\frac{\vec{r}'\vec{n}}{c}\frac{\partial\vec{j}(\vec{r}',\tau)}{\partial\tau}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{cR_0}\int_V\vec{j}_\tau^{(\vec{r}')}(d\vec{r}')+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_V(\vec{n}\vec{r}')\vec{j}_\tau^{(\vec{r}')}(d\vec{r}').$$

Hesablamanı sadələşdirmək üçün yüklərin diskret paylandığı hala keçərək

$$\vec{j}_\tau^{(\vec{r}')}=\sum_a e_a\vec{\upsilon}_a(\tau)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_a(\tau))$$

yazaq və sıranın birinci həddində (68.7) ifadəsini nəzərə alaq:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t)=\frac{1}{cR_0}\dot{\vec{d}}_\tau+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_a e_a\vec{\upsilon}_a(\tau)(\vec{r}_a\vec{n}).$$

Burada $\vec{\upsilon}_a(\tau)\,(\vec{r}_a(\tau)\vec{n})$ hasili üçün aşağıdakı eynilikdən istifadə edək:

$$\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a\vec{n})=\frac{1}{2}\{\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a\vec{n})+\vec{r}_a(\vec{\upsilon}_a\vec{n})\}+\frac{1}{2}\{\vec{\upsilon}_a(\vec{r}_a\vec{n})-\vec{r}_a(\vec{\upsilon}_a\vec{n})\}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{n}))+\frac{1}{2}\left[[\vec{r}_a\vec{\upsilon}_a]\vec{n}\right].$$

Bu ifadəni $\vec{A}(\vec{R}_0, t)$ -da nəzərə alaq:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t) = \frac{1}{cR_0}\dot{\vec{d}}_\tau + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{d^2}{\partial\tau^2}\sum_e e_a(\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{n}) +$$

$$+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{d}{\partial\tau}\sum_e e_a[[\vec{r}_a\upsilon_a]\vec{n}]. \qquad (69.1)$$

Biz bu vektor potensiala $\vec{n}$ ilə mütənasib olan istənilən vektoru əlavə edə bilərik, çünki ~~(68.8) düsturuna görə~~ bu zaman fiziki sahə olan $\vec{H}$ ~~(eynilə $\vec{B}$)~~ dəyişməyəcəkdir. Bu əlavə vektoru aşağıdakı şəkildə seçirik ki, (69.1)-də ikinci toplananı kvadrupol momenti şəklidə yaza bilək:

$$\vec{f} = -\frac{\vec{n}}{6c^2R_0}\frac{d^2}{d\tau^2}\sum_a e_a\vec{r}_a^{\,2}.$$

İndi (69.1) düsturunun son ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t) = \frac{1}{cR_0}\dot{\vec{d}}_\tau + \frac{1}{6c^2R_0}\frac{d^2}{d\tau^2}\sum_e e_a(3\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{n}) - \vec{n}\vec{r}_a^{\,2}) +$$

$$+\frac{1}{cR_0}\frac{d}{d\tau}[\vec{\mu}_\tau\vec{n}] \qquad (69.1')$$

Burada $\vec{\mu}_\tau = \sum_a \frac{e_a}{2c}[\vec{r}_a\vec{\upsilon}_a]$ hərəkət edən yüklər sisteminin maqnit dipolu momentidir ~~(bax: §54)~~. Yuxarıdakı düsturda ikinci həddəki cəmləmə vuruğunu $\vec{D}$ ilə işarə edək:

$$\vec{D} = \sum_e e_a(3\vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{n}) - \vec{n}\vec{r}_a^{\,2}).$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $D_i = D_{ij}n_j$, burada D_{ij} sistemin kvadrupol momentidir ~~(bax: §50)~~. Bunları nəzərə alaraq (69.1′) ifadəsini yığcam şəkildə yaza bilərik:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t) = \frac{1}{cR_0}\dot{\vec{d}}_\tau + \frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\vec{D}}_\tau + \frac{1}{cR_0}[\dot{\vec{\mu}}\,\vec{n}]. \qquad (69.1'')$$

Beləliklə baxdığımız yaxınlaşmada vektor potensial elektrik dipolu momentindən əlavə həm kvadrupol və həm də maqnit dipolu momentindən asılıdır. Bütün momentlər $\tau = t - \frac{R_0}{c}$ zamanında götürülür. $\vec{A}$ -ya əlavə edilmiş $\vec f$ vektoruna müəyyən skalyarın qradiyenti kimi baxmaq olar:

$$\vec f = -\vec\nabla\left\{\frac{1}{6c^2}\frac{d^2}{d\tau^2}\sum_a e_a \vec r_a^{\,2}\cdot \ln R_0\right\}.$$

Onda $\vec A$ üzərində aparılan əməliyyat potensialların qradiyent çevrilməsidir. İndi ~~(68.8″) və (68.9) düsturlarından istifadə edərək~~ $\vec H$ və $\vec E$ intensivliklərini hesablaya bilərik:

$$\vec H(\vec R_0,t) = \frac{1}{c}[\dot{\vec A}\vec n] = \frac{1}{c^2R_0}[\ddot{\vec d}\vec n] + \frac{1}{6c^3R_0}[\dddot{\vec D}\vec n] + \frac{1}{c^2R_0}[\ddot{\vec\mu}\vec n]\vec n], \qquad (69.2)$$

$$\vec E = [\vec H\vec n], \quad |\vec E| = |\vec H|.$$

Sahənin $\vec E$ və $\vec H$ vektorlarını bilərək sistemin diferensial şüalanma intensivliyini yaza bilərik (bax: §68):

$$dI = \frac{c}{4\pi}\vec H^2\vec n d\vec s = \frac{c}{4\pi}H^2R_0^2 d\,\Omega. \qquad (69.3)$$

Diferensial intensivliyin bucaqlardan asılılığı bir qədər mürəkkəbdir və biz bu asılılığı analiz etmədən bilavasitə şüalanmanın inteqral intensivliyini hesablayırıq:

$$I = \int_\Omega dI = 4\pi\left(\frac{1}{4\pi}\int dI\right) = 4\pi\bar I. \qquad (69.4)$$

$\bar I$ bucaqlar üzrə inteqralın orta qiymətidir. Burada inteqrallanma bucaqlar üzrə aparılır. Biz bu inteqrallanmanı bucaqlar üzrə inteqralın $\bar I$ orta qiymətini 4π-yə vurmaqla hesablayırıq. Şüalanma bucaqları vahid $\vec n$ vektorunun proyeksiyalarının hasillərinə daxil olur. Onda bucaqlar üzrə orta qiymət n_i, n_j, n_k və s. proyeksiyaların hasillərinin orta qiyməti ilə təyin edilir. Biz bu orta qiymətləri əlavədə hesablamışıq və burada onlardan istifadə edirik (bax: Əlavələr):

$$\overline{n_i} = 0, \overline{n_i n_j} = \frac{1}{3}\delta_{ij}, \overline{n_i n_j n_k} = 0, \ \overline{n_i n_j n_k n_\ell} = \frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}) \text{ və s.}$$

Beləliklə n_i-lərin tək sayda hasillərinin orta qiyməti sıfırdır, cüt sayda hasillərin orta qiyməti δ_{ij} simvollarının hasillərinə bərabərdir.

$\vec H(R_0,t)$ vektorunun ifadəsindən görünür ki, onun kvadratına

(69.2) düsturunda iştirak edən üç həddin hər birinin kvadratı və bu hədlərin qarışıq hasilləri daxildir. Ortalama nəticəsində məlumdur ki, qarışıq hasillərin orta qiyməti sıfırdır, lakin hər bir həddin kvadratının orta qiyməti sıfırdan fərqlidir. Hesablamanı davam etdirərək şüalanmanın inteqral intensivliyi üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{ij}^{\,2} + \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{\mu}}^2. \qquad (69.4)$$

Burada birinci hədd (I_d) elektrik dipolunun şüalanma intensivliyi, ikinci hədd (I_D) kvadrupolun şüalanma intensivliyi, üçüncü hədd (I_μ) isə maqnit dipolunun şüalanma intensivliyidir. Biz sıraya ayırmanı davam etsəydik multipolların şüalanma intensivliklərini də almış olardıq. Qeyd edək ki, bütün bu şüalanmalar qeyri-relyativistik şüalanmalardır və onlar dalğa zonasında hesablanmışdır. Bu şüalanmalar içərisində dipol şüalanmasının intensivliyi ən böyükdür. Ona görə də digər şüalanmaları dipol şüalanması ilə müqayisə edirlər. Elektrik və maqnit dipolu momentlərini müqayisə etsək təqribən $\vec{\mu} \sim \frac{\upsilon}{c}\vec{d}$ olduğunu görərik. Digər tərəfdən $\vec{D}$ ilə d-ni müqayisə etsək tərtibcə $\frac{1}{c}\dot{D} \sim \frac{\upsilon}{c}d \sim \mu$ olur. Bunları uyğun şüalanma intensivliklərində nəzərə alsaq

$$I_\mu \sim \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2 I_d, \quad I_D \sim \frac{1}{100} I_\mu$$

olduğunu görərik. Beləliklə tərtib etibarilə intensivliklər $I_d >> I_\mu$ və $I_\mu >> I_D$ şərtini ödəyir. Şüalanma intensivlikləri müəyyən qadağan olunma qanunlarına tabedir. Biz §68-də göstərdik ki, yüklər sistemi qapalıdırsa, zərrəciklərin xüsusi yükləri eynidirsə $\left(\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m}\right)$ və $\upsilon << c$-dirsə, belə sistem dipol kimi şüalana bilməz, yəni $\ddot{\vec{d}} = 0$ olar. İndi göstərək ki, belə sistem maqnit dipolu kimi də şüalana bilməz. Doğrudan da əvvəlki fəsillərdən bilirik ki, belə sistemin maqnit momenti onun hərəkət miqdarı (mexaniki) momenti ilə mütənasibdir:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc}\vec{L}.$$

Bu düsturdan zaman görə iki qat törəmə alsaq $\ddot{\vec{\mu}} = \frac{e}{2mc}\ddot{\vec{L}}$ olar. Saxlama qanunlarından bilirik ki, qapalı sistemin mexaniki momenti təcillə hərəkət edə bilməz, yəni $\ddot{\vec{L}} = 0$ olar. Onda $\ddot{\vec{\mu}} = 0$ olur və ya $I_\mu = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{\mu}}^2 = 0$ alınır. Sonda biz (69.2) düsturundan istifadə edərək maqnit dipolu şüalanmasında sferik dalğada $\vec{E}, \vec{H}$ və $\vec{J}$ vektorlarının istiqamətini müəyyən edək. Elektrik dipolu şüalanmasında bu vektorları təsvir edən şəkil 68.4-dən fərqli olaraq, indi $\vec{E}$ vektoru paralelə toxunan istiqamətdə sol tərəfə, $\vec{H}$ vektoru meridian boyunca aşağı tərəfə, $\vec{J}$ vektoru bunların hər ikisinə perpendikulyar olaraq sferadan xaricə yönələcəkdir.

§70. Şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi

Əgər yüklər sistemi təcillə hərəkət edirsə, o elektromaqnit dalğaları şəklində enerji şüalandırır (dipol şüalanması, kvadrupol şüalanması və.s). Belə məlum olur ki, bu şüalanma sahəsi geriyə onu şüalandıran yüklər sisteminə müəyyən qüvvə ilə təsir edir. Bu qüvvəyə şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi, bəzən *şüalanmanın reaksiya qüvvəsi* və ya *şüalanmanın tormozlayıcı qüvvəsi* deyilir. Bu qüvvəni tapmaq üçün sistemin şüalanmasını təmin edən gecikən potensialları tam gecikmə zamanı olan $\frac{1}{c}R$-ə görə sıraya ayıraq və skalyar potensialda $\frac{1}{c^3}$ ilə vektor potensialda isə $\frac{1}{c^2}$ ilə mütənasib olan hədləri saxlayaq:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \int \frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}(\vec{r}')(d\vec{r}') =$$

$$= \int \frac{1}{R}\left\{\rho_t - \left(\frac{R}{c}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{R}{c}\right)^3 \frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}\right\}(d\vec{r}'), \quad (70.1)$$

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\vec{j}_{t-\frac{R}{c}}(\vec{r}')(d\vec{r}') = \frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\left\{\vec{j}_t - \left(\frac{R}{c}\right)\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right\}(d\vec{r}').$$

Bu ayrılışda həlledici rolu axırıncı hədlər oynayır, çünki əvvəlki hədlər qüvvə xarakteri daşımır:

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{3!c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho(d\vec{r}'); \quad \vec{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{j}(d\vec{r}').$$

İndi potensialların qradiyent çevrilməsindən istifadə edərək $\varphi^{(3)}$ həddini sıfıra çevirək, yəni

$$\varphi^{(3)'} = \varphi^{(3)} - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{və} \quad \vec{A}^{(2)'} = \vec{A}^{(2)} + \operatorname{grad} f$$

çevrilməsini yazaq və f funksiyasını $f = \frac{-1}{3!c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho(d\vec{r}')$ şəklində seçək ki, $\varphi^{(3)'}=0$ olsun. Onda

$$\vec{A}^{(2)'} = \vec{A}^{(2)} - \frac{1}{3!c^2}\operatorname{grad}_{R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho(d\vec{r}') = \vec{A}^{(2)} - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \vec{R}\,\rho(d\vec{r}')$$

olur. grad müşahidə nöqtəsinin (R_0-ın) koordinatlarına görə aparılır:

$$\operatorname{grad}_{R_0} R^2 = 2R\frac{\vec{R}}{R} = 2\vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}'(t).$$

Son düsturda yüklərin diskret paylandığı hala keçək:

$$\vec{A}^{(2)'} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \sum_a e_a\vec{\upsilon}_a\delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)(d\vec{r}') - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \vec{R}\sum_a e_a\delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)(d\vec{r}') =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\sum_a e_a\dot{\vec{\upsilon}}_a - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a(\vec{R}_0 - \vec{r}_a) = -\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{d}} + \frac{1}{3c^2}\ddot{\vec{d}} = -\frac{2}{3c^2}\ddot{\vec{d}}$$

olar. $\vec{A}^{(2)'}$ vektor potensialı bilərək $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivliklərini hesablayaq:

$$\vec{H}^{(2)} = \operatorname{rot}\vec{A}^{(2)'} = 0, \quad \vec{E}^{(2)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}^{(2)'}}{\partial t} = +\frac{2}{3c^3}\dddot{\vec{d}}. \tag{70.2}$$

Beləliklə sistemin müsbət vahid yükünə təsir edən qüvvə dipol momentinin üçüncü tərtib törəməsi ilə təyin edilir.

Sistemin e_a yükünə təsir edən qüvvə

$$\vec{f}_a = e_a\vec{E} = \frac{2e_a\dddot{\vec{d}}}{3c^3} \tag{70.3}$$

olur. Bu qüvvənin yüklər sistemi üzərində vahid zamanda gördüyü işi hesablayaq:

$$\sum_a \vec{f}_a\vec{\upsilon}_a = \sum_a \frac{2}{3c^3} e_a\vec{\upsilon}_a\dddot{\vec{d}} = \frac{2}{3c^3}\dot{\vec{d}}\dddot{\vec{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{d}}\ddot{\vec{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2.$$

Bu işi hər hansı böyük zaman üzrə ortalasaq,

$$\overline{\sum_a \vec{f}_a\vec{\upsilon}_a} = \overline{\frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\vec{d}}\ddot{\vec{d}})} - \overline{\frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2} = -\overline{\frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2} = -\overline{I_d} \tag{70.4}$$

alarıq. Beləliklə üçüncü yaxınlaşmada ortaya çıxan qüvvənin yüklər üzərində vahid zamanda gördüyü orta iş əks işarə ilə yüklər sisteminin vahid zamanda şüalandırdığı enerjinin (dipol şüalanması) orta qiymətinə bərabərdir. (70.3) qüvvəsi şüalanmanın sürtünmə qüvvəsidir. Bu, yüklər sisteminə təsir edən qüvvədir. Bir ədəd yükə təsir edən şüalanmanın sürtünmə qüvvəsini almaq üçün $\dddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{\upsilon}}$ yazmaq lazımdır. Onda bir yükə təsir edən şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi

$$\vec{f}_s = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \tag{70.5}$$

şəklindədir. Bu qüvvələr qeyri-relyativistik yaxınlaşmada alınmışdır. Lakin onların relyativistik ifadələri də mövcuddur.

Qeyd edək ki, zərrəciyin hərəkətinə şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin göstərdiyi təsir bir o qədər qənaətbəxş deyildir və daxili ziddiyyətə malikdir. Doğrudan da fərz edək ki, zərrəciyə xarici qüvvə təsir etmir və o yalnız (70.5) qüvvəsinin təsiri altında hərəkət edir:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}\,. \tag{70.6}$$

Tənliyin həllini $\vec{r} = \vec{c}e^{\chi t}$ şəklində axtaraq və xarakteristik tənliyi yazaq:

$$m\chi^2 = \frac{2e^2}{3c^3}\chi^3,\ \chi_{1,2} = 0,\ \chi_3 = \frac{3c^3m}{2e^2}.$$

Onda zərrəciyin radius vektoru aşağıdakı şəkildə olur:

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_1 + \vec{c}_2e^{\chi_3 t} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2e^{\frac{3c^3m}{2e^2}t}$$

Buradan zərrəciyin sürətini və təcilini tapırıq:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} = \chi_3 \vec{c}_2 e^{\chi_3 t}, \quad \ddot{\vec{r}} = \chi_3^2 \vec{c}_2 e^{\chi_3 t}.$$

Elektron üçün $\chi_3 \sim 10^{23} \dfrac{1}{\text{san}}$ və zaman keçdikcə $\vec{V} \to \infty$, $\dot{\vec{V}} \to \infty$ olur. Bu o deməkdir ki, elektron özünün yaratdığı şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin təsiri altında zaman keçdikcə sürətlənir. Buna *«öz-özünə sürətlənən»* elektron deyilir. Bu mənasız, absurd nəticədir. Bu onu göstərir ki, şüalanmanın sürtünmə qüvvəsindən həmişə istifadə etmək olmaz, bu qüvvənin tətbiq olunma hüdudu, sərhədi vardır. Bu sərhəd elə klassik elektrodinamikanın tətbiq olunma sərhədidir. Biz §48-də sahəvi kütlə anlayışından, nöqtəvi yükün sonsuz böyük məxsusi enerjisindən, sonsuz böyük məxsusi kütləsindən və bu sonsuzluğu aradan qaldırmaq üçün süni yolla daxil edilmiş nöqtəvi yükün (elektronun) klassik $r_0 = \dfrac{e^2}{mc^2}$ radiusundan danışdıq. Göstərdik ki, r_0 elektrodinamikanın tətbiq edilmə oblastını müəyyən edir. Maksvell-Lorens klassik elektrodinamikası r_0-dan böyük oblastlara tətbiq edilə bilər. Şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin də tətbiq edilmə oblastı r_0-la müəyyən edilir.

Qeyd edək ki, zərrəciyə xarici qüvvə təsir etdikdə şüalanmanın sürtünmə qüvvəsindən istifadə etmək olar və o, həmişə xarici qüvvədən kiçik olmalıdır:

$$\vec{f}_s << \vec{F}_{xar}.$$

Fərz edək ki, zərrəcik Lorens qüvvəsi (xarici qüvvə) və $\vec{f}_s$ qüvvəsinin təsiri altında qeyri relyativistik hərəkət edir:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{\upsilon}\vec{H}]\right) + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}. \qquad (70.6')$$

Bu tənlikdən t-yə görə törəmə alaq:

$$m\dddot{\vec{r}} = e\left(\dot{\vec{E}} + \frac{1}{c}[\dot{\vec{\upsilon}}\vec{H}] + \frac{1}{c}[\vec{\upsilon}\dot{\vec{H}}]\right) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddddot{\vec{r}}. \qquad (70.7)$$

Bu tənliklərin zərrəciyin sükunətdə olduğu koordinat sistemində yazıldığını fərz edək, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ olduğunu qəbul edək və bu tənliklərdə axırıncı həddin kiçik olduğunu nəzərə alaraq $\ddot{\vec{r}}$ və $\dddot{\vec{r}}$ hədlərini təyin edək:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{E}, \quad \dddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\left(\dot{\vec{E}} + \frac{1}{c}\left[\ddot{\vec{r}}\vec{H}\right]\right) = \frac{e}{m}\left(\dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc}[\vec{E}\vec{H}]\right) = \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\left[\vec{E}\vec{H}\right].$$

$\dddot{\vec{r}}$ -i $\vec{f}_s$-də yerinə yazaraq bu qüvvənin şəklini dəyişək və onun Lorens qüvvəsindən kiçik olduğunu nəzərə alaq:

$$\vec{f}_s = \frac{2e^3}{3c^3m}\dot{\vec{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\left[\vec{E}\vec{H}\right] \ll e\vec{E}.$$

Buradan iki münasibət alınır:

$$\left|\frac{2e^3}{3c^3m} i\omega\vec{E}\right| << \left|e\vec{E}\right| \text{ və } \left|\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left[\vec{E}\vec{H}\right]\right| << \left|e\vec{E}\right|.$$

Birinci münasibətdən: $\frac{2e^2\omega}{3c^3m} << 1$ və ya $r_0\frac{\omega}{c} << 1$ olur. Burada $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambdabar}$ olduğundan bu münasibəti qısa şəkildə aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\frac{r_0}{\lambdabar} << 1. \qquad a)$$

Bu o deməkdir ki, yükə təsir edən xarici qüvvənin dalğa uzunluğu elektronun klassik radiusundan çox böyük olduqda şüalanmanın sürtünmə qüvvəsindən istifadə etmək olar. Bu özlüyündə elektrodinamikanın tətbiq edilməsi şərtidir.

Yuxarıdakı ikinci münasibətdən aşağıdakı şərti alırıq:

$$H << \frac{3m^2c^4}{2e^3} \approx \frac{m^2c^4}{e^3} = \frac{m^2c^4}{e^4}\cdot e = \frac{e}{r_0^2} \text{ və ya } H << \frac{e}{r_0^2} \sim 10^{16} \text{ (ersted)}. \qquad b)$$

Şüalanmanın sürtünmə qüvvəsini nəzərə aldıqda xarici sahə çox da böyük olmamalıdır. Kvant effektləri nəticəsində b) şərti bir qədər zəifləyir:

$$H << \frac{e}{r_0\lambda_c} = \frac{e}{137r_0^2}. \qquad b')$$

Burada $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}\cdot\frac{e^2}{e^2} = \frac{\hbar c}{e^2}r_0 = 137r_0$ – elektron üçün Komptom dalğa uzunluğudur.

Yuxarıdakı b) və ya b′) şərtləri də klassik elektrodinamikanın tətbiq edilmə oblastını ifadə edir.

Beləliklə a), b) və b′) şərtləri qeyri relyativistik (70.5) şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin tətbiq edilmə oblastını müəyyən edir. Qeyd edək ki, sürtünmə qüvvəsinin tətbiq edilmə oblastı yüklü zərrəciyin verilmiş anda sükunətdə olduğu ətalət sistemi üçün müəyyən edilmişdir.

İndi şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin relyativistik ifadəsini müəyyən edək. O, yüklü zərrəciyin xarici sahədə 4-ölçülü hərəkət tənliyinə əlavə edilmiş 4-ölçülü qüvvə olmalıdır:

$$mc\frac{dU_\mu}{ds}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}U_\nu+g_\mu. \tag{70.8}$$

Şüalanmanın 4-ölçülü sürtünmə qüvvəsi (g_μ) iki şərti ödəməlidir:

1) $\upsilon \ll c$ halında onun fəza komponenti bu hal üçün doğru olan (70.5) vektorunun $\frac{1}{c}\vec{f}_s$ komponenti ilə üst-üstə düşməlidir;

2) g_μ vektoru bütün 4-ölçülü qüvvələrin ödədiyi $g_\mu U_\mu=0$ tənliyinə tabe olmalıdır.

$\vec{f}_s \sim \dddot{\vec{r}}$ olduğundan g_μ qüvvəsi həmin xarakterə malik $g_\mu = K\frac{d^2U_\mu}{ds^2}$ şəklində olmalıdır. K əmsalı müqayisədən tapılacaqdır. $\upsilon \ll c$ olduqda $ds=c\sqrt{1-\beta^2}dt \to cdt$ və $U_\mu=\left\{\frac{\vec{\upsilon}}{c\sqrt{\ }},\frac{i}{\sqrt{\ }}\right\}\to\left\{\frac{\vec{\upsilon}}{c},i\right\}$ olduğundan birinci şərtin ödənməsi üçün $K\frac{1}{c^3}\dddot{\vec{r}}=\frac{2e^2}{3c^4}\dddot{\vec{r}}$ olmalıdır. Buradan $K=\frac{2e^2}{3c}$ və $g_\mu=\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2U_\mu}{ds^2}$ olur. Lakin bu şəkildə tapılmış g_μ ikinci şərti ödəmir. İkinci şərtin ödənməsi üçün g_μ -yə 4-ölçülü sürətlə mütənasib olan αU_μ vektorunu əlavə etmək lazımdır. Burada α əmsalı müqayisədən tapılacaqdır:

$$F_\mu = g_\mu + \alpha U_\mu = \frac{2e^2}{3c}\frac{d^2U_\mu}{ds^2}+\alpha U_\mu \quad \text{və} \quad F_\mu U_\mu = 0$$

olmalıdır. Son tənlikdə $U_\mu^2=-1$ olduğunu nəzərə alaq və α -nı təyin edək:

$$\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2U_\mu}{ds^2}U_\mu + \alpha U_\mu^2 = 0 \text{ və } \alpha = \frac{2e^2}{3c}\frac{d^2U_\mu}{ds^2}U_\mu$$

olur. F_μ-də α-nın qiymətini yerinə yazaq:

$$F_\mu = \frac{2e^2}{3c}\left\{\frac{d^2U_\mu}{ds^2} + U_\mu U_\nu \frac{d^2U_\nu}{ds^2}\right\}. \qquad (70.9)$$

Bu, şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin relyativistik ifadəsidir. İndi (70.8) hərəkət tənliyində g_μ əvəzində F_μ yazmalıyıq:

$$mc\frac{dU_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}U_\nu + F_\mu. \qquad (70.8')$$

Göstərmək olar ki, relyativistik halda şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinin tətbiq edilmə oblastı bir qədər başqa şəkildə olacaqdır.

§71. Klassik elektrodinamikada ossilyator modeli

Müasir klassik elektrodinamikada ossilyator modelindən geniş istifadə edilir və bu da səbəbsiz deyildir.

Tomson tərəfindən 1897-ci ildə elektronun kəşfindən sonra atomun Tomson modeli yarandı. Bu modelə görə atomda müsbət yüklə dolu sferanın mərkəzində mənfi yüklü elektron yerləşmişdir. Tomson modelində atomun şüalanması onun mərkəzində yerləşmiş elektronun kiçik rəqsləri ilə əlaqələndirilirdi. Beləliklə atomun şüalanması ossilyatorun şüalanmasına gətirilirdi və

$$\vec{I}_d = \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^2 \qquad (71.1)$$

düsturu atomun şüalanma intensivliyini ifadə edirdi. 1911-ci ildə Rezerfordun təcrübələri Tomson modelinin səhv olduğunu göstərdi və atomun planetar modeli yarandı. Lakin yenə də şüalanan atom sisteminin ossilyator modeli bir çox hallarda təcrübə ilə təsdiq edilən mühüm nəticələrə gətirdi. Ona görə klassik fizikada ossilyator şüalanan atom sisteminin modeli olaraq qalır. Burada təəccüb doğuran odur ki, nə üçün həqiqətdən bu qədər uzaq olan bu model, şüalanan atom sisteminin mühüm xasiyyətlərini çox doğru təsvir edə bilir. Yalnız şüalanmanın kvant nəzəriyyəsinin yaranması bu suala aydınlıq gətirirdi. Biz gələcəkdə kvant mexanikasında görəcəyik ki, şüalanmanın kvant nəzəriyyəsi bir sıra hallarda elə münasibətlərə gətirir ki, bunlar formal olaraq klassik şüalanma nəzəriyyəsində alınmış ifadələrlə üst-üstə düşür. Bu üst-üstə düşməyin səbəbi aşağıdakından ibarətdir: atom şüalanması nəzəriyyəsinin bir sıra xassələri şüalanan zərrəciklərin konkret hərəkət qanunları ilə deyil, prosesin periodiklik faktı ilə müəyyən edilir. Digər tərəfdən elektronun sabit tezliklə dairəvi periodik hərəkəti müstəvi ossilyatorun

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad y = a\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

hərəkətinə uyğun gəlir.

Ona görə ω_0 tezliyi ilə rəqs edən ossilyator modeli şüalanan atomun bəzi xarakterik cəhətlərini özündə əks etdirir. Beləliklə lazım olduqda biz ossilyatordan şüalanan atom sisteminin klassik modeli kimi istifadə edəcəyik.

Qeyd edək ki, şüalanmanın əsil kvant nəzəriyyəsində trayektoriya, orbita anlayışı yoxdur, lakin kvant halları, kvant keçidləri, yəni periodiklik faktı vardır. Bu da ümumi halda ossilyator modelindən istifadə etmək imkanını yaradır.

Sonda sadə bir misala baxaq. Fərz edək ki, yüklü zərrəcik bircins maqnit sahəsində hərəkət edir. Sadəlik üçün zərrəciyin başlanğıc $\vec{\upsilon}_0$ sürətini $\vec{H}$ maqnit intensivliyinə perpendikulyar götürəcəyik.

Maqnit sahəsində hərəkət edən yüklü zərrəcik təcilə malikdir.

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon}\vec{H}\right] \text{ və ya } \ddot{\vec{r}} \equiv \vec{w} = \frac{e}{mc}\left[\vec{\upsilon}\vec{H}\right].$$

Təcillə hərəkət edən yük §68-də göstərildiyi kimi dalğalar şəklində elektromaqnit sahəsi enerjisi şüalandırır:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\vec{w}^2 = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\left[\vec{\upsilon}\vec{H}\right]^2. \tag{71.2}$$

Şüalanma enerjisinin kiçik olduğunu fərz edərək zərrəciyin sürətinin təqribən sabit qaldığını, yəni $\vec{\upsilon} \approx \vec{\upsilon}_0$ və $[\vec{\upsilon}\vec{H}] \approx [\vec{\upsilon}^{\circ}\vec{H}] = \upsilon_0 H$ olduğunu qəbul edə bilərik. Onda

$$I = \frac{2}{3}\frac{e^4\upsilon_0^2H^2}{m^2c^5} = \frac{4}{3}\frac{e^4H^2}{m^2c^5}\left(\frac{m\upsilon_0^2}{2}\right) \tag{71.2'}$$

olar. Şüalanma enerjisi c^5 ilə tərs mütənasibdir və çox kiçikdir. Lakin o, zərrəciyin enerjisi artdıqca artır və şüalanma effekti zərrəciyin enerjisinin çox böyük qiymətlərində həlledici olur. Məsələn, kosmik şüalardakı zərrəciklərin yerin maqnit sahəsində və böyük sürətli elektronların müasir betatronların maqnit sahəsində hərəkəti zamanı şüalanma enerjisi çox mühüm rol oynayır. (71.2) düsturu $\upsilon \ll c$ halı üçün doğrudur və onun $\upsilon \sim c$ halında ifadəsini almaq üçün müəyyən qədər işləmək lazımdır.

§72. Spektral xətlərin təbii eni

Şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi şüalanma sahəsinin xassələrinə ciddi təsir göstərir. Doğrudan da aşağıda göstərəcəyik ki, şüalanmanın sürtünmə (reaksiya) qüvvəsini nəzərə almadıqda yüklər sistemi ω_0 tezlikli monoxromatik elektromaqnit dalğası şüalandırdığı halda, bu qüvvəni nəzərə aldıqda (yəni həqiqətdə) o, ω_0-a yaxın olan tezlikli çoxlu sayda dalğa şüalandırır.

Bu məsələyə ossilyator modelində baxaq. Fərz edək ki, elektron izotrop kvazielastiki $\vec{F} = -k\vec{r}$ qüvvəsinin təsiri altında sərbəst rəqs edir:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \text{ və ya } m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r}. \qquad (72.1)$$

Burada $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ rəqsin məxsusi tezliyidir. Şüalanmanın sürtünmə qüvvəsini nəzərə alsaq, (72.1) tənliyinin sağ tərəfinə $\vec{f}_s = \dfrac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}$ qüvvəsini əlavə etməliyik:

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \text{ və ya } \ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2\vec{r} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\vec{r}}. \qquad (72.2)$$

$\vec{f}_s$ qüvvəsinin kiçik olduğunu fərz edərək tənliyi ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə həll edəcəyik. Sıfırıncı yaxınlaşmada $\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2\vec{r}$ olur və bu ifadədən törəmə alaraq $\dddot{\vec{r}} = -\omega_0^2\dot{\vec{r}}$ bərabərliyini alırıq. Buradan tapılmış $\dddot{\vec{r}}$-i $\vec{f}_s/m$-də yerinə yazsaq

$$\frac{\vec{f}_s}{m} = -\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}\dot{\vec{r}} = -\frac{2\omega_0^2}{3c}r_0\dot{\vec{r}} = -\gamma\dot{\vec{r}} \qquad (72.3)$$

olar. Burada $\gamma = \frac{2\omega_0^2}{3c} r_0$ sürtünmə qüvvəsinin parametri və $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ isə elektronun klassik radiusudur. İndi (72.2) tənliyi

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = 0 \qquad (72.2')$$

şəklində yazılır. Burada $\omega_0 << \frac{c}{r_0}$, yəni $\frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{1}{\bar{\lambda}_0} << \frac{1}{r_0}$ və ya $\bar{\lambda}_0 >> r_0$ olarsa, $\gamma << \omega_0$ olar. Elektron üçün $\omega_0 << 10^{23}\frac{1}{san}$ və bu, qamma-kvantın enerjisinin $\varepsilon = \hbar\omega_0 << 100\ (M_{ev})$ qiymətinə uyğundur.

Tənliyin həllini

$$\vec{r} = \vec{A}e^{i\omega t} \qquad (72.4)$$

şəklində axtarırıq. Bunu (72.2′)-də nəzərə alsaq

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0 \qquad (72.2'')$$

olar. Bu kvadratik tənliyi həll edək və $\gamma << \omega_0$ olduğunu nəzərə alaq:

$$\omega_{1,2} = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{-\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2} \approx \frac{i\gamma}{2} \pm \omega_0 .$$

Tezliyin qiymətlərini (72.4)-də yerinə yazaq:

$$\vec{r}(t) = \vec{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \vec{A}_2 e^{i\omega_2 t} = \vec{A}_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0 t} + \vec{A}_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0 t} . \qquad (72.4')$$

Məsələnin başlanğıc şərtini

$$\vec{r}(0) = 0 , \quad \dot{\vec{r}}(0) = 0$$

şəklində götürsək

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \vec{A}_2 e^{i\omega_2 t}, & t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \qquad (72.4'')$$

(72.4′) düsturundan görünür ki, γ parametri ilə təyin olunan şüalanmanın sürtünmə qüvvəsini nəzərə aldıqda ossilyatorun rəqsi sönmə xarakterinə malik olur və $\gamma/2$ kəmiyyəti sönmə əmsalı rolunu oynayır. Radius vektor həqiqi olduğuna görə

$$\vec{r}(t) = \vec{r}^*(t)$$

yazırıq. Bunu (72.4′)-də nəzərə alsaq

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1^*$$

olur.

İndi $\vec{r}(t)$-u Furye inteqralına ayıraq. Biz §66-da bu ayrılış haqqında danışmışıq. Əvvəlcə $\vec{r}$-in birinci hissəsini ayıraq:

$$\vec{A}_1 e^{\frac{-\gamma}{2}t + i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

Furye əmsalı olan $\vec{a}_1(\omega)$-i tapmaq üçün yuxarıdakı ifadəni $e^{-i\omega' t}$-yə vuraraq, sağ və sol tərəfi t – üzrə -T-dən +T-yə qədər inteqrallamaq və sonda $T \to \infty$ yazmaq lazımdır:

$$\int_{-T}^{+T} \vec{A}_1 e^{\frac{-\gamma}{2}t + i\omega_0 t} e^{-i\omega' t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}_1(\omega) d\omega \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} e^{i(\omega-\omega')t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}_1(\omega)\delta(\omega-\omega') d\omega = \vec{a}_1(\omega') .$$
$$T \to \infty$$

Sol tərəfi inteqrallayanda $\int_{-T}^{+T} \cdots dt$ əvəzində $\int_{0}^{T} \cdots dt$ yazırıq, çünki mənfi zaman anında ossilyator sükunətdir və şüalanmır.

$$\int_0^T \vec{A}_1 e^{\left(\frac{-\gamma}{2} + i(\omega_0 - \omega')\right)t} dt = \vec{A}_1 \frac{-1}{\frac{-\gamma}{2} + i(\omega_0 - \omega')} = \frac{\vec{A}_1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega')} .$$
$$T \to \infty$$

Sol tərəfi sağ tərəfə bərabər edək və sonda $\omega' \to \omega$ yazaq:

$$\vec{a}_1(\omega) = \frac{\vec{A}_1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)} . \qquad (72.5)$$

Analoji olaraq

$$\vec{a}_2(\omega) = \frac{\vec{A}_2}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 + \omega)}$$

olur. Onda $\vec{r}(t)$-in Furye inteqralına ayrılışı aşağıdakı şəkildə olar:

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)e^{i\omega t}d\omega . \qquad (72.6)$$

Bu ifadədən iki qat törəmə alaraq $\ddot{\vec{r}}$-nin Furye ayrılışını yaza bilərik:

$$\ddot{\vec{r}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[-\omega^2(\vec{a}_1+\vec{a}_2)e^{i\omega t}]d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega . \qquad (72.7)$$

Burada $\vec{f}(\omega)=-\omega^2(\vec{a}_1+\vec{a}_2)$. Biz ossilyatorun ω_0 məxsusi tezliyinə yaxın olan tezliklərlə maraqlanırıq, yəni burada $|\omega-\omega_0|<<\omega_0$ halları həlledici rol oynayır. Belə tezliklər üçün $|\vec{a}_1(\omega)|>>|\vec{a}_2(\omega)|$ olur. Ona görə $\vec{f}\,(\omega)\approx-\omega^2\vec{a}_1(\omega)$ götürürük.

İndi ossilyatorun mövcud olduğu müddətdə onun şüalandırdığı tam enerjini hesablayaq:

$$I_0=\int_{-\infty}^{+\infty}I(t)dt=\frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\vec{r}}^{\,2}dt=\frac{1}{2\pi}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\vec{f}(\omega)\right|^2d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}I(\omega)d\omega . \qquad (72.8)$$

Burada I(t) ossilyatorun vahid zamanda şüalandırdığı enerjidir, $I(\omega)$ isə vahid tezlik intervalına düşən tam şüalanma enerjisidir, yəni ossilyatorun şüalanma intensivliyinin spektral sıxlığıdır. (72.8) bərabərliyini yazanda biz 2-ci və 3-cü inteqralda §66-da verdiyimiz düsturdan istifadə etmişik. Baxdığımız yaxınlaşmada

$$\left|\vec{f}(\omega)\right|^2=\omega_0^4\frac{\vec{A}_1\vec{A}_1^*}{\frac{\gamma^2}{4}+(\omega-\omega_0)^2} \quad \text{və} \quad I(\omega)=\frac{2e^2\omega_0^4}{6\pi c^3}\frac{\vec{A}_1\vec{A}_1^*}{\frac{\gamma^2}{4}+(\omega-\omega_0)^2}. \qquad (72.9)$$

(72.8)-də inteqrallamanı apararaq I_0-ın ifadəsini alaq və onun əmsalından istifadə edərək $I(\omega)$– nın şəklini dəyişək:

$$I_0=\frac{2e^2\omega_0^4}{6\pi c^3}\vec{A}_1\vec{A}_1^*\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}=K\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+b^2}=$$

$$=K\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=K\frac{\pi}{b}=K\frac{2\pi}{\gamma},$$

burada $K=\frac{2e^2\omega_0^4}{6\pi c^3}\vec{A}_1\vec{A}_1^*$, $b=\frac{\gamma}{2}$, $x=\omega-\omega_0$. Buradan K-nı I_0 vasitəsilə təyin edək və $I(\omega)$- də, yerinə yazaq:

$$K=\frac{I_0\gamma}{2\pi},\ I(\omega)=\frac{I_0\gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}. \qquad (72.10)$$

Biz klassik şüalanma intensivliyinin spektral sıxlığının şüalanma tezliyindən asılılığı düsturunu aldıq. Kvant mexanikasında da buna oxşar düstur alınır. Lakin burada γ-nın ifadəsi bir qədər fərqli olur. İntensivliyin sıxlığı $\omega=\omega_0$ olduqda maksimum qiymət alır:

$$I_{max}(\omega_0)=\frac{2I_0}{\pi\gamma}.$$

Şüalanma tezliyi $\omega=\omega_0\pm\frac{\gamma}{2}$ olduqda intensivlik öz maksimum qiymətinin yarısına bərabər olur: $I\left(\omega_0\pm\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{I_{max}}{2}=\frac{I_0}{\pi\gamma}$. Ona görə bəzi ədəbiyyatda $\frac{\gamma}{2}$-yə *spektral xəttin yarım eni* deyilir. Əslində isə γ spektral xəttin təbii enidir. Ona görə təbiidir ki, şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi istənilən şüalanmada mövcuddur. Spektral xəttin qrafiki şəkil 72.1-də göstərilmişdir. Qrafik simmetrikdir və ona xəttin *Lorens forması* deyilir. Çox vaxt şüalanmanın sürtünmə qüvvəsinə *Lorens sürtünmə qüvvəsi* də deyilir. Xəttin təbii eninə uyğun gələn dalğa uzunluğu intervalını hesablayaq:

$$\lambda_0=2\pi\frac{c}{\omega_0},$$

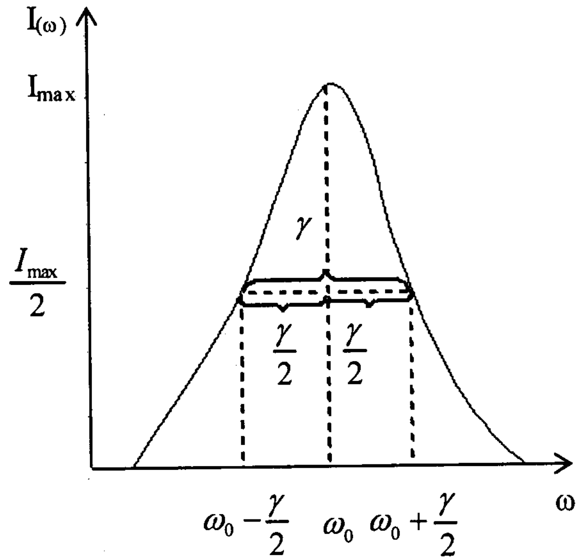
$$|\Delta\lambda_0|=2\pi\left|\Delta\frac{c}{\omega_0}\right|=2\pi\frac{c\Delta\omega}{\omega_0^2}=\frac{2\pi c\gamma}{\omega_0^2}=\frac{2\pi c}{\omega_0^2}\frac{2\omega_0^2 r_0}{3c}=\frac{4\pi}{3}r_0.$$

Bu, universal sabitdir və özü də elektronun klassik radiusu tərtibindədir.

Biz (72.4′) düsturundan istifadə edərək $\gamma<<\omega_0$ şərtini nəzərə almaqla ossilyatorun enerjisinin zamandan asılılığını hesablasaq:

$$W(t)=W(0)e^{-\gamma t} \qquad (72.11)$$

ifadəsini alarıq. Buradan görünür ki, $\gamma^{-1} = \tau$ həyəcanlanmış ossilyatorun ömrünü xarakterizə edir. $\tau = \gamma^{-1}$ müddətində ossilyator öz enerjisini e dəfə azaldır. 2τ, 3τ zamanı ərzində ossilyator öz enerjisini getdikcə azaldaraq sönür.



Şəkil 72.1

Real şəraitdə spektral xətlərin forması və eni təkcə şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi ilə deyil, həm də digər faktorlarla təyin edilir. Bunların içərisində həlledici rolu oynayan atomların toqquşması və istilik hərəkətidir. Bu zaman xəttin eni artır:

$$\Gamma = \gamma + \gamma_{toq.} + \gamma_{ist}$$

olur. $\lambda_{toq.}$ və γ_{ist} toqquşma və istilik hərəkəti nəticəsində xəttin eninin əlavə artmasıdır.

§73. Sahəvi kütlə və onun Lorens formalizmində hərəkət tənliyi

Zərrəciyin sahəvi kütləsini müxtəlif üsullarla təyin etmək olar (məs: Sahənin enerji-impuls tenzoru ilə). Lakin biz burada Lorens üsulundan istifadə edəcəyik. Lorens təklif edir ki, zərrəciyin kütləsi (sahəvi kütlə), impulsu, hərəkət tənliyi və s. sahənin özü ilə təyin edilməlidir.

Fərz edək ki, yüklü zərrəcik $\vec{F}_{xar}$ qüvvənin və Lorens qüvvəsinin təsiri altında qeyri-relyativistik $(\upsilon << c)$ hərəkət edir. Zərrəciyin yükü müəyyən $\rho_0(\vec{r}, t)$ sıxlığı ilə paylanmışdır və ona görə Lorens qüvvəsinin bu yükün paylandığı həcm üzrə orta qiymətini götürəcəyik:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{xar} + \int \bar{\vec{F}}_L \rho_0(\vec{r})(d\vec{r}). \qquad (73.1)$$

Burada $\bar{\vec{F}}_L$ elektronun özünün yaratdığı orta Lorens qüvvəsidir:

$$\bar{\vec{F}}_L = \int \vec{F}_L \rho_0(\vec{r}')(d\vec{r}'). \qquad (73.2)$$

Yükün sıxlığı $\rho_0(\vec{r}) = \dfrac{\rho(\vec{r})}{e}$ elektronun yükünün müəyyən həcm daxilində paylanmasını xarakterizə edir və aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\int \rho_0(\vec{r})(d\vec{r}) = 1. \qquad (73.3)$$

Sahəni potensiallar vasitəsilə ifadə edərək

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi,$$
$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

yazırıq və potensialları tam gecikmə zamanı üzrə §70-də olduğu kimi sıraya ayırırıq (fərz edilir ki, müşahidə nöqtəsi sistemin daxilindədir):

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\left\{\rho_t^{(\vec{r}')} - \frac{R}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{R}{c}\right)^3 \frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3}\right\}(d\vec{r}'),$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{1}{R}\left\{\vec{j}_t^{(\vec{r}')} - \frac{R}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right\}(d\vec{r}').$$

Burada $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}'(t)$-dir, $\vec{R}_0$ – müşahidə nöqtəsinin, $\vec{r}'(t)$ isə yükün radius vektorlarıdır. Potensialların qradiyent çevrilməsini yazaq:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\, f$$

və $f(\vec{R}_0, t)$ funksiyasını §70-dən fərqli olaraq aşağıdakı kimi seçək:

$$f=-\int\rho(d\vec{r}')+\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int R\rho(d\vec{r}')-\frac{1}{3!c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho(d\vec{r}'). \qquad (73.4)$$

Onda $\varphi'=\int\frac{1}{R}\,\rho_t^{(\vec{r}')}(d\vec{r}')$ və

$$\vec{A}'=\frac{1}{c}\int\frac{1}{R}\vec{j}_t(\vec{r}')(d\vec{r}')-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{j}_t(\vec{r}')(d\vec{r}')+\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\vec{R}}{R}\rho_t(\vec{r}')(d\vec{r}')-$$

$$-\frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\vec{R}\rho_t(\vec{r}')(d\vec{r}') \qquad (73.5)$$

olar. Burada $\vec{H}$ çox sadə şəklə düşür:

$$\vec{H}=\text{rot}\vec{A}'=\frac{1}{c}\int\frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3}(d\vec{r}'), \qquad (73.6)$$

çünki $\vec{A}'$-in ifadəsində birinci həddən başqa digər hədlərin rot-u sıfırdır. Lakin $\vec{E}$-nin ifadəsi mürəkkəb (daha doğrusu uzun) alınır:

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}-\text{grad}\varphi'=\int\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(d\vec{r}')-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\vec{j}}{R}(d\vec{r}')-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{\vec{R}}{R}\rho(d\vec{r}')+\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\vec{j}(d\vec{r}')+\frac{1}{3c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int\vec{R}\rho(d\vec{r}'). \qquad (73.7)$$

Yüklərin diskret paylandığını fərz edərək

$$\rho_t^{(\vec{r}')}\equiv\rho(\vec{r}',t)=\sum_a e_a\delta(\vec{r}'-\vec{r}_a(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}',t)=\sum_a e_a\vec{v}_a(t)\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_a(t))$$

paylanmalarını $\vec{E}$ və $\vec{H}$ ifadələrindəki inteqrallarda yerinə yazaraq inteqralları açaq və bəzi sadələşdirmələri aparaq. Əvvəlcə $\vec{H}$-ın ifadəsindən başlayaq:

$$\vec{H}=\frac{1}{c}\sum_a e_a\frac{[\vec{v}_a\vec{R}_a]}{R_a^3}.$$

Sahəni bir ədəd yük (elektron) yaratdığına görə cəm işarəsini yazmırıq və e_a, $\vec{v}_a$-dakı «a» indekslərini atırıq. Onda $\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{e[\vec{v}\vec{R}_a]}{R_a^{\ 3}}$ olur. Burada $\vec{R}_a=\vec{R}_0-\vec{r}_a(t)$. $\vec{R}_0$ müşahidə nöqtəsinin sabit radius vektorudur,

$\vec{r}_a(t)$ isə sahəni yaradan bir ədəd yükün dəyişən radius vektorudur. Biz gələcəkdə $\vec{R}_a$-nın bu ifadəsini yadda saxlayaraq, sadəlik xarakterinə a-indeksini ataraq $\vec{R}_a \equiv \vec{R}$ yazacağıq. Onda

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{e[\vec{v}\vec{R}]}{R^3} \tag{73.8}$$

olur. Eyni sadələşdirmələri $\vec{E}$-nin ifadəsində aparsaq

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e\vec{v}}{R}\right) - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{e\vec{R}}{R}\right) + \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e\vec{v}) + \frac{1}{3c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}(e\vec{R}) \tag{73.9}$$

olar. Zamana görə törəmələri hesablayanda nəzərə almaq lazımdır ki, $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}_a(t)$ və $\frac{\partial}{\partial t}\vec{R} = -\dot{\vec{r}}_a = -\vec{V}$, $\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\vec{R}\vec{V}}{R}$ və s. Bu törəmələri hesablayaraq (73.2) düsturunda inteqral altında yazılmış çılpaq $\vec{F}_L$ Lorens qüvvəsinin ifadəsini yazaq:

$$\vec{F}_L = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{H}]\right).$$

(73.1) hərəkət tənliyində F_L iki dəfə ortalanır. Onun ortalanmış ifadəsini yazaq:

$$\int\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}\,')(d\vec{r})(d\vec{r}\,')\vec{F}_L = e^2\int\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}\,')(d\vec{r})(d\vec{r}\,')\times$$

$$\times\left\{\frac{\vec{R}}{R^3}\left(1+\frac{V^2}{2c^2} - \frac{3(\vec{R}\vec{V})^2}{2c^2R^2} - \frac{(\dot{\vec{V}}\vec{R})}{2c^2}\right) - \frac{\dot{\vec{V}}}{2c^2R} + \frac{2\ddot{\vec{V}}}{3c^3} + \frac{1}{c^2}\frac{[\vec{V}[\vec{V}\vec{R}]]}{R^3}\right\} \tag{73.10}$$

Biz ortalama apararkən elektronun yükünün sferik simmetrik paylandığını fərz edəcəyik. Elektronun yükünün paylanma radiuslarının $\vec{r}$ və $\vec{r}\,'$ olduğunu nəzərə alaraq yuxarıdakı düsturda $\vec{R}$ vektorunu son nəticədə aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}_a \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'.$$

Düsturdakı həcm elementlərini sferik koordinat sistemində yazaq:

$$(d\vec{r}) = r^2 dr\, d\Omega,\ (d\vec{r}\,') = r'^2 dr'\, d\Omega'.$$

Yuxarıdakı ifadədə inteqral altındakı funksiyaların $\vec{r}$ və $\vec{r}\,'$-in sferik bucaqları üzrə inteqrallamanı §69-da etdiyimiz kimi $\vec{r}$ və $\vec{r}\,'$-in istiqamətini müəyyən edən $\vec{n}$ və $\vec{n}'$ vahid vektorların (və ya onların proyeksiyalarının) bucaqlar üzrə orta qiymətləri ilə əvəz edə bilərik (bax: §69).

Əgər biz $\vec{R}f(R)$ kimi vektoru kəmiyyəti inteqrallayırıqsa, bu vektoru sabit $\vec{C}$ vektoruna skalyar vuraraq uyğun proyeksiyalarda yazırıq:

$$\vec{C}\vec{R}f(R)=(\vec{C}\vec{r}-\vec{C}\vec{r}\,')f(R)=(C_i n_i r-C_k n_k' r')f(R).$$

Bu ifadəni hədbəhəd inteqrallayırıq və bucaqlar üzrə inteqralları n_i-lərin orta qiymətilə əvəz edirik:

$$\oint C_i n_i r f(R) d\Omega=C_i r f(R)\oint n_i d\Omega=C_i r f(R)\,4\pi\oint n_i\frac{d\Omega}{4\pi}=C_i r f(R) 4\pi\overline{n_i},$$

və ikinci hədd $4\pi C_k r' f(R)\overline{n}_k$ şəklində olur. Əgər $\vec{R}$ -in skalyar və ya vektori hissələri iştirak edirsə $\vec{C}$ -yə vurmaq lazım deyil. Məsələn, $(\vec{R}\vec{V})\times$ $\times(\vec{R}\dot{\vec{V}})$ həddini inteqrallayanda $\overline{n_i n_j}$, $\overline{n_k' n_l'}$, $\overline{n_i n_k'}$ və s. iştirak edəcəkdir. Biz §69-dakı kimi nəzərə alsaq ki, tək sayda n_i-lərin hasillərinin orta qiyməti sıfıra bərabərdir və cüt sayda n_i-lərin hasillərinin orta qiyməti δ_{ik}- ların hasili ilə mütənasibdir ($\overline{n_i\, n_k}=\frac{1}{3}\delta_{ik}$ və s.), onda inteqrallanmanı asanlıqla başa çatdıra bilərik. (73.10) ifadəsində 4-cü, 5-ci və 6-cı hədlər sıfırdan fərqlidir, digərlərinin orta qiyməti sıfırdır. Məsələn,

$$\overline{\vec{C}\vec{R}f(R)}=0,$$

$$\overline{\vec{C}\vec{R}(\dot{\vec{V}}\vec{R})}=\overline{C_i(rn_i-r'n_i')\,\dot{V}_j(rn_j-r'n_j')}=\ldots=\frac{1}{3}(\vec{C}\dot{\vec{V}})R^2$$

olur. Son ifadədə hər tərəfdən sabit $\vec{C}$ vektorunu atsaq:

$$\overline{\vec{R}\;(\dot{\vec{V}}\vec{R})}=\frac{1}{3}\dot{\vec{V}}R^2$$

alırıq. Beləliklə elektromaqnit sahəsinin öz-özünə təsir qüvvəsi $1/c^3$ yaxınlaşmasında

$$\int\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}\,')(d\vec{r})(d\vec{r}\,')\vec{F}_L=e^2\int\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}\,')(d\vec{r})(d\vec{r}\,')\left\{-\frac{2\dot{\vec{V}}}{3Rc^2}+\frac{2\ddot{\vec{V}}}{3c^3}\right\}=$$

$$= -\frac{2e^2\dot{\vec{V}}}{3c^2}\int\frac{\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}\,')}{R}(d\vec{r})(d\vec{r}\,') + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{V}} = -\frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}\dot{\vec{V}} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{V}} \quad (73.11)$$

olur. Burada $U_0 = \frac{e^2}{2}\int\frac{\rho_0(\vec{r})\rho_0(\vec{r}\,')(d\vec{r})(d\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ elektronun elektrostatik sahəsinin enerjisidir. Onda $\frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2} = m^{el}$ elektronun sahəvi kütləsi olur. İndi elektronun (73.1) hərəkət tənliyini yenidən yazırıq:

$$m\ddot{\vec{r}} = -m^{el}\ddot{\vec{r}} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} + \vec{F}_{xar}. \quad (73.1')$$

Lorensin fikrincə sahənin öz-özünə təsir qüvvəsi yüklü zərrəciyin bütün parametrlərini və o cümlədən hərəkət tənliyini təmin edir. Ona görə sol tərəfdə yazılmış $m\ddot{\vec{r}}$ həddinin mənası yoxdur və onu atmaq lazımdır:

$$m^{el}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{xar} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}. \quad (73.12)$$

Bu, sahəvi kütlə üçün Lorensin verdiyi hərəkət tənliyidir. Burada yükə təsir edən xarici sahədən başqa şüalanmanın sürtünmə qüvvəsi də iştirak edir. Əgər biz sıranın sonrakı hədlərini də nəzərə alsaydıq tənliyin sağ tərəfində $\ddddot{\vec{r}}$, $\overset{.....}{\vec{r}}$ və s. ilə mütənasib hədlər iştirak edərdi. Biz sahəvi kütlə üçün (73.1′) Lorens hərəkət tənliyinin sağ tərəfindəki ikinci həddin birinciyə nisbətini götürsək, bu tənliyin sıraya ayrılma parametrini almış olarıq:

$$\alpha = \frac{r_0|\dddot{\vec{r}}|}{c|\ddot{\vec{r}}|} \sim \frac{r_0}{\lambda}.$$

Beləliklə (73.12) tənliyi elektronun şüalandırdığı dalğa uzunluğu onun r_0 klassik radiusundan çox böyük olduğu hal üçün doğrudur. Baxdığımız nəzəriyyənin çatışmayan cəhəti sahəvi kütlənin ifadəsində çox qəribə və çətin izah edilən 4/3 əmsalının olmasıdır.

§74. Klassik elektron nəzəriyyəsinin ziddiyyətləri, Laue teoremi, Puankare qüvvəsi (təzyiqi)

Elektronun klassik nəzəriyyəsi bir sıra ziddiyyətlərlə üzləşir və bu haqda qısa məlumat vermək lazımdır.

Biz §41-dən bilirik ki, sərbəst (mənbəsiz) elektromaqnit sahəsi üçün

$$G_\mu = \frac{i}{c}\int_V T_{\mu 4} dV \tag{74.1}$$

kəmiyyəti sahənin 4-ölçülü impulsudur (bax:(41.5)). O 4-ölçülü vektordur və birinci üç komponeti $\vec{G} = \int_V \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}\vec{H}\right]dV$ sahənin impulsunu (bax: (41.17)), dördüncü komponenti isə $G_4 = \frac{i}{c}\int_V \frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}dV$ $\frac{i}{c}$ dəqiqliyi ilə sahənin enerjisini ifadə edir (bax: (41.19)).

Lakin sahə yük (məsələn, elektron) tərəfindən yaradılırsa, (74.1) kəmiyyəti artıq 4-ölçülü vektor olmayacaqdır və mənbəli sahənin 4 ölçülü impulsunu tam təsvir edə bilməyəcəkdir. Bunu göstərmək üçün həm elektronun yaratdığı sahəni, həm də xarici sahəni nəzərə almaqla zərrəciyin 4-ölçülü hərəkət tənliyinin «sıxlığını» (bax:(42.6)) yazaq:

$$\eta c\frac{dU_\mu}{ds} = \frac{1}{c}\rho F_{\mu\nu}U_\nu + \frac{1}{c}\rho F^{xar}_{\mu\nu}U_\nu . \tag{74.2}$$

Burada η və ρ kütlənin və yükün sıxlıqlarıdır. Tənliyin hər iki tərəfini ds-ə vuraraq inteqrallayaq:

$$\int \eta c dU_\mu = \int\left(\frac{1}{c}\rho F_{\mu\nu}U_\nu + \frac{1}{c}\rho F^{xar}_{\mu\nu}U_\nu\right)ds \equiv$$

$$\equiv \int\frac{1}{c}\rho U_\nu (F_{\mu\nu} + F^{xar}_{\mu\nu})\frac{ds}{dt}dt \equiv \int\frac{1}{c}(F_{\mu\nu}j_\nu + F^{xar}_{\mu\nu}j_\nu)dt .$$

Burada 4-ölçülü cərəyanın $j_\nu = \rho U_\nu \frac{ds}{dt}$ olduğunu nəzərə almışıq. Sağ tərəfdə birinci həddin $\frac{1}{c}F_{\mu\nu}j_\nu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ olduğunu nəzərə alaraq (bax:(43.5)) yuxarıdakı hərəkət tənliyini 3-ölçülü həcm üzrə inteqrallayaq:

$$\int_V dV \int \eta c dU_\mu = \int \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} dV dt + \frac{1}{c} \int F_{\mu\nu}^{xar} j_\nu dV dt. \qquad (74.3)$$

Burada $T_{\mu\nu}$ sahənin enerji-impuls-gərilmə tenzorudur. Bu 4-ölçülü hərəkət tənliyində elektronun kütləsinin sıxlığının $\eta = \sum_a m_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \rightarrow$ $\rightarrow m\delta(\vec{r} - \vec{r}_{el})$ olduğunu nəzərə alaraq δ- funksiyasının köməyi ilə soldakı inteqralı açaq. Sağda isə 4-ölçülü vektoru iki həddin cəmi şəklində, yəni $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_4} + \frac{\partial T_{\mu k}}{\partial x_k}$ yazaraq, birinci həddi sol tərəfə keçirək və ikinci həddə isə Qauss teoremini tətbiq edərək tənliyi yığcam şəkildə yazaq:

$$\int d\left(mcU_\mu + \frac{i}{c} \int_V T_{\mu 4} dV \right) = \int dt \oint_S T_{\mu k} dS_k + \frac{1}{c} \int F_{\mu\nu}^{xar} j_\nu (d^4x). \qquad (74.4)$$

Burada $(d^4x)=dVdt$ götürülmüşdür. Tənlikdə xarici qüvvə impulsuna səthi qüvvələrin impulsu $J_\mu = \int dt \oint_S T_{\mu k} dS_k$ əlavə edilir. Son tənlikdə vahid 4 ölçülü $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ vektorunu iki həddə bölüb, onların üzərində müəyyən əməliyyat apararaq aldığımız $G_\mu = \frac{i}{c} \int_V T_{\mu 4} dV$ və J_μ kəmiyyətlərinin yalnız xətti kombinasiyası 4-ölçülü vektor təşkil edir və G_μ ilə J_μ ayrılıqda 4-ölçülü vektor olmaya da bilər. Ümumi halda G_μ 4-ölçülü vektor olmur və o, sahənin enerji və impulsunu tam təmin edə bilmir. Yalnız xüsusi halda, əgər sahə sərbəstdirsə və J_μ-dəki səthi inteqral səth sonsuz artdıqda sıfıra çevrilirsə G_μ 4-ölçülü vektor olur və sahənin 4-ölçülü impulsunu ifadə edir. Elektronun sahəvi kütləsinin başına gələn ziddiyyətlərin əksəriyyəti, yəqin ki, yuxarıda deyilən müddəa ilə əlaqədardır. Biz burada elektrondan danışdıq, lakin istənilən yüklü elementar zərrəcik üçün bu deyilənlər doğrudur.

İlk dəfə alman fiziki M.Laue yüklərin yaratdığı elektromaqnit sahəsinin impulsu və enerjisinin 4-ölçülü vektor ola bilməsi şərtini teorem şəklində vermişdir. Bu teoremə görə yüklü zərrəciklərin yaratdığı elektromaqnit sahəsində 4-ölçülü enerji-impuls vektorunun mövcud olması üçün yüklərin sükunətdə olduğu sistemdə sahənin enerji və impuls tenzorunun inteqralı sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\int T^0_{\mu\nu} dV_0 = 0 \quad (\mu \neq \nu). \qquad (74.5)$$

Fərz edək ki, elektron K' sistemində sükunətdədir. Bu sistemdə enerji-impuls tenzorunu $T^0_{\mu\nu}$ ilə işarə edək. Sahə sferik simmetrik olduğundan $\mu \neq \nu$ komponentləri üçün (74.5) şərti ödənəcəkdir. Lakin diaqonal komponentlər üçün

$$\int T^0_{\mu\mu} dV_0 \ (\mu \text{ üzrə cəm yoxdur}) \neq 0 \qquad (74.6)$$

ola bilər. (74.5)-(74.6) bərabərliklərini G_μ-nün ifadəsində nəzərə alsaq

$$G^0_n = 0 \text{ və } G^0_4 = \frac{i}{c} U_0 \qquad (74.7)$$

olar. Burada $U_0 = \int T^0_{44} dV_0$ elektrostatik sahənin enerjisidir. Elektron K sisteminə nəzərən X oxu boyunca υ sürətilə hərəkət edir. Biz Laue teoremini yoxlamaq üçün elektronun sükunətdə olduğu $K' \equiv K^0$ sistemindən K-ya keçəcəyik və ştrixli kəmiyyətləri sıfır indeksi ilə işarə edəcəyik (məsələn $X'_\mu \equiv X^0_\mu$, $L'_{\mu\nu} \equiv L^0_{\mu\nu}$ və s.). Biz (11.4) və (14.2′) Lorens cevrilməsi düsturlarından istifadə edəcəyik, $T^0_{\alpha\beta}$-ın çevrilməsində yalnız simmetrik hədləri ($\alpha=\beta$), $T_{\mu\nu}$ üçün isə $\mu,\nu=1,4$ hədləri nəzərdə tutacağıq.

İndi bilavasitə vektorun və tenzorun çevrilmə qanunlarını yazaq:

$$x_\mu = L^0_{\mu\alpha} x^0_\alpha \text{ və ya } x_1 = \frac{x^0_1 - i\beta x^0_4}{\sqrt{\ }}, \ x_4 = \frac{x^0_4 + i\beta x^0_1}{\sqrt{\ }}, \ x_2 = x^0_2, \ x_3 = x_3^0;$$

$$dV = \sqrt{1-\beta^2}\, dV_0, \ T_{\mu\nu} = L^0_{\mu\alpha} L^0_{\nu\beta} T^0_{\alpha\beta} = L^0_{\mu\alpha} L^0_{\nu\alpha} T^0_{\alpha\alpha}$$

və ya

$$T_{14} = L^0_{1\alpha} L^0_{4\alpha} T^0_{\alpha\alpha} = L^0_{11} L^0_{41} T^0_{11} + L^0_{14} L^0_{44} T^0_{44} =$$
$$= \frac{i\beta}{\sqrt{\ }^{2}} T^0_{11} - \frac{i\beta}{\sqrt{\ }^{2}} T^0_{44} = -\frac{i\beta}{\sqrt{\ }^{2}} (T^0_{44} - T^0_{11}).$$

Biz $\sqrt{1-\beta^2}$ radikalını sadəcə $\sqrt{\ }$ şəklində yazırıq.

$$T_{44} = L^0_{41} L^0_{41} T^0_{11} + L^0_{44} L^0_{44} T^0_{44} = \frac{i^2\beta^2}{\sqrt{\ }^{2}} T^0_{11} + \frac{1}{\sqrt{\ }^{2}} T^0_{44} = \frac{1}{\sqrt{\ }^{2}} (T^0_{44} - \beta^2 T^0_{11}).$$

G_μ-nü $T_{\mu 4}$ tenzoru vasitəsilə təyin etsək:

$$G_1 = \frac{i}{c}\int T_{14}dV = \frac{\beta}{\sqrt{\ }c}\int (T^0_{44} - T^0_{11})dV_0\,,$$
$$G_4 = \frac{i}{c}\int T_{44}dV = \frac{i}{\sqrt{\ }c}\int (T^0_{44} - \beta^2 T^0_{11})dV_0 \qquad (74.8)$$

olar. İndi G_μ-nü 4 -ölçülü vektorun çevrilməsi qanunu ilə təyin edək:

$$G_\mu = L^0_{\mu\alpha}G^0_\alpha = L^0_{\mu 4}G^0_4$$

və ya

$$G_1 = L^0_{14}G^0_4 = -\frac{i\beta}{\sqrt{\ }}G^0_4 = \frac{\beta}{\sqrt{\ }c}\int T^0_{44}dV_0\,,$$
$$G_4 = L^0_{44}G^0_4 = \frac{1}{\sqrt{\ }}G^0_4 = \frac{i}{\sqrt{\ }c}\int T^0_{44}dV_0\,. \qquad (74.8')$$

G_μ-lərin iki üsulla alınmış ifadələrinin üst-üstə düşməsi üçün $\int T^0_{11}dV_0 = 0$ olmalıdır.

Beləliklə yükün olduğu halda elektromaqnit sahəsinin impulsunun 4-ölçülü vektor olması üçün $\int T^0_{11}dV_0 = 0$ şərti ödənməlidir.

İndi Laue teoremini daha dəqiq ifadə edə bilərik:

Elektronun mövcud olduğu halda elektromaqnit sahəsinin G_μ hərəkət miqdarının 4-ölçülü vektor olması üçün elektronun sükunətdə olduğu sistemdə sahənin enerji-impuls tenzorunun T^0_{44} komponentindən başqa bütün komponentləri

$$\int T^0_{\mu\nu}dV_0 = 0 \qquad (74.9)$$

şərtini ödəməlidir. Burada $\int T^0_{44}dV_0 = U_0$ elektronun yaratdığı sahənin tam enerjisini ifadə edir. Sahəvi kütlə nəzəriyyəsinin əsas ideyasını həyata keçirərək U_0 enerjisini zərrəciyin məxsusi enerjisinə bərabər etməliyik. Bu enerjinin c^2-na olan nisbəti zərrəciyin sahəvi kütləsi olacaqdır.

$$m^{el} = \frac{U_0}{c^2} = \frac{1}{c^2}\int T^0_{44}dV_0\,. \qquad (74.10)$$

Laue teoremi ödəndiyi halda sahənin 4-ölçülü impulsu G_μ üçün düzgün transformasiya (çevrilmə) xassələrini ala bildik. Lakin nöqtəvi yükün məxsusi enerjisi və sahəvi kütləsinin sinqulyarlığı olduğu kimi qalır. Bu sinqulyarlıq hətta sahənin kvant nəzəriyyəsində də özünü göstərir. Burada yeni bir ziddiyyət ortaya çıxır. Kulon itələmə qüvvələri nəticəsində elektronun yükü dayanıqlı tarazlıqda qala bilməz, o, «dağılmalıdır». Qeyd edək ki, elektronun klassik sahə nəzəriyyəsinin qurulmasında Lorenslə yanaşı çox sayda alim – Tomson, Abraham, Puankare, Laue, Mi, Born, İnfeld və s. iştirak etmişdir. Lakin indiyə qədər bu nəzəriyyə tam şəkildə qurula bilməmişdir.

Biz indi (41.9) və (41.16) düsturlarından istifadə edərək göstərək ki, Maksvell-Lorens nəzəriyyəsində Laue teoremi ödənmir. Elektronun sükunətdə olduğu koordinat sistemində maqnit sahəsi yoxdur və elektrik sahəsi sferik simmetriyaya malikdir. Laue teoremini yoxlamaq üçün bizi sahənin enerji və impuls tenzorunun diaqonal elementləri maraqlandırır:

$$T_{44}^0 = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2, \quad T_{11}^0 = \frac{1}{4\pi}\left(E_x^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2\right). \qquad (74.11)$$

Buradan

$$\int T_{44}^0 dV_0 = \frac{1}{8\pi}\int \vec{E}^2 dV_0 = U_0 \qquad (74.12)$$

alırıq. Burada U_0 elektrostatik sahənin enerjisidir. İndi , sahəsinin sferik simmetriyaya malik olduğunu nəzərə alaraq T_{11}^0-ı inteqrallayaq.

$$\int T_{11}^0 dV_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(E_x^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2\right)dV_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{3}\vec{E}^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2\right)dV_0 =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{4\pi}\int \vec{E}^2 dV_0 = -\frac{1}{3}U_0 \neq 0. \qquad (74.13)$$

Deməli, Maksvell-Lorens nəzəriyyəsində Laue teoremi ödənmir. Sahənin G_μ-enerji-impulsu 4-ölçülü vektor olmur və onu zərrəciyin 4-ölçülü vektor olan P_μ enerji-implus vektoruna bərabər etmək mümkün deyildir. Qeyd edək ki, (74.13)-ü (74.8)-də nəzərə aldıqda sahəvi kütlədə məşhur 4/3 vuruğu ortaya çıxır.

Elektronun klassik sahəvi kütlə nəzəriyyəsinin ziddiyyətlərini sadalayaq:

1. Bu nəzəriyyədə elektronun sahəvi kütləsi üçün düzgün olmayan 4/3 vuruğu ortaya çıxır: $m^{el} = \frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}$.

2. Nöqtəvi elektron üçün həm məxsusi enerji (U_0) və həm də məxsusi kütlə (m^{el}) sonsuzluğa çevrilir.

3. Elektronun kütləsi yalnız sahəvi kütlədən ibarət ola bilməz, orada qeyri-sahəvi kütlə də olmalıdır.

4. Elektron bir adlı yükə malikdir və bu yük Maksvell qüvvələrinin (Kulon qüvvələrinin) təsiri altında tarazlıq vəziyyətində qala bilməz və o, mütləq dağılmalıdır.

Belə elektronun «hissələrini» bir yerdə saxlamaq üçün ona qeyri-Maksvell qüvvələri tətbiq etmək lazımdır. Bu qüvvələr Puankare qüvvələri (təzyiqi) adlanır. Biz aşağıda bu ziddiyyətlərin bəzilərinin aradan qaldırılması haqda müəyyən mülahizələr aparacağıq. Lakin indi qeyd etmək istəyirik ki, sahəvi kütlə nəzəriyyəsinin bu çatışmayan cəhətlərinə baxmayaraq onun böyük müvəffəqiyyətlərini danmaq olmaz. Beləki, nöqtəvi elektronla aparılan kvant-elektrodinamik proseslər (nöqtəvi elektrondan fotonların Tomson səpilməsi, yüksək enerjili fotonların Kleyn-Nişşin səpilməsi, elektron-pozitronun iki fotonlu annihilyasiyası və s.) təcrübədə təsdiq edilmişdir və bunların effektiv kəsikləri r_0^2 ilə mütənasibdir ($r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ elektronun klassik radiusudur). Bunlar onu göstərir ki, elektronun klassik radiusunda müəyyən qədər həqiqət vardır. Yenidən ziddiyyətlərin analizinə qayıdaq. Elektronun sahəvi kütləsindəki 4/3 əmsalını düzəltmək üçün sahəvi $m^{el} = \frac{4}{3}\frac{U_0}{c^2}$ kütləsinə qeyri-Maksvell tipli $m' = -\frac{1}{3}\frac{U_0}{c^2}$ kütləsini əlavə etmək lazımdır. Bu Puankarenin ideyasıdır. O, Maksvellin $T_{\mu\nu}$ tenzorunun çatışmayan cəhətlərini kompensasiya etmək və elektronun yükünün dayanıqlığını təmin etmək məqsədilə qeyri-elektromaqnit $P_{\mu\nu}$ gərilmə tenzoru təklif edir. Bu tenzorun nə mənşəyi və nə də fiziki təbiəti məlum deyil. Puankare postulat şəklində bu tenzoru Maksvellin $T_{\mu\nu}$ tenzoruna əlavə edərək yeni

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + P_{\mu\nu} \tag{74.14}$$

tenzoru qurur və təklif edir ki, $P_{\mu\nu}$-nü elə seçmək olar ki, sahənin və zərrəciyin 4-ölçülü impulsları üst-üstə düşsün və zərrəciyə təsir edən $\vec{f}^{\,el.m}$ və $\vec{f}^{\,mex}$ qüvvələr bir-birini neytrallaşdırsın:

$$G_\mu = P_\mu = \frac{i}{c}\int dV S_{\mu 4}\,. \qquad (74.15)$$

O, elektronun sükunətdə olduğu koordinat sistemində $P^0{}_{\mu\nu}$ komponentlərini elə seçir ki,

$$\int P^0_{ij} dV_0 = -\int T^0_{ij} dV_0 \qquad (74.16)$$

olsun. (74.16) düsturunda i, j=1, 2, 3 qiymətlərini alır və ümumi $S_{\mu\nu}$ tenzorunda qeyri-kovariant hədlər kompensasiya olunur.

Puankare modeli göstərir ki, məxsusi enerjidə və ya məxsusi kütlədə elektromaqnit hissəsini başqa təbiətli qüvvələrin yaratdığı hissələrdən ayırmaq olmaz, çünki ayrılıqda götürülən hissələrin heç biri kovariant deyil, yalnız onların cəmi kovariantdır. Fiziki mənaya yalnız tam şəkildə götürülmüş məxsusi enerji və ya məxsusi kütlə malikdir:

$$m = \frac{1}{c^2}\int (T^0_{44} + P^0_{44}) dV_0\,. \qquad (74.17)$$

Əgər $P_{\mu\nu}$ də $T_{\mu\nu}$ kimi Lorens çevrilməsinə tabedirsə, onda (74.8) düsturlarına uyğun olaraq

$$G_1 = \frac{i}{c}\int S_{14} dV = \frac{\beta}{\sqrt{}c}\int (S^0_{44} - S^0_{11}) dV_0\,,$$

$$G_4 = \frac{i}{c}\int S_{44} dV = \frac{i}{\sqrt{}c}\int (S^0_{44} - \beta^2 S^0_{11}) dV_0$$

alırıq. Puankarenin verdiyi (74.16) düsturundan istifadə etsək

$$\int S^0_{11} dV_0 = \int T^0_{11} dV_0 + \int P^0_{11} dV_0 = 0 \qquad (74.16')$$

olar və enerji və impuls üçün normal ifadə alınar. İndi $\int T^0_{11} dV_0$ Maksvell tenzorunun (74.13) ifadəsindən istifadə etsək

$$\int P^0_{11} dV_0 - \frac{1}{3} U_0 = 0 \qquad (74.16'')$$

alarıq.

Puankare modelində həm kovariantlıq və həm də dayanıqlıq təmin edilir, lakin bu modelə «həyat» verən $P_{\mu\nu}$ tenzorunun fiziki mənası məlum deyil. Puankare tenzoru və Puankare qüvvəsi elektromaqnit təbiətindən tamamilə fərli məvhumdur.

Yuxarıda deyilənlərdən məlum olur ki, elə bil ki, Puankare fiziki mənası məlum olmayan $P_{\mu\nu}$ tenzorunu daxil etməklə Laue teoreminin ödənməsini təmin edir.

Biz klassik elektrodinamikada (74.16″) düsturuna uyğun ifadələrlə üzləşirik. Əgər kütlə nöqtəvidirsə, onda bu ifadələr $\infty - \infty = 0$ və ya sonludur! mənasını verir. Bu yeni anlayış Azərbaycan dilində kütlənin yenidən təyin edilməsi, rusca *перенормировка массы*, ingilis dilində *renormalization of mass* adlanır. Bu termin bizə ingilis dilindən gəldiyinə görə onu renormalizasiya adlandırmaq daha doğru olardı. Kütlənin renormalizasiyası odur ki, iki sonsuz kütlənin fərqi özünü sonlu kütlə kimi aparır. Bu anlayış sırf riyaziyyatla bir qədər ziddiyyət təşkil edir. Belə ki, riyaziyyatda iki sonsuzluğun fərqi sonsuzluqdur. Lakin sonsuzluqların fərqi baş qiymət mənasında sonlu ola bilər. Fizikləri baş qiymət mənasında yığılan funksiyalar qane edir. Biz həm klassik və həm də kvant nəzəriyyəsində baş qiymət mənasında yığılan kəmiyyətlərlə çox məşğul olacağıq. Bu reonormallaşmanın kvant nəzəriyyəsi də mövcuddur. Lakin kvant nəzəriyyəsində kütlədən əlavə nöqtəvi yük də sonsuz qiymət alır. Ona görə kvant sahə nəzəriyyəsində həm kütlənin və həm də yükün reonormallaşması mexanizmi işlənib hazırlanmışdır. Deyə bilərik ki, kvant elektrodinamikası (KED) ilk reonormallaşmış nəzəriyyədir. Qeyd edək ki, istənilən fiziki real nəzəriyyə mütləq reonormallaşmış olmalıdır. Gələcəkdə nəzəriyyələrin birləşməsində reonormallaşma real amil kimi iştirak etməlidir.

Klassik sahə nəzəriyyəsi nə qədər əyani, başa düşülən, aydın və məntiqi olsa da sahənin kvant nəzəriyyəsi daha həqiqi, doğru və tam nəzəriyyədir və real aləmi düzgün izah edir. Müasir fizikada bir neçə kvantlaşmış sahə mövcuddur. Onların içərisində kvant elektrodinamikası (KED) əsas yeri tutur. Digər kvantlaşmış sahələr də KED-ə uyğun şəkildə və onun kimi qurulur.

Sonda qeyd edək ki, bizim indi məşğul olduğumuz klassik elektrodinamikada yüklü zərrəciyə təsir edən xarici qüvvə mövcuddursa, onda hərəkət tənliyində zərrəciyin kütləsini təcrübədə təyin edilmiş real kütlə kimi götürməliyik.

§75. Elektromaqnit dalğasının sərbəst yükdən səpilməsi. Tomson düsturu

Əgər müstəvi monoxromatik dalğa yükü e və kütləsi m olan sərbəst yükün üzərinə düşərsə, dalğanın təsiri nəticəsində zərrəcik təcil alar və şüalanar (bax: §68). Şüalanma istiqaməti düşən dalğanın yayılma istiqamətindən fərqli olur, lakin aşağıda göstərəcəyik ki, kiçik sürətlərdə şüalanma tezliyi düşən dalğanın tezliyinə bərabər olur. Bu hadisə *düşən dalğanın səpilməsi* adlanır. Dalğanı həm sərbəst zərrəcik və həmdə bağlı zərrəcik (məsələn, ossilyator) səpə bilər. Biz hələlik sərbəst zərrəcik tərəfindən elektromaqnit dalğasının səpilməsinə baxırıq.

Düşən elektromaqnit dalğasının təsiri altında zərrəciyin hərəkət tənliyi

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{\upsilon}\vec{H}\right]\right) \tag{75.1}$$

şəklində yazılır. Biz qeyri-relyativistik səpilmə halına baxdığımıza görə $(\upsilon << c)$ maqnit sahəsinin təsirini nəzərə almayacağıq.

Düşən monoxramatik müstəvi dalğanın xətti polyarizasiyaya malik olduğunu fərz etsək, sahə aşağıdakı şəkildə yazılar:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\alpha)}. \tag{75.2}$$

Burada $\vec{e}$ dalğanın vahid polyarizasiya vektorudur. Əgər fərz etsək ki, yükün (məs. elektronun) rəqs ampilitudu xarici sahənin dalğa uzunluğundan çox kiçikdir, yəni $\vec{k}\vec{r} \sim \frac{2\pi}{\lambda}r \sim \frac{r}{\bar{\lambda}} << 1$ şərti ödənir, onda düşən dalğanı $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}E_0 e^{-i(\omega t-\alpha)}$ şəklində götürə bilərik. İndi (75.1) hərəkət tənliyini

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{e}E_0 e^{-i(\omega t-\alpha)} \tag{75.1'}$$

şəklində yazırıq. Zərrəcik düşən dalğanın ω tezliyi ilə harmonik rəqs edir. Belə zərrəcik özündən ω tezlikli dalğalar şüalandıracaq (koherent şüalanma). Bilirik ki, elektromaqnit sahəsi, şüalanma enerjisi həqiqi kəmiyyətdir və ona görə $\vec{E}(\vec{r},t)$ sahəsinin həqiqi hissəsini götürməliyik: $\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}E_0\cos(\omega t-\alpha)$. Onda (75.1') ifadəsi

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\vec{e}E_0\cos(\omega t - \alpha) \qquad (75.1'')$$

olar. Dalğanın təsiri altında zərrəciyin (elektronun) əldə etdiyi dipol momenti və onun törəməsi

$$\vec{d} = e\vec{r}, \; \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\vec{e}E_0\cos(\omega t - \alpha) \qquad (75.3)$$

olar. İndi zərrəciyin dipol kimi şüalanmasının diferensial intensivliyi (48.11) düsturuna əsasən aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$dI = \vec{J}d\vec{s} = \frac{[\ddot{\vec{d}}\vec{n}]^2}{4\pi c^3}d\Omega = \frac{\ddot{\vec{d}}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3}d\Omega. \qquad (75.4)$$

Burada θ düşən dalğanın $\vec{e}$ polyarizasiya vektoru ilə səpilən (şüalanan) dalğanın $\vec{n}$ yayılma istiqaməti arsındakı bucaqdır.

Səpilmə prosesi effektiv kəsiklə xarakterizə olunur. ***Diferensial effektiv kəsik*** *şüalanan yükün (və ya yüklər sisteminin) vahid zamanda* $d\Omega$ *bucağı daxilində şüalandırdığı enerjinin bu sistemə düşən xarici sahənin enerji seli sıxlığına (Poyntinq vektoruna) olan nisbətinə deyilir:*

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{J}_0}. \qquad (75.5)$$

Effektiv kəsik zamandan asılı olmamalıdır. Ona görə şüalanma enerjisinin ($\overline{dI}$) və Umov-Poyntinq vektorunun ($\overline{J}_0$) zamana görə orta qiyməti götürülür. Umov-Poyntinq vektoru düşən dalğanın enerji seli sıxlığıdır, yəni vahid zamanda vahid səthdən keçən xarici sahənin enerjisidir:

$$|\vec{J}_0| = \frac{c}{4\pi}\left|[\vec{E}\vec{H}]\right| = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Onda $\overline{J}_0 = \frac{c}{8\pi}E_0^2$ və $\overline{dI} = \frac{e^4E_0^2}{8\pi c^3m^2}\sin^2\theta d\Omega$. Burada $\overline{\cos^2(\omega t - \alpha)} = \frac{1}{2}$ olduğu nəzərə alınmışdır. Beləliklə elektromaqnit dalğasının sərbəst zərrəcikdən səpilməsinin diferensial effektiv kəsiyi aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$d\sigma_T = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta d\Omega = r_0^2\sin^2\theta d\Omega. \qquad (75.5')$$

Bu, məşhur *Tomson düsturudur*. Burada r_0 yüklü zərrəciyin (məs. elektronun) klassik radiusudur. Tomson düsturu dalğanın tezliyindən asılı deyildir. Bu düsturda nəzərə alınmışdır ki, səpilən fotonun enerjisi elektronun sükunət enerjisindən çox kiçikdir: $\hbar\omega << m_0c^2$.

Böyük enerjili fotonların $\hbar\omega \sim m_0c^2$ elektrondan səpilməsi düsturu (Kompton effekti) kvant elektrodinamikasında Kleyn-Nişşin tərəfindən hesablanmışdır, bu ən ümumi düsturdur və xüsusi halda Tomson düsturuna keçir.

Tomson səpilməsində şüalanma ω tezliyi ilə baş verir (bax:(75.4), (75.3)). Bu tezlik elə düşən dalğanın tezliyidir (bax(75.2)). Bu səpilmədə tezlik dəyişmir. Belə səpilməyə *Reley səpilməsi* də deyilir.

(75.5′) düsturu polyarizasiya olunmuş dalğanın səpilməsi düsturudur. Burada θ bucağı düşən dalğanın $\vec{e}$ polyarizasiya vektoru ilə səpilən dalğanın $\vec{n}$ yayılma istiqaməti arasındakı bucaqdır: $(\vec{e}\vec{n}) = \cos\theta$.

Biz burada yeni bucaqlara keçərək polyarizasiya olunmamış dalğanın səpilməsi düsturunu ala bilərik. Bunun üçün Z polyar oxu düşən dalğanın $\vec{k}$ dalğa vektoru boyunca yönəlmiş və X oxu $\vec{e}$ polyarizasiya vektoru istiqamətində olan sferik koordinat sisteminə keçək. Biz ixtiyari iki vektor arsındakı bucağın kosinusunu bu vektorların sferik koordinat sistemindəki polyar və azimut bucaqları ilə əlaqələndirilən düsturdan istifadə edirik:

$$\cos\theta = \cos\upsilon_{nk}\cos\upsilon_{ek} + \sin\upsilon_{nk}\sin\upsilon_{ek}\cos(\varphi_{nk} - \varphi_{ek}). \qquad (75.6)$$

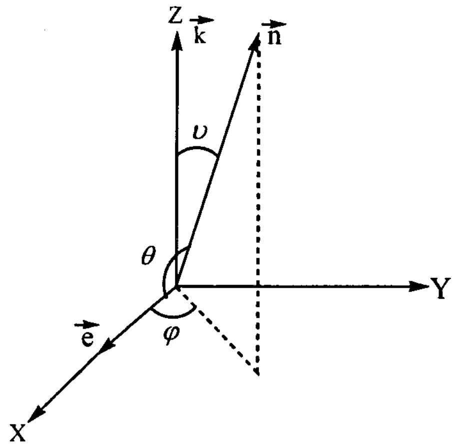
Burada nk, ek indeksləri oxlar arasında bucaqları göstərir. Şəkil (75.1)-dən aşağıdakı hədləri alırıq: $\upsilon_{nk} = \upsilon, \upsilon_{ek} = \frac{\pi}{2}, \varphi_{nk} = \varphi, \varphi_{ek} = 0$.

İndi (75.5′) düsturunda

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \sin^2\upsilon\cos^2\varphi \qquad (75.7)$$

yazsaq, məqsədimizə nail olarıq. Polyarizasiya olunmamış şüanın səpilməsi düsturunu almaq üçün, biz uyğun effektiv kəsiyi $\vec{e}$ polyarizasiya vektorunun XOY müstəvisində istiqamətini müəyyən edən φ azimut bucağı üzrə ortalamalıyıq. Onda

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \sin^2\upsilon\overline{\cos^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\upsilon = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\upsilon)$$

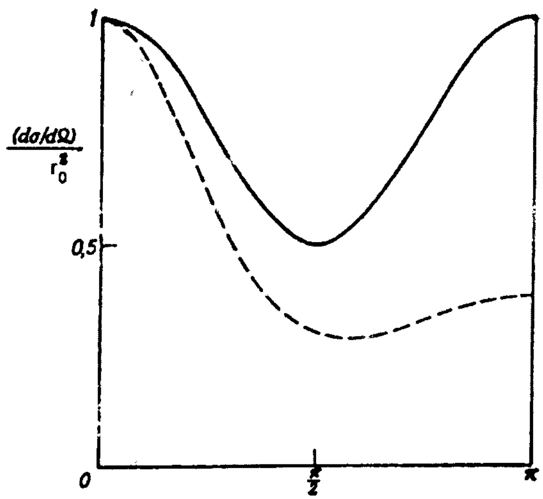


Şəkil **75.1**

olur. Bu ifadəni (75.5′)-də nəzərə alsaq polyarizasiya olunmamış dalğanın sərbəst yükdən (elektrondan, protondan və s.) səpilməsinin diferensial effektiv kəsiyini alırıq:

$$d\sigma_T = r_0^2 \frac{1}{2}(1+\cos^2\upsilon)d\Omega. \qquad (75.8)$$

Bu Tomson düsturu rentgen şüalarının elektrondan və ya γ-şüaların proton- dan səpilməsini təsvir edir. Düsturun səpilmə bucağından asılılığı şəkil 75.2-də göstərilmişdir (bütöv əyri). Müqayisə üçün Kleyn-Nişşin düsturu $\hbar\omega = 0{,}2mc^2$ qiyməti üçün təqribi təsvir olunmuşdur (punktir əyri).



Şəkil **75.2**

Tomson düsturu simmetrikdir, $\upsilon=0^0$ və π–də ən böyük qiymətə çatır və $\upsilon=\frac{\pi}{2}$-də minimum qiymət alır.

Tam səpilmə düsturunu almaq üçün (75.8) ifadəsini bütün səpilmə bucaqları üzrə inteqrallamaq lazımdır. İnteqrallamanı davam etdirərək aşağıdakı düsturu alırıq.

$$\sigma_T=\frac{r_0^2}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\upsilon d\upsilon(1+\cos^2\upsilon)=\frac{r_0^2}{2}2\pi\int_1^{-1}(-dx)(1+x^2)=$$

$$=\pi r_0^2\left(-x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1}=\frac{8\pi}{3}r_0^2 .$$

İnteqrallamada $\cos\upsilon=x$, $\sin\upsilon d\upsilon=-d\cos\upsilon=-dx$ əvəzləməsini etmişik. Beləliklə elektromaqnit dalğasının sərbəst elektrondan səpilməsinin inteqral effektiv kəsiyi üçün

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}r_0^2 \tag{75.9}$$

düsturunu alırıq. Bu Tomson düsturunun inteqral şəklidir. (75.5′) düsturunu da inteqrallasaq yenə (75.9) ifadəsini alarıq. Elektronlar üçün

$$\sigma_T=0{,}665\cdot10^{-24}sm^2,\; r_0=2{,}82\cdot10^{-13}sm .$$

§76. Elektromaqnit dalğasının ossilyatordan (bağlı yükdən) səpilməsi

Fərz edək ki, yüklü zərrəcik şüalanmanın sürtünmə qüvvəsini də nəzərə almaqla elastiklik qüvvəsinin təsiri altında ω_0 tezliyi ilə rəqs edir. Belə ossilyatorun üzərinə xətti polyarizasiya olunmuş müstəvi monoxromatik elektromaqnit dalğası düşür:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{e}E_0e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} .$$

Biz qeyri-relyativistik səpilməyə baxırıq ($\upsilon<<c$) və fərz edirik ki, xarici sahənin dalğa uzunluğu ossilyatorun rəqs ampilutundan çox böyükdür $\left(\vec{k}\vec{r}\sim r\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{r}{\lambda}<<1\right)$. Bu halda dalğanın maqnit sahəsinin ossilyatora təsirini nəzərə almırıq və dalğada $e^{i\vec{k}\vec{r}} \sim 1$ olduğunu qəbul edirik. Bu şərt daxilində ossilyatorun hərəkət tənliyi aşağıdakı kimi yazılır.

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{2e^2}{3c^3m}\dddot{\vec{r}} + e\frac{\vec{e}}{m}E_0e^{-i\omega t}.$$

Burada ω_0 ossilyatorun məxsusi tezliyidir.

Şüalanmanın sürtünmə qüvvəsini ardıcıl yaxınlaşma ilə nəzərə alaraq $\dddot{\vec{r}} \approx -\omega_0^2\dot{\vec{r}}$ yazırıq. İndi zərrəciyin hərəkət tənliyi

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} + \gamma\dot{\vec{r}} = \vec{e}\frac{e}{m}E_0e^{-i\omega t} \qquad (76.1)$$

olur. Burada $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$ (bax: §70).

Qeyd edək ki, elektromaqnit dalğasının bağlı yükdən (ossilyatordan) səpilməsi eynilə bu dalğanın sərbəst yükdən səpilməsinə uyğun şəkildə baş verir. Lakin indi $\ddot{\vec{r}}$-in ifadəsi əvvəlkindən bir qədər fərqli olacaqdır. Bizi indi (76.1) tənliyində xarici dalğanın təsiri altında ossilyatorun məcburi rəqsini xarakterizə edən xüsusi həlli maraqlandırır. Bu xüsusi həlli $\vec{r} = \vec{D}e^{-i\omega t}$ şəklində axtararaq (76.1) tənliyindən $\vec{D}$-ni təyin edək:

$$\vec{D} = \frac{\vec{e}\frac{e}{m}E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Onda məcburi rəqs edən elektronun radiusu

$$\vec{r} = \frac{e}{m}\cdot\frac{\vec{e}E_0e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \qquad (76.2)$$

olur. Xarici dalğanın təsiri altında ossilyatorun əldə etdiyi dipol momenti və onun törəməsi:

$$\vec{d} = e\vec{r} = e\vec{D}e^{-i\omega t}, \quad \ddot{\vec{d}} = -\omega^2e\vec{D}e^{-i\omega t}$$

olur. Elektromaqnit sahəsi və şüalanma enerjisi həqiqi olduğundan $\mathrm{Re}\,\ddot{\vec{d}}$-ni hesablayaq:

$$Re\ddot{\vec{d}} = -\frac{\omega^2 e^2 E_0 \vec{e}}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{76.3}$$

olar. İndi $\overline{dI} = \frac{\overline{[Re\ddot{\vec{d}}\vec{n}]^2}}{4\pi c^3} d\Omega$-nı və $\bar{J}_0 = \frac{c}{8\pi} E_0^2$-nı bir-birinə bölərək elektromaqnit dalğasının ossilyatordan səpilməsinin diferensial effektiv kəsiyini alırıq:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\bar{J}_0} = K r_0^2 \sin^2\theta d\Omega . \tag{76.4}$$

Burada $K = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$ ossilyatorun xarakteristikalarından asılı olan bir əmsaldır, $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ elektronun klassik radiusudur, θ düşən dalğanın polyarizasiyası vektoru ilə şüalanan dalğanın $\vec{n}$ yayılma istiqaməti arasındakı bucaqdır. (76.4) düsturu polyarizasiya edilmiş dalğanın ossilyatordan səpilməsinin diferensial effektiv kəsiyidir. Əgər düşən dalğa polyarizasiya olunmamışdırsa, onun səpilməsini hesablamaq üçün (76.4) düsturunda əvvəlki §-dan bildiyimiz $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\upsilon)$ yazmaq lazımdır:

$$d\sigma = K\frac{1}{2} r_0^2 (1+\cos^2\upsilon) d\Omega . \tag{76.5}$$

Effektiv kəsiklərin bucaqlardan asılılığı sərbəst elektrondan səpilmə halındakı kimidir. Bu iki düsturu bucaqlar üzrə inteqrallayaraq elektromaqnit dalğasının ossilyatordan səpilməsinin inteqral effektiv kəsiyini almış oluruq:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 K . \tag{76.6}$$

Biz K əmsalından istifadə edərək səpilmədə baş verən xüsusi halları araşdıra bilərik.

1. Əgər məxsusi tezlik və sönmə əmsalı sıfırdırsa, yəni $\omega_0 = \gamma = 0$ şərti ödənirsə K=1 olur və biz sərbəst zərrəcikdən səpilməni almış oluruq. Əgər çox böyük tezlikli dalğa səpilirsə yəni, $\omega >> \omega_0, \gamma$ olursa, biz

yenə də $K \approx 1$ alırıq.

2. Səpilmə tezliyi məxsusi tezliyə bərabərdirsə ($\omega = \omega_0$), yəni rezonans səpilməyə baxırıqsa, çox kəskin maksimum alırıq: $K = (\omega_0/\gamma)^2 >> 1$.

3. Kiçik tezlik oblastlarında, yəni $\omega << \omega_0$ olduqda səpilmənin tam kəsiyi tezliyin dördüncü dərəcəsi ilə mütənasib olur: $K = \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4$.

§77. Koherent və qeyri koherent səpilmə

İndi xətti polyarizasiya olunmuş müstəvi monoxromatik elektromaqnit dalğasının ossilyatorlar sistemi ilə qarşılıqlı təsirinə baxaq. Fərz edək ki, hər bir ossilyator digərlərindən asılı olmadan $\vec{r}_i$ radius vektoru ilə təyin olunan öz tarazlıq vəziyyəti ətrafında rəqs edir. Biz yenə də əvvəlki kimi düşən müstəvi dalğanı hər bir ossilyatorun rəqs etdiyi oblastda fəzaca bircins $\left(\dfrac{r}{\lambda} << 1\right)$ götürəcəyik, lakin ossilyatorlar arasındakı məsafəni bu dalğanın uzunluğuna nəzərən ixtiyari qəbul edəcəyik. Ona görə i nömrəli ossilyatora (zərrəciyə) təsir edən dalğanı $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k}_0\vec{r}_i - \omega t)}$ şəklində və ossilyatorun radiusunu

$$\vec{r}_i = \vec{D} e^{j(\vec{k}_0\vec{r}_i - \omega t)} \tag{77.1}$$

şəklində qəbul edəcəyik. Biz xəyali vahidi $j = \sqrt{-1}$ götürmüşük. Burada $\vec{D}$ bütün zərrəciklər üçün eyni olan rəqs amplitududur, $\vec{K}_0$ isə düşən dalğanın dalğa vektorudur. Əvvəlki §-da olduğu kimi harmonik rəqs edən ossilyator üçün

$$\vec{D} = \frac{e\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \tag{77.2}$$

götürəcəyik, lakin sərbəst zərrəcik üçün burada $\omega_0 = \gamma = 0$ yazmaq lazımdır.

Dalğa zonasında şüalanma sahəsinin (68.8′) düsturuna superpozisiya prinsipini tətbiq etməklə aşağıdakını yaza bilərik:

$$\vec{H}=\sum_i \frac{1}{c^2R_i}[e\ddot{\vec{r}}_i(t')\vec{n}]=-\sum_i \frac{\omega^2}{c^2R_i}[\vec{d}\vec{n}]e^{j\left(\vec{k}_0\vec{r}_i-\omega\left(t-\frac{R_i}{c}\right)\right)}. \qquad (77.3)$$

(68.8′) düsturunda $\ddot{\vec{d}}(\tau)\equiv\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{R_0}{c}\right)$ yazılmışdı. Lakin indi τ-nun əvəzində $t'=t-\frac{R_i}{c}$ götürülür. (77.3) ifadəsində $\vec{d}=e\vec{D}$-dir, $R_i=|\vec{r}-\vec{r}_i|$. Burada $\vec{r}$ sistemin daxilində hər hansı koordinat başlanğıcından hesablanır. Eksponentdə $R_i=r-\vec{n}\vec{r}_i$ və məxrəcdə $R_i=r$ yazaraq düsturun şəklini dəyişdirək:

$$\vec{H}=\frac{\omega^2[\vec{n}\vec{d}]}{c^2r}\sum_i e^{j\left(\vec{k}_0\vec{r}_i-\omega\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}_i\vec{n}}{c}\right)\right)}=\frac{\omega^2[\vec{n}\vec{d}]}{c^2r}e^{-j(\omega t-kr)}\sum_i e^{-j(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}_i}. \qquad (77.4)$$

Burada $\vec{k}-\vec{k}_0$ səpilmə zamanı dalğa vektorunun dəyişməsidir və onu $\vec{q}$ ilə işarə edəcəyik, $\vec{k}=\frac{\omega}{c}\vec{n}$ isə səpilən dalğanın dalğa vektorudur, $\vec{q}=\vec{k}-\vec{k}_0$.

Yuxarıdakı ifadədə $\vec{H}$ və $\vec{E}$ kompleks kəmiyyətlərdir, lakin sahə, onun şüalanma enerjisi, Poyntinq vektoru və s. ölçülən kəmiyyətlər həqiqidir. §59-da göstərilmişdir ki, məsələn $\vec{E}$ ilə $\vec{H}$-ı bir-birinə vurduqda (qeyri xətti əməliyyat) mütləq onların həqiqi hissələrini vurmaq lazımdır: $(\mathrm{Re}\vec{E}\cdot\mathrm{Re}\vec{H})$. Əgər bu hasil zamandan asılıdırsa, onu zamana görə ortalamaq lazımdır: $\overline{(\mathrm{Re}\vec{E}\cdot\mathrm{Re}\vec{H})}$. Bu əməliyyatda sadə bir qaydadan istifadə edilir. İki kompleks $\vec{A}=\vec{A}_0e^{-i\omega t}$ və $\vec{B}=\vec{B}_0e^{-i\omega t}$ kəmiyyətinin ($\vec{A}_0,\vec{B}_0$ həqiqidir) Re hissələrinin hasilinin zamana görə orta qiymətini hesablayaq:

$$\overline{\mathrm{Re}\vec{A}\cdot\mathrm{Re}\vec{B}}=\overline{\frac{1}{2}(\vec{A}_0e^{-i\omega t}+\vec{A}_0^*e^{i\omega t})\cdot\frac{1}{2}(\vec{B}_0e^{-i\omega t}+\vec{B}_0^*e^{i\omega t})}=$$

$$=\frac{1}{4}(\vec{A}_0\vec{B}_0^*+\vec{A}_0^*\vec{B}_0)=\frac{1}{2}(\vec{A}_0\vec{B}_0^*)\equiv\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{A}\vec{B}^*). \qquad (77.5)$$

Burada $\overline{e^{\pm 2i\omega t}}=0$ olduğu nəzərə alınmışdır.

Bu dediklərimizi (77.4) ifadəsində nəzərə alsaq ossilyatorlar sisteminin dipol şüalanmasının orta qiyməti üçün aşağıdakı düsturu alarıq.

$$\overline{dI} = \overline{\vec{J}d\vec{s}} = \frac{1}{2}\frac{\omega^4[\vec{n}\vec{d}][\vec{n}\vec{d}]^*}{4\pi c^3}\left|\sum_i e^{-j\vec{q}\vec{r}_i}\right|^2 d\Omega. \qquad (77.6)$$

Bu ifadəni Poyntinq vektorunun $\bar{J}_0 = \frac{c}{8\pi}E_0^2$ orta qiymətinə bölsək elektromaqnit dalğasının ossilyatorlar sistemindən səpilməsinin diferensial effektiv kəsiyi düsturunu alarıq:

$$d\sum = \frac{\overline{dI}}{\bar{J}_0} = Kr_0^2 \sin^2\theta d\Omega\left|\sum_i e^{-j\vec{q}\vec{r}_i}\right|^2 = d\sigma\cdot\left|\sum_i e^{-j\vec{q}\vec{r}_i}\right|^2. \qquad (77.7)$$

Burada $d\sigma = Kr_0^2\sin^2\theta d\Omega$ bir ossilyatordan səpilmənin diferensial kəsiyidir. $K = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$ vuruğu əvvəlki §-da verilmişdir. (77.7) düsturunda

$$F = \left|\sum_{i=1}^{N} e^{-j\vec{q}\vec{r}_i}\right|^2 \qquad (77.8)$$

əmsalı *koherentlik faktoru* adlanır və zərrəciklər sistemindən səpilmənin bir zərrəcikdən səpilmədən nə dərəcədə fərqləndiyini göstərir. Bu faktor zərrəciklər sisteminə verilən q impulsu ilə zərrəciklərin hərəkət etdiyi oblastın ölçüləri arasındakı münasibətdən kəskin asılıdır. Burada iki xüsusi halda konkret nəticə alınır. Bunları nəzərdən keçirək.

1. Fərz edək ki sistemə verilən impuls çox kiçikdir, yəni $|\vec{q}\vec{r}_i| << 1$ bütün zərrəciklər üçün doğrudur. Onda (77.8) düsturunda eksponentə vahid deyərək

$$F=N^2. \qquad (77.9)$$

alırıq. Burada N ossilyatorların, yəni düşən dalğanı səpən zərrəciklərin sayıdır. Bu tam koherent səpilmə halıdır. Burada hər zərrəcikdən gələn sahə eyni fazada toplanır, yəni rəqslərin amplitudları toplanır. Səpilmənin effektiv kəsiyi amplitudun kvadratı ilə mütənasibdir. Ona görə koherent səpilmədə effektiv kəsik zərrəciklər sayının kvadratı ilə mütənasibdir:

$$d\sum = N^2 d\sigma. \qquad (77.10)$$

$$|\vec{q}| = |\vec{k} - \vec{k}_0| = \frac{\omega}{c}|\vec{n} - \vec{n}^0| = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2 + n_0^2 - 2\vec{n}\vec{n}_0} = \frac{\omega}{c}\sqrt{2n^2 - 2\cos\theta \cdot n^2} =$$

$$= \frac{\omega}{c}\sqrt{2n^2 \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2k\sin\frac{\theta}{2}$$

olduğundan (77.10) düsturu θ səpilmə bucağının istənilən qiyməti üçün doğrudur.

2. Sistemə verilən q impulsu çox böyükdür: $|\vec{q}\vec{r}_i| >> 1$. İndi (77.8) düsturunu

$$F = \sum_{i=1}^{N} e^{j\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_i)} + \sum_{i \neq s} e^{-j\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_s)} = N + \sum_{i \neq s} e^{-j\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_s)} \tag{77.11}$$

şəklində yazırıq. Burada ikinci hədd yüklərin paylanmasından asılıdır. Əgər yüklər təsadüfi paylanmışdırsa, N-in çox böyük qiymətində eksponentlər bir-birini neytrallaşdırar və axırıncı cəm sıfır olar (məs., $\sum_{i \neq s} \cos\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_s)$ ifadəsində triqonometrik hədlər «+» və «–» qiymətlər alaraq bir-birini neytrallaşdırar). Onda

$$F = N \tag{77.12}$$

olar. Bu qeyri koherent səpilmədir. Bu səpilmədə dalğaların intensivlikləri toplanır. Qeyri koherent səpilmədə effektiv kəsik səpən zərrəciklərin sayı ilə mütənasibdir:

$$d\Sigma = N d\sigma. \tag{77.13}$$

§78. Relyativistik elektronun ümumi şəkildə diferensial şüalanma intensivliklərinin hesablanması

İxtiyari hərəkət edən relyativistik nöqtəvi e yükünün yaratdığı sahənin intensivlik vektorları (64.5) və (64.6) düsturları ilə təsvir edilir. Vahid $\vec{n} = \dfrac{\vec{R}(t')}{R(t')}$ vektoru daxil etməklə bu düsturları yığcam şəkildə aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\vec{E}(\vec{R}_0, t) = \frac{e}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^3 R^2(t')} \times$$

bu işarə vurma işarəsidir. yəni vurulsa arda səh yoxdadır

$$\times\left\{\frac{R(t')}{c}[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]+(1-\beta^2)(\vec{n}-\vec{\beta})\right\}_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}=\vec{E}_1+\vec{E}_2, \qquad (78.1)$$

$$\vec{H}(\vec{R}_0,t)=\left[\vec{n}\vec{E}\right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}=\vec{H}_1+\vec{H}_2 .$$

Burada $\vec{r}(t')$ şüalanma anında zərrəciyin radius vektorudur, $R(t')=$ $=\left|\vec{R}_0-\vec{r}(t')\right|=\sqrt{(x_0-x(t'))^2+(y_0-y(t'))^2+(z_0-z(t'))^2}$ – nöqtəvi yükdən müşahidə nöqtəsinə qədər olan məsafədir. $\vec{R}_0$ – müşahidə nöqtəsinin radius vektorudur, $\vec{\upsilon}(t')$ və $\dot{\vec{\upsilon}}(t')$ yüklü zərrəciyin sürəti və təcilidir, $\vec{\beta}=\frac{\vec{\upsilon}}{c}, \dot{\vec{\beta}}=\frac{\dot{\vec{\upsilon}}}{c}, \vec{n}=\frac{\vec{R}(t')}{R(t')}$ – yüklü zərrəciyin yerləşdiyi nöqtədən müşahidə nöqtəsinə yönəlmiş vahid vektordur, t – müşahidə anıdır, t' isə şüalanma anıdır.

(78.1) düsturunun sağ tərəfində yerləşmiş bütün kəmiyyətlər $t'=t-\frac{R(t')}{c}$ şüalanma zamanı anında götürülür. Şüalanma zamanına gecikmə zamanı da deyilir.

(78.1) düsturundan görünür ki, $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları ortoqonaldır və hər biri iki hissədən ibarətdir. Məsələn, $\vec{E}_1$ təcildən (həm də sürətdən) asılıdır və buna təcilli hissə deyilir, $\vec{E}_2$ isə yalnız sürətdən asılıdır və bu sürətli hissə adlanır. Təcilli sahə müstəvi elektromaqnit dalğası kimi eninə sahədir:

$$\vec{E}_1=\frac{e}{cR}\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^3}, \vec{H}_1=[\vec{n}\vec{E}_1], (\vec{n}\vec{E}_1)=(\vec{n}\vec{H}_1)=0 \qquad (78.2)$$

və bu məsafəyə görə $E_1\sim\dot{\beta}/R$ kimi azalır. Bu sahəni adətən şüalanma sahəsi hesab edirlər. Bu sahənin enerji seli R-dən asılı deyildir. Bu o deməkdir ki, həmin sahə onu yaradan yükdən ayrılaraq fəzada yayılır. Sürətli sahə kvazistasionar xarakter daşıyır, yüklə birlikdə hərəkət edir və məsafəyə görə $E_2\sim\frac{1}{R^2}$ şəklində sönür.

Şüalanma enerjisini hesablayarkən biz yalnız E_1-dən istifadə edəcəyik. (78.1) düsturuna qayıdaraq onu analiz etsək, görərik ki, təcilə malik şüalanma enerjisi böyük məsafələrdə, yəni

$$R >> \frac{1-\beta^2}{\dot{v}} c^2 \tag{78.3}$$

olduqda sırf müstəvi dalğa xarakterlidir. (78.3) ifadəsi dalğa zonası adlanır. Bu ifadə əvvəllər bildiyimiz dalğa zonasından ($R >> \lambda >> a$) bir qədər fərqlənir.

Relyativistik zərrəciyin şüalanma enerjisini ətraflı tədqiq etmək üçün ixtiyari təcillə hərəkət edən nöqtəvi relyativistik yükün şüalanma gücünü hesablamaq lazımdır. Şüalanma enerjisi selinin ani sıxlığı, yəni vahid səthdən vahid zamanda şüalanan enerji Umov-Poyntinq vektoru ilə təyin edilir:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_1\vec{H}_1\right] = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_1^2\vec{n}. \tag{78.4}$$

İndi şüalanmanın diferensial intensivliyini, yəni vahid zamanda $d\vec{s}$ səth elementindən şüalanan (keçən) enerjinin miqdarını hesablaya bilərik:

$$dI = \vec{J}\overrightarrow{ds} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_1^2\vec{n}d\vec{s}. \tag{78.5}$$

Burada iki növ vahid zaman anlayışı mövcuddur: vahid müşahidə zamanı və vahid gecikmə zamanı. Bu zamanlar müxtəlifdir, lakin onlar arasında mühüm əlaqə vardır (bax §64):

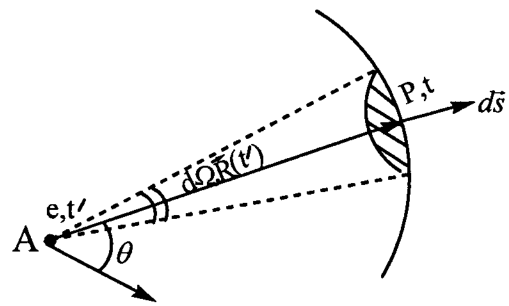
$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1-\vec{\beta}\vec{n}}. \tag{78.6}$$

Fərz edək ki, e yüklü elektron A nöqtəsində t' anında şüa (elektromaqnit dalğası) buraxır və P müşahidə nöqtəsinə bu şüa t anında çatır. Elektronun t' anındakı vəziyyətinə aid şüalanma diaqramını (şəkil 78.1) çəkək. Elektron böyük $R(t')$ radiuslu sfera boyunca şüalanır və bu sferanın P nöqtəsində səth elementinə $d\vec{s} = R^2(t')d\Omega\vec{n}$ deyək. $\vec{n}$ şüalanma istiqaməti ilə zərrəciyin $\vec{\upsilon}$ sürəti arasındakı polyar bucağı θ ilə işarə etsək $d\vec{s}$ səth elementinin $d\Omega$ cisim bucağı $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ olar. İndi (78.5) düsturunu

$$dI = \frac{c}{4\pi}E_1^2R^2(t')d\Omega \tag{78.5'}$$

şəklində yazırıq. Burada dI vahid müşahidə zamanında $d\vec{s}$ səth elementindən və ya $d\Omega$ cisim bucağı daxilində şüalanan elektromaqnit sahəsi enerjisidir. Vahid müşahidə zamanında vahid cisim bucağı daxilində şüalanan enerjinin miqdarına *şüalanma intensivliyi sıxlığı* deyilir.

$$I_{\text{sıx}}(t)=\frac{dI}{d\Omega}=\frac{c}{4\pi}E_1^2R(t')^2. \qquad (78.6)$$



Şəkil **78.1**

Bu enerjini şüalandıran ixtiyari sürət və təcillə hərəkət edən relyativistik elektrondur. Onun tam enerjisini ε ilə işarə etsək, enerjinin saxlanması qanununa əsasən (78.6)-nı belə yaza bilərik:

$$I_{\text{sıx}}(t)=-\frac{d^2\varepsilon}{d\Omega dt}=\frac{c}{4\pi}E_1^2R(t')^2. \qquad (78.6')$$

İndi vahid gecikmə zamanında vahid cisim bucağı daxilində şüalanan enerjinin miqdarına şüalanma intensivliyinin gecikmə sıxlığı desək

$$I_{\text{sıx}}(t')=-\frac{d^2\varepsilon}{d\Omega dt'}=-\frac{d^2\varepsilon}{d\Omega dt}\frac{dt}{dt'}=I_{\text{sıx}}(t)\frac{dt}{dt'}=I_{\text{sıx}}(t)(1-\vec{\beta}\vec{n}) \qquad (78.7)$$

alarıq. Beləliklə müxtəlif zamanlar üçün şüalanma intensivliyi sıxlıqlarının

$$I_{\text{sıx}}(t)=\frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]^2}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^6}, \qquad (78.8)$$

$$I_{\text{sıx}}(t')=(1-\vec{\beta}\vec{n})I_{\text{sıx}}(t)=\frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]^2}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^5} \qquad (78.9)$$

ifadələrini alırıq. Biz bu intensivliklər haqqında sonrakı §-larda geniş danışacağıq. İndi isə onu deyə bilərik ki, bu sıxlıqlar şüalanma enerjisinin bucaqlara görə diferensial paylanmasını ümumi halda ifadə edir, mürəkkəb şəklə malikdir, lakin paylanmada mühüm əlaməti aşkar göstərir. Burada şüalanma intensivliyi sıxlıqlarının ixtiyari istiqamətə yönəlmiş $\vec{\beta}$, $\dot{\vec{\beta}}$, və $\vec{n}$ vektorları arasındakı bucaqlardan və zərrəciyin enerjisindən asılılığı ümumi halda, lakin yığcam şəkildə göstərilmişdir. Şüalanma intensivliyi sıxlıqlarının bucaqlardan asılılığı bir-birinə oxşardır və onlar yalnız məxrəcdə $(1-\vec{\beta}\vec{n})$ vuruğunun üstünə görə fərqlənir. Gələcəkdə görəcəyik ki, bu fərq inteqral intensivliklərdə çox böyük dəyişikliyə səbəb olur.

XI FƏSİL
İXTİYARİ HƏRƏKƏT EDƏN RELYATİVİSTİK ELEKTRONUN ŞÜALANMASI

Biz ixtiyari sürətə və təcilə malik relyativistik elektronun müxtəlif şüalanma halları ilə məşğul olacağıq. Burada söhbət elektrondan getdiyinə baxmayaraq, elektron sözü altından istənilən nöqtəvi yüklü zərrəciyi (μ-mezon, τ-mezon, π-mezon, proton və s.) başa düşə bilərik. Sürətlənmiş elektronların, pozitronların, müyonların və digər yüklü zərrəciklərin klassik şüalanma nəzəriyyəsi böyük tətbiq sahəsinə malikdir, fiziki cəhətdən əyanidir və çox hallarda düzgün, əhəmiyyətli nəticələrə gətirir. Əlbəttə şüalanmanın kvant nəzəriyyəsi klassik nəzəriyyə ilə alınmış düsturlarda müəyyən əlavələrə səbəb olur və bunu həmişə nəzərə almaq lazımdır.

§79. Zərrəciyin təcili surətə paralel olduqda şüalanma intensivliyinin araşdırılması. Larmor düsturu

Aldığımız (78.8) və (78.9) düsturlarının ümumi halda tədqiqini biz sonrakı §-da aparacağıq. İndi isə çox sadə xüsusi hala nəzər salaq. Fərz edək ki, yüksək enerjili sürətlənmiş zərrəciyin təcili onun sürətinə paraleldir, yəni zərrəcik boyuna sürətlənmişdir: $\dot{\vec{\beta}} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$. Təbiətdə bu çox təsadüf olunan haldır və böyük sürətləndiricilərdə yüklü zərrəcikləri adətən bu üsulla sürətləndirilər. Bu zaman (78.8) və (78.9) düsturlarında $[\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}] = 0$ olur və onlar çox sadələşir. Məsələn,

$$I_{\text{şüa}}(t) = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\vec{n}[\vec{n}\dot{\vec{\beta}}]]^2}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^6} \tag{79.1}$$

olur. Burada $[\vec{a}\vec{b}]^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ düsturundan istifadə edərək (79.1) ifadəsini çox asan hesablayırıq. Əgər $\vec{\beta}$ ilə $\vec{n}$ arasında kı polyar bucağa θ desək, $I_{\text{şüa}}(t)$ kəmiyyəti aşağıdakı şəklə düşər:

$$I_{\text{şüa}}(t) = \frac{e^2\dot{\upsilon}^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6} \equiv \frac{dI(t)}{d\Omega}. \tag{79.1'}$$

Düsturdan göründüyü kimi, bu şüalanmanın xarakterik cəhəti odur ki, məxrəcin hesabına böyük enerjili elektronlar ($\beta \to 1$) hərəkət istiqaməti ilə kiçik bucaq altında ($\theta << 1$) şüalanır. Qeyd edək ki, böyük sürətli elektronların tormozlanma şüalanması da bu şəkildə baş verir. İndi (79.1′) düsturundan törəmə alaraq şüalanmanın baş verdiyi maksimum və minimum istiqamətləri müəyyən edək:

$$2\beta \cos^2 \theta + \cos\theta - 3\beta = 0 . \tag{79.2}$$

Tənliyin həlli şüalanmanın maksimum və minimum olduğu istiqamətləri təyin edir:

$$\cos\theta = \frac{1}{4\beta}(\sqrt{1+24\beta^2} - 1) . \tag{79.2′}$$

Böyük sürətli elektronun şüalanmasına baxırıqsa (79.2) tənliyində $\beta \to 1$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ yazaraq, maksimum şüalanma bucağını tapırıq:

$$\theta_{max} = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{5}} . \tag{79.2″}$$

(79.1′) düsturundan görünür ki, $\theta=0$ –da şüalanma intensivliyi sıfıra çevrilir. Digər tərəfdən şüalanma intensivliyi yalnız polyar bucaqdan asılıdır və deməli o, azimut bucağına görə fırlanma simmetriyasına malikdir. Biz şüalanma intensivliyi sıxlığının vektor diaqramını və ya istiqamətlənmə diaqramını quranda bunlardan istifadə edəcəyik.

Əgər elektron qeyri relyativistikdirsə ($\beta \to 0$), onun maksimum şüalanma istiqamətini tapmaq üçün (79.2) tənliyində birinci hədd kiçik olduğuna görə onu atırlar. Onda

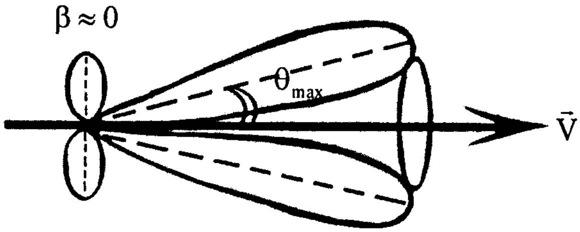
$$\cos\theta = 3\beta \quad \text{və ya} \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 3\beta \quad \text{və nəhayət} \quad \theta = \frac{\pi}{2} - 3\beta \to \frac{\pi}{2} \tag{79.2‴}$$

alırıq. Bu zaman maksimum şüalanma zərrəciyin sürətinə (təcilinə) perpendikulyar istiqamətdə baş verir. Beləliklə biz bir zərrəcik üçün dipol şüalanması şərtini almış oluruq. (79.1′) düsturunda $\beta \approx 0$ şərtini nəzərə alsaq

$$I_{six}^{q/r}(t) = \frac{e^2 \dot{\upsilon}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta \tag{79.1″}$$

olur. Bu bir zərrəcik üçün dipol şüalanması intensivliyinin sıxlığıdır.

İndi (79.1′) və (79.1″) düsturlarından istifadə edərək adsız $I_{\text{şıx}} : \dfrac{e^2\dot{\upsilon}^2}{4\pi c^3}$ kəmiyyəti üçün istiqamətlənmə diaqramlarını qura bilərik (bax: §68). Relyativistik və qeyri-relyativistik zərrəciyin şüalanması üçün istiqamətlənmə diaqramları şəkil 79.1-də göstərilmişdir.



Şəkil **79.1**

Bu əyrilər nisbi vahidlərdə şüalanma enerjisinin bucaqlardan asılı qiymətini müəyyən edir. Əyrilər $\vec{v}$ oxu ətrafında fırlanma simmetriyasına malikdir. Böyük enerjili elektronların sinxrotron və tormozlanma şüalanmaları da buna oxşar «iynəşəkilli» əyrilərlə təsvir olunur.

Qeyri-relyativistik halda $\dfrac{dt'}{dt} = 1$ olduğundan qeyri relyativistik elektronun t və t′ vahid zaman anları üçün hesablanmış şüalanma intensivliyi sıxlıqları eyni bir (79.1″) düsturu ilə təsvir olunur. Bu düsturu $d\Omega$ cisim bucağı üzrə inteqrallayaraq şüalanmanın inteqral intensivliyini alırıq (bax §68):

$$I = \int I_{\text{şıx}} d\Omega = \frac{e^2\dot{\upsilon}^2}{4\pi c^3} \int \sin^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{e^2\dot{\upsilon}^2}{4\pi c^3}\frac{8\pi}{3} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\upsilon}^2. \quad (79.3)$$

Bu düstur qeyri-relyativistik elektronun vahid zamanda bütün istiqamətlərdə şüalandırdığı enerjini ifadə edir. Ədəbiyyata bu *Larmor düsturu* adlanır. Bu düstur qeyri-relyativistik şəkildə yazılmışdır. Lakin onu relyativistik şəkildə də yazmaq olar. Məlumdur ki, elektromaqnit şüalanma enerjisi Lorens çevrilməsində özünü 4-ölçülü enerji-impuls vektorunun 4-cü komponenti kimi aparır (bax: §41). Onda dt zamanı ərzində şüalanma enerjisini $d\varepsilon_{\text{şüa}}$ ilə işarə etsək

$$d\varepsilon_{\text{şüa}} = Idt \tag{79.4}$$

olar. Buradan görünür ki, şüalanmanın I inteqral intensivliyi relyativistik invariantdır. Əgər biz I üçün elə bir relyativistik ifadə tapa bilsək ki, o $\beta<<1$ olduqda (79.3) ifadəsinə bərabər olsun, onda məsələ həll edilmiş olur. Belə relyativistik ifadədə $\frac{\dot{\upsilon}^2}{c^4}$ vuruğunun yerində 4-ölçülü təcilin kvadratı, yəni $W_\mu^2 = \left(\frac{dU_\mu}{ds}\right)^2$ yazılmalıdır. Əlbəttə bu seçimdə müəyyən mülahizələrdən və bəzi nəticələrin əvvəlcədən məlum olmasından istifadə edilmişdir. Qeyd edək ki, bizdə 4-ölçülü sürətin dimenzionu (bax: §15) $[U_\mu] = \left[\frac{dx}{ds}\right] = \left[\frac{v}{c}\right]$ - dir, yəni adsızdır və interval isə $ds = \sqrt{1-\beta^2}cdt$ -dir. Onda 4-ölçülü təcilin dimenzionu $[W_\mu] = \left[\frac{dU_\mu}{ds}\right] = \left[\frac{\dot{v}}{c^2}\right]$ olacaqdır. İndi (79.3) düsturunun relyativistik invariant şəklini yazaq:

$$I_{Lar} = \frac{2e^2c}{3}\left(\frac{dU_\mu}{ds}\right)^2. \tag{79.5}$$

Bu Larmor düsturunun relyativistik şəklidir. Düstura 4-ölçülü $P_\mu = mcU_\mu$ impulsunu daxil etməklə onu başqa şəkildə yazmaq olar:

$$I_{Lar} = \frac{2e^2}{3m^2c}\left(\frac{dP_\mu}{ds}\right)^2. \tag{79.5'}$$

Verilmiş xarici qüvvənin (yəni $\frac{dP_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}U_\nu$ – nin) təsiri altında şüalanma intensivliyi sürətlənən zərrəciyin kütləsinin kvadratı ilə tərs mütənasibdir. Belə şüalanmalarda yüngül zərrəciklər (elektronlar) mühüm rol oynayır. (79.5) düsturunu aşkar yazmaq üçün U_μ və $\frac{dU_\mu}{ds}$-in ifadələrini açıq yazaq. §15-dən istifadə edərək yazırıq:

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dx_\mu}{c\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}, i\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\};$$

$$\frac{dU_\mu}{ds}=\frac{1}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}},i\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{c^2\sqrt{1-\beta^2}^{\,4}}\left\{\dot{\vec{\upsilon}}(1-\beta^2)+\frac{(\vec{\upsilon}\dot{\vec{\upsilon}})\vec{\upsilon}}{c^2},i\frac{(\vec{\upsilon}\dot{\vec{\upsilon}})}{c}\right\};$$

$$\left(\frac{dU_\mu}{ds}\right)^2=\frac{1}{c^2(1-\beta^2)^4}\{(\dot{\vec{\beta}}(1-\beta^2)+(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})\vec{\beta})^2-(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})^2\}=$$

$$=\frac{1}{c^2(1-\beta^2)^3}\{\dot{\beta}^2-\dot{\beta}^2\beta^2+(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})^2\}=\frac{1}{c^2(1-\beta^2)^3}\{\dot{\vec{\beta}}^2-[\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}]^2\}. \quad (79.6)$$

İndi Larmor düsturu aşağıdakı şəklə malik olur:

$$I_{Lar}=\frac{2e^2}{3c}\frac{1}{(1-\beta^2)^3}\{\dot{\vec{\beta}}^2-[\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}}]^2\}. \quad (79.5'')$$

Biz gələcəkdə müxtəlif şüalanma intensivliklərini daha dəqiq hesablama yolu ilə alacağıq.

İndi isə müqayisə üçün boyuna sürətlənmə halında vahid gecikmə zamanı üçün şüalanma intensivliyi sıxlığının istiqamətlənmə diaqramına aid düsturları yazaq. Məsələn (79.1′) düsturu əvəzində

$$I_{sıx}(t')=\frac{e^2\dot{\upsilon}^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\equiv\frac{dI(t')}{d\Omega} \quad (79.7)$$

düsturunu alırıq. Maksimum şüalanma istiqaməti üçün

$$3\beta\cos^2\theta+2\cos\theta-5\beta=0 \quad (79.8)$$

tənliyi və onun

$$\cos\theta=\frac{1}{3\beta}(\sqrt{1+15\beta^2}-1) \quad (79.8')$$

həllini tapırıq. Böyük enerjili zərrəciklər üçün ($\beta\to1$) maksimum şüalanma bucağının qiyməti

$$\theta_{max}=\sqrt{\frac{1-\beta^2}{4}} \quad (79.8'')$$

olur. Bu düsturlar şüalanmanın istiqamətlənməsi üçün əvvəl aldığımız düsturlara çox yaxındır və deməli hər iki intensivlik üçün şüalanmanın istiqamətlənməsi əyriləri (səthləri) bir-birinə oxşardır.

§80. Relyativistik və ultra relyativistik elektronun vahid gecikmə zamanında tam şüalanma intensivliyinin ümumi ifadəsi*

Biz §78-də ixtiyari hərəkət edən relyativistik zərrəciyin vahid gecikmə zamanında şüalanma intensivliyinin sıxlığı üçün aşağıdakı ifadəni almışdıq (bax: §78, (78.9)):

$$I_{sıx}(t') = \frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{\left[\vec{n}\left[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\right]\right]^2}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^5}. \qquad (80.1)$$

Bu düstur $\vec{n},\vec{\beta}$ və $\dot{\vec{\beta}}$ vektorlarının ixtiyari yönəldiyi halda şüalanma intensivliyinin bucaqlara görə tam paylanmasını təsvir edir. Bu paylanma mürəkkəb olduğundan əksər müəlliflər hesablamanı sadələşdirmək üçün aşağıdakı iki xüsusi halı tədqiq ediblər:

1) $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\dot{\vec{\beta}}$ və 2) $\vec{\beta}\perp\dot{\vec{\beta}}$. Bu zaman (80.1) düsturu çox sadələşir. Lakin şüalanmanın bucaqlara və enerjiyə görə paylanmasını tam təhlil etmək üçün $\vec{n}$, $\dot{\vec{\beta}}$, $\vec{\beta}$ vektorlarının ixtiyari olduğu ümumi hala baxmaq lazımdır.

Yuxarıdakı düsturda ikiqat vektori hasili acaraq, onu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$I_{sıx}(t') = \frac{e^2}{4\pi c(1-\vec{\beta}\vec{n})^5}\times$$

$$\times\{(1-\vec{\beta}\vec{n})^2\dot{\vec{\beta}}^2 + 2(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})(\vec{n}\dot{\vec{\beta}})(1-\vec{\beta}\vec{n}) - (1-\beta^2)(\vec{n}\dot{\vec{\beta}})^2\}. \qquad (80.1')$$

Bucaqlara görə asılılığı tədqiq etmək üçün $\vec{\beta}$ vektoru polyar oxu boyunca yönəlmiş sferik koordinat sistemindən istifadə etmək daha əlverişlidir (şəkil 80.1).

Vektorların yuxarıda iştirak edən skalyar hasillərini acıq yazaq:

$$\vec{\beta}\vec{n} = \beta\cos\theta,\ \vec{\beta}\dot{\vec{\beta}} = \beta\dot{\beta}\cos\theta',\ \vec{n}\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta}(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'))$$

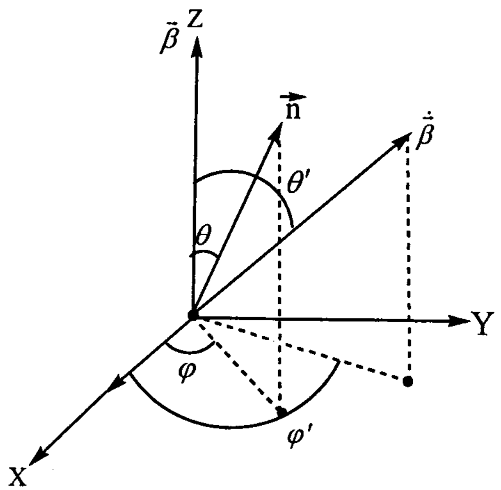
İndi diferensial intensivliyin bucaqlardan aşkar asılılığı aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$dI(t') = I_{sıx}(t')d\Omega = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} + \right.$$

*И.М. Наджафов, Г.Н. Кулиева, Bakı Universitetinin xəbərləri, Fiziki-riyaziyyat elmləri seriyası, 2004, № 1, s.109.

$$+2\beta\cos\theta'\frac{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')}{(1-\beta\cos\theta)^4}-$$

$$-\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^5}\left[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\right]^2\Bigg\}d\Omega. \qquad (80.2)$$



Şəkil **80.1**

Yuxarıda fiqurlu mötərizədəki adsız funksiyanı $f(\theta,\theta',\varphi,\varphi')$ ilə işarə edərək (80.2) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$dI(t')=\frac{e^2\dot\beta^2}{4\pi c}f(\theta,\theta',\varphi,\varphi')d\Omega. \qquad (80.2')$$

$f(\theta,\theta',\varphi,\varphi')$ funksiyası şüalanmanın bucaqlara görə tam paylanmasını təsvir edir.

Əgər f-ə sferik koordinat kimi baxsaq, onda $f(\theta,\theta',\varphi,\varphi')$ asılılığı verilmiş koordinat sistemində həndəsi olaraq hər hansı səthi təsvir edəcəkdir. Bu səthə *şüalanmanın indikratrisası* deyilir.

Ümumi $f(\theta,\theta',\varphi,\varphi')$ funksiyasında xüsusi hallara keçsək, yəni 1) $\theta'=0, \varphi'=0$ və 2) $\theta'=\frac{\pi}{2}, \varphi'=0$ yazsaq, biz boyuna (uzununa) sürətlənmiş və eninə sürətlənmiş elektronun şüalanma intensivliyinin bucaqlara görə paylanma düsturlarını alarıq:

$$f_{II}=\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad f_{\perp}=\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1-\frac{(1-\beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]. \qquad (80.3)$$

Bu hallardan birincisini biz §79-da tədqiq etmişik.

İndi bu xüsusi hallarla məşğul olmayaraq istənilən sürət və təcilə malik elektronun ümumi halda şüalanmasının inteqral intensivliyini hesablayacağıq. (80.2) düsturunda əvvəlcə φ-yə görə inteqrallama apararaq ifadəni sadələşdiririk. Məlumdur ki,

$$\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\varphi')d\varphi=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi-\varphi')d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos 2(\varphi-\varphi')]d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\pi.$$

Bu əməliyyatı (80.2) düsturunda aparsaq, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$I(t')=\frac{e^2\dot\beta^2}{2c}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}+\frac{2\beta\cos^2\theta'\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4}-\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^5}\left[\cos^2\theta'\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta'\sin^2\theta\right]\right\}. \qquad (80.4)$$

Burada aşağıdakı sadə inteqrallar iştirak edir:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^m},\ m=3,4,5. \qquad (80.5)$$

Bu inteqralları ən sadə üsulla açsaq

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^m}=\int_0^{\pi}\frac{-d\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^m}=\frac{1}{\beta}\int\frac{d(1-\beta\cos\theta)}{(1-\beta\cos\theta)^m}=$$
$$=\frac{-1}{\beta(m-1)}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^{m-1}}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}=\frac{1}{\beta(m-1)}\left(\frac{1}{(1-\beta)^{m-1}}-\frac{1}{(1+\beta)^{m-1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\beta(m-1)}\cdot\frac{(1+\beta)^{m-1}-(1-\beta)^{m-1}}{(1-\beta^2)^{m-1}} \qquad (80.6)$$

alarıq. Bu ifadələri (80.4) düsturunda nəzərə alırıq. Məlumat üçün (80.4) düsturunda iştirak edən 4 ədəd toplananın inteqralının ifadəsini veririk.

$$i_1=\frac{2}{(1-\beta^2)^2},\ i_2=\frac{16\beta^2\cos^2\theta'}{3(1-\beta^2)^3},\ i_3=-\frac{2\cos^2\theta'}{3(1-\beta^2)^3}(1+5\beta^2),\ i_4=-\frac{2\sin^2\theta'}{3(1-\beta^2)^2}.$$

Bunları toplayaraq sadələşdirsək relyativistik zərrəciyin şüalanmasının inteqral intensivliyi üçün çox sadə düstur alarıq:

$$I(t') = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{2c}(i_1 + i_2 + i_3 + i_4) = \frac{2e^2\dot{\beta}^2}{3c(1-\beta^2)^3}(1 - \beta^2 \sin^2\theta'). \qquad (80.7)$$

Bu relyativistik nöqtəvi yükün vahid gecikmə zamanında şüalandırdığı inteqral intensivliyin ən ümumi düsturudur. Burada zərrəciyin təcili onun sürətilə istənilən θ' bucağı əmələ gətirir. Bu düstur çox böyük tətbiq edilmə oblastına malikdir. Onu maqnit sahəsində dairəvi hərəkət edən elektronların sinxrotron şüalanmasına, elektronların nüvə sahəsində tormozlanma şüalanmasına və digər şüalanmalara tətbiq etmək olar. Burada klassik dəqiq ifadə almaq üçün elektronun təcilinin zamandan nə şəkildə asılı olmasını bilməliyik. (80.7) düsturunda θ' bucağına müxtəlif qiymətlər, məsələn $\theta' = 0^0; \frac{\pi}{2}$ və s. verməklə digər müəlliflərin aldığı nəticələri xüsusi hal kimi ala bilərik.

Bizim düsturumuzda $\theta' = \frac{\pi}{2}$ yazaraq, maqnit sahəsində hər hansı a radiuslu çevrə boyunca hərəkət edən relyativistik elektronun sinxrotron şüalanmasının tam inteqral intensivliyini ala bilərik. Doğrudan da $\dot{\beta} = \frac{1}{c}\frac{\upsilon^2}{a}$ və $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ olduğunu nəzərə alsaq və elektronun relyativistik $\frac{\varepsilon}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ enerjisindən istifadə etsək (80.7) düsturu aşağıdakı şəklə düşər:

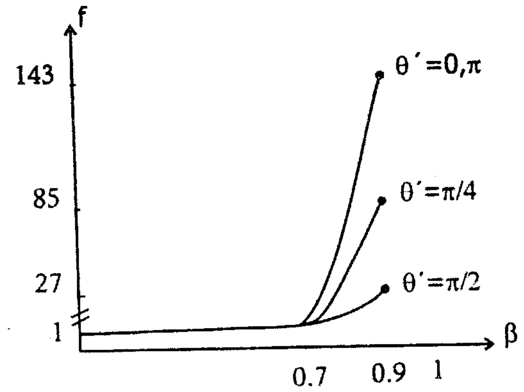
$$I(t') = \frac{2e^2c\beta^4}{3(1-\beta^2)^2a^2} = \frac{2e^2c\beta^4}{3a^2}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^4. \qquad (80.8)$$

Bu düstur relyativistik elektronun sinxrotron şüalanması enerjinin tam ifadəsidir.*

Biz gələcəkdə elektronun təcili ilə sürəti aşağıdakı θ' bucağına şərti olaraq elektronun «səpilmə» bucağı deyəcəyik. (80.7) düsturundan istifadə edərək illüstrasiya xatirinə sabit təcillə ($\dot{\beta} = \text{const}$) hərəkət edən elektronun fiksə olunmuş müxtəlif θ' «səpilmə» bucaqları üçün inteqral şüalanma intensivliyinin enerjidən (sürətdən) asılılığı tədqiq edilmişdir. Şəkil 80.2-də təsvir olunan qrafiklər θ' bucağının aşağıdakı qiymətləri-

---

*А.Соколов, И.Тернов, В. Жуковский, А. Борисов. Квантовая электродинамика, Издательство МГУ, 1983. Д. Иваненко, А. Соколов. Классическая теория поля, М-Л, 1951 nə uyğundur: 1) $\theta' = 0^0$ və π; 2) $\theta' = \frac{\pi}{4}$; 3) $\theta' = \frac{\pi}{2}$.



Şəkil **80.2.** $f = I(t')/b$ nisbi şüalanma intensivliyinin elektronun enerjisi və «səpilmə» bucağından asılılığı.

Ordinat oxu üzrə inteqral şüalanma intensivliyinin nisbi qiyməti, yəni $f = \frac{I(t')}{b}$ $\left(b = \frac{2e^2\dot{\beta}^2}{3c}\right)$, absis oxu üzrə $\beta = \frac{\upsilon}{c}$ kəmiyyəti göstərilmişdir. Əyrilərdən görünür ki, inteqral şüalanma intensivliyi səpilmə bucağının kiçik qiymətində ($\theta' = 0^0$) ən böyük qiymətə malikdir. Bucaq artdıqca inteqral intensivlik azalır. Elektronun nisbi sürətinin $\beta = 0{,}9$ qiymətində «səpilmə» bucağının seçilmiş 3 qiyməti üçün inteqral şüalanma intensivliyinin nisbi qiymətləri 27; 85; 143 olmuşdur. β vahidə yaxınlaşdıqca intensivlik əyriləri böyük sürətə artır.

§81. Vahid müşahidə və vahid gecikmə zamanlarında inteqral şüalanma intensivliklərinin müqayisəsi

Əvvəlcə vahid müşahidə zamanı üçün ixtiyari sürət və təcilə malik relyativistik zərrəciyin şüalanma intensivliyi, onun bucaqlardan asılılığı və inteqral intensivliyi ilə məşğul olaq. Bu intensivliyin sıxlığı üçün də ifadə §78- də verilmişdir (bax: §78, (78.8)):

$$I_{sıx}(t) = \frac{dI(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{\left[\vec{n}\left[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\right]\right]^2}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^6}. \qquad (81\ 1)$$

Bu ifadənin $I_{\text{şıx}}(t')$-dən fərqi məxrəcdə $(1-\vec{\beta}\vec{n})$ vuruğunun üstünün vahid qədər artıq olmasıdır (bax: (80.1)). İfadələrin surətləri tamamilə eynidir. Məxrəcdə vuruğun üstünün artıqlığı bütün ifadələrdə eyni şəkildə davam edəcəkdir. Məsələn, (81.1)-dən diferensial şüalanma intensivliyini təyin etsək, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$dI(t) = I_{\text{şıx}}(t)d\Omega = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\cdot\frac{f(\theta,\theta';\varphi,\varphi')}{(1-\vec{\beta}\vec{n})}d\Omega = \frac{dI(t')}{(1-\vec{\beta}\vec{n})}. \qquad (81.2)$$

Burada $f(\theta,\theta';\varphi,\varphi')$ funksiyasının ifadəsi (80.2) və (80.2′) düsturlarında verilmişdir. $dI(t)$ kəmiyyətinin bucaqlardan asılılığı $dI(t')$ intensivliyinin bucaqlara görə paylanmasından mürəkkəbdir. Lakin biz burada bucaqlara görə paylanmanı araşdırmadan ixtiyari hərəkət edən relyativistik elektronun ən ümumi halda inteqral şüalanması ilə məşğul olacağıq. Bucaqlara görə inteqrallama tamamilə §80-da olduğu kimi aparılır. (81.2) düsturunda əvvəlcə inteqrallamanı φ bucağına görə aparırıq. Bundan sonra (81.2) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

$$I(t') = \frac{e^2\dot{\beta}^2}{2c}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta\cos\theta)}\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} + \frac{2\beta\cos^2\theta'\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^5}\times\left[\cos^2\theta'\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta'\sin^2\theta\right]\right\}. \qquad (81.3)$$

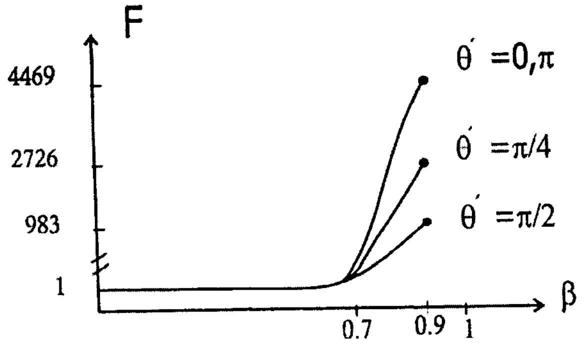
Bu ifadə (80.4) düsturundan yalnız məxrəcdəki $(1-\beta\cos\theta)$ vuruğunun üstünün vahid qədər artıq olması ilə fərqlənir. (81.3) düsturunda iştirak edən sadə inteqrallar elə (80.4)-də iştirak edən (80.5) inteqrallarıdır, lakin indi m= 4, 5, 6, qiymətlərini alır. Bu inteqrallardan istifadə edərək (81.3) düsturundakı bütün inteqralları hesablayır və alınmış ifadəni sadələşdiririk. Bu sadələşdirmə əməliyyatı bir qədər uzun vaxt tələb edir, lakin son nəticə qənaətbəxş olur. Beləliklə (81.3) düsturu bütün hesablamalardan sonra aşağıdakı şəklə düşür:*

$$I(t) = \frac{2e^2\dot{\beta}^2(5+\beta^2)}{15c(1-\beta^2)^4}\left(1 - \frac{2\beta^2(2+\beta^2)}{5+\beta^2}\sin^2\theta'\right). \qquad (81.4)$$

Bu, ixtiyari sürət və təcilə malik relyativistik elektronun vahid müşahidə

---

*И.М.Наджафов, А.М.Касимова, Интенсивности излучения произвольно движущегося релятивисткого электрона, Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri, 2010, №3 s.97-104 zamanında şüalandırdığı inteqral intensivlik üçün ən ümumi düsturdur. Burada da elektronun təcili onun sürəti ilə istənilən θ' bucağı təşkil edir. İnteqral intensivliyin elektronun «səpilmə» bucağından və enerjisindən (sürətindən) asılılığı şəkil 81.1-də verilmişdir.



Şəkil **81.1**

Şüalanmanın nisbi $F=\dfrac{I(t)}{B}$ intensivliyinin elektronun enerjisi və səpilmə bucağından asılılığı. $B=\dfrac{2e^2\dot{\beta}^2}{15c}$.

Qrafiklər elektronun «səpilmə» bucağının müxtəlif seçilmiş qiymətlərində şüalanma intensivliyinin enerjidən asılılığını ifadə edir. Ordinat oxu üzrə nisbi intensivlik, yəni $F=\dfrac{I(t)}{B}$ (burada $B=\dfrac{2e^2\dot{\beta}^2}{15c}$) kəmiyyəti, absis oxu üzrə $\beta=\dfrac{\upsilon}{c}$ göstərilmişdir. Bu əyrilər xarakterinə görə şəkil 80.2-dəki əyrilərə oxşayır, lakin qiymətcə onlardan çox fərqlənir. $\beta=0,9$ olduqda bu əyrilərin aldığı qiymətlər 983, 2726 və 4469-dur. β vahidə yaxınlaşdıqca əyrilər kəskin artır.

Elektronun şüalanmasının iki inteqral intensivliyinin (80.7) və (81.4) düsturları ilə təsvir olunan ifadələrindən görünür ki, ümumi halda $I(t')$ və $I(t)$ intensivlikləri bir-birindən kəskin fərqlənir və həmişə $I(t)>I(t')$ olur. Sonuncu müddəa riyazi düsturların köməyi ilə çox dəqiq alınır $\left(\dfrac{dt'}{dt}=\dfrac{1}{1-\beta\vec{n}}\right)$. Lakin bunu kobud da olsa aşağıdakı şəkildə fiziki izah etmək olar. Mərkəzi t' gecikmə anında elektronla üst-üstə düşən və elek-

tronla sərt bağlanmış R radiuslu sfera götürək. Elektronun vahid gecikmə zamanında şüalandırdığı enerji bu sferadan keçir və nəticədə $dI(t') = I_{sıx}(t')d\Omega$ diferensial və ya $I(t') = \int I_{sıx}(t')d\Omega$ inteqral sel alınır. İndi P müşahidə nöqtəsindən keçərək elektronu əhatə edən və müşahidəçiyə nəzərən sükunətdə olan ikinci sfera keçirək. Hərəkət edən elektronun şüalandırdığı enerji həmin sferadan da keçərək diferensial $dI(t') = I_{sıx}(t')d\Omega$ seli yaradır. Digər tərəfdən elektron bu sferaya nəzərən $\vec{\upsilon}$ sürətilə hərəkət etdiyinə görə əlavə $\vec{\upsilon}w$ köçürmə seli sıxlığı yaranacaq və bu da həmin sferadan keçərək $\vec{\upsilon}wd\vec{s}$ əlavə elementar sel yaradacaqdır. Burada $w = \frac{E_1^2 + H_1^2}{8\pi} = \frac{E_1^2}{4\pi}$ elektromaqnit sahəsinin enerji sıxlığıdır.
İkinci sferadan keçən diferensial sel birinci sferadakından $\vec{\upsilon}wd\vec{s}$ qədər çox olacaqdır:

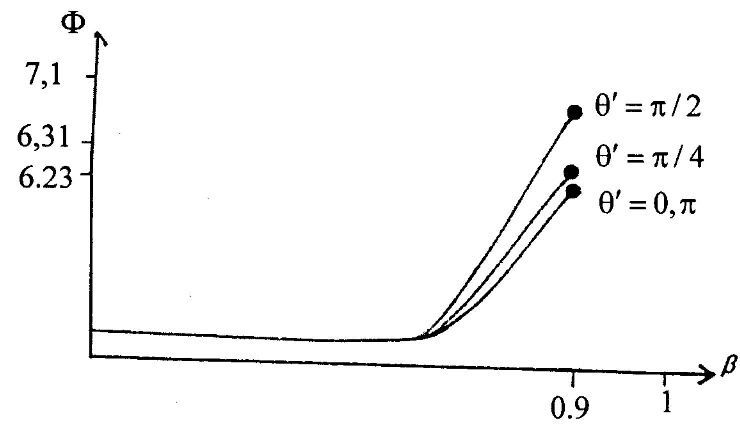
$$dI(t') + (\vec{\beta}\vec{n})\frac{e^2}{4\pi c}\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]^2}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^6}d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c}[[\;\;]]^2\left(\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^5} +\right.$$

$$\left.+(\vec{n}\vec{\beta})\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^6}\right)d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c}[[\;\;]]^2\frac{1}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^6}d\Omega = I_{sıx}(t)d\Omega = dI(t).$$

Biz yuxarıda yazılmış vektorların hasilini şərti $[[\;\;]]^2$ simvolu ilə göstərmişik, $I_{sıx}(t')$ və $I_{sıx}(t)$ sıxlıqlarının (80.1) və (81.1) ifadələrini nəzərə almışıq. Bu intensivlikləri ümumi şəkildə müqayisə etmək üçün onların bir-birinə nisbətinin elektronun enerjisi və «səpilmə» bucağından asılılığını analiz etmək lazımdır. İnteqral şüalanma intensivliklərinin $\Phi = \frac{I(t)}{I(t')}$ nisbəti şəkil 81.2-də təsvir edilmişdir. Şəkildəki qrafiklərdən görünür ki, elektronun «səpilmə» bucağı artdıqca intensivliklərin nisbəti artır. Biz şəkildə $\beta = 0{,}9$ qiymətilə kifayətlənmişik. β vahidə yaxınlaşdıqca əyrilərin kəskin artması müşahidə edilir.

İndi şüalanma intensivliklərinin ifadələrinin elektronun sürətinin çox kiçik $(\beta \to 0)$ və çox böyük $(\beta \to 1)$ qiymətlərində müqayisə edək. Qeyri-relyativistik elektronun $(\beta \to 0)$ şüalanmasında (81.4) və (80.7) düsturları üst-üstə düşür və biz nəticədə nöqtəvi elektronun dipol şüalanmasının inteqral intensivliyini alırıq:

$$\underset{\beta\to 0}{I(t)} = I(t') = \frac{2e^2\dot{\beta}^2}{3c}. \tag{81.5}$$



Şəkil **81.2.** İnteqral intensivliklərin $\Phi = \dfrac{I(t)}{I(t')}$ nisbətinin elektronun enerjisi və «səpilmə» bucağından asılılığı

Ultra-relyativistik elektronun ($\beta \to 1$) şüalanmasında $I(t)$ intensivliyi $I(t')$ ilə mütənasib olur:

$$\underset{\beta\to 1}{I(t)} = \frac{6}{5}\frac{2e^2\dot{\beta}^2}{3c(1-\beta^2)^4}(1-\beta^2\sin^2\theta') = \frac{6}{5(1-\beta^2)}I(t'). \qquad (81.6)$$

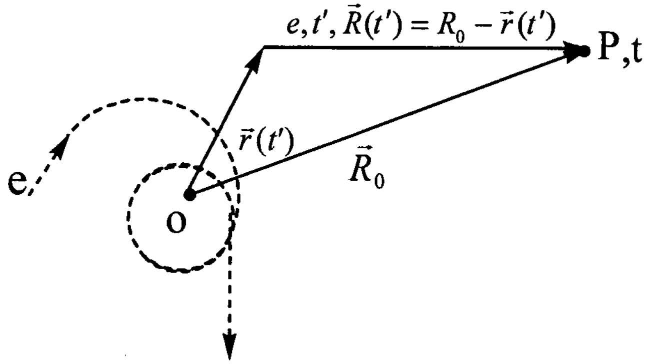
Biz ixtiyari sürətə və təcilə malik relyativistik elektronun vahid zamanda şüalandırdığı enerjinin diferensial və inteqral ifadələrini müxtəlif maraqlı hallarda tədqiq etdik. Əgər bizi müəyyən zaman intervalında enerji maraqlandırırsa, onda aldığımız ifadələri zamana görə inteqrallamalıyıq. Bunun üçün $\beta(t)$ və $\dot{\beta}(t)$-nin zamandan asılılığı bizə dəqiq məlum olmalıdır. Zərrəciyin hərəkəti mürəkkəb olduqda bu üsul ciddi çətinliklərə gətirir. Lakin başqa üsul da mövcuddur və bu haqda sonrakı paraqrafda danışılacaqdır.

§82. İxtiyari sürətlənmiş elektronun tam şüalanma enerjisinin spektral və bucaq paylanması

Bu məsələni həll etmək üçün biz §78-də aldığımız düsturlardan başqa şəkildə istifadə edəcəyik. İxtiyari hərəkət edən relyativistik elektronun vahid müşahidə zamanında vahid cisim bucağı daxilində şüalandırdığı enerji üçün §78-də aşağıdakı ifadəni almışdıq:

$$\frac{dI(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R^2 \vec{E}_1^2. \qquad (82.1)$$

Fərz edilir ki, elektron ixtiyari trayektoriya cızır (punktir əyri) və t′ gecikmə anında $\vec{r}(t')$ nöqtəsində olarkən özündən şüa buraxır və bu t anında P nöqtəsindəki müşahidəçiyə çatır (şəkil 82.1).



***Şəkil* 82.1**

Biz məsələyə dalğa zonasında baxırıq və fərz edirik ki, müşahidə nöqtəsi mənbədən çox uzaqda yerləşir. (82.1) şüalanma enerjisini qısaca $|\vec{A}|^2$ ilə işarə edək. Məlum ifadələri yazaq:

$$\vec{E}_1 = \frac{e}{cR(t')} \frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^3}, \; \vec{R} \perp \vec{E}_1, \; \vec{A} = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} [\vec{R}\vec{E}_1]. \qquad (82.2)$$

Biz enerjini müşahidə (labarator) zamanı üçün hesablayırıq. Çünki gələcəkdə enerji spektrinin müşahidəçiyə nəzərən hesablanması məqsədə daha uyğundur. İndi (82.1) düsturu aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{dI(t)}{d\Omega} = |\vec{A}|^2. \qquad (82.1')$$

Bu ifadəni elektronun təcilinin mövcud olduğu bütün zaman intervalı üzrə inteqrallasaq, elektronun vahid cisim bucağında şüalandırdığı tam enerjini alarıq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dI(t)}{d\Omega} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{A}|^2 dt. \qquad (82.3)$$

Biz gələcəkdə sol tərəfdəki inteqralı $dJ/d\Omega$ ilə işarə edəcəyik. Fərz edəcəyik ki, elektronun təcili sonlu zaman müddətində sıfırdan fərqlidir, yəni o sonsuz keçmiş və sonsuz gələcək zaman üçün sıfıra yaxınlaşır. Bu o deməkdir ki, şüalanan enerji sonludur. İndi tam şüalanma enerjisi üçün (82.3) düsturunu yenidən yazaq və bu enerjini Furye inteqralına ayıraq:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\vec{A}\right|^2 dt. \qquad (82.3')$$

Əvvəlcə (66.2) və (66.3) düsturlarının köməyi ilə $\vec{A}(t)$ vektorunu Furye inteqralına ayıraq:

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega.$$

Buradan $\vec{A}(\omega)$ Furye əmsalı üçün

$$\vec{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\vec{A}(t)dt \qquad (82.4)$$

alarıq. Şüalanan enerji həqiqi olduğundan, $\vec{A}(t) = \vec{A}^*(t)$ olur. Onda $\vec{A}^*(\omega) = \vec{A}\ (-\omega)$ olar (bax: §66). Bunları nəzərə alsaq

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\vec{A}(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\vec{A}(\omega)\right|^2 d\omega \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{A}(\omega)\vec{A}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left|\vec{A}(\omega)\right|^2 d\omega \quad (82.5)$$

olar (bax: (66,5)). Burada nəzərə alınmışdır ki, inteqralaltı funksiya ω-nın cüt funksiyasıdır. Bunu (82.3′)-də yerinə yazaq:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\vec{A}(\omega)\right|^2 d\omega \equiv \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\vec{A}(\omega)\right|^2 d\omega. \qquad (82.3'')$$

Bərabərliyin sol tərəfini $\int_0^\infty \frac{dI(\omega)}{d\Omega}d\omega$ şəklində yazaraq, müqayisədən aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{\pi}\left|\vec{A}(\omega)\right|^2. \qquad (82.6)$$

Burada $\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$ elektronun vahid cisim bucağı daxilində vahid tezlik intervalında şüalandırdığı tam enerjidir. $\left|\vec{A}(\omega)\right|^2$ funksiyasından istifadə edərək $\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$ şüalanmanın tezlik və bucaq paylanmasını açıq yazaq.

(82.2) düsturundan $\vec{A}(t)$-nın aşkar şəklini təyin edək:

$$\vec{A}(t)=\frac{e}{c}\sqrt{\frac{c}{4\pi}}\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^3}\bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}.$$

İndi t və t′ zamanları arasındakı əlaqədən istifadə edərək

$$dt=\frac{dt}{dt'}dt'=(1-\vec{\beta}\vec{n})dt'\equiv\kappa dt'$$

alırıq. Burada $(1-\vec{\beta}\vec{n})$ həddi κ ilə işarə olunmuşdur.

Bizim məqsədimiz elektronun vahid cisim bucağı daxilində vahid tezlik intervalında şüalandırdığı tam enerji ilə zərrəciyin trayektoriyası boyunca aparılan inteqrallanma arasında ümumi əlaqə tapmaqdır. Hesablamanı davam etdirərək $\vec{A}(t)$-ni (82.4)-də yerinə yazaraq $\vec{A}(\omega)$-nın ümumi ifadəsini alırıq:

$$\vec{A}(\omega)=\frac{e}{\sqrt{4\pi c}}\int_{-\infty}^{+\infty}dte^{i\omega t}\cdot\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]}{\kappa^3}\bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}. \quad (82.7)$$

İnteqralda $dt=\kappa dt'$ və $t=t'+\frac{R(t')}{c}$ olduğunu nəzərə alaraq inteqrallamanı t' üzrə aparsaq $\vec{A}(\omega)$ üçün yeni ifadə alarıq:

$$\vec{A}(\omega)=\frac{e}{\sqrt{4\pi c}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'e^{i\omega(t'+\frac{R(t')}{c})}\cdot\frac{[\vec{n}[\vec{n}-\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}]]}{\kappa^2}. \quad (82.7')$$

Fərz olunur ki, müşahidə nöqtəsi zərrəciyin təcillə hərəkət etdiyi oblastdan çox uzaqda yerləşir və ona görə şüalanma istiqamətini müəyyən edən $\frac{\vec{R}(t')}{R(t')}=\vec{n}$ vahid vektorunu zamana görə sabit götürmək olar. Digər tərəfdən $\vec{R}(t')$-i kiçik $r(t')$-in üstlərinə görə sıraya ayırsaq

$$R(t')=\left|\vec{R}_0-\vec{r}(t')\right|\approx R_0-\vec{r}(t')\vec{n} \quad (82.8)$$

qəbul etmək olar (burada $\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$-dır). Onda (82.7′) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

$$\vec{A}(\omega) = \frac{e}{\sqrt{4\pi c}} e^{i\frac{\omega R_0}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c}\right)} \cdot \frac{[\vec{n}[\vec{n} - \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}]]}{\kappa^2}. \qquad (82.7'')$$

Burada yazılışı sadələşdirmək üçün t-nin üstündəki ştrixi atmışıq. İndi şüalanma enerjisi üçün (82.6) düsturu

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\vec{n}[\vec{n} - \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}]]}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})^2} e^{i\omega(t - \frac{\vec{n}\vec{r}(t)}{c})} dt \right|^2 \qquad (82.8)$$

şəklində yazılır. Bu baxdığımız məsələ üçün ən ümumi düsturudur. Əgər zərrəciyin hərəkət qanunu məlumdursa, demək $\vec{r}(t)$ məlumdur və bundan istifadə edərək $\vec{\beta}(t)$ və $\dot{\vec{\beta}}(t)$ kəmiyyətlərini hesablamaq olar. Onda inteqral ω və $\vec{n}$-nin funksiyası kimi hesablanır. Əgər bir elektron yox, sürətlənmiş zərrəciklər dəstəsi şüalanırsa, onda (82.7″) düsturunu hər bir zərrəciyə tətbiq edərək $\vec{A}_j(\omega)$ amplitudunu hesablayır, sonra zərrəciklər üzrə cəm apararaq nəticəni (82.8) düsturunda nəzərə alırıq.

(82.8) düsturunun üstünlüyü ondadır ki, burada inteqrallanma zərrəciyin təcilinin sıfırdan fərqli olduğu zaman intervalı üzrə aparılır. Bəzi hallarda (82.7″) düsturunda zamana görə hissə-hissə inteqrallanma apararaq şüalanma intensivliyi üçün daha sadə düstur almaq olur. Göstərmək olar ki, əgər $\dot{\vec{n}} = 0$ olarsa, onda (82.7″) düsturunda eksponentə vurulan həddi aşağıdakı şəkildə yazmaq lazımdır:

$$\frac{[\vec{n}[\vec{n} - \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}]]}{\kappa^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{[\vec{n}[\vec{n}, \vec{\beta}]]}{\kappa}\right\}. \qquad (82.9)$$

Bunu nəzərə alaraq (82.8) düsturunda inteqrallanma aparsaq onu sadə şəklə salarıq.

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \frac{[\vec{n}[\vec{n}, \vec{\beta}]]}{\kappa} e^{i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c})} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\vec{n}[\vec{n}, \vec{\beta}]]}{\kappa} e^{i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c})} \cdot i\omega\left(1 - \frac{\vec{n}\vec{\upsilon}}{c}\right) dt \right|^2 =$$

$$= \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{n}[\vec{n}, \vec{\beta}]]\, e^{i\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c})} dt \right|^2. \qquad (82.10)$$

Burada nəzərə aldıq ki, $t=\pm\infty$ qiymətində $\vec{\beta}(t)=0$. Beləliklə relyativistik elektronun tam şüalanma enerjisinin spektral sıxlığı (82.10) düsturu ilə təsvir edilir. Şüalanmanın polyarizasiyası $[\vec{n}[\vec{n},\vec{\beta}]]$ vektoru vasitəsilə nəzərə alınır.

Alınmış düsturlar əvvəlki §-larda gətirilmiş düsturlardan tamamilə fərqlənir, çünki burada zamana görə inteqrallanma zərrəciyin hərəkət trayektoriyası üzrə aparılır. Lakin qeyd edə ki, əvvəlki düsturlarla indiki düsturlar bir-birini məntiqi tamamlayır.

Əgər prosesdə zərrəciklər dəstəsi sürətlənirsə, onda (82.10) düsturunda inteqral altında

$$e\vec{\beta}e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\right)\vec{n}\cdot\vec{r}(t)}\to\sum_{a=1}^{N}e_a\vec{\beta}_a e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\right)\vec{n}\cdot\vec{r}_a(t)} \qquad (82.11)$$

əvəzlənməsini etməliyik. Nöqtəvi obyektlər üzrə cəm son nəticədə inteqrala çevrilir:

$$\frac{1}{c}\sum_{a=1}^{N}e_a\vec{\upsilon}_a e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\right)\vec{n}\cdot\vec{r}_a(t)}\to\frac{1}{c}\int_V\rho\vec{\upsilon}e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\right)\vec{n}\vec{r}}(d\vec{r})=\frac{1}{c}\int_V\vec{j}(\vec{r},t)e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\right)\vec{n}\vec{r}}(d\vec{r}). \qquad (81.12)$$

Burada $\vec{j}(\vec{r},t)=\sum_{a=1}^{N}e_a\vec{\upsilon}_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a(t))$. Nəticədə tam şüalanma intensivliyinin tezlik və bucaqlara görə paylanması

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega}=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int dt\int_V(d\vec{r})\left[\vec{n}\left[\vec{n}\vec{j}(\vec{r},t)\right]\right]e^{i\omega\left(t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right)}\right|^2 \qquad (82.13)$$

düsturu ilə təsvir edilir.

Bu §-da alınmış ümumi düsturlardan, xüsusilə (82.8) və (82.10) düsturlarından şüalanma ilə əlaqədar müxtəlif problemlərin həllində istifadə ediləcəkdir.

XII FƏSİL
NÖTER TEOREMİ VƏ ONDAN ALINAN NƏTİCƏLƏR

Biz əvvəlki fəsillərdə müxtəlif mülahizələrlə elektromaqnit sahəsinin enerjisi, impulsu, cərəyanı, yükü və c. üçün saxlanma qanunlarını aldıq. İndi bu saxlanma qanunlarına ümumi şəkildə yanaşmağın vaxtı çatmışdır. 1918- ci ildə alman alimi Emmi Nöter elə bir teorem isbat etmişdir ki, bu teoremə görə istənilən sahənin (və ya sistemin) bütün mümkün saxlanma qanunlarını bu sahənin fəza-zaman simmetriyasından istifadə edərək ümumi şəkildə almaq mümkündür. Bu teorem alimin şərəfinə *Nöter teoremi* adlanır. Nöter teoremi (I teorem) yalnız saxlanma qanunlarını deyil, həm də sahənin özünün hərəkət tənliyini almağa imkan verir. Bu teoremi isbat etmək üçün bəzi riyazi anlayışlardan istifadə edilir və indi həmin anlayışlarla tanış olacağıq.

§83. Koordinatların Lorens çevrilməsi zamanı sahənin transformasiya xassələri və infinitezimal operatorlar

Koordinatların Lorens çevrilməsini ifadə edən

$$x'_\mu = L_{\mu\nu}x_\nu \text{ və ya } x' = Lx \tag{83.1}$$

düsturunu sonsuz kiçik çevrilmə üçün yazsaq, Lorens çevrilməsi matrisini

$$L_{\mu\nu} = (I+\varepsilon)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \tag{83.2}$$

şəklində ifadə etmək olar. Burada I Minkovski fəzasında vahid matris, $\varepsilon = (\varepsilon_{\mu\nu})$ isə sonsuz kiçik matrisdir, yəni $|\varepsilon_{\mu\nu}| << 1$. Onda (83.1) düsturu aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})x_\nu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}x_\nu. \tag{83.1'}$$

Bu bərabərliyi kvadrata yüksəldərək sonsuz kiçik hədlərlə kifayətlənsək

$$x'^2_\mu = x^2_\mu + 2\varepsilon_{\mu\nu}x_\mu x_\nu, \tag{83.3}$$

olar. İndi 4-ölçülü vektorun Lorens invariantlığı şərtini yazaq:

$$x'^2_\mu = x^2_\mu = \text{invar}. \tag{83.4}$$

Son iki ifadənin müqayisəsindən

$$\varepsilon_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0$$

şərti alınır. Məlumdur ki, simmetrik tenzorla ($x_\mu x_\nu$) antisimmetrik tenzorun ($\varepsilon_{\mu\nu}$) hasili sıfırdır (bax: I əlavə). Beləliklə $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ kiçik antisimmetrik tenzordur. Onun komponentlərini təyin edək. Bilirik ki, kiçik sürətlər üçün ($\upsilon/c << 1$) Lorens çevrilməsi Qaliley çevrilmələri ilə üst-üstə düşür:

$$\begin{aligned} &\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t,\ \{x' = x - V_x t,\ y' = y - V_y t,\ z' = z - V_z t\}, \\ &t' = t. \end{aligned} \tag{83.5}$$

(83.1′) və (83.5) tənliklərini müqayisə edərək $\varepsilon_{\mu\nu}$-nün zaman komponentlərini tapa bilərik. Doğrudan da (83.1′)-də $\mu = 1$ deyək və alınmış

$$x' = x + \varepsilon_{12} x_2 + \varepsilon_{13} x_3 + \varepsilon_{14} x_4 \tag{83.1″}$$

tənliyini (83.5)-in birinci tənliyi ilə, yəni $x' = x - V_x t$ ilə müqayisə edək. Nəticədə $\varepsilon_{14} x_4 = -V_x t$ olur və buradan $\varepsilon_{14} = i\dfrac{V_x}{c}$ alınır. Bunu ümumiləşdirərək

$$\varepsilon_{j4} = i\frac{V_j}{c} = -\varepsilon_{4j},\ j = 1, 2, 3 \tag{83.6}$$

alırıq. $\varepsilon_{\mu\nu}$-nün fəza komponentlərini tapmaq üçün 3-ölçülü koordinat sisteminin kiçik $\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ bucağı qədər dönməsinə (fırlanmasına) baxaq. Bu zaman koordinatların çevrilməsi aşağıdakı düsturla verilir (bax: əlavə):

$$\vec{r}' = \vec{r} - [\vec{\Omega}\vec{r}]. \tag{83.7}$$

Bu düsturun birinci proyeksiyası olan

$$x' = x - \Omega_y z + \Omega_z y (|\vec{\Omega}| << 1)$$

tənliyini (83.1″) tənliyi ilə müqayisə etsək

$$\varepsilon_{12}=\Omega_z \text{ və } \varepsilon_{13}=-\Omega_y (\Omega_y=\varepsilon_{31})$$

olar. Digər komponenti analoji yolla alırıq:

$$\Omega_x=\varepsilon_{23}.$$

Beləliklə $\varepsilon_{\mu\nu}$ matrisinin fəza komponentləri 3-ölçülü fəzada oxlar üzrə fırlanma bucaqları ilə üst-üstə düşür. Son nəticədə aşağıdakı matrisi alırıq:

$$\varepsilon=(\varepsilon_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y & i\frac{V_x}{c} \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x & i\frac{V_y}{c} \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 & i\frac{V_z}{c} \\ \frac{-iV_x}{c} & \frac{-iV_y}{c} & \frac{-iV_z}{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{83.8}$$

Buna Lorensin infinitezimal fırlanma matrisi də demək olar. Bu matrisin 6 ədəd asılı olmayan elementi vardır. Bu elementlər məxsusi Lorens çevrilməsi parametrləridir. Əgər biz Puankare çevrilməsinə baxsaq (qeyri-məxsusi):

$$x'_\mu=L_{\mu\nu}x_\nu+d_\mu \tag{83.9}$$

olar. Burada d_μ K' sistemində K-nın koordinat başlanğıcının koordinatlarıdır (sürüşməsidir). Burada infinitezimal çevrilməyə baxsaq, çevrilmə parametrlərinin sayı 6+4=10 olar. Beləliklə ümumi Lorens çevrilməsində parametrlərin ümumi sayı 10-dur. İndi $\varepsilon=(\varepsilon_{\mu\nu})$ matrisini sadə matrislər daxil etməklə göstərə bilərik:

$$\varepsilon=(\varepsilon_{\mu\nu})=\sum_{\mu>\nu} I_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}+\sum_{\mu<\nu} I_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{83.8'}$$

Burada $I_{\mu\nu}$ bir elementi 1 digər elementləri 0 olan sadə matrislərdir, $\varepsilon_{\mu\nu}$ isə ε-matrisinin elementidir. $I_{\mu\nu}$ matrisində μ-cü sətirdə və ν-cü sütunda yerləşən element vahiddir, digər elementlər sıfırdır. Məsələn,

$I_{12} = \begin{pmatrix} 0100 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \end{pmatrix}$ və s. Yadda saxlayaq ki, $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ antisimmetrik elementdir. (53.8′)-də ikinci cəmdə μ ilə ν-nün yerini dəyişək ($\mu \leftrightarrow \nu$):

$$\sum_{\mu<\nu} I_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\nu<\mu} I_{\nu\mu}\varepsilon_{\nu\mu} = -\sum_{\nu<\mu} I_{\nu\mu}\varepsilon_{\mu\nu} .$$

Bunu (83.8′)-də nəzərə alsaq:

$$\varepsilon = (\varepsilon_{\mu\nu}) = \sum_{\mu>\nu} (I_{\mu\nu} - I_{\nu\mu})\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\mu>\nu} I_{[\mu\nu]}\varepsilon_{\mu\nu} \tag{83.8''}$$

olar. Burada $I_{[\mu\nu]} = I_{\mu\nu} - I_{\nu\mu}$ antisimmetrik matrisdir, onun μ sətrində və ν sütunundakı element $+1$-dir və ν sətrində və μ sütunundakı element isə -1-dir. Ümumiyyətlə antisimmetrik kəmiyyətlərdə indekslər kvadrat mötərizə içərisində yazılır, məsələn $[\mu\nu]$. $\varepsilon_{\mu\nu}$ Lorens fırlanma matrisinin antisimmetrik elementidir və özü də kiçik Lorens «fırlanma bucağını» ifadə edir və onu $\varepsilon_{\mu\nu} \equiv \omega_{\mu\nu} \equiv \omega_{[\mu\nu]}$ ilə işarə edəcəyik. Onda (83.8″) matrisi

$$\varepsilon = (\varepsilon_{\mu\nu}) = \sum_{\mu>\nu} I_{[\mu\nu]}\omega_{[\mu\nu]} \equiv \varepsilon(\omega) \tag{83.8''}$$

şəklində və tam Lorens matrisi isə

$$L(\omega) = I + \varepsilon(\omega) \tag{83.2'}$$

şəklində yazılır. Buradan törəmə alsaq

$$\frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega_{[\mu\nu]}} = I_{[\mu\nu]} \tag{83.10}$$

olar. Bu şəkildə təyin olunmuş $I_{[\mu\nu]}$ kəmiyyəti koordinatların Lorens çevrilməsi üçün *infnitezimal operator və ya generator* adlanır.

İndi biz bu əməliyyatları sahələr üçün edəcəyik. Sahəni U, φ, Ψ, ϕ və s. ilə işarə edəcəyik və bunları sütun şəklində göstərəcəyik. Onların komponentlərini isə U_i, φ_j, Ψ_l, ϕ_m və s. ilə işarə edəcəyik. Bunlar çox komponentli funksiyalardır və ümumi halda kompleks kəmiyyətlərdir. i, j, k, l indeksləri istənilən qiymət ala bilər. Elektromaqnit sahəsi 4-ölçülü potensialla təyin edilir və onu $A_\mu(x)$ ilə işarə etmişik.

Nöter teoremində sahə anlayışı istənilən n-ölçülü fəzada təyin edilmiş ixtiyari komponentli funksiyadır. Lakin biz bu teoremi Minkovski (psevdoevklid) fəzasında təyin edilmiş fiziki sahələr üçün isbat edəcəyik və bunu istənilən fəzaya ümumiləşdirmək olar.

Məlumdur ki, koordinatların

$$x' = Lx \tag{83.1}$$

Lorens çevrilməsi funksiya fəzasında sahənin

$$\Psi'(x')=S\Psi(x) \tag{83.11}$$

çevrilməsini yaradır (induksiyalar) və bu, *Lorens çevrilməsinin təsviri* adlanır: S matrisi L-in təsviridir. Əgər koordinatların (83.1) çevrilməsi sonsuz kiçik çevrilmədirsə, onun (83.11) təsviri də sonsuz kiçik çevrilmə olacaqdır və burda koordinatların $\varepsilon_{\mu\nu} \equiv \omega_{[\mu\nu]}$ çevrilmə parametrləri xətti şəkildə iştirak edəcəkdir:

$$L = I + \sum_{\mu\rangle\nu} I_{[\mu\nu]}\omega_{[\mu\nu]} \tag{83.2''}$$

olarsa,

$$S = \mathbb{I} + \frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu} J^{[\mu\nu]}\omega_{[\mu\nu]} \equiv \mathbb{I} + \sum_{\mu\rangle\nu} J^{[\mu\nu]}\omega_{[\mu\nu]} \tag{83.12}$$

olar. Burada $\mathbb{I}$ funksiya fəzasında vahid matris və $J^{[\mu\nu]} = -J^{[\mu\nu]}$ isə funksiyanın Lorens çevrilməsini təsvir edən xarakterik antisimmetrik matrisdir. Müxtəlif sahələr üçün $J^{[\mu\nu]}$ müxtəlifdir. Məsələn, elektromaqnit sahəsi (4-ölçülü A_μ potensialı) üçün $J^{[\mu\nu]}$ adi koordinat çevrilməsindəki $I_{[\mu\nu]}$ ilə üst-üstə düşür, lakin bispinor sahə üçün $J^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu$-dür. Burada γ_μ, γ_ν Dirak matrislərdir (bispinor üçün $J^{[\mu\nu]}$ matrisini biz hazır verdik).

Biz (83.12) ifadəsindən $\omega_{[\mu\nu]}$-ya görə törəmə alsaq

$$\frac{\partial S(\omega)}{\partial \omega_{[\mu\nu]}} = J^{[\mu\nu]} \tag{83.12'}$$

olar. Belə təyin edilmiş $J^{[\mu\nu]}$ matrisi sahənin Lorens çevrilməsi üçün *infinitezimal operator və ya generator* adlanır. İndi (83.11) funksiyasını komponentlərində yazaq:

$$\Psi_i'(x') = S_{ij}\Psi_j(x) = (\,\mathbb{I} + \sum_{\mu>\nu} J^{[\mu\nu]}\omega_{[\mu\nu]})_{ij}\Psi_j(x) =$$

$$= \Psi_i(x) + \sum_{\mu>\nu} J_{ij}^{[\mu\nu]}\Psi_j(x)\omega_{[\mu\nu]}\,. \qquad (83.11')$$

Bu düstur istənilən sahənin (skalyar, vektori, bispinor, kalibirləşmə, tenzori sahələr və s.) sonsuz kiçik Lorens çevrilməsinə tətbiq edilə bilər və hər bir sahə üçün $J^{[\mu\nu]}$ müxtəlif olacaqdır.

§84. İnfinitezimal çevrilmədə koordinatların və funksiyanın tam və forma variasiyaları

Əvvəlcə koordinatların variasiyasını (83.1′) və (83.8″) düsturları vasitəsilə hesablayaq:

$$x_\mu' - x_\mu = \delta x_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu = (\sum_{\lambda>\rho} I_{[\lambda\rho]}\omega_{[\lambda\rho]})_{\mu\nu} x_\nu\,. \qquad (84.1)$$

Bu, koordinatın tam variasiyasıdır və cəmləmə indeksi olaraq yeni λ, ρ indeksləri götürülmüşdür. Biz burada $\varepsilon = (\varepsilon_{\mu\nu}) = \sum_{\mu>\nu} I_{[\mu\nu]}\varepsilon_{\mu\nu}$ düsturunu yeni indekslərlə $\varepsilon = \sum_{\lambda>\rho} I_{[\lambda\rho]}\,\omega_{[\lambda\rho]}$ şəklində yazmışıq. $\omega_{[\lambda\rho]}$ çevrilmə parametrləri məxsusi Lorens çevrilməsində 6 ədəd asılı olmayan qiymət alır: $[\lambda\rho]$=[21], [31], [32], [41], [42], [43]. Bu qiymətləri α ilə işarə etsək $\omega_{[\lambda\rho]} \equiv \omega_\alpha$, α=1, 2, 3, 4, 5, 5, 6 olar. Əgər biz qeyri-məxsusi Lorens çevrilməsinə (Puankare çevrilməsi) baxsaq ω parametri 10 ədəd qiymət alar.

İndi (84.1) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\delta x_\mu = x_\mu' - x_\mu = (\sum_{\alpha=1}^{6} I_\alpha \delta\omega_\alpha)_{\mu\nu} x_\nu = (I_\alpha)_{\mu\nu} x_\nu \delta\omega_\alpha = X_{\alpha\mu}\delta\omega_\alpha\,. \qquad (84.2)$$

Burada çevrilmə parametri çox kiçik olduğundan $\omega_\alpha \approx \delta\omega_\alpha$ yazmışıq və təkrar olunan α indeksi üzrə cəm aparıldığını (Eynşteyn qaydası) nəzərdə tutaraq cəm işarəsini atmışıq. Son ifadədə

$$X_{\alpha\mu} = (I_\alpha)_{\mu\nu} x_\nu \qquad (84.2')$$

şəklində təyin edilir və o, *koordinat çevrilməsi matrisi* adlanır.

Biz Nöter teoremini isbat edərkən sahəni $U_i(x)$ funksiyası ilə işarə edəcəyik. (83.11′) düsturundan istifadə edərək sahənin tam variasiyasını (bax: §22) hesablayaq:

$$\delta U_i(x) = U'_i(x') - U_i(x) = (\sum_{\lambda\rangle\rho} J^{[\lambda\rho]}\omega_{[\lambda\rho]})_{ij} U_j(x) =$$

$$= (\sum_{\alpha} J^{\alpha}\delta\omega_{\alpha})_{ij} U_j(x) = J^{\alpha}_{ij} U_j(x)\delta\omega_{\alpha} = Y_{\alpha i}\delta\omega_{\alpha}. \tag{84.3}$$

$$Y_{\alpha i} = J^{\alpha}_{ij} U_j(x) \tag{84.4}$$

sahə çevrilməsi matrisidir. Məlumdur ki, tam variasiya iki variasiyanın cəmidir:

$$\delta U_i(x) = U'_i(x') - U_i(x) \equiv U'_i(x') - U_i(x') + U_i(x') - U_i(x) =$$

$$= \bar{\delta} U_i(x') + \bar{\bar{\delta}} U_i(x) \tag{84.5}$$

Burada $\bar{\delta} U_i(x') = U'_i(x') - U_i(x')$ forma variasiyasıdır, $\bar{\bar{\delta}} U_i(x) = U_i(x') - - U_i(x)$ isə koordinat hesabına alınmış variasiyadır. Yazdığımız ifadələrdə $x' = x + \delta x$ və ya $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$-dür. Biz xətti variasiya ilə kifayətlənəcəyik. Ona görə forma variasiyasında $\bar{\delta} U_i(x') \equiv \bar{\delta} U_i(x + \delta x) \approx \approx \bar{\delta} U_i(x)$ olur. «Koordinat variasiyasında» isə $U_i(x') \equiv U_i(x + \delta x)$ funksiyasını δx-ə görə sıraya ayırıb xətti hədlə kifayətlənirik:

$$\bar{\bar{\delta}} U_i(x) = U_i(x') - U_i(x) = U_i(x) + \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\delta x_\mu - U_i(x) = \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\delta x_\mu .$$

Dediklərimizi (84.5)-də nəzərə alsaq:

$$\delta U_i(x) = \bar{\delta} U_i(x) + \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \tag{84.5′}$$

olar. Bu bərabərlikdən forma variasiyasını təyin edək:

$$\bar{\delta} U_i(x) = \delta U_i(x) - \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\delta x_\mu = \left(Y_{\alpha i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu} X_{\alpha\mu} \right)\delta\omega_\alpha . \tag{84.6}$$

Burada (84.2) və (84.3) ifadələri nəzərə alınmışdır.

§85. Nöter teoremi və onun isbatı

Qeyd edək ki, Nöter teoremi koordinatların və sahə funksiyalarının kəsilməz çevrilməsi ilə əlaqədardır. Fərz edək ki, 4-ölçülü R(3+1) fəza oblastında qapalı sistem yerləşmişdir. Sistemin Laqranj funksiyası sahə vektorları və onların birinci tərtib törəmələrindən asılıdır: $\mathcal{L}(U_i(x)\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu})$. Bu sistem üçün təsir inteqralı aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$S=\int\limits_{R(3+1)}\mathcal{L}(U_i(x),\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu})d^4x \tag{85.1}$$

Fərz edək ki, sistemin koordinatları və sahə funksiyaları (vektorları) hər hansı çevrilməyə məruz qalır və bu zaman sistemin fəza oblastı da dəyişir: $R(3+1)\to R'(3+1)$. Bu çevrilmə nəticəsində sistemin təsir inteqralı aşağıdakı şəklə düşür:

$$S'=\int\limits_{R'(3+1)}\mathcal{L}'\left(U'_i(x'),\frac{\partial U'_i(x')}{\partial x'_\mu}\right)d^4x'. \tag{85.1'}$$

Nöter teoremində deyilir ki, yuxarıdakı kəsilməz çevrilmə nəticəsində təsir inteqralı dəyişmirsə, yəni S'=S=invar qalırsa, buna bir sıra saxlanma qanunları uyğun gəlir.

Adətən Nöter teoremini sonsuz kiçik kəsilməz çevrələr üçün isbat edirlər.

***Nöter teoremi**: Koordinatların hər cür kəsilməz çevrəsi ilə əlaqədar olan və ya ondan asılı olmadan sistemin təsir inteqralının variasiyasını sıfıra çevirən sahə funksiyalarının hər növ çevrilməsinə bir sıra saxlanma qanunları (və ya invariantlar) uyğun gəlir. Saxlanma qanunlarının sayı sahənin çevrilmə parametrlərinin sayına bərabərdir.*

Saxlanan kəmiyyət sahə funksiyaları və onların törəmələrinin elə kombinasiyasına deyilir ki, o, zamandan asılı olmasın. Teoremi isbat etmək üçün koordinatların, sahə funksiyalarının və inteqrallanma həcminin kəsilməz çevrilməsi zamanı təsir inteqralının tam variasiyasını hesablayaq:

$$\delta S=\int\limits_{R'(4)}\mathcal{L}'\left(U'_i(x'),\frac{\partial U'_i(x')}{\partial x'_\mu}\right)d^4x'-\int\limits_{R(4)}\mathcal{L}\left(U_i(x),\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu}\right)d^4x=$$

$$= \int\limits_{R'(4)} \left\{ \delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\left(U_i(x), \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu} \right) \right\} d^4x' - \int\limits_{R(4)} \mathcal{L}\left(U_i(x), \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu} \right) d^4x \quad (85.2)$$

Burada Laqranj funksiyasının tam variasiyası $\delta\mathcal{L}$ aşağıda verilir.

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}'\left(U_i'(x'), \frac{\partial U_i'(x')}{\partial x_\mu'} \right) - \mathcal{L}\left(U_i(x), \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu} \right) \equiv \mathcal{L}'(U_i'(x')\cdot\cdot) -$$

$$-\mathcal{L}(U_i(x')\cdot\cdot) + \mathcal{L}(U_i(x')\cdot\cdot) - \mathcal{L}(U_i(x)\cdot\cdot) = \bar{\delta}\mathcal{L}(\cdot\cdot x'\cdot\cdot) + \bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}(\cdot\cdot x\cdot\cdot) =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i(x')}\bar{\delta}U_i(x') + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial U_i(x')}{\partial x_\mu'} \right)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial U_i(x')}{\partial x_\mu'} \right) + \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu}\delta x_\mu \quad (85.3)$$

Burada Laqranj funksiyasının arqumentlərdən asılılığının şərti yazılışından istifadə etmişik. Son yazılışda birinci və ikinci hədd $U_i(x')$ və $\frac{\partial U_i(x')}{\partial x_\mu'}$ funksiyalarının forma variasiyası hesabına alınmış ifadəni, sonuncu hədd isə koordinatların variasiyası hesabına alınmış variasiyanı təsvir edir. Funksiyanın forma və «koordinat» variasiyasının hesablanması sadə şəkildə §22-də təsvir edilmişdir. Burada (22.7') düsturunda Laqranj funksiyasının forma variasiyasının $\bar{\delta}L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\bar{\delta}q_i + + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta}\dot{q}_i$ düsturu ilə hesablanması göstərilmişdir. İndi biz bunlardan istifadə edirik. Baxdığımız variasiya məsələsində biz birinci tərtib variasiya ilə kifayətlənir və ikinci, üçüncü tərtib variasiyaları atırıq. Ona görə $\bar{\delta}\mathcal{L}(\cdot\cdot x'\cdot\cdot) = \bar{\delta}\mathcal{L}(\cdot\cdot\cdot x + \delta x\cdot\cdot\cdot) \approx \bar{\delta}\mathcal{L}(\cdot\cdot x\cdot\cdot)$ bərabərliyini alırıq.

İndi (85.3) düsturu qısa şəkildə yazılır:

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\delta}\mathcal{L}(\cdot\cdot x\cdot\cdot) + \bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}(\cdot\cdot x\cdot\cdot). \quad (85.3')$$

Son ifadəni (85.2)-də nəzərə alsaq:

$$\delta S = \int\limits_{R'} \delta\mathcal{L} d^4x' + \int\limits_{R'} \mathcal{L}(U_i(x)...)d^4x' - \int\limits_{R} \mathcal{L}(U_i(x)...)d^4x$$

olar. Burada $d^4x' = Jd^4x$ olduğunu bilərək axırıncı iki inteqralı birləşdiririk. Bu yazılışında $J=\left|\dfrac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}\right|$ R' həcmindən R həcminə keçid Yakobianıdır:

$$\delta S=\int_{R'}\delta\mathscr{L}d^4x'+\int_{R}\mathscr{L}(U_i(x)\cdot\cdot)(J-1)d^4x\,. \qquad (85.2')$$

Yakobianı açaq və birinci tərtib kiçik hədlərlə kifayətlənək:

$$J=\left|\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}\right|=\left|\frac{\partial(x_\nu+\delta x_\nu)}{\partial x_\mu}\right|=\left|\delta_{\nu\mu}+\frac{\partial\delta x_\nu}{\partial x_\mu}\right|=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{\partial\delta x_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial\delta x_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\delta x_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial\delta x_1}{\partial x_4}\\ \dfrac{\partial\delta x_2}{\partial x_1}, & 1+\dfrac{\partial\delta x_2}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial\delta x_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial\delta x_2}{\partial x_4}\\ - & - & - & -\\ - & - & - & - \end{vmatrix}\approx$$

$$\approx 1+\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\delta x_4}{\partial x_4}=1+\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu}.$$

(85.2′) düsturunun birinci inteqralında artıq birinci tərtib variasiya, yəni $\delta\mathscr{L}$ mövcuddur. İnteqraldakı d^4x' və R' hesabına ikinci və üçüncü tərtib variasiya yarana bilər. Biz bu variasiyaları ataraq

$$\int_{R'}\delta\mathscr{L}d^4x'\approx\int_{R}\delta\mathscr{L}d^4x$$

yazırıq. Bu deyilənləri (85.2′) düsturunda nəzərə alsaq

$$\delta S=\int_R\left(\delta\mathscr{L}+\mathscr{L}\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu}\right)d^4x=\int_R\left\{\bar{\delta}\mathscr{L}+\frac{d\mathscr{L}}{dx_\mu}\delta x_\mu+\mathscr{L}\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x_\mu}\right\}d^4x=$$

$$=\int_R\left\{\bar{\delta}\mathscr{L}(\cdot\cdot x\cdot\cdot)+\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\mathscr{L}\delta x_\mu)\right\}d^4x \qquad (85.2'')$$

olar. İnteqral altındakı birinci həddi ayrıca hesablayaq və sistemin hərəkət tənliyinin ödəndiyini nəzərə alaq:

$$\bar{\delta}\mathscr{L}(\cdot\cdot x\cdot\cdot)=\bar{\delta}\mathscr{L}\left(U_i(x),\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_\mu}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial U_i}\bar{\delta}U_i+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\bar{\delta}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\right)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\right)\bar{\delta}U_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\delta}U_i) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\bar{\delta}U_i\right\}. \qquad (85.4)$$

Biz burada elektromaqnit sahəsinin $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial A_\nu/\partial x_\mu)}$ (85.5) hərəkət tənliyinə (Laqranj tənliyinə) uyğun olaraq $U_i(x)$ sahəsinin $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_i} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}$ hərəkət tənliyindən istifadə etmişik və forma variasiyası ilə törəmənin $\bar{\delta}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\delta}U_i)$ yerdəyişmə şərtini nəzərə almışıq. Qeyd edək ki, əgər bizə sahənin hərəkət tənliyi məlum deyildirsə, biz onu Nöter teoreminin özündən ala bilərdik. (85.4) ifadəsini (85.2″)-də yerinə yazaraq təsir inteqralının tam variasiyası üçün

$$\delta S = \int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\bar{\delta}U_i + \mathcal{L}\delta x_\mu\right\}d^4x \qquad (85.2''')$$

tənliyini alırıq. Burada δx_μ və $\bar{\delta}U_i$-nin (84.2) və (84.6) ifadələrini yerinə yazaq və mənfi işarəsini inteqraldan xaricə çıxaraq:

$$\delta S = -\int_R \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_\nu}X_{\alpha\nu} - Y_{\alpha i}\right) - X_{\alpha\mu}\mathcal{L}\right\}\delta\omega_\alpha d^4x. \qquad (85.6)$$

Bu inteqralda böyük mötərizə daxilindəki ifadəni $\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}$ ilə işarə edək:

$$\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_\nu}X_{\alpha\nu} - Y_{\alpha i}\right) - X_{\alpha\mu}\mathcal{L}. \qquad (85.7)$$

Sonda Nöter teoremi belə yazılır:

$$\delta S = -\int_R \frac{\partial \overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu}\delta\omega_\alpha d^4x = 0. \qquad (85.8)$$

Yəni fərz edilir ki, baxdığımız kəsilməz çevrilmə zamanı sistemin təsir inteqralının variasiyası sıfıra çevrilir və buradan da bir sıra saxlanma qanunları alınır. $\delta\omega_\alpha$ parametrləri bir-birindən asılı olmadığına görə yuxarıdakı inteqral $\delta\omega_\alpha$-sız da sıfır olacaqdır:

$$\int\limits_{R(4)} \frac{\partial \overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} d^4x = 0. \tag{85.9}$$

Bu, saxlanma qanununun inteqral şəklidir. İnteqrallanma həcmi R(4) ixtiyari olduğundan inteqralaltı ifadə də sıfır ola bilər:

$$\frac{\partial \overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{85.10}$$

Bu, diferensial şəkildə saxlanma qanunudur. Saxlanma qanunlarında α indeksi çevrilmə parametrlərinin sayını müəyyən etdiyindən saxlanma qanunlarının sayı çevrilmə parametrlərinin sayına bərabərdir. Yuxarıda yazılmış N indeksi Nöteri xatırladır.

§86. İnteqral saxlanma qanunları və onların kovariant və qeyri-kovariant şəkilləri

Əvvəlki §-dan bildiyimiz (85.9) inteqral saxlanma qanununu yazaq:

$$\int\limits_{R} \frac{\partial \overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} d^4x = 0. \tag{86.1}$$

Burada μ indeksi Minkovski fəzasından götürülmüş indeksdir və 1, 2, 3, 4 qiymətlərini alır, lakin α başqa fəzadan götürülmüşdür və ümumiyyətlə istənilən qiymət ala bilər ($\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). $\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}$ ümumi halda tenzor deyildir, lakin xüsusi hallarda tenzor ola bilər. Digər tərəfdən $\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}$ işarə dəqiqliyi ilə təyin edilmişdir.

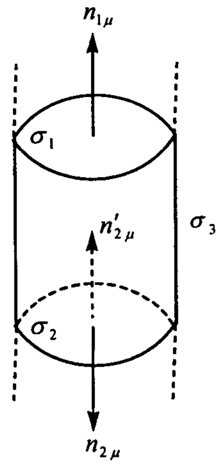
(86.1) inteqralına 4-ölçülü Ostraqradski-Qauss teoremini tətbiq edək:

$$0 = \int\limits_{R(4)}^{N} \frac{\partial \theta_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} d^4x = \oint\limits_{\Sigma}^{N} \theta_{\alpha\mu}\, d\sigma_\mu . \qquad (86.2)$$

Burada Σ – 4-ölçülü $R_{(4)}$ həcmini əhatə edən hipersəthdir, $d\sigma_\mu$ isə hiper səth elementinin x_μ istiqamətində proyeksiyasıdır. Hipersəth elementi belə təyin edilir:

$$d\sigma_\mu = \frac{d^4x}{dx_\mu} .$$

Σ 4-ölçülü fəzada istənilən qapalı hipersthdir, lakin onu 4-ölçülü fəzada «silindrin» səthi kimi götürmək daha əlverişlidir: $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Burada σ_1 və σ_2 – silindrin oturacaqlarını təsvir edən fəzaya oxşar hipersəthlərdir, σ_3 isə silindrin zamana oxşar yan hipersəthidir. σ_3 yan səthi σ_1 və σ_2-ni birləşdirir. Silindr sxematik olaraq şəkil 86.1-də göstərilmişdir.



***Şəkil* 86.1**

σ_1 və σ_2 hipersəthləri fəzaya oxşar olduğundan onlarda yerləşən 4–ölçülü vektorlar fəzaya oxşar olmalıdır: $x_\mu^2 = \vec{r}^2 - c^2t^2 > 0$. Bu o deməkdir ki, oturacaqlarda $r \to \infty$ olur və silindrin σ_3 yan hipersəthi sonsuz uzaq nöqtələrdən keçir. Sahə nəzəriyyəsində fərz edilir ki, sonsuzluqda sahə sıfıra çevrilir:

$$U_i(r \to \infty) \to 0 .$$

İndi (86.2) düsturunu «silindir» üçün yazaq:

$$\oint_{\Sigma}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{\mu}=\int_{\sigma_1}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{1\mu}+\int_{\sigma_2}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{2\mu}+\int_{\sigma_3}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{3\mu}=$$

$$=\int_{\sigma_1}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{1\mu}+\int_{\sigma_2}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{2\mu}=0. \qquad (86.2')$$

Sonsuzluqdan keçən σ_3 üzərində inteqral (sahə) sıfırdır. Şəkildə σ_1 və σ_2 hipersəthlərin xarici normalları bir-birinin əksinə yönəlmişdir. Biz σ_2 «səthini» də σ_1 istiqamətində yönəltmək istəyirik, yəni $d\sigma_{2_\mu}=$ $=d\sigma_2\cdot n_{2_\mu}=-d\sigma_2\cdot n'_{2_\mu}=-d\sigma'_{2_\mu}$. Burada $n'_{2_\mu}=-n_{2_\mu}$. Onda (86.2′) ifadəsi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\int_{\sigma_1}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{1\mu}-\int_{\sigma_2}\theta_{\alpha\mu}d\sigma'_{2\mu}=0 \text{ və ya } \int_{\sigma_1}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{1\mu}=\int_{\sigma_2}\theta_{\alpha\mu}d\sigma'_{2\mu}=\text{const}. \qquad (86.2'')$$

Biz silindrin oturacaqlarını σ_1 və σ_2-yə paralel digər iki səthlə əvəz etsək, yenə yuxarıdakı nəticəni alarıq. Aldığımız nəticəni ümumiləşdirərək aşağıdakını yaza bilərik:

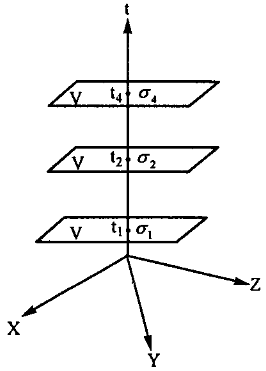
$$\int_{\sigma_1}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{1\mu}=\int_{\sigma_2}\theta_{\alpha\mu}d\sigma'_{2\mu}=\int_{\sigma_4}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{4\mu}=\ldots=\int_{\sigma_n}\theta_{\alpha\mu}d\sigma_{n_\mu}=C_\alpha(\sigma_i), \qquad (86.3)$$

$$i=1,2,3,4,5,6,7,\ldots$$

Bu, inteqral saxlanma qanununun kovariant şəkildə yazılışıdır. Yəni $\theta_{\alpha\mu}$ kəmiyyətini istənilən fəzaya oxşar hipersəth üzrə inteqrallasaq eyni bir nəticəni alarıq. İnteqralın cavabı σ_i-lərin seçilməsindən asılı deyildir. Saxlanma qanunlarının sayı α indeksinin aldığı qiymətlərlə təyin edilir. Düsturdakı C_1, C_2, C_3 və s. sabitləri müxtəlif saxlanma qanunlarını ifadə edir.

İndi bu qanunların qeyri-kovariant şəklini yazaq. (86.3) düsturunda $\mu=4$ yazsaq, $d\sigma_4=\dfrac{d^4x}{dx_4}=dx_1dx_2dx_3=dV$ alarıq. Bu zaman fəzaya oxşar hipersəth sistemin 3-ölçülü həcminə çevrilir. Silindrin zamana oxşar vahid $n_{1\mu}, n_{2\mu}$ və s. vektorları ilə təyin edilmiş oxu zaman oxu ilə üst-üstə düşür. Bunu sxematik göstərmək üçün t oxu yuxarı yönəlmiş 4-ölçülü fəza təsəvvür edək. Bu ox üzərində t_1, t_2, t_4, t_5 və s. zaman anlarını qeyd edək və həmin nöqtələrdən oxa perpendikulyar müstəvilər keçirək.

Bu müstəvilər sistemin müxtəlif zaman anlarında götürülmüş 3-ölçülü həcmi olacaqdır (şəkil 86.2).



Şəkil **86.2**

Dediklərimizi (86.3) düsturunda nəzərə alsaq

$$\int\limits_{V(t_1)}\theta_{\alpha 4}dV = \int\limits_{V(t_2)}\theta_{\alpha 4}dV = \cdots = \int\limits_{V(t_N)}\theta_{\alpha 4}dV = C_\alpha(t_i) \qquad (86.4)$$

olar. Bu, qeyri-kovariant şəkildə yazılmış inteqral saxlanma qanunlarıdır. Burada sistemin müxtəlif zaman anlarında götürülmüş eyni həcmi üzrə inteqrallanma aparılır. Sistemin həcmi bütün zamanlar üçün eynidir və inteqral zamandan asılı deyildir. C_α sabiti t_i üçün eynidir.

§87. 4-ölçülü fəzanın translyasiyası zamanı Nöter teoremindən alınan nəticə

Biz indi xüsusi hallarda Noter teoremindən alınan nəticələrlə məşğul olacağıq. Əvvəlcə 4-ölçülü fəzanın (fəza-zamanın) sürüşməsinə baxaq. Bu zaman koordinatların çevrilməsi.

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu \qquad (87.1)$$

şəklində yazılır. Burada a_μ ştrixsiz koordinat başlanğıcının 4-ölçülü sürüşmə vektorudur və özü də çevrilmə parametri rolunu oynayır. Bu düsturu başqa şəkildə yazaq:

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = a_\mu\,. \qquad (87.1')$$

Noter teoreminə əsasən qəbul edirik ki, fəzanın sürüşməsi zamanı sistemin təsir inteqralı invariant qalır və ya onun tam variasiyası sıfıra bərabər olur. Koordinatların infinitezimal çevrilməsində koordinatın tam variasiyası $\delta x_\mu = X_{\alpha\mu}\delta\omega_\alpha$ şəklində yazılır (bax(84.2)). Buradakı $\delta\omega_\alpha$ infinitezimal çevrilmə matrisi fəzanın sürüşməsi zamanı elə sürüşmə vektorunun özüdür: $\delta\omega_\alpha = a_\alpha$. Bunu (87.1′) düsturunda nəzərə alsaq

$$\delta x_\mu = X_{\alpha\mu}a_\alpha = x'_\mu - x_\mu = a_\mu$$

olar. Burada ikinci hədlə axırıncı həddin müqayisəsində $X_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu}$ alınır. İndi göstərək ki, koordinatların sürüşməsi zamanı sahə vektoru $U_i(x)$ dəyişmir. Bunun üçün (87.1) çevrilməsinə Lorens çevrilməsinin «xüsusi halı» kimi baxaraq bu hal üçün çevrilmə matrislərini təyin edək:

$$x'_\mu = L_{\mu\gamma}x_\gamma \equiv x_\mu + a_\mu .$$

Buradan $L_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial(x_\mu + a_\mu)}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu} = \delta_{\mu\nu}$ alırıq. Sahə vektorları da koordinat vektorları kimi çevrildiyindən

$$U'_i(x') = L_{ij}U_j(x) = \delta_{ij}U_j(x) = U_i(x)$$

münasibətini yazırıq. Sahə vektorlarının tam variasiyasında (bax(84.4)) yuxarıdakı $U'_i(x') - U(x) = 0$ bərabərliyindən istifadə edərək

$$\delta U_i(x) = Y_{\alpha i}\delta\omega_\alpha \equiv U'_i(x') - U_i(x) = 0 \text{ və ya } Y_{\alpha i} = 0$$

şərtini alırıq. Tapdığımız $X_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu}$ və $Y_{\alpha i}$ şərtlərini (85.7) ifadəsində nəzərə alsaq

$$\theta_{\alpha\mu} = \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\right)} - \delta_{\alpha\mu}\mathcal{L} \qquad (87.2)$$

bərabərliyini alırıq. Bu, baxdığımız $U_i(x)$ sahəsi üçün enerji və impuls tenzorunun ifadəsidir. Bunu elektromaqnit sahəsi üçün alınmış (41.1) enerji və impuls tenzoru ilə müqayisə etsək analogiya çox oxşar gözə çarpar. (41.1) düsturu elektromaqnit sahəsinin 4-ölçülü A_α potensialları üçün yazıldığı halda bizim aldığımız (87.2) düsturu istənilən $U_i(x)$ vektori sahə üçün yazılmışdır. Aldığımız (87.2) ifadəsi doğrudan da 2 ranqlı tenzordur, çünki buradakı μ, α indeksləri eyni bir Minkovski fəzasında götürülmüş indekslərdir: $\alpha, \mu = 1, 2, 3, 4$. Gələcəkdə bu tenzoru $T_{\alpha\mu}$ ilə işarə edəcəyik: $\theta_{\alpha\mu} \equiv T_{\alpha\mu}$. İndi sahənin 4-ölçülü impulsunun kovariant və qeyri-kovariant ifadələri

$$P_\alpha = \frac{i}{c}\int_\sigma T_{\alpha\mu} d\sigma_\mu \quad \text{və} \quad P_\alpha = \frac{i}{c}\int_V T_{\alpha 4} dV \tag{87.3}$$

şəklində yazılır. (87.3) ifadələri Noter teoremində 4-ölçülü impulsun inteqral saxlanma qanunlarıdır (bax: (86.3), (86.4)). Noter teoreminə görə sahənin 4-ölçülü impulsu saxlanılır. Beləliklə təsir inteqralının 4-ölçülü fəzanın sürüşməsinə görə invariantlığı 4 ədəd saxlanma qanununa (enerji və impulsun saxlanmasına) səbəb olur.

§88. 4-ölçülü Minskovski fəzasında fırlanma və tam hərəkət momentinin saxlanması

İndi ikinci sadə məsələ ilə məşğul olaq. Fərz edək ki, baxdığımız sistem Minskovski fəzasında fırlanır və bu zaman onun təsir inteqralı invariant qalır. Sistemin fırlanma nəticəsində koordinatların və sahə vektorlarının $\delta x_\mu = X_{\alpha\mu}\delta\omega_\alpha$ və $\delta U_i(x) = Y_{\alpha i}\delta\omega_\alpha$ tam variasiyalarını hesablayaraq bunları (85.7) ifadəsində nəzərə almaq lazımdır. Qeyd edək ki, (85.7) düsturu işarə dəqiqliyi ilə təyin edilmişdi. Ona görə biz burada $-\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}$-dən istifadə edəcəyik:

$$-\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_\mu}\right)}\left(Y_{\alpha i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_\nu} X_{\alpha\nu}\right) + X_{\alpha\mu}\mathcal{L}. \tag{88.1}$$

Biz §84-dən bilirik ki, 4-ölçülü fəzada fırlanmaya baxdıqda $X_{\alpha\mu}$ və $Y_{\alpha i}$ kəmiyyətlərində α parametrini Minkovski fəzasının iki indeksi ilə işarə edirdik: $\alpha = [\rho\lambda]$. Bundan istifadə edərək yuxarıdakı kəmiyyətləri hesablayaq.

$$X_{\alpha\mu} \equiv X_{[\rho\lambda]\mu} = (I^{[\rho\lambda]})_{\mu\nu} x_\nu = (I^{\rho\lambda} - I^{\lambda\rho})_{\mu\nu} x_\nu .$$

Burada $(I^{\rho\lambda})_{\mu\nu} = \delta_{\rho\mu}\delta_{\lambda\nu}$ olduğunu bilərək hesablamanı davam etdiririk.

$$X_{[\rho\lambda]\mu} = (\delta_{\rho\mu}\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\rho\nu})x_\nu = x_\lambda\delta_{\rho\mu} - x_\rho\delta_{\lambda\mu}. \qquad (88.2)$$

Bu ifadəni (88.1) Noter tenzorunda yerinə yazaraq sadələşdirmə aparaq:

$$-\overset{N}{\theta}_{[\rho\lambda]\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\left(Y_{[\rho\lambda]i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_\gamma}X_{[\rho\lambda]\gamma}\right) + X_{[\rho\lambda]\mu}\mathcal{L} =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}Y_{[\rho\lambda]i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_\gamma}\left[x_\lambda\delta_{\rho\gamma} - x_\rho\delta_{\lambda\gamma}\right]\right) +$$

$$+(x_\lambda\delta_{\rho\mu} - x_\rho\delta_{\lambda\mu})\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}Y_{[\rho\lambda]i} + (x_\rho T_{\lambda\mu} - x_\lambda T_{\rho\mu}). \qquad (88.3)$$

Burada $T_{\lambda\mu}$ və $T_{\rho\mu}$ kəmiyyətləri (87.2) düsturu ilə ifadə olunan sistemin enerji-impuls tenzorlarıdır. Bu tenzorların $\mu = 4$ komponentləri $\frac{i}{c}$ dəqiqliyi ilə sahənin 4-ölçülü impuls sıxlığını ifadə edir: $g_\lambda = \frac{i}{c}T_{\lambda 4}$ və $g_\rho = \frac{i}{c}T_{\rho 4}$. Onda (88.3) düsturunda axırıncı mötərəzəni $x_\rho g_\lambda - x_\lambda g_\rho$ şəklində yaza bilərik. Bu 4-ölçülü kəmiyyət 3-ölçülü fəzada $\vec{M} = [\vec{r}\vec{g}]$ şəklində yazılır və sahənin 3-*ölçülü impuls momentinin sıxlığı* adlanır. Başqa sözlə $\vec{M}$ sahənin orbital momentinin 3-ölçülü sıxlığı olur. Orbital sözünü biz $\vec{M}^0$ şəklində yazırıq. Bu yazılışda $\vec{r}$ sahənin hər hansı nöqtəsinin radius vektoru $\vec{g}$ isə sahənin 3-ölçülü impuls sıxlığıdır. (88.3) bərabərliyində birinçi toplanana sahənin fəza koordinatları daxil olmur və o, sistemin daxili hərəkətlərini, yəni daxili (məxsusi) simmetriyasını təsvir edir. Bu hədd sistemin spin momentinin sıxlığını ifadə edir. (88.3) bərabərliyini $\frac{i}{c}$-yə vuraraq birinci həddi $\frac{i}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial U_i/\partial x_\mu)}Y_{[\rho\lambda]i} = S_{[\rho\lambda]\mu}$ ilə, ikinci həddi $\frac{i}{c}(x_\rho T_{\lambda\mu} - x_\lambda T_{\rho\mu}) = M^0{}_{[\rho\lambda]\mu}$ ilə və bu iki həddin cəmini, yəni $-\frac{i}{c}\overset{N}{\theta}_{[\rho\lambda]\mu}$ həddini $m_{[\rho\lambda]\mu}$ ilə işarə etsək aşağıdakı nəticəni alarıq:

$$m_{[\rho\lambda]\mu} = S_{[\rho\lambda]\mu} + M^0_{[\rho\lambda]\mu}. \qquad (88.3')$$

Alınmış nəticəni belə ifadə edirlər: Minovski fəzasında fırlanmaya baxdıqda sistemin tam hərəkət miqdarı momenti tenzorunun sıxlığı, onun spin momenti tenzorunun sıxlığı ilə orbital momenti tenzorunun sıxlığının cəminə bərabər olur və Nöter teoreminə görə (88.3′) tənliyi saxlanma qanununu ifadə edir. Bu, *diferensial şəkildə saxlanma qanunu* adlanır. İnteqral saxlanma qanununu almaq üçün biz Nöter teoreminin inteqral şəklindən, yəni aşağıdakı bərabərlikdən istifadə etməliyik:

$$-\frac{i}{c}\int_{R(4)}^{N}\frac{\partial\theta_{\alpha\mu}}{\partial x_{\mu}}(d^4x)=0. \tag{88.4}$$

Bu o deməkdir ki, biz 4-ölçülü Qauss teoremindən istifadə edərək qapalı hipersəth üzrə inteqrala keçirik:

$$-\frac{i}{c}\oint_{\Sigma}^{N}\theta_{\alpha\mu}\,d\sigma_{\mu}=0. \tag{88.5}$$

Qapalı hipersəth olaraq silindrin səthini götürsək $\Sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ olar. §86-dakı qaydanı tətbiq edərək, (86.3) düsturundan istifadə edək:

$$-\frac{i}{c}\int_{\sigma}^{N}\theta_{[\rho\lambda]\mu}d\sigma_{\mu}\equiv\int_{\sigma}m_{[\rho\lambda]\mu}d\sigma_{\mu}=\int_{\sigma}S_{[\rho\lambda]\mu}d\sigma_{\mu}+\int_{\sigma}M^{0}{}_{[\rho\lambda]\mu}d\sigma_{\mu}=\text{saxlanılır} \tag{88.5′}$$

Son nəticədə (88.5′)düsturunda inteqrallanma fəzaya oxşar σ hipersəth üzrə aparılır. Bu inteqralları böyük hərflərlə işarə etsək

$$M_{[\rho\lambda]}=S_{[\rho\lambda]}+M^{0}{}_{[\rho\lambda]}=\text{const} \tag{88.5″}$$

olar. Biz 4-ölçülü fəzada fırlanma zamanı mövcud olan saxlanma qanunlarının inteqral şəklini aldıq. Yazılışdan görünür ki, sistemin hərəkət miqdarı momentləri (tam moment, spin momenti və orbital moment) 4-ölçülü 2-ranqlı antisimmetrik tenzorlardır. Yalnız tam moment, yəni spin və orbital momentlərinin cəmi saxlanır. Bu momentlərin kovariant yazılışı (88.5′) düsturunda verilmişdir. Momentlərin qeyri-kovariant ifadələrini almaq üçün (88.5′) ifadəsində $\mu=4$, $d\sigma_4=dV$ və $\sigma=V$ yazmaq lazımdır:

$$\int_{V}m_{[\rho\lambda]4}dV=\int_{V}S_{[\rho\lambda]4}dV+\int_{V}M^{0}{}_{[\rho\lambda]4}dV. \tag{88.5‴}$$

Qeyd edək ki, bu tenzorların yalnız fəza komponentləri $\rho,\lambda=1,2,3$ 3-

ölçülü vektor (psevdo vektor) təşkil edir:

$$\vec{M} = \vec{S} + \vec{M}^0 = \text{const}. \tag{88.6}$$

Bu vektorlar real, ölçülə bilən kəmiyyətlərdir. Əgər hər hansı səbəbə görə orbital momentin müəyyən istiqamətdə proyeksiyası sıfırdırsa, onda spinin həmin proyeksiyası saxlanacaqdır. Biz (88.1) düsturunda $\overset{N}{+}\theta_{\alpha\mu}$ götürə bilərdik. Lakin impuls momentinin qiymətini almaq üçün bunu $-\frac{i}{c}$-yə vurmalıydıq.

Spin anlayışı kvantmexaniki anlayışdır. Bu anlayış onun proyeksiyalarının kvantlanmasını müəyyən edir və spinin ifadəsinin alınması üsuluna təsir etmir. Ona görə biz (88.5′) və (88.5‴) düsturlarından istifadə edərək istənilən sahənin (vektori, bispinor və s.) spin momentini hesablaya bilərik.

§89. Yükün və cərəyanın saxlanması qanunu

Əvvəlki bəhslərdə Nöter teoremini isbat edərkən nəzərə alınmışdır ki, sahə funksiyalarının çevrilməsi koordinatların və zamanın müəyyən çevrilməsi ilə əlaqədardır. Lakin elə hallar mövcuddur ki, sahə funksiyaları koordinatlarla heç bir əlaqəsi olmayan çevrilməyə məruz qalır. Göstərək ki, bu halda da Nöter teoremi ödənir.

Məlumat üçün yada salaq ki, sahənin kvant nəzəriyyəsində hər bir sahəyə müəyyən zərrəciklər qarşı qoyulur və onlar uyğun *sahənin kvantları* adlanır. Məsələn, elektromaqnit sahəsinə fotonlar, bispinor sahəyə elektronlar və pozitronlar qarşı qoyulur və s. Sahələrin özləri həm həqiqi və həmdə kompleks sahə ola bilər. Elektromaqnit sahəsi həqiqi sahədir, lakin bispinor sahə kompleks sahədir. Kompleks sahə kompleks funksiya ilə təsvir olunur. Bu bəhsdə biz sahələri ψ, φ, ξ ilə işarə edəcəyik. Fərz edək ki, n-komponentli kompleks sahə verilmişdir: $\psi_j(x), j = 1,...,n$. Kompleks sahədə həm $\psi_j(x)$ və həmdə $\psi_j^*(x)$ verilməlidir. Fərz edək ki, bu funksiyalar bir parametrli unitar çevrilməyə məruz qalır:

$$\left.\begin{aligned} \psi_j(x) &\to \psi_j'(x) = e^{i\alpha}\psi_j(x), \\ \psi_j^*(x) &\to \psi_j'^*(x) = \bar{e}^{i\alpha}\psi_j^*(x) \end{aligned}\right\}. \tag{89.1}$$

Burada α – hər hansı həqiqi parametrdir. (89.1) çevrilməsinə çox vaxt *birinci növ kalibirləşmə (qradiyent) çevrilməsi* də deyilir. Bu çevrilməni $U(\alpha)=e^{i\alpha}$ şəklində yazırlar ($U^*(\alpha)=e^{-i\alpha}$). Bu bir parametrli unitar çevrilmədir, yəni $U(\alpha)U^*(\alpha)=1$ və $U^*(\alpha)=U^{-1}(\alpha)$.

Sistemin Laqranj funksiyası $\psi_j(x)$ və $\psi_j^*(x)$-lərdən və onların törəmələrindən təşkil edilmiş bixətti kombinasiyalardan asılı olan həqiqi funksiya olmalıdır: $\mathcal{L}\,(\psi_j^*\psi_j(x),\dfrac{\partial\psi_j^*}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_\mu}$ və s.). Çünki biz $\mathcal{L}$ vasitəsilə sahənin enerjisi, impulsu və s. həqiqi kəmiyyətlərini hesablayırıq. Sahənin belə təyin edilmiş Laqranj funksiyası (və təsir inteqralı) (89.1) çevrilməsinə görə invariant qalır. Doğrudan da

$$\psi_j'^*(x)\psi_j'(x)=e^{-i\alpha}e^{+i\alpha}\,\psi^*{}_j(x)\psi_j(x)=\psi_j^*\psi_j(x)=\text{invar},$$

$$\frac{\partial\psi_j'^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi_j'}{\partial x_\mu}=e^{-i\alpha}e^{+i\alpha}\,\frac{\partial\psi_j^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi_j(x)}{\partial x_\mu}=\frac{\partial\psi^*{}_j(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi_j(x)}{\partial x_\mu}=\text{in var}$$

və s. olur. Beləliklə Nöter teoremi ödənir. Bu teoremdən çıxan nəticəni almaq üçün (89.1) düsturunu infinitezimal çevrilmə üçün, yəni $\alpha\to\delta\alpha\langle\langle 1$ şərti üçün yazaq:

$$\psi_j'(x)=e^{i\delta\alpha}\psi_j(x)=(1+i\delta\alpha)\psi_j(x)\,.$$

Buradan $\delta\psi_j(x)=\psi_j'(x)-\psi_j(x)=i\delta\alpha\,\psi_j(x)$ alırıq. Bunu §84-də alınmış sahə funksiyası $U_j(x)$-nın tam variasiyası ilə müqayisə edək: $\delta U_j(x)=Y_{\alpha j}\delta\omega_\alpha$. Müqayisədən $\delta\omega_\alpha=\delta\alpha$, $Y_{\alpha j}=i\psi_j(x)$ alırıq. Əlbəttə biz nəzərə aldıq ki, bu bəhsdə sahə funksiyası $\psi_j(x)$ götürülmüşdür. Çevrilmə zamanı koordinatlar dəyişmədiyinə görə $x=x'$, $\delta x_\mu=X_{\alpha\mu}\delta\omega_\alpha=0$, $X_{\alpha\mu}=0$ olur.

Kompleks sahə halında ψ_j və ψ_j^* eyni hüquqludur və hər iki funksiya eyni bir Laqranj tənliyini ödəyir. Ona görə Nöter tenzoruna ψ_j^*-la əlaqədar aşağıdakı simmetrik hədd əlavə ediləcəkdir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial U_i^*}{\partial x_\mu}\right)}\left(\frac{\partial U_i^*}{\partial x_\nu}X_{\alpha\nu} - Y^*_{\alpha i}\right). \qquad (89.2)$$

İndi biz $\psi_j'^*$ üçün infinitezimal çevrilməni yazaraq $\delta\psi_j^*$-u hesablayırıq və onu əvvəl hesablanmış δU_j^*-la müqayisə edirik:

$$\psi_j^{*'}(x) = e^{-i\delta\alpha}\psi_j^* = (1-i\delta\alpha)\psi_j^*,\ \delta\psi_j^*(x) = \psi_j^{*'}(x) - \psi_j^*(x) = -i\delta\alpha\psi_j^*,$$
$$\delta U_j^*(x) = Y_{\alpha j}^*\delta\omega_\alpha .$$

Son variasiyaların müqayisəsindən aşağıdakı analoji nəticəni alırıq:

$$\delta\omega_\alpha = \delta\alpha,\quad Y_{\alpha j}^* = -i\psi_j^* .$$

Alınmış $\delta\omega_\alpha = \delta\alpha$, $X_{\alpha\mu} = 0$, $Y_{\alpha j} = i\psi_j$, $Y_{\alpha j}^* = -i\psi_j^*$ bərabərlikləri (89.2) həddi əlavə olunmuş Nöter tenzorunda nəzərə alsaq

$$\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j/\partial x_\mu)}(-Y_{\alpha j}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j^*/\partial x_\mu)}(-Y_{\alpha j}^*) =$$
$$= i\left(\psi_j^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j^*/\partial x_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j/\partial x_\mu)}\psi_j\right) \qquad (89.3)$$

olar. (89.3) ifadəsinin sağ tərəfində α indeksi yoxdur və yeganə sərbəst μ indeksi var. Beləliklə $\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}$ tenzoru μ indeksli vektora çevrilir və biz onu J_μ ilə işarə edirik:

$$\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu} \equiv J_\mu = i\left(\psi_j^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j^*/\partial x_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j/\partial x_\mu)}\psi_j\right). \qquad (89.3')$$

Nöter tenzorunun 4-ölçülü divergensiyası sıfır olduğundan

$$\frac{\overset{N}{\theta}_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} \equiv \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (89.4)$$

olur. Bu üsulla alınmış J_μ vektoru *sahənin cərəyan sıxlığı* adlanır və o kəsilməzlik tənliyini ödəyir.

(89.4) diferensial saxlanma qanununda 4-ölçülü həcm üzrə inteqrallama apararaq 4-ölçülü Qauss teoremini tətbiq etsək inteqral saxlanma qanununun kovariant və qeyri-kovariant şəkillərini alarıq:

$$Q=\int_{\sigma} J_{\mu}d\sigma_{\mu}=\int_{V} J_4 dV=\text{saxlanır}. \qquad (89.5)$$

Q müəyyən sabit vuruq dəqiqliyi ilə sahənin yükünü təsvir edir. Sahənin yükü dedikdə yalnız elektrik yükü deyil, həmdə digər uyğun yüklər (barion yükü, hiperyük, lepton yükü və s.) nəzərdə tutulur. Nəzəriyyəyə daxil edilmiş başqa yüklərdən fərqli olaraq elektrik yükü ikili təbiətə malikdir. Bir tərəfdən elektrik yükü Nöter teoreminə görə saxlanan kəmiyyətdir. Digər tərəfdən o, elektromaqnit sahəsi ilə zərrəciyin qarşılıqlı təsirinin «intensivliyinin» ölçüsüdür. Bu qarşılıqlı təsir sabiti $\frac{e^2}{\hbar c}\approx\frac{1}{137}$-dir. Bunu nəzərə alarıq (89.1) çevrilməsində iştirak edən qlobal α parametrini $\alpha=\frac{e}{\hbar c}\alpha'$ şəklində seçərək α'-ə nəzərən infinitezimal çevrilmə aparsaq $y_{\alpha j}$ və $y^{*}_{\alpha j}$ kəmiyyətləri $\frac{e}{\hbar c}$ vuruğu qədər fərqlənər:

$$y_{\alpha j}=\frac{e}{\hbar c}i\psi_j,\quad y^{*}_{\alpha j}=-\frac{e}{\hbar c}i\psi^{*}_j. \qquad (89.6)$$

İndi §35-də təyin edilmiş 4-ölçülü cərəyan sıxlığının $j_{\mu}=\left\{\vec{j}, ic\overset{el}{\rho}\right\}$ ifadəsindən ρ-nu təyin etsək və (89.3) düsturunu nəzərə alsaq

$$\overset{el}{\rho}=\frac{j_4}{ic}=\frac{e}{\hbar c}\frac{1}{ic}i\left(\psi^{*}_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^{*}_j/\partial x_4)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_j/\partial x_4)}\psi_j\right)=$$

$$=i\frac{e}{\hbar c}\left(\psi^{*}_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^{*}_j/\partial t)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial\psi_j/\partial t)}\psi_j\right) \qquad (89.7)$$

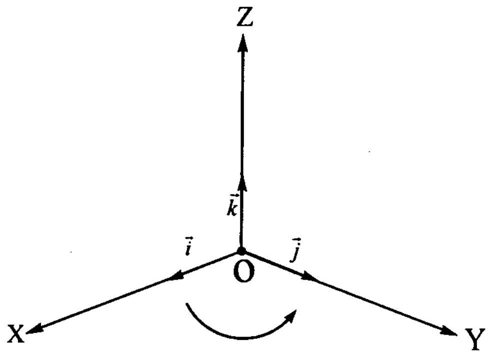
alarıq. Buradan $Q^{el}=\int_V \rho^{el}dV$ olur. (89.7) düsturundan görünür ki, həqiqi sahələr $(\psi_j=\psi^{*}_j)$ yükə malik deyildir. Qeyd edək ki, son §-larda biz $d^4x=dVdx_4$, $dx_4=ict$, $d\sigma_{\mu}=\frac{d^4x}{dx_{\mu}}$ və $d\sigma_4=dV$ qəbul etmişik.

ƏLAVƏLƏR

Ə1. 3-ölçülü Evklid fəzasında vektorlar və tenzorlar cəbri

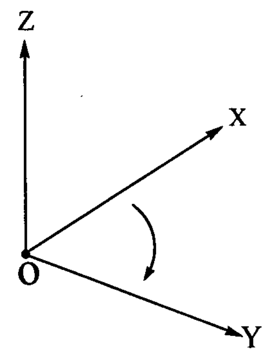
Biz kitabın əsas mətnində istifadə edilən vektorlar, tenzorlar və onların çevrilməsinə aid düsturları aydınlaşdırmaq üçün burada vektorlar və tenzorlara aid ədəbiyyatdan məlum olan anlayışları sadə və qısa şəkildə təhlil edəcəyik. Evklid fəzasının aksiomları bizə orta məktəbdən və ali məktəbin aşağı kurslarından məlum olduğuna görə Evklid fəzasını əsas götürəcəyik. Gələcəkdə 4-ölçülü psevdo Evklid fəzasına keçməyi nəzərdə tuturuq.

3-ölçülü fəzada ortoqonal və düzxətli (Dekart) koordinat sistemi seçək. Sistemin koordinat oxlarını *X, Y, Z* ilə və ya X_1, X_2, X_3 işarə edək. Oxlar boyunca yönəlmiş vahid vektorları (ortları) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ilə və ya $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$-lə, çox vaxt isə $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$-lə işarə edəcəyik. İstənilən mexaniki, fiziki, kimyəvi, bioloji və s. proses seçilmiş koordinat sistemində tədqiq edilir (şəkil Ə1.1).



***Şəkil* Ə1.1. Sağ sistem**

Sistemə K (koordinat sözündən) deyək və koordinat başlanğıcını O ilə işarə edək. Bu koordinat sistemini O sabit qalmaqla müəyyən bucaq qədər fırlatsaq (döndərsək) alınmış yeni sistemə K' deyək (onun oxları X', Y', Z' və ortları $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ olacaqdır). Koordinat sistemlərini «sağ» və «sol» olmaqla iki cür seçirlər. Sağ sistemdə X oxunun kiçik bucaq üzrə Y istiqamətində fırlanmasını Z oxundakı müşahidəçi saat əqrəbinin əksinə hərəkət kimi görür. Şəkil Ə1.1-də göstərilən sistem sağ sistemdir. Sol sistemdə isə həmin hərəkəti Z-dəki müşahidəçi saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində görür (şəkil Ə1.2).



Şəkil **Ə1.2. Sol sistem**

Başqa sözlə sağ koordinat sistemində sağ yivli buruğunun dəstəyini *X* oxundan *Y* oxuna doğru kiçik bucaq üzrə fırlatdıqda burğu *Z* koordinat oxunun müsbət istiqamətində hərəkət edir. Sol koordinat sistemində bu hərəkəti olduğu kimi sol yivli burğu icra edir. Sağ sistemdən sol sistemə keçmək üçün fəza inversiyası etmək, yəni ya fəza oxlarının üçünün də istiqamətini və ya yalnız bir oxun (məsələn. OX-ın) istiqamətlərini əksinə çevirmək lazımdır. Fəza inversiyası əməliyyatını adətən belə işarə edirlər: P (x, y, z → –x, –y, –z).

Əlbəttə K və ya K′ sistemləri tam şəkildə fəzada müəyyən qanunla hərəkət edə bilər (ətalət və qeyri-ətalət sistemləri). Biz belə hərəkətlərlə gələcəkdə məşğul olacağıq. İndi isə baxdığımız sistemləri sadəcə ətalət sistemləri və ya nisbi sükunətdəki sistemlər kimi götürə bilərik.

Təbiətdəki əksər proseslər skalyar, vektor və tenzor adlanan kəmiyyətlərlə xarakterizə edilir. Skalyar yalnız ədədi qiymətlə xarakterizə edilən kəmiyyətə deyilir. O, koordinat sisteminin fırlanması zamanı dəyişmir, yəni invariant qalır. Skalyara misal olaraq fəzanın hər hansı nöqtəsindəki temperaturu, nöqtədə kütlənin sıxlığını, yükün sıxlığını, enerjini və s. göstərə bilərək (əlbəttə söhbət 3-ölçülü fəzadakı skalyardan gedir).

Vektora sadə şəkildə belə tərif vermək olar: vektor həm ədədi qiymətə və həm də istiqamətə malikdir və həndəsi toplanma qanununa tabedir. Vektor üç kəmiyyətin, yəni üç komponentinin məcmuidir və fəzanın fırlanması zamanı komponentlər müəyyən qanunla çevrilir. Vektorlara misal fəza nöqtəsinin sürüşməsi, radius vektor, sürət, təcil, qüvvə və s. ola bilər. Məlumdur ki, radius vektoru belə yazırlar: $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$. Burada *x, y, z* radius vektorun komponentləri və ya oxlar üzrə proyeksiyalarıdır. İstənilən vektoru bu şəkildə yazmaq olar: $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$. Burada a_x, a_y, a_z kəmiyyətləri $\vec{a}$ vektorunun komponentləridir. İndi iki vektorun skalyar hasilini və vektorun hər hansı istiqamətdə proyeksiyasını yada salaq:

$$(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (Ə1.1)$$

Burada $|\vec{a}|$ və $|\vec{b}|$ vektorların mütləq qiymətləri (onları a və b ilə işarə edəcəyik), φ isə bu vektorlar arasındakı bucaqdır. İndi $\vec{a}$ və $\vec{b}$-ni oxlar üzrə proyeksiyalara ayrılmış şəkildə yazaraq bir-birinə vursaq

$$(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z)(\vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (Ə1.2)$$

olar. Burada nəzərə alınmışdır ki, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bir-birinə ortoqonal vahid vektorlardır $((\vec{i}\vec{j}) = (\vec{i}\vec{k}) = (\vec{j}\vec{k}) = 0, \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1)$. Biz istənilən iki vektorun skalyar hasili dedikdə (Ə1.1) və (Ə1.2) düsturlarını nəzərdə tutacağıq.

İki vektorun vektori hasili sağ və sol sistemlərdə sistemin özünə uyğun şəkildə təyin edilir. Sağ sistemdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun vektori hasili qiymətcə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabər olan və ($\vec{a}$, $\vec{b}$) müstəvisinə perpendikulyar istiqamətdə yönəlmiş elə $\vec{c}$ vektorudur ki, onun istiqaməti sağ yivli burğunun dəstəyini $\vec{a}$-dan $\vec{b}$-yə doğru fırlatdıqda burğunun yerdəyişmə hərəkəti istiqamətində olur. Aydındır ki, bu istiqamət $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarını *x, y, z* oxları boyunca yönəltdikdə sağ sistemin alınmasını müəyyən edir. Bu iki vektorun vektori hasili sol sistemdə sol yivli burğu qaydası ilə təyin edilir. Beləliklə [$\vec{a}$ $\vec{b}$] hasili sağ və sol sistemdə bir-birinin əksinə yönəlmiş olur:

$$[\vec{a}\ \vec{b}]_{sağ} = -[\vec{a}\ \vec{b}]_{sol}. \qquad (Ə1.3)$$

Biz [$\vec{a}$ $\vec{b}$] vektori hasilin istiqamətini təyin edəndə $\vec{a}$-dan $\vec{b}$-yə doğru fırlanmaya baxırdıq. Ona görə [$\vec{b}$ $\vec{a}$] hasilinin istiqamətini təyin edəndə $\vec{b}$-dən $\vec{a}$-ya doğru fırlanmaya baxmalıyıq. Bu fırlanmalar bir-birinin əksinə olduğuna görə

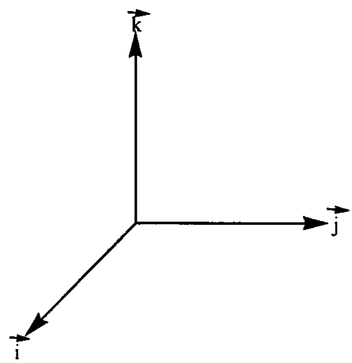
$$[\vec{a}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}] \qquad (Ə1.4)$$

olmalıdır. Hər bir vektor üç komponentlə təyin olunduğuna görə adətən $\vec{a}$ vektorunu a_i, i=1, 2, 3 şəklində yazırlar. Yəni vektor bir indekslə işarə olunur.

Tenzorlar vektora nisbətən daha mürəkkəb quruluşa malikdir və onlar iki, üç, və s. sayda indekslərlə işarə olunur. Ən sadə tenzor sizə mexanikadan məlumdur. Bu sistemin ətalət momenti tenzordur və J_{jk} ilə işarə olunur. Tenzorun indekslərinin sayı onun ranqı adlanır. Ətalət momenti tenzoru 2 ranqlı tenzordur. O, 9 komponentlə təyin olunur: J_{jk}, $j, k=1, 2, 3$.

Fəzanın fırlanması zamanı tenzorun komponentləri müəyyən qanunla çevrilir və bu haqda biz aşağıda ətraflı danışacağıq.

İndi iki vektorun vektori (və ya xarici) hasilini sağ koordinat sisteminin ortlarına tətbiq edək. Ortlar üçün sağ sistem şəkil Ə1. 3-də göstərilmişdir.



Şəkil Ə1.3

Vektori hasilin xassəsindən $[\vec{i}\vec{j}]=\vec{k}$, $[\vec{j}\vec{k}]=\vec{i}, [\vec{k}\vec{i}]=\vec{j}, [\vec{i}\vec{i}]=0$ və s. $[\vec{i}\vec{j}]=-[\vec{j}\vec{i}]$ alırıq. Bunları $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektori hasilində yerinə yazaq və sadələşdirmə aparaq:

$$[\vec{a}\vec{b}]=[\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z,\ \vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z]=$$

$$[\vec{i}\vec{j}]a_xb_y+[\vec{i}\vec{k}]a_xb_z+[\vec{j}\vec{i}]a_yb_x+[\vec{j}\vec{k}]a_yb_z+[\vec{k}\vec{i}]a_zb_x+[\vec{k}\vec{j}]a_zb_y=$$

$$=\vec{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x)\ .$$

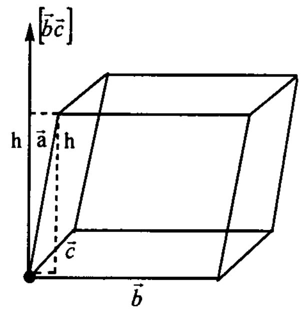
Son bərabərliyi determinant şəklində yaza bilərik:

$$[\vec{a}\vec{b}]=i(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}(a_xb_y-a_yb_x)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.\quad (Ə1.5)$$

Bu determinantı birinci sətrə görə açmaqla bərabərliyin doğru olduğunu asanlıqla göstərmək olar. Yazılışdan aydın görünür ki, $[\vec{a}\vec{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y$, $[\vec{a}\vec{b}]_y = a_z b_x - a_x b_z$, $[\vec{a}\vec{b}]_z = a_x b_y - a_y b_x$. Üç vektorun iki qat vektori hasilini almaq üçün yuxarıdakı düsturlardan istifadə edərək bir qədər sadələşdirmə aparmaq lazımdır:

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{i}(a_y[\vec{b}\vec{c}]_z - a_z[\vec{b}\vec{c}]_y) + \vec{j}(a_z[\vec{b}\vec{c}]_x - a_x[\vec{b}\vec{c}]_z) +$$
$$+ \vec{k}(a_x[\vec{b}\vec{c}]_y - a_y[\vec{b}\vec{c}]_x) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \qquad (Ə1.6)$$

İndi üç vektorun qarışıq hasilini hesablayaq: $(\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\,])$. Fərz edək ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları sağ sistem təşkil edir. Əyanilik üçün tilləri $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ olan paralelepiped quraq (şəkil Ə1. 4).



Şəkil Ə1.4

$[\vec{b}\vec{c}]$ vektoru yuxarıya yönəlmişdir və onun qiyməti $\vec{b}$ və $\vec{c}$ üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə, yəni paralelepipedin oturacağının sahəsinə bərabərdir. $\vec{a}$ vektorunun $[\vec{b}\vec{c}\,]$ üzrə proyeksiyası paralelepipedin h hündürlüyünə bərabərdir. Beləliklə $(\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\,])$ paralelepipedin həcminə bərabərdir:

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\,]) = V_{par.}$$

Bu qarışıq hasili komponentlərində yazsaq, aşağıdakı determinantı alarıq:

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\,]) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (Ə1.7)$$

Qarışıq hasildə vektorların yerini aşağıdakı şəkildə dövri dəyişsək paralelepipedin həcmi dəyişməz qalar:

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}\,])=(\vec{b}\,[\vec{c}\;\vec{a}\,])=(\vec{c}\,[\vec{a}\;\vec{b}\,]). \qquad (Ə1.8)$$

Əgər $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları sol sistem təşkil etsə paralelepipedin həçmi mənfi olar: ($-V_{par}$).

Burada aldığımız (Ə1.4)-(Ə1.8) düsturlarından istifadə edərək vektor hesabında rast gəldiyimiz vektorların istənilən mürəkkəb hasillərini sadələşdirə bilərik. Məsələn,

$$[\vec{A}\vec{B}][\vec{C}\vec{D}] \equiv ([\vec{A}\vec{B}][\vec{C}\vec{D}]) = (\vec{A}\vec{C})(\vec{B}\vec{D}) - (\vec{A}\vec{D})(\vec{B}\vec{C}). \qquad (Ə1.9)$$

$$[[\vec{A}\vec{B}][\vec{C}\vec{D}]] = (\vec{A}[\vec{B}\vec{D}])\vec{C} - (\vec{A}[\vec{B}\vec{C}])\vec{D} \equiv (\vec{A}[\vec{C}\vec{D}])\vec{B} - (\vec{B}[\vec{C}\vec{D}])\vec{A}. \qquad (Ə1.10)$$

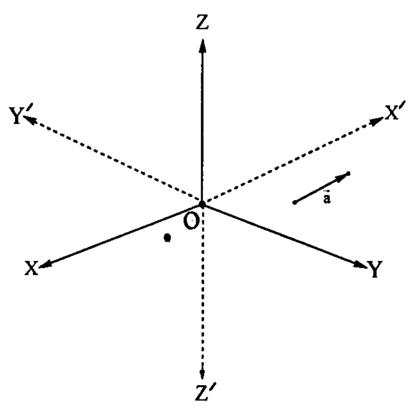
Müasir fizikada adi polyar vektorlarla yanaşı psevdovektorlardan (aksial vektor) istifadə edilir. Adi vektorlar radius-vektora oxşar (yəni sürət, təcil, qüvvə və s.) vektordur. Bu vektorlar həm sağ və həm də sol sistemdə eyni cür təyin edilir. Məsələn, radius vektor iki nöqtəni birləşdirən vektordur və bu nöqtələr hər iki sistemdə eyni fiziki nöqtələrdir. Lakin bir sistemdə bu nöqtələri x_i-lərlə, digərində isə x'_i-lərlə işarə edirlər. Sağ XYZ koordinat sistemini götürək və polyar $\vec{a}$ vektorunu təyin edək. Sonra sistem üzərində inversiya əməliyyatını apararaq sol koordinat sisteminə keçək. Sol sistemin oxlarını X′, Y′, Z′ ilə işarə edək və onları punktirlərlə çəkək. Oxlar və onlarla birlikdə ort vektorlar istiqamətlərini əksinə dəyişir: $\vec{e}_i \to \vec{e}'_i = -\vec{e}_i$ olur (i=1, 2, 3). $\vec{a}$ vektoru hər iki sistemdə eyni cür təyin edilir:

$$\vec{a} = \vec{e}_i a_i = \vec{a}' = \vec{e}'_i a'_i. \qquad (Ə1.11)$$

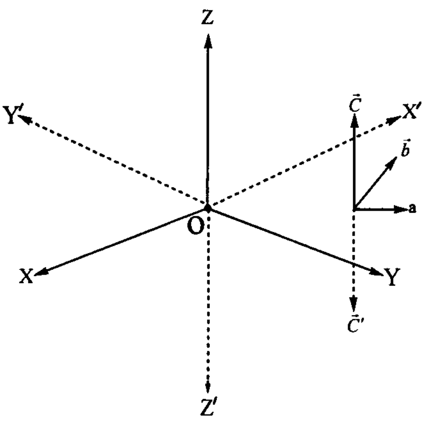
Burada təkrar olunan i indeksi üzrə cəm aparılır (Eynşteyn qaydası), ort vektorlar $\vec{e}_i$ və $\vec{e}'_i$ şəklində seçilmişdir, a_i və a'_i $\vec{a}$ vektorunun ilk və son sistemdə oxlar üzrə proyeksiyalarıdır (şəkil Ə1.5).

(Ə1.11) düsturundan $\vec{e}_i a_i = \vec{e}'_i a'_i = -\vec{e}_i a'_i$ alırıq. İlk və son ifadələrin müqayisəsindən $a_i = -a'_i$ alınır. Beləliklə inversiya nəticəsində polyar vektor dəyişmir, lakin onun komponentləri işarəsini dəyişir.

Biz iki adi vektorun vektori hasilindən danışanda bu hasilin qeyri-adi xassəsini qeyd etmişdik. Bu hasil sağ sistemdən sol sistemə keçdikdə öz istiqamətini əksinə dəyişir. Bu xassə bütün psevdovektorlara aiddir. Ona görə deyirlər ki, iki polyar (adi) vektorun vektori hasili psevdovektordur (və ya aksial vektordur). Aksial vektorlara aid digər misallar da vardır. Məsələn, spin vektoru, bucaq sürəti vektoru aksial vektordur. Əvvəlki misalda olduğu kimi *X, Y, Z* sağ koordinat sistemini seçək və iki adi vektorun $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ vektori hasilini quraq. Sonra sistem üzərində inversiya əməliyyatı apararaq X′, Y′, Z′ sol koordinat sisteminə keçək. Bu zaman vektori hasil öz istiqamətini əksinə dəyişərək $\vec{c}' = -\vec{c}$ olacaqdır (şəkil Ə1.6).



***Şəkil* Ə1.5**



***Şəkil* Ə1.6**

Çevrilmədə $\vec{a}' = \vec{a}$, $\vec{b}' = \vec{b}$, $a'_i = -a_i$, $b'_i = -b_i$, $\vec{e}'_i = -\vec{e}_i$,

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \vec{c}' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix} = -\vec{c}$$

olur. $\vec{c}'$ vektorunun c'_x komponentini hesablayaq:

$$c'_x = a'_y b'_z - a'_z b'_y = a_y b_z - a_z b_y = c_x \text{ və s.}$$

Beləliklə iversiya zamanı psevdovektor öz istiqamətini əksinə dəyişir, lakin onun komponentləri dəyişmir. İnversiya diskret əməliyyatıdır və heç bir kəsilməz çevrilmə yolu ilə onu almaq olmaz.

Mexanikadan məlumdur ki, kiçik səth elementlərini vektor qanunu ilə toplamaq olar. Qəbul olunmuşdur ki, konturu boyunca dolanma istiqaməti verilmiş kiçik səth elementinə vektor kimi baxaraq, onu aşağıdakı şəkildə təyin etmək olar:

$$d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}.$$

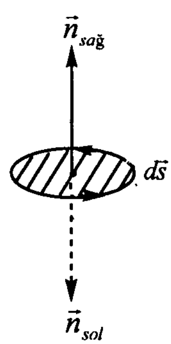
Burada ds – səthin sahəsi, $\vec{n}$ – səthin müsbət normalıdır. Müsbət normal sağ sistemdə konturu dolanma istiqaməti ilə sağ yivli burğu təşkil edir ($\vec{n} = \vec{n}_{sağ}$), sol sistemdə isə sol yivli burğu təşkil edir ($\vec{n} = \vec{n}_{sol}$) (bax: şəkil Ə1.7).

Biz ümumiyyətlə sağ sistemdə işləyəcəyik. Qeyd edək ki, səth elementi vektoru əslində psevdovektordur. Səth elementi vektorunun hər hansı müstəviyə proyeksiyasını almaq üçün elementin sahəsini onun normalı ilə müstəvinin normalı arasındakı bucağın kosinusuna vurmaq lazımdır:

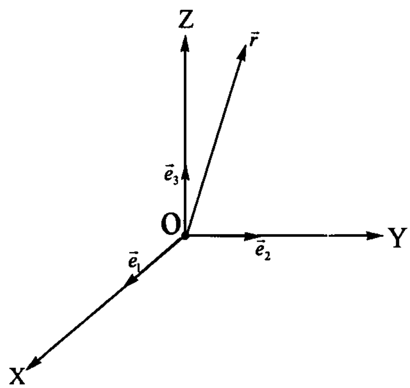
$$(d\vec{s})_{proyeksiya} = ds\cos\alpha\,.$$

Bu ümumi anlayışlardan sonra biz vektorların və tenzorların dəqiq riyazi təriflərini və onların çevrilmə qanunlarını verə bilərik.

Ortoqonal sağ koordinat sistemi seçək və burada hər hansı vektoru, o cümlədən $\vec{r}$ radius vektorunu götürək (şəkil Ə1.8).



Şəkil **Ə1.7**



Şəkil **Ə1.8**

Ort vektorların ortoqonal olmasını

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ olarsa,} \\ 0, & i \neq j \text{ olarsa.} \end{cases} \qquad (\text{Ə}1.12)$$

şəklində yazırlar. δ_{ij} Kroneker simvolu adlanır və o, vahid matrisin elementləridir. Onun əsas xassəsi aşağıdakından ibarətdir:

$$a_i\delta_{ij} = a_j\,. \qquad (\text{Ə}1.13)$$

Bütün kitabda nəzərə alınır ki, təkrar olunan indeks üzrə cəm aparılır (i=1, 2, 3), lakin cəmləmə işarəsi yazılmır (Eynşteyn qaydası). Yuxarıdakı yazılışı belə oxuyurlar: δ_{ij} simvolu a_i vektorunun indeksini özünün digər indeksinə çevirir. Radius vektoru aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\vec{r} = \vec{e}_i x_i . \qquad (Ə1.15)$$

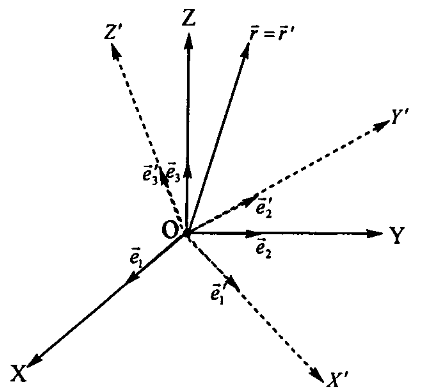
Bu bərabərliyi $\vec{e}_j$ vektoruna skalyar vuraraq radius vektorun x_j komponentini təyin edək:

$$(\vec{e}_j \vec{r}) = (\vec{e}_j \vec{e}_i) x_i = \delta_{ji} x_i = x_j . \qquad (Ə1.15')$$

Məlumdur ki, 3-ölçülü fəzada iki nöqtə arasındakı məsafənin uzunluğu, o cümlədən radius vektorun uzunluğu bütün sistemlərdə eynidir, yəni dəyişmir:

$$\vec{r}^{\,2} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{invar}. \qquad (Ə1.16)$$

İndi ilk sistemlə yanaşı və ona nəzərən müəyyən bucaq qədər dönmüş digər sistemi də götürək və eyni bir radius vektorun bu sistemlərdəki komponentləri arasındakı əlaqəni müəyyən edək (şəkil Ə1.9). Qeyd edək ki, eyni nəticəyə gətirən iki cür fırlanma mövcuddur: *passiv* və *aktiv* fırlanmalar. Biz passiv fırlanmadan istifadə edirik.



Şəkil **Ə1.9**

$$\vec{r} = \vec{e}_j x_j = \vec{r}' = \vec{e}_k' x_k' . \qquad (Ə1.17)$$

(Ə1.17) bərabərliyini $\vec{e}_i'$-ə vuraraq x_i'-i təyin edək:

$$(\vec{e}_i' \vec{e}_j) x_j = (\vec{e}_i' \vec{e}'_k) x_k' = \delta_{ik} x_k' = x_i' \text{ və ya } x_i' = \alpha_{ij} x_j . \qquad (Ə1.18)$$

Burada $\alpha_{ij} = (\vec{e}_i' \vec{e}_j)$ koordinatların çevrilməsi matrisi adlanır və o, ilk sistemin $\vec{e}_j$ oxu ilə son sistemin $\vec{e}_i'$ oxu arasındakı bucağın kosinusuna bərabərdir. Bu matris ilk sistemdən son sistemə keçidi icra edir və buna şərti olaraq düz matris deyəcəyik. İndi (Ə1.17) bərabərliyini $\vec{e}_i$-yə vurmaqla x_i-ni təyin edək:

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j)x_j = (\vec{e}_i\vec{e}'_k)x'_k \text{ və ya } \delta_{ij}x_j = x_i = (\vec{e}_i\vec{e}'_k)x'_k.$$

Bunu yığcam şəkildə yazaq:

$$x_i = \alpha'_{ik}x'_k. \qquad (\text{Ə}1.19)$$

Burada $\alpha'_{ik} = (\vec{e}_i\vec{e}'_k)$ tərs keçidi icra edən matrisdir və o, ilk sistemin $\vec{e}_i$ oxu ilə son sistemin $\vec{e}'_k$ oxu arasındakı bucağın kosinusuna bərabərdir. Bütün vektorlar koordinat oxlarının fırlanması zamanı eyni bir qanunla çevrildiyinə görə biz (Ə1.18) və (Ə1.19) düsturlarını istənilən vektor üçün yazırıq:

$$b'_i = \alpha_{ij}b_j \text{ və ya } b_i = \alpha'_{ik}b'_k. \qquad (\text{Ə}1.20)$$

Beləliklə 3-ölçülü fəzada vektor elə üç b_i (i=1, 2, 3) kəmiyyətin məcmuidir ki, onlar bütün koordinat sistemlərində təyin olunur və sistemin fırlanması zamanı (Ə1.20) qanunu ilə çevrilir. α'_{ik} tərs keçidi icra etdiyinə görə ona tərs matris deyilir. Onu adətən $\alpha'_{ik} \equiv \alpha^{-1}_{ik}$ şəklində yazırlar. $\alpha_{ij} = (\vec{e}'_i\vec{e}_j)$ və $\alpha'_{ij} = (\vec{e}_i\vec{e}'_j)$ matrislərini müqayisə etsək görərik ki, α' matrisi α-dan transponirə edilməklə, yəni sətirləri sütunlarla və əksinə sütunları sətirlələ əvəz etməklə alınır. Matrislərdə birinci indeks sətri ikinci indeks isə sütunu göstərir. Transponirə etmək əməliyyatını ~ (tilda) isə göstərsək $\alpha' = \tilde{\alpha}$ yaza bilərik. Xüsusi halda $\alpha_{ij} = (\vec{e}'_i\vec{e}_j)$ və $\alpha'_{ji} = (\vec{e}_j\vec{e}'_i)$ matris elementlərinə nəzər salsaq hər iki element eyni bir bucağın (yəni, $\vec{e}'_i$ ilə $\vec{e}_j$ arasındakı bucağın) kosinusuna bərabərdir: $\alpha'_{ji} = \alpha_{ij}$ Beləliklə fırlanmada düz matrisdən tərs matrisə (və əksinə) keçmək üçün matrisdə indekslərin yerini dəyişmək lazımdır. Matrisdə indekslərin yerini dəyişmək transponirə etmək deməkdir. Dediklərimizi ümumi şəkildə yazırıq:

$$\alpha' \equiv \alpha^{-1} = \tilde{\alpha} \text{ və } \tilde{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij}, \alpha'_{ji} = \alpha_{ij}. \qquad (\text{Ə}1.21)$$

Göstərək ki, bu matrislər ortoqonal matrislərdir. Bu məqsədlə radius vektorun (istənilən vektorun) kvadratının fırlanmada invariant qalmasından istifadə edərək x'^2_i ifadəsində (Ə1.20) çevrilməsini nəzərə alaq:

$$\mathit{invar} = x_j^2 = x'^2_i = x'_i x'_i = \alpha_{ij}x_j\alpha_{ik}x_k = \alpha_{ij}\alpha_{ik}x_jx_k. \qquad (\text{Ə}1.22)$$

Bu bərabərlikdə birinci və axırıncı hədlərin üst-üstə düşməsi üçün $\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$ olmalıdır. Bu ortoqonallıq şərtidir. Əgər $x_j^2 = x_i'^2$ bərabərliyində x_j^2-lər üzərində (Ə1.20) çevrilməsini aparsaq $\alpha'_{ji}x'_i\alpha'_{jk}x'_k = x_i'^2$ alarıq. Buradan $\alpha'_{ji}\alpha'_{jk} = \delta_{ik}$ olar. İndekslərin yerini dəyişərək ştrixləri atsaq $\alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik}$ alınar. Bu iki ortoqonallıq şərtini birləşdirərək ümumi şəkildə

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \alpha_{jl}\alpha_{kl} = \delta_{jk} \tag{Ə1.23}$$

yaza bilərik. Düz matrisi düz matrisə (və ya tərs matrisi tərs matrisə) vurduqda cəmləmə indeksi matrislərin hasilində eyni yerdə durmalıdır. Lakin düz matrisi tərs matrisə və ya əksinə vurduqda cəmləmə indeksləri matrislərdə müxtəlif yerlərdə durur. Doğrudan da (Ə1.23)-də bir matrisin indekslərinin yerini dəyişərək tərs matrisə keçsək

$$\alpha'_{ji}\alpha_{ik} = \alpha'_{lj}\alpha_{kl} = \delta_{jk} \tag{Ə1.23'}$$

olar. Son ifadədə düz matrisdən tərs matrisə keçsək tərs matrislər üçün yazılmış (Ə1.23) ortoqonallıq şərtini alarıq. İndi göstərək ki, fırlanma zamanı ort vektorlar da koordinatlar kimi çevrilir. Bu düsturu almaq üçün əvvəlcə $\vec{r} = \vec{e}_j x_j$-də tərs keçid edək: $\vec{r} = \vec{e}_j x_j = \vec{e}_j\alpha'_{ji}x'_i$. Sonra $\vec{r} = \vec{r}' = \vec{e}'_i x'_i$ yazaraq bu ifadələrin müqayisəsindən $\vec{e}_j\alpha'_{ji}x'_i = \vec{e}'_i x'_i$ və ya $\vec{e}'_i = \vec{e}_j\alpha'_{ji}$ alarıq. Son ifadədə $\alpha'_{ji} = \alpha_{ij}$ yazaraq

$$\vec{e}'_i = \alpha_{ij}\vec{e}_j \tag{Ə1.24}$$

ort vektorun çevrilməsi düsturunu alırıq. Bu düstur koordinat üçün yazılmış (Ə1.18) düsturu ilə üst-üstə düşür. Həmin qayda ilə göstərmək olar ki, $\vec{e}_i$ də uyğun düsturla çevrilir.

$$\vec{e}_i = \alpha'_{ij}\vec{e}'_j. \tag{Ə1.25}$$

İndi göstərək ki, çevrilmə matrisinin determinantı vahidə bərabərdir. Bunun üçün (Ə1.23') ortoqonallıq şərtinin determinantını hesablayaq və matrislərin hasilinin determinantının onların determinantları hasilinə bərabər olduğunu nəzərə alaq:

$$|\alpha'_{ji}\alpha_{ik}| = |\delta_{jk}| \text{ və ya } |\alpha'_{ji}||\alpha_{ik}| = |\alpha_{ij}||\alpha_{ik}| = |\alpha_{ik}|^2 = 1. \tag{Ə1.26}$$

Buradan $|\alpha_{ik}| = \pm 1$ alırıq. $|\alpha_{ik}| = +1$ əsil fırlanmaya uyğundur, $|\alpha_{ik}| = -1$

isə koordinat sisteminin inversiyasını (və ya güzgü əksini) təsvir edir.

Bu əlavədə biz inversiyanı aşağıdakı kimi təsvir etmişdik:

$$\vec{e}_i = -\vec{e}'_i, a_i = -a'_i \text{ (və ya } x_i = -x'_i).$$

İnversiya matrisinin determinantını hesablasaq

$$\left|\alpha_{ij}\right|^{\text{invers}} = \left|\vec{e}'_i\vec{e}_j\right|^{\text{invers}} = \left|-\vec{e}_i\vec{e}_j\right| = \left|-\delta_{ij}\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

alarıq.

3-ölçülü fəzada iki ranqlı tenzor dedikdə elə doqquz $T_{ij}(i, j = 1,2,3)$ kəmiyyətin məcmui başa düşülür ki, koordinat sistemi fırlandıqda bu kəmiyyətlər aşağıdakı qanunla çevrilsin:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl}. \tag{Ə1.27}$$

Tenzorun hər bir indeksi bir vektor kimi çevrilir və ya iki ranqlı tenzor iki a_i və b_j vektorların hasili kimi çevrilir:

$$a'_i b'_j = \alpha_{ik}\alpha_{jl}a_k b_l.$$

Tenzorun indekslərinin sayı onun ranqı adlanır. Tenzorun iki indeksi yerlərini dəyişdikdə tenzor dəyişmirsə o, bu indekslərə görə simmetrik tenzor adlanır:

$$S_{ij} = S_{ji}. \tag{Ə1.28}$$

Əgər tenzorun iki indeksi yerlərini dəyişdikdə tenzor yalnız işarəsini əksinə dəyişirsə o, indekslərə görə antisimmetrik (və ya çəpsimmetrik) tenzor adlanır:

$$A_{ij} = -A_{ji}. \tag{Ə1.29}$$

Antisimmetik tenzorun diaqonal elementləri sıfırdır:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$$

Üç ranqlı tenzor 3^3=27 komponentlə təyin edilir və onlar aşağıdakı qanunla çevrilir:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}T_{lmn}. \tag{Ə1.30}$$

Yalnız eyni ranqlı tenzorları toplamaq və çıxmaq olar:

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}.$$

İstənilən ranqlı tenzorları bir-birinə vurmaq olar:

$$T_{ijklm} = A_{ijk} B_{lm}.$$

Koordinat sisteminin fırlanması zamanı dəyişməyən kəmiyyətə (funksiyaya) skalyar deyilir:

$$S(x) = S'(x'). \qquad (Ə1.31)$$

Skalyara misal elektrostatik sahənin potensialını göstərmək olar. Vektorlar, tenzorlar və skalyarlar fəza koordinatlarından əlavə digər parametrlərdən də (spin, temperatur və s.) asılı ola bilər. Lakin bizi onların koordinatlardan asılılığı maraqlandırır.

İndi isbat edək ki, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ törəmə alma operatoru fəzanın fırlanması zamanı özünü x_i vektoru kimi aparır. Bunun üçün hər hansı skalyar $\varphi(x) = \varphi'(x')$ funksiyasının törəməsini hesablayaq və lazım olduqda koordinatların (Ə1.18) və (Ə1.19) çevrilmə düsturlarından istifadə edək:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \varphi'(x')}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi'(x')}{\partial x'_k} \cdot \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k} \frac{\partial (\alpha_{kl} x_l)}{\partial x_i} =$$

$$= \alpha_{kl} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k} \frac{\partial x_l}{\partial x_i} = \alpha_{kl} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k} \delta_{li} = \alpha_{ki} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k} = \alpha'_{ik} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_k}.$$

Bu bərabərliyin sol və sağ tərəfindən φ və φ'-i atsaq

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha'_{ik} \frac{\partial}{\partial x'_k} \qquad (Ə1.32)$$

olar. Bu düstur x_i üçün yazılmış (Ə1.19) düsturunun özüdür. Onda ikiqat törəmə $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ özünü $x_i\, x_j$ hasili kimi aparar.

Tətbiqi məsələlərdə 3 ranqlı antisimmetrik vahid e_{ijk} tenzoru (psevdotenzoru) mühüm rol oynayır. O, bütün koordinat sistemlərində eyni cür təyin edilir, bütün indekslərinə görə antisimmetrikdir, əsas elementi $e_{123} = +1$-dir digər elementləri ± 1 və sıfırdır.

$$e_{123} = -e_{213} = e_{231} = -e_{321} = e_{312} = -e_{132}$$

Heç olmazsa iki indeksi eyni olan element sıfırdır:

$$e_{113} = e_{221} = e_{332} = e_{111} = 0 \text{ və s.}$$

Ümumi halda e_{ijk} aşağıdakı kimidir:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{əgər ijk cüt sayda yerdəyişmə ilə 123 şəklinə düşərsə,} \\ -1 & \text{əgər ijk tək sayda yerdəyişmə ilə 123 şəklinə düşərsə,} \\ 0 & \text{əgər ijk heç bir yolla 123 şəklinə düşməzsə} \end{cases} \qquad (\text{Ə}1.33)$$

Bu kəmiyyətin psevdotenzor olduğunu göstərək. İlk baxışda belə görünür ki, e_{ijk} üç indeksə malik olduğuna görə üç ranqlı tenzor kimi çevrilməlidir:

$$e'_{ijk} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kl}e_{mnl}. \qquad (\text{Ə}1.34)$$

Sadəlik üçün bu tenzorun əsas elementi olan e'_{123} həddinin çevrilməsinə baxaq:

$$e'_{123} = \alpha_{1m}\alpha_{2n}\alpha_{3l}e_{mnl}. \qquad (\text{Ə}1.34')$$

Burada təkrar olunan m, n və l üzrə cəm aparsaq və e_{mnl} tenzorunun yuxarıda verilən qiymətlərindən istifadə etsək aşağıdakı nəticəni alarıq:

$$e'_{123} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} e_{123} = |\alpha_{pq}| e_{123}. \qquad (\text{Ə}1.34'')$$

Bu son nəticəni analiz edək. Əgər biz koordinat sisteminin fırlanmasına baxırıqsa $|\alpha_{pq}| = +1$ olmalıdır. Onda (Ə1.34″)-dən

$$e'_{123} = e_{123} \text{ və ya } 1 = 1$$

alırıq. Fırlanmada məhz belə də olmalıdır və burada heç bir ziddiyyət yoxdur. Lakin indi inversiya çevrilməsinə baxsaq, onda $\overset{\text{invers}}{|\alpha_{pq}|} = -1$ olur. Bunu (Ə1.34″)-də nəzərə alsaq $e'_{123} = -e_{123}$ və ya 1=–1 olur. Bu aşkar səhvdir və (Ə1.34), (Ə1.34′) çevrilmələrinin ziddiyyətli olmasını göstərir. Bu ziddiyyəti aradan qaldırmaq üçün (Ə1.34) çevrilmə düsturunun sağ tərəfini əlavə olaraq çevrilmə matrisinin determinantına vurmaq lazımdır:

$$e'_{ijk} = |\alpha_{pq}| \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kl} e_{mnl} . \qquad (Ə1.35)$$

İndi (Ə1.34″) düsturu aşağıdakı şəklə düşəcəkdir:

$$e'_{123} = |\alpha_{pq}|^2 e_{123} = e_{123} = \text{invar} \qquad (Ə1.35')$$

Beləliklə e_{ijl} psevdotenzoru bütün çevrilmələrdə invariant qalır: $e'_{ijl} = e_{ijl} = \text{invar}$. (Ə1.35) düsturu istənilən üç ranqlı psevdotenzorun çevrilməsi düsturudur. Bu düsturu iki ranqlı psevdotenzor üçün aşağıdakı kimi yazırlar:

$$P'_{ij} = |\alpha_{pq}| \alpha_{im} \alpha_{jn} P_{mn} . \qquad (Ə1.36)$$

İstənilən ranqlı psevdotenzorların çevrilməsində $|\alpha_{pq}|$ matrisi vuruq şəklində iştirak edir. Çox vaxt vektora bir ranqlı, skalyara sıfır ranqlı tenzor deyirlər. İndi psevdoskalyarın çevrilməsi qanunu belə yazılır:

$$S'(x') = |\alpha_{pq}| S(x) . \qquad (Ə1.37)$$

Əgər çevrilmə fırlanmadırsa $|\alpha_{pq}| = +1$ və $S'(x') = S(x) = \text{invar}$ alınır. Əgər çevrilmə fəza inversiyasıdırsa, onda $|\alpha_{pq}| = -1$ və $S'(x') = -S(x)$ olur. Beləliklə inversiya zamanı psevdoskalyar işarəsini dəyişir. İndi istənilən çevrilmə üçün vektorun və psevdovektorun dəyişmə qanunu yazaq:

$$V'_i = \alpha_{ij} V_j ,\ P'_i = |\alpha_{pq}| \alpha_{ij} P_j . \qquad (Ə1.38)$$

Əgər çevrilmə fırlanmadırsa $|\alpha_{pq}| = +1$ olur və psevdovektor da vektor qanunu ilə dəyişir (hər iki düstur eyni şəkildə yazılır.) Lakin bizi inversiya çevrilməsi maraqlandırırsa, onda vektorun və psevdovektorun çevrilmə düsturları bir-birindən fərqli olaraq (Ə1.38) şəklində yazılır. İnversiya çevrilməsi üçün $\alpha_{ij} = (\vec{e}'_i \vec{e}_j) = -(\vec{e}_i \vec{e}_j) = -\delta_{ij}$ olur. Bunu (Ə1.38)-də nəzərə alaraq V'_i və P'_i ifadələrini hesablayaq:

$$V'_i = -\delta_{ij} V_j = -V_i ,\ P'_i = -|\alpha_{pq}| \delta_{ij} P_j = -|\alpha_{pq}| P_i = P_i .$$

Beləliklə inversiya zamanı vektorun komponenti işarəsini əksinə dəyişir, psevdovektorun komponenti isə dəyişmir. Biz bu nəticəni əvvəllər başqa üsulla almışdıq. Bu nəticəni istənilən n ranqlı tenzorlara da aid etmək olar: koordinatların inversiyası zamanı polyar (əsil) tenzorun komponentləri $(-1)^n$ vuruğunu, psevdotenzorun komponentləri isə $(-1)^{n+1}$ vuruğunu kəsb edir. Biz 3-ölçülü fəzada vektorların və tenzorların komponentlərini latın əlifbasının hərfləri ilə (i, j, k, l və. s) işarə etmişik və bu indekslər yalnız üç qiymət alır (1, 2, 3). Xarici ədəbiyyatda e_{ijl} tenzoruna Levi-Çevit tenzoru deyilir.

Verilmiş məlumatı möhkəmləndirmək üçün aşağıdakı misalları həll etmək məsləhətdir.

MİSALLAR

1.1. İsbat edin ki, Kroneker simvolu δ_{ij} 2-ranqlı simmetrik tenzordur və fəzada istənilən çevrilmə (fırlanma və inversiya) zamanı invariant qalır: $\delta'_{ij} = \delta_{ij} = \text{invar}$.

1.2. İxtiyari iki-ranqlı T_{ij} tenzorunu simmetrik və antisimmetrik iki tenzorun cəmi şəklində göstərin.

1.3. Göstərin ki, T_{ij} tenzorunun diaqonal elementlərinin çəmi invariantdır.

1.4. Əgər $a_i b_i = \text{invar}$ və b_i vektorudursa, göstərin ki, a_i-də vektordur.

1.5. $b_i = T_{ij} a_j$ münasibətində T_{ij}-iki ranqlı tenzor və a_j vektordursa, b_i-nin vektor olduğunu göstərin.

1.6. Tenzorun simmetriklik və antisimmetriklik xassəsinin fəzanın fırlanması zamanı dəyişməz (invariant) qalmasını sübut edin.

1.7. Simmetrik (S_{ij}) və antisimetrik (A_{ij}) tenzorun aşağıdakı şəkildə hasilinin $A_{ij} S_{ij} = 0$ olduğunu sübut edin.

1.8. T_{ij} və P_{ij}-nin iki-ranqlı tenzor və psevdotenzor olduğunu bilərək $T_{ij} P_{ij}$ hasilinin psevdoskalyar olmasını göstərin.

1.9. Aşağıdakı bərabərliklərin doğrululuğunu yəqin edin:

a) $\left[\vec{A}\vec{B}\right]_i = e_{ijk} A_j B_k$,

b) $\left(\left[\vec{A}\vec{B}\right]\vec{C}\right) = e_{ijk} A_i B_j C_k$.

1.10. İki $\vec{b}_1$ və $\vec{b}_2$ vektorunun sferik koordinat sistemində polyar bucaqlarının θ_1,φ_1 və θ_2,φ_2 olduğunu bilərək bu vektorlar arasındakı bucağın kosinusunun aşağıdakı düsturla hesablandığını göstərin: $\cos\alpha = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

1.11. Göstərin ki, hər hansı koordinat sistemində bir-birinə paralel olan iki vektor $a_i = Db_i$, koordinat sisteminin çevrilməsi zamánı öz paralelliyini saxlayır.

1.12. İki ranqlı antisimmetrik $A_{ij} = -A_{ji}$ tenzorunun bir B_i vektoruna ekvivalent olmasını isbat edin. B_i kəmiyyəti A_{ij} tenzorunun dual vektoru adlanır. *Göstəriş*: bu tenzorun 3 asılı olmayan komponenti vardır: A_{23}, A_{31} və A_{12}.Vektorun üç B_1, B_2, B_3 toplananlarını bu kəmiyyətlərlə əlaqələndirmək olar: $B_i = \frac{1}{2} e_{ijk} A_{jk}$.

1.13. Aşağıdakı eynilikləri isbat edin:

a) $e_{ikl} e_{inp} = \delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}$,

b) $e_{ikl} e_{ikp} = 2\delta_{lp}$,

c) $e_{ikl} e_{ikl} = 6$,

d) $e_{ikl} e_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$.

Göstəriş: a)-da bu iki vahid tenzorun hasili ± 1 ola bilər və yazılışdan görünür ki, kl indeksləri np indeksləri ilə tam kommutasiya edir. Onda a) bərabərliyi müəyyən əmsal dəqiqliyi ilə aşağıdakı kimi göstərilir:

$$e_{ikl} e_{inp} = B_1 \delta_{kn}\delta_{lp} + B_2 \delta_{kp}\delta_{ln}.$$

Əmsalları tapmaq üçün bir dəfə k=n yazaraq, ikinci dəfə k=p qəbul edərək təkrar olunan indekslər üzrə cəmləmə apararaq iki tənlik alırıq:

$$e_{ikl} e_{ikp} = 3B_1\delta_{lp} + B_2\delta_{lp} = (3B_1 + B_2)\delta_{lp},$$
$$e_{ikl} e_{ink} = B_1\delta_{ln} + 3B_2\delta_{ln} = (B_1 + 3B_2)\delta_{ln}.$$

Birinci tənliyin sol tərəfini $e_{ikl} e_{ikp} = c\delta_{lp}$ şəklində təsvir edərək l=p yazmaqla cəmləmə aparsaq $e_{ikl} e_{ikl} = 6 = 3c$ alarıq. Buradan c=*2* alınır.

Bunu yuxarıda nəzərə alsaq $e_{ikl}e_{ikp} = 2\delta_{lp}$ olur, yəni b) eyniliyini isbat etmiş oluruq. Uyğun əməliyyatı ikinci tənliyin sol tərəfində aparsaq $e_{ikl}e_{ink} = -e_{ikl}e_{ikn} = -2\delta_{ln}$ alarıq. Bu da b) eyniliyidir. Bu eynilikləri yuxarıdakı iki tənlikdə nəzər alsaq $B_1 = -B_2 = 1$ qiymətini tapırıq. Onda $e_{ikl}e_{inp} = \delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}$ alırıq. Bu, a) eyniliyidir.

Ən ümumi d) halından görünür ki, vahid tenzorların hasili vahiddir və ikl indeksləri mnp indeksləri ilə tam kommutasiya edir. Müəyyən vuruq dəqiqliyi ilə bu hasili belə yazmaq olar.

$$e_{ikl}e_{mnp} = A_1\delta_{im}\delta_{kn}\delta_{lp} + A_2\delta_{im}\delta_{kp}\delta_{ln} + A_3\delta_{in}\delta_{km}\delta_{lp} +$$
$$+ A_4\delta_{in}\delta_{kp}\delta_{lm} + A_5\delta_{ip}\delta_{km}\delta_{ln} + A_6\delta_{ip}\delta_{kn}\delta_{lm}.$$

Əmsalları tapmaq üçün yuxarıda etdiyimiz qayda ilə uyğun indeksləri bərabər edərək cəmləmə aparmaq və a), b) eyniliklərindən istifadə etmək kifayətdir. Bu üsulla $A_1 = A_4 = A_5 = 1$ və $A_2 = A_3 = A_6 = -1$ olduğunu müəyyən edirik. Bu əmsalları yuxarıda yerində yazdıqda d)-dəki determinantın açıq şəklini almış oluruq.

1.14. Göstərin ki, koordinat sisteminin sonsuz kiçik fırlanması matrisini $\alpha = I + \varepsilon$ şəklində yazmaq olar. Burada ε kiçik antisimmetrik matrisidir ($\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$). ε_{ij}-nin həndəsi mənasını aydınlaşdırın.

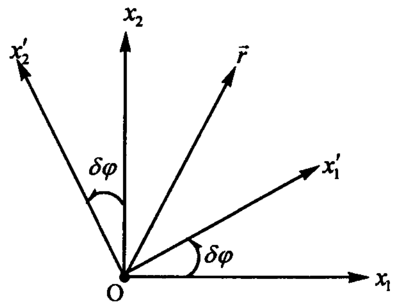
Göstəriş: $x'_i = \alpha_{ij}x_j = (I+\varepsilon)_{ij}x_j = x_i + \varepsilon_{ij}x_j$. Bu ifadəni kvadrata yüksəldin və $|\varepsilon_{ij}| << 1$ şərtini nəzərə alın. ε_{ij} kiçik fırlanma bucağı $\delta\varphi_i$ ilə əlaqədardır: $\delta\varphi_i = \frac{1}{2}e_{ijl}\varepsilon_{jl}$.

(*Aşağıdakı məsələyə bax*).

1.15. Dekart koordinat sistemi x_3 oxu ətrafında kiçik $\delta\varphi$ (yəni $\delta\varphi_z$) bucağı qədər fırlandıqda vektorun komponentlərinin çevrilməsi düsturunu yazın və bunu istənilən kiçik fırlanma üçün vektor şəklində ümumiləşdirin.

Göstəriş: Passiv fırlanmadan istifadə edərək (şəkil Ə1.10) aşağıdakı çevrilməni yazın:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\delta\varphi + x_2\sin\delta\varphi \approx x_1 + \delta\varphi x_2, \\ x'_2 &= -x_1\sin\delta\varphi + x_2\cos\delta\varphi \approx -\delta\varphi x_1 + x_2, x'_3 = x_3. \end{aligned} \tag{Ə1.39}$$



Şəkil **Ə1.10**

Bu düsturu əvvəlki məsələdəki

$$x_i' = x_i + \varepsilon_{ij} x_j \qquad (Ə1.40)$$

düsturu ilə müqayisə etsək $\varepsilon_{12} = \delta\varphi$ alarıq. (Ə1.39) düsturunu sadə vektor şəklində $\vec r' = \vec r - [\delta\vec\varphi \vec r]$ kimi yazmaq olar. Bu yazılışda $\delta\vec\varphi = \vec k \delta\varphi_z$-dir. Digər oxlar ətrafında da fırlanmaları nəzərə alaraq bu düsturu ümumiləşdirmək mümkündür:

$$\vec R' = \vec R - [\delta\vec\varphi \vec R] \qquad (Ə1.41)$$

Bu düsturda $\delta\vec\varphi = \vec i \delta\varphi_x + \vec j \delta\varphi_y + \vec k \delta\varphi_z$ şəklindədir və $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ uyğun oxlar ətrafında kiçik fırlanma bucaqlarıdır. Bu düsturun hər hansı istiqamətdə proyeksiyasını alsaq:

$$x_i' = x_i - e_{ilj} \delta\varphi_l x_j$$

və bunu (Ə1.40) ilə müqayisə etsək $\varepsilon_{ij} = -e_{ilj} \delta\varphi_l$ alarıq. Bu bərabərliyi ε_{mij}-yə vurub təkrar olunan indekslər üzrə cəmləmə aparsaq,

$$\delta\varphi_m = \frac{1}{2} e_{mij} \varepsilon_{ij} \qquad (Ə1.42)$$

olar. Beləliklə fırlanma bucağı psevdovektordur.

1.16. Göstərin ki, bütün koordinat sistemlərində komponentləri eyni olan vektor sıfırdır, komponentləri eyni olan 2-ranqlı tenzor δ_{ik} ilə mütənasibdir, komponentləri eyni olan 3-ranqlı tenzor e_{ikl} ilə mütənqsibdir və komponentləri eyni olan 4-ranqlı tenzor $\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}$ ilə mütənasibdir.

Göstəriş: $A'_i = A_i (i = 1,2,3)$ şərti verilir. Digər tərəfdən Z oxu ətrafında fırlanma düsturunda $A'_x = A_x \cos\varphi_z + A_y \sin\varphi_z$, $A'_y = A_y \cos\varphi_z - A_x \sin\varphi_z$ biz $\varphi_z = \pi$ yazaraq $A'_x = -A_x, A'_y = -A_y$ alırıq. Bunların birinci şərtlə müqayisəsindən $A'_x = A'_y = 0$ olur. İndi X oxu ətrafında fırlanma düsturunda $\varphi_x = \pi$ yazsaq $A'_z = -A_z$ alarıq. Bunu da birinci şərtlə müqayisə etsək $A'_z = 0$ olar. Beləliklə $A'_x = A'_y = A'_z = 0$ olur.

İndi bütün sistemlərdə eyni olan 2-ranqlı tenzora baxaq. T_{ik} tenzorunu $T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = S_{ik} + A_{ik}$ şəklində simmetrik və antisimmetrik tenzorların cəmi kimi göstərmək olur. A_{ik} tenzorunun bir vektora ekvivalent olmasını və bütün sistemlərdə eyni olan vektorun sıfır olduğunu nəzərə alaraq A_{ik} tenzorunu ata bilərik. Simmetrik S_{ik} tenzorunu diaqonal şəklə gətirək:

$$S_{ik} = \lambda^{(i)} \delta_{ik}.$$

İndi ştrixli sistemə keçək və bu tenzorun bütün sistemlərdə eyni olduğunu nəzərə alaq:

$$S'_{ml} = \alpha_{mi} \alpha_{lk} \lambda^{(i)} \delta_{ik} = \alpha_{mi} \alpha_{li} \lambda^{(i)}. \qquad (\text{Ə}1.43)$$

Son ifadədə $\lambda^{(i)}$ həddindəki i indeksi işləri korlayır. Əgər $\lambda^{(i)}$ vuruğu i indeksindən asılı olmazsa $(\lambda^{(i)} = \lambda)$ (Ə1.43-də) sonuncu ifadə $\alpha_{mi} \alpha_{li} \lambda = \lambda \delta_{ml}$ şəklində yazılar və S_{ik} tenzoru bütün sistemlərdə eyni qiymət alar. Beləliklə $T_{ik} = \lambda \delta_{ik}$ olur. Növbəti tenzor bütün sistemlərdə eyni olan T_{ikl} tenzorudur. Bu tenzoru da simmetrik və antisimmetrik tenzorların cəmi şəklində göstərmək olar. Bunun üçün bu tenzoru üç ədəd nömrələnmiş hər hansı tenzorların cəmi şəklində göstərək:

$$T_{ikl} = T^0_{ikl} + T^0_{lik} + T^0_{kli}.$$

Bu üç nömrələnmiş tenzorda indekslərin yerini dəyişməklə yeni $T^0_{ilk} + T^0_{lki} + T^0_{kil}$ üçhədli ifadə alırıq. Bu üçhədlini əvvəlcə T_{ikl}-ə əlavə edib 2-yə bölsək və sonra onu T_{ikl}-dən çıxaraq 2-yə bölsək və son nəticələri toplasaq $T_{ikl} = S_{ikl} + A_{ikl}$ alarıq. Burada S_{ikl}-simmetrik, A_{ikl} isə antisimmetrik üç ranqlı tenzorlardır. Bütün sistemlərdə eyni olan 3-ranqlı simmetrik tenzorun çevrilməsini yazaq:

$$S'_{ikl} = \alpha_{ij}\alpha_{kp}\alpha_{lq}S_{jpq}.$$

Burada i=k götürsək görərik ki, S'_{iil} vektor kimi çevrilir:

$$S'_{iil} = \alpha_{ij}\alpha_{ip}\alpha_{lq}S_{jpq} = \delta_{jp}\alpha_{lq}S_{jpq} = \alpha_{lq}S_{jjq}.$$

Bütün sistemlərdə eyni olan vektor sıfır olduğundan $S'_{iil} = S'_{iki} = = S'_{ikk} = 0$ yazırıq. Bu üç bərabərliyin hər biri özlüyündə 3 bərabərliyə ekvivalentdir. Bundan əlavə tenzorun simmetrik olduğunu nəzərə alsaq göstərmək olar ki, $S'_{ikl} = 0$.

İndi isə bütün sistemlərdə eyni olan 3-ranqlı antisimmetrik A_{ikl} tenzorunun üç ranqlı vahid antisimmetrik e_{ikl} tenzoru ilə mütənasib olduğunu qəbul etmək olar. Beləliklə $T_{ikl} = A_{ikl} = B \cdot e_{ikl}$ alırıq.

Bütün sistemlərdə eyni olan 4-ranqlı tenzoru da iki tenzorun cəmi şəklində göstərmək olar:

$$T_{iklm} = S_{iklm} + A_{iklm}.$$

Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, 3 ölçülü fəzada 4-ranqlı antisimmetrik tenzor eynilik kimi sıfırdır. Onda $T_{iklm} = S_{iklm}$ olar. Bütün sistemlərdə eyni olan 4-ranqlı simmetrik tenzoru Kroneker simvollarının hasilindən təşkil etmək mümkündür:

$$S_{iklm} = D \cdot (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

1.17. Fərz edək ki, $\vec{n}$ bütün istiqamətlərə yönəlmə ehtimalı eyni olan vahid vektordur. Bu vektorun n_i komponentlərinin və komponentlərin $n_i n_k$, $n_i n_k n_l$, $n_i n_k n_e n_m$ və s. hasillərinin orta qiymətlərini bilavasitə hesablamaqla yox, onların transfomasiya (çevrilmə) xassələrindən istifadə edərək təyin edin.

Göstəriş: axtarılan orta qiymətləri aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$\overline{n_i} = \frac{1}{4\pi}\int n_i d\Omega, \quad \overline{n_i n_k} = \frac{1}{4\pi}\int n_i n_k d\Omega \text{ və s.}$$

Aydındır ki, $\overline{n_i}$, $\overline{n_i n_k}$ və s. 1,2 və s ranqlı tenzorlardır və onların inteqral ifadəsindən görünür ki bu tenzorlar bütün sistemlərdə eyni qiymətə malikdir. Ona görə bu tenzorlar komponentləri hesablama sistemindən asılı olmayan tenzorlarla ifadə olunacaqlar. Belə tenzorları biz əvvəlki məsələdə tapmışıq. $\overline{n_i}$ bütün koordinat sistemlərində eyni olan vektordur. Belə vektor sıfıra bərabərdir: $\overline{n_i} = 0$.

$\overline{n_i n_k}$ tenzoru bütün sistemlərdə eyni olan 2-ranqlı simmetrik tenzorla ifadə olunmalıdır. Belə tenzor δ_{ik}-dır. Onda $\overline{n_i n_k} = \lambda\delta_{ik}$ yaza bilərik. λ-nı tapmaq üçün yuxarıdakı bərabərlikdə i=k yazaraq təkrar olunan indeks üzrə cəmləmə aparmaq lazımdır: $\overline{n_i^2} = \lambda\delta_{ii}$ və ya $\overline{1} = \lambda \cdot 3$ alırıq. Buradan $\lambda = \frac{1}{3}$ olur. Nəticədə aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}. \tag{Ə1.44}$$

Bütün koordinat sistemlərində eyni olan 3-ranqlı simmetrik tenzor sıfır olduğuna görə

$$\overline{n_i n_k n_\ell} = 0 \tag{Ə1.45}$$

olur. Analoji olaraq bütün sistemlərdə eyni olan 4-ranqlı simmetrik tenzoru aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\overline{n_i n_k n_\ell n_m} = a(\delta_{ik}\delta_{\ell m} + \delta_{i\ell}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{k\ell}).$$

Burada i=k və ℓ=m yazaraq cəmləmə aparsaq a əmsalı üçün $a = \frac{1}{15}$ alarıq. Beləliklə

$$\overline{n_i n_k n_\ell n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{\ell m} + \delta_{i\ell}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{k\ell}) \tag{Ə1.46}$$

olur.

1.18. Aşağıdakı ifadələrin orta qiymətlərini hesablayın:

$$\overline{(\vec{a}\vec{n})^2},\ \overline{[\vec{a}\vec{n}]^2},\ \overline{(\vec{a}\vec{n})(\vec{b}\vec{n})},\ \overline{(\vec{a}\vec{n})\vec{n}},\ \overline{[\vec{a}\vec{n}][\vec{b}\vec{n}]},\ \overline{(\vec{a}\vec{n})(\vec{b}\vec{n})[\vec{c}\vec{n}][\vec{d}\vec{n}]}.$$

Burada $\vec{n}$ bütün istiqamətləri eyni olan vektordur, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ isə sabit vektorlardır.

Göstəriş: Əvvəlki məsələnin nəticələrindən istifadə edin.

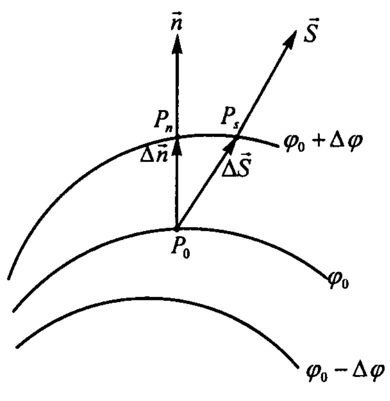
Cavablar:

$$\frac{1}{3}a^2,\ \frac{2}{3}a^2,\ \frac{1}{3}\vec{a}\vec{b},\ \frac{1}{3}\vec{a},\ \frac{2}{3}\vec{a}\vec{b},\ \frac{1}{15}\{4(\vec{a}\vec{b})(\vec{c}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})\}.$$

Ə2. Vektorlar və tenzorlar analizi. Qradiyent, divergensiya və rotor anlayışları. İnteqral teoremlər

Üçölçülü fəzada fiziki kəmiyyətlərin paylanmasını təsvir edən skalyar və vektori funksiyalara adətən bu fiziki kəmiyyətlərin sahələri deyilir. Məsələn, atmosferdə T(x, y, z) temperatur və P(x, y, z) təzyiq sahələri, hərəkət edən mayedə və qazda U(x, y, z) sürətlər sahəsi, $\vec{E}$ və $\vec{H}$ elektromaqnit sahəsi, elektrostatik φ potensialı sahəsi və s. haqda danışmaq olar. Qeyd edək ki, yalnız axırıncı üç $\vec{E}$, $\vec{H}$, φ kəmiyyətləri real fiziki sahədir. Əvvəlki kəmiyyətlər şərti olaraq sahə adlandırıla bilər. Çünki əsas mətində sahə dedikdə həm mühitdə və həmdə vakuumda yayılan fundamental fiziki obyekt nəzərdə tutulur. Bu skalyar və vektori funksiyaların törəmələri və inteqralları çox mühüm ümumi riyazi xassələrə malikdir. Bu xassələrdən fizikanın bütün bölmələrində istifadə olunur. Bu funksiyalar koordinatlardan əlavə digər parametrlərdən (temperatur, zaman, spin və s.) də asılı ola bilər, lakin bizi hələlik koordinatlardan asılılıq maraqlandırır.

Əvvəlcə skalyar $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ funksiyasına nəzər salaq. Bu funksiyanın eyni qiymət aldığı fəza nöqtələri bir səth təşkil edir. Və bu səthə ya səviyyə səthi, ya da ekvipotensial səth deyilir. $\varphi(x, y, z) = \varphi_0$ qiymətinə uyğun səviyyə səthini çəkək. Bu səthdən yuxarıda və aşağıda yerləşən səviyyə səthlərini $\varphi_0 \pm \Delta\varphi, \varphi_0 \pm 2\Delta\varphi$ və s. ilə qeyd edəcəyik (şəkil Ə2.1).



Şəkil **Ə2.1**

φ_0 səthinin P_0 nöqtəsindən səthlərin artması istiqamətində yönəlmiş

$\vec{n}$ normalını qaldıraq. Bu normalın növbəti səthi kəsmə nöqtəsinə P_n deyək. P_0 nöqtəsindən hər hansı $\vec{S}$ istiqamətində yönəlmiş $\overrightarrow{P_0S}$ şüasını keçirək və şüanın növbəti səthi kəsmə nöqtəsinə P_s deyək. $\vec{n}$ və $\vec{S}$ istiqamətində alınmış parçaların uzunluğuna $|\overrightarrow{\Delta n}|$ və $|\overrightarrow{\Delta s}|$ deyək. $|\overrightarrow{\Delta s}|$ parçasında φ funksiyasının artımı $\Delta\varphi$-dir. $|\overrightarrow{\Delta s}|$ parçasında skalyar funksiyanın artımının bu parçaya olan nisbətinin limitinə funksiyanın $\vec{S}$ istiqamətində törəməsi deyilir və $\frac{\partial\varphi}{\partial S}$ şəklində yazılır:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = \lim_{|\overrightarrow{\Delta S}|\to 0} \frac{\Delta\varphi}{|\overrightarrow{\Delta S}|}. \qquad (\text{Ə}2.1)$$

$|\overrightarrow{\Delta S}| \to 0$ olduqda $P_0P_nP_s$ üçbucağı düzbucaqlı üçbucaq olduğundan

$$|\overrightarrow{\Delta S}| = \frac{|\overrightarrow{\Delta n}|}{\cos(\vec{n},\vec{s})} \qquad (\text{Ə}2.2)$$

alırıq. Gələcəkdə $\vec{n}$ və $\vec{S}$ istiqamətindəki vahid vektorlara $\vec{n}_0$ və $\vec{S}_0$ deyəcəyik. (Ə2.2) ifadəsini (Ə2.1) düsturunda nəzərə alsaq

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = \lim_{|\overrightarrow{\Delta n}|\to 0} \frac{\Delta\varphi}{|\overrightarrow{\Delta n}|}\cos(\vec{n},\vec{s}) = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(\vec{n},\vec{s}) = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}_0\cdot\vec{S}_0 \qquad (\text{Ə}2.3)$$

olar. Ekvipotensial səthin normalı boyunca yönəlmiş və ədədi qiymətcə skalyar funksiyanın normal istiqamətində törəməsinə bərabər olan vektora φ skalyarının qradiyenti deyilir:

$$\overrightarrow{\text{grad}\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}_0. \qquad (\text{Ə}2.4)$$

(Ə2.3) düsturunu qradiyentlə ifadə edək:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = \overrightarrow{\text{grad}\varphi}\cdot\vec{S}_0 = \text{grad}_S\varphi. \qquad (\text{Ə}2.5)$$

Burada $\text{grad}_S\varphi$ qradiyentin $\vec{S}$ istiqamətində proyeksiyasını göstərir. (Ə2.3) düsturundan görünür ki, qradiyentin $\vec{n}$ istiqaməti φ skalyarının ən sürətli artma istiqaməti, $-\vec{n}$ istiqaməti ən sürətli azalma istiqaməti və $\vec{n}$-ə perpendikulyar istiqamət isə φ-nin dəyişmədiyi istiqamətdir.

İndi qradiyentin Dekart koordinat sistemində ifadəsini yazaq. X, Y, Z dekart koordinat oxlarını və uyğun $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ort vektorlarını nəzərə alaq. Seçdiyimiz $\vec{S}_0$ vektorunu növbə ilə $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$-ya paralel götürərək (Ə2.5) düsturundan aşağıdakı münasibətləri alırıq:

$$\vec{S}_0 \parallel \vec{i} \text{ olduqda } \mathrm{grad}_x\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\vec{S}_0 \parallel \vec{j} \text{ olduqda } \mathrm{grad}_y\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\vec{S}_0 \parallel \vec{k} \text{ olduqda } \mathrm{grad}_z\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

olur. Bu ifadələri $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlarına vuraraq cəmləsək aşağıdakı düsturu alarıq.

$$\vec{i}\,\mathrm{grad}_x\varphi + \vec{j}\,\mathrm{grad}_y\varphi + \vec{k}\,\mathrm{grad}_z\varphi = \overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi} =$$

$$= \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi. \qquad (Ə2.6)$$

Burada iştirak edən $\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ diferensial operator Hamilton operatoru adlanır və $\vec{\nabla}$ (Nabla) ilə işarə olunur:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (Ə2.7)$$

Ona adətən *Nabla operatoru* deyirlər. (Ə2.6) düsturundan

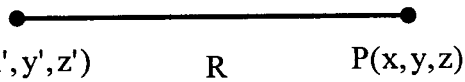
$$\mathrm{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi \qquad (Ə2.8)$$

yazırıq. Bu qradiyentin dekart koordinat sistemində ifadəsidir. Əgər $\varphi(\psi(r))$ mürəkkəb funksiyadırsa

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\mathrm{grad}\psi \qquad (Ə2.9)$$

olar. (Ə2.4) düsturundan görünür ki, qradiyent xətləri ekvipotensial səthlərə perpendikulyardır.

Qradiyenti hesablayanda əvvəlcədən bilmək lazımdır ki, hansı nöqtənin koordinatlarına görə grad hesablanır. Adətən qradiyenti P(x, y, z) müşahidə nöqtəsinin koordinatlarına görə hesablayırlar. Bəzən isə onu $q(x',y',z')$ mənbə nöqtəsinin koordinatlarına görə hesablamaq lazım olur. Şəkil Ə2.2-də P və q nöqtələrini birləşdirən radius göstərilmişdir.



$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\,.$$

Şəkil **Ə2.2**

P-yə görə qradiyenti hesablayaq:

$$\mathrm{grad}R=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}R+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}R+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}R=$$
$$=\frac{\vec{i}(x-x')+\vec{j}(y-y')+\vec{k}(z-z')}{R}=\frac{\vec{R}}{R}=\vec{R}^0\,.$$

İndi Q-yə görə hesablama aparaq:

$$\mathrm{grad}_q R=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x'}R+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y'}R+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z'}R=$$
$$=-\frac{\vec{i}(x-x')+\vec{j}(y-y')+\vec{k}(z-z')}{R}=-\frac{\vec{R}}{R}=-\vec{R}^0$$

Biz (Ə2.8) düsturundan gördük ki, $\vec{\nabla}$ operatorunun skalyar funksiyaya təsiri (hasili) qradiyenti verir. Belə məlum olur ki, $\vec{\nabla}$-nı istənilən vektori funksiyaya istənilən şəkildə vurmaq olar və bu zaman $\vec{\nabla}$ vektora vurulmaqla bərabər həm də onu diferensiallayacaqdır.

$\vec{\nabla}$ operatorunun $\vec{A}(\vec{r})$ vektoruna skalyar hasili $\vec{A}(\vec{r})$-nın divergensiyası adlanır.

$$\mathrm{div}\vec{A}\equiv(\vec{\nabla}\vec{A})=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\equiv\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\,. \qquad (Ə2.10)$$

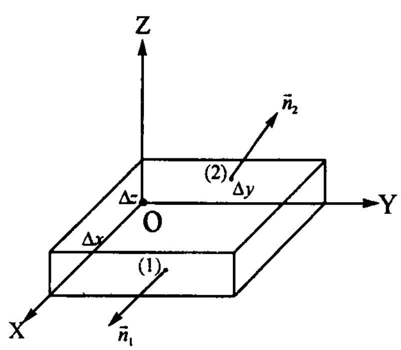
$\vec{\nabla}$ operatorunun $\vec{A}(\vec{r})$ vektoruna vektori hasili $\vec{A}(\vec{r})$-nın rotoru adlanır:

$$\mathrm{rot}\vec{A} \equiv [\vec{\nabla}\vec{A}] = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_Y\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_X - \frac{\partial}{\partial x}A_Z\right) +$$
$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right). \qquad (Ə2.11)$$

Yazdığımız düsturlar Dekart koordinat sistemində divergensiyanın və rotorun ifadələridir. Bu ifadələri fiziki daha dərindən başa düşmək üçün onların digər formalarından istifadə edəcəyik. Əvvəlcə divergensiyadan başlayaq. Hər hansı M nöqtəsini öz daxilində saxlayan kiçik ΔV həcmini və onu əhatə edən hamar qapalı ΔS səthini götürək. $\vec{A}$ vektorunun qapalı səth üzrə $\oint\limits_{\Delta S}\vec{A}d\vec{S}$ inteqralı qapalı ΔS səthindən keçən $\vec{A}$ vektorunun seli adlanır. M nöqtəsində $\vec{A}$ vektorunun divergensiyasını belə təyin edirlər:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\limits_{\Delta S}\vec{A}d\vec{S}. \qquad (Ə2.12)$$

Burada ΔV həcmi M nöqtəsinə yığılır. İnteqralda dairə işarəsi inteqralın qapalı səth üzrə aparıldığını göstərir. Hər hansı nöqtədə $\vec{A}$ vektorunun divergensiyası bu nöqtəni əhatə edən qapalı kiçik səthdən keçən $\vec{A}$ vektorunun selinin həcmi sıxlığına bərabərdir. Göstərək ki, dekart koordinat sistemində (Ə2.10) və (Ə2.12) düsturları ekvivalentdir. Bu məqsədlə tilləri $\Delta x, \Delta y$, Δz və həcmi $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ olan düzbucaqlı paralelepiped götürək (şəkil Ə2.3).



***Şəkil* Ə2.3**

Paralelepipedin üzlərinin kiçik olduğunu nəzərə alaraq səth inteqralını təqribi hesablayaq.

$$\oint_{\Delta S} \vec{A}d\vec{S} = \oint_{\Delta S} \{A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z\}.$$

Qapalı səth halında səthin normalı olaraq həmişə xarici normal götürülür. Əvvəlcə X oxuna perpendikulyar olan (1) və (2) səthlərindən keçən tam seli hesablayaq:

$$\int_{\Delta S_x} A_x dS_x = \int_{\Delta S_x} A_x dS_x^{(1)} + \int_{\Delta S_x} A_x dS_x^{(2)}.$$

Burada $dS_x^{(1)}$ və $dS_x^{(2)}$ paralelepipedin (1) və (2) üzlərindəki səth elementləridir. $dS_x^{(1)} = (\overrightarrow{dS}^{(1)})_x = (dS^{(1)}\vec{n}_1)_x = dS^{(1)}n_{1x}$. Şəklin (1) üzündə $\vec{n}_1 = \vec{i}$ olduğundan $n_{1x} = 1$ olur və $dS_x^{(1)} = +dydz$ alınır. Analoji olaraq $dS_x^{(2)} = dS^{(2)}n_{2x}$ alırıq. Lakin (2) üzündə $\vec{n}_2 = -\vec{i}$ və $n_{2x} = -1$ olur və $dS_x^{(2)} = -dydz$ alınır. Paralelepipedin (1) və (2) üzlərində $A_x(x+\Delta x, \bar{y}, \bar{z})$ və $A_x(x, \bar{y}, \bar{z})$ olduğunu nəzərə alaraq, A_x-ların bu səthlər üzrə orta qiymətlərini hesablayırıq, yəni A_x-ların səth üzərində hər hansı nöqtədə qiymətini inteqraldan kənara çıxardaraq səthlər üzrə inteqrallama aparsaq, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\int_{\Delta S_x} A_x dS_x^{(1)} + \int_{\Delta S_x} A_x dS_x^{(2)} = [A_x(x+\Delta x) - A_x(x)]\Delta y \Delta z =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V.$$

Digər qoşa üzlər üçün də uyğun hesablamalar aparsaq, son nəticədə

$$\oint_{\Delta S} \vec{A}d\vec{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta V \qquad (Ə2.13)$$

bərabərliyini alırıq. Beləliklə gördük ki, Dekart koordinatlarında (Ə2.10) və (Ə2.13) ifadələri tamamilə üst-üstə düşür.

Beləliklə hər hansı nöqtədə divergensiyanın mövcud olması üçün bu nöqtəni əhatə edən kiçik qapalı səthdən vektorun seli sıfırdan fərqli olmalıdır. Bu səthin daxilində sel yaradan vektori sahənin mənbəyi olmalıdır. Divergensiya sahənin mənbəyinin sıxlığını xarakterizə edir. $\mathrm{div}\vec{A} > 0$ olan nöqtələr mənbə nöqtələri və $\mathrm{div}\vec{A} < 0$ olan nöqtələr isə mənsəb nöqtələri adlanır.

İndi yuxarıda baxdığımız bu xüsusi halı ümumiləşdirək. Hamar S səthi ilə hüdudlanmış V həcminə nəzər salaq. Bu həcmi kiçik ΔV_i qəfəslərinə bölək və hər bir qəfəsin hüdudlandığı səthi ΔS_i ilə işarə edək. S səthinə söykənən xarici qəfəslərin kənar səthləri S səthi ilə üst-üstə düşəcəkdir. Bütün qalan digər ΔS_i səthlərinin hissələri iki qonşu qəfəs üçün eyni olacaqdır. (Ə2.12) düsturunu i-ci qəfəsə tətbiq edərək onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$(\mathrm{div}\vec{A})_i \Delta V_i \approx \oint\limits_{\Delta S_i} \vec{A} d\vec{S}_i \,. \qquad (Ə2.14)$$

Qəfəslərin həcmini sıfıra və onların sayını sonsuzluğa yaxınlaşdıraraq (Ə2.14) bərabərliyini qəfəslərin *i* sayı üzrə cəmləyək. Bərabərliyin sol tərəfində $\mathrm{div}\vec{A}$ -nın bütün V həcmi üzrə inteqralı alınacaqdır:

$$\int\limits_V \mathrm{div}\vec{A} dV \,.$$

Bərabərliyin sağ tərəfində isə ΔS_i səthlərinin daxili oblastlar üzrə inteqralları bir-birini neytrallaşdıracaq, çünki iki qonşu qəfəsin xarici normalları bir-birinin əksinə yönəlmişdir. Yalnız S səthi üzrə inteqral qalacaqdır. Nəticədə aşağıdakı dəqiq inteqral münasibəti alırıq:

$$\oint\limits_S \vec{A} d\vec{S} = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{A} dV \,. \qquad (Ə2.15)$$

Bu bərabərlik *Ostroqradski-Qauss teoremi* adlanır (qərb ədədbiyyatında Ostroqradski soyadını yazmırlar). Bu teoremi istənilən ranqlı tenzora tətbiq etmək olar:

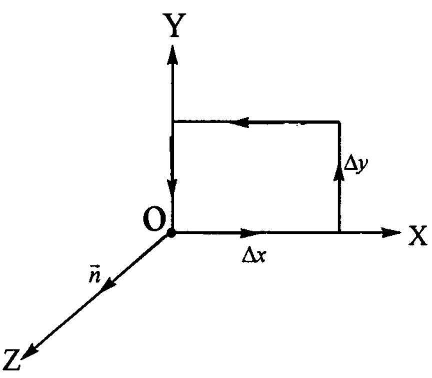
$$\oint\limits_S T_{ikj} dS_j = \int\limits_V \frac{\partial T_{ikj}}{\partial x_j} dV \qquad (Ə2.16)$$

Bunu isbat etmək üçün bu bərabərliyi sabit C_{ik} tenzoruna vururuq i və k indeksləri üzrə cəmləmək kifayətdir.

İndi rotorun (burulğanın) təyin edilməsinə baxaq. M nöqtəsində vahid $\vec{n}$ vektoru ilə təsvir edilən bir istiqamət seçək. Bu nöqtəni öz daxilində saxlayan və $\vec{n}$-ə perpendikulyar olan kiçik ΔS səthini quraq. Bu səthin konturunu *l* dolanma istiqamətini elə seçək ki, o, $\vec{n}$ normalı ilə sağ yivli burğu təşkil etsin. M nöqtəsində rotorun $\vec{n}$ istiqamətində proyeksiyanı belə təyin edirlər:

$$\mathrm{rot}_n\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_\ell \vec{A}d\vec{\ell}. \qquad (Ə2.17)$$

Burada $\vec{A}$ vektorunun qapalı ℓ konturu üzrə inteqralı hesablanır və buna $\vec{A}$ vektorunun sirkulyasiyası deyilir. $\vec{A}$ vektorunun hər hansı nöqtədə rotorunun $\vec{n}$ istiqamətində proyeksiyası $\vec{n}$-ə perpendikulyar olan səthin konturu üzrə $\vec{A}$ vektorunun sirkulyasiyasının səthi sıxlığına bərabərdir. İndi göstərək ki, Dekart koordinatlarında (Ə2.17) və (Ə2.11) düsturları üst-üstə düşür. Bu məqsədlə $\vec{n}$ vektorunu OZ oxu boyunca yönəldərək, XOY müstəvisində tərəfləri Δx və Δy olan elementar düzbucaqlı $\Delta S = \Delta x\,\Delta y$ səthini quraq (şəkil Ə2.4).



Şəkil **Ə2.4**

ΔS səthinin konturu boyunca sirkulyasiyanı hesablayanda, yuxarıdakı məsələdə olduğu kimi, inteqralın orta qiymət teoremindən istifadə edəcəyik. Sirkulyasiyanı bu xüsusi halda təqribi hesablayaq:

$$\oint_\ell \vec{A}d\vec{\ell} = \oint_\ell (A_x dx + A_y dy) \approx A_x(y)\Delta x + A_y(x+\Delta x)\Delta y + A_x(y+\Delta y)\cdot(-\Delta x) +$$

$$+ A_y(x)\cdot(-\Delta y) = \left[A_y(x+\Delta x) - A_y(x)\right]\Delta y - \left[A_x(y+\Delta y) - A_x(y)\right]\Delta x \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$$

Bu ifadəni (Ə2.17) düsturunda yerinə yazaraq alınmış nəticəni (Ə2.11)-lə müqayisə etsək $\mathrm{rot}_z\vec{A}$ proyeksiyasını almış oluruq. Şəkil Ə2.4-dəki

düzbucaqlını digər müstəvilərdə qurmaqla alınmış nəticələri (Ə2.11) düsturu ilə müqayisə etsək $\mathrm{rot}_x\vec{A}$ və $\mathrm{rot}_y\vec{A}$ proyeksiyalarını alarıq. Beləliklə (Ə2.17) və (Ə2.11) düsturları dekart koordinatlarında tamamilə eyni nəticəni verir. $\mathrm{rot}\vec{A}$ -nın mövcud olması üçün $\vec{A}$ vektorunun xətləri mütləq burulmalıdır, yəni onlar ya qapalı, ya da spiral şəkilli olmalıdır.
İndi (Ə2.17) düsturundan istifadə edərək çox mühüm inteqral münasibət almaq olar. Fərz edək ki, qapalı ℓ konturuna söykənən açıq S səthi verilmişdir. Səthin hər bir nöqtəsində normalın istiqaməti ℓ konturunu dolanma istiqaməti ilə sağ yivli burğu təşkil edir. Bu səthi kiçik ΔS_i elementlərinə bölək və hər bir elementin konturunu ℓ_i ilə işarə edək. Hər bir səth elementinə (Ə2.17) düsturunu tətbiq edək:

$$\mathrm{rot}_n\vec{A}\,\Delta S_i = \oint_{\ell_i}\vec{A}d\vec{\ell}_i\,. \qquad (\text{Ə}2.18)$$

Bu bərabərlikdə sonsuz kiçik səthlərə keçsək və səthlərin i sayı üzrə cəmləmə aparsaq aşağıdakı dəqiq bərabərliyi alarıq:

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{A}\vec{ds} = \oint_\ell \vec{A}d\vec{\ell}\,. \qquad (\text{Ə}2.19)$$

Bu, *Stoks teoremi* adlanır. Sağ tərəfdə S səthinin söykəndiyi kənar kontur üzrə inteqral aparılır. Daxili konturlar üzrə inteqrallar bir-birini neytrallaşdırır. Stoks teoremi səthdən keçən rotorun selini bu səthin söykəndiyi kontur üzrə vektorun sirkulyasiyası ilə əlaqələndirir.
Qeyd edək ki, (Ə2.12) və (Ə2.17) düsturları koordinat sistemlərinin seçilməsindən asılı olmayaraq istənilən sistem üçün doğrudur.

Vektori $\vec{A}$ sahəsi haqqında əyani təsəvvürü vektor xətləri yaradır. Bunlar elə xətlərdir ki, onların hər bir nöqtəsinə çəkilmiş toxunan həmin nöqtədə $\vec{A}$ vektorunun istiqamətini göstərir. Verilmiş $\vec{A}(x, y, z)$ sahəsinin vektor xətlərini tapmaq üçün müəyyən tənliklər sistemi yazmaq mümkündür. Vektor xəttinin kiçik $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$ elementinin $\vec{A}$ vektoruna paralelliyi şərtini $[\vec{A}d\vec{\ell}] = 0$ şəklində yazırlar. Bu vektori tənliyi komponentlərində yazaraq aşağıdakı iki diferensial tənliyi alırıq:

$$\frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{Ay}, \frac{dy}{Ay} = \frac{dz}{Az}.$$

Bu iki səth ailəsi üçün diferensial tənliklərdir. Bu səthlərin kəsişməsi vektor xətlərini verir. Qeyd edək ki, vektor xətləri şərti anlayışdır və onlar yalnız qrafiki təsəvvür yaratmaq üçün işlədilir.

İndi grad, div, rot operatorlarının vektori və skalyar funksiyalara təsirinin daha yaxşı anlamaq və inteqral teoremlərdən bacarıqla istifadə etmək üçün aşağıdakı məsələ və misalları həll etməyi məsləhət görürük. Biz vektorların skalyar hasilini $(\vec{A}\vec{B})$, ya $\vec{A}\vec{B}$, ya da $\vec{A}\cdot\vec{B}$ şəklində, vektori hasili isə $[\vec{A}\vec{B}]$ şəklində yazırıq.

2.1. Aşağıdakı eyniliklərin doğruluğunu yoxlayın:

a) $\mathrm{rotgrad}\varphi = 0$, $\mathrm{divrot}\vec{A} = 0$, $\mathrm{rotrot}\vec{A} = [\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$.

Burada $\vec{\nabla} \equiv \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplas operatoru adlanır.

b) $\mathrm{grad}\, r = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $\mathrm{div}\vec{r} = 3$, $\mathrm{rot}\vec{r} = 0$, $\mathrm{grad}(\vec{l}\vec{r}) = \vec{l}$, $(\vec{l}\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{l}$.

Burada $\vec{r}$ radius vektor, $\vec{l}$ sabit vektordur, $r = |\vec{r}|$ və

$$(\vec{l}\vec{\nabla})\vec{r} = \left(l_x\frac{\partial}{\partial x} + l_y\frac{\partial}{\partial y} + l_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{l}.$$

c) $\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\,\mathrm{grad}\psi + \psi\,\mathrm{grad}\varphi$,

$\mathrm{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}\vec{A} - [\vec{A}\,\mathrm{grad}\varphi]$,

$\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\,\mathrm{div}\vec{A} + \vec{A}\,\mathrm{grad}\varphi$,

$\mathrm{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}\,\mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\vec{B}$,

$\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{B}) = [\vec{A}\,\mathrm{rot}\vec{B}] + (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{B}\,\mathrm{rot}\vec{A}] + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A}$,

$\mathrm{rot}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{A}\,\mathrm{div}\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\vec{A} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}$.

Göstəriş: İki funksiyanın və ya iki vektorun hasilinin törəməsindən və vektor hesabından istifadə etmək lazımdır (vektorun proyeksiyasını yazmaq lazım deyil). $\vec{\nabla}, \vec{A}$ və $\vec{B}$ vektorlarının skalyar, vektori və qarışıq hasillərini diferensiallamanı nəzərə almaqla açmaq lazımdır. Vektorun verilmiş differensiallamada hələlik sabit olduğunu «c» indeksi ilə göstərəcəyik. Məsələn,

$$\mathrm{div}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{\nabla}[\vec{A}\vec{B}] = \vec{\nabla}[\vec{A}_c\vec{B}] + \nabla[\vec{A}\vec{B}_c] = -\vec{\nabla}[\vec{B}\vec{A}_c] + \vec{\nabla}[\vec{A}\vec{B}_c] =$$
$$= -[\vec{\nabla}\vec{B}]\vec{A}_c + [\vec{\nabla}\vec{A}]\vec{B}_c = \vec{B}\,\mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A}\,\mathrm{rot}\vec{B};$$

$$\mathrm{rot}[\vec{A}\vec{B}]=[\vec{\nabla}[\vec{A}_c\vec{B}]]+[\vec{\nabla}[\vec{A}\vec{B}_c]]=\vec{A}_c(\vec{\nabla}\vec{B})-(\vec{\nabla}\vec{A}_c)\vec{B}+(\vec{\nabla}\vec{B}_c)\vec{A}-$$
$$-\vec{B}_c(\vec{\nabla}\vec{A})=\vec{A}(\vec{\nabla}\vec{B})-(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A}-\vec{B}(\vec{\nabla}\vec{A}).$$

Hissə-hissə diferensiallamadan sonra «c» indeksini atırıq.

2.2. Aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

$$[\mathrm{rot}\vec{A}]_i=e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k,$$

$$\vec{C}\cdot\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{B})=\vec{A}(\vec{C}\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{B}(\vec{C}\vec{\nabla})\vec{A},$$

$$(\vec{C}\vec{\nabla})[\vec{A}\vec{B}]=[\vec{A}(\vec{C}\vec{\nabla})\vec{B}]-[\vec{B}(\vec{C}\vec{\nabla})\vec{A}],$$

$$(\vec{\nabla}\vec{A})\vec{B}=\vec{B}\,\mathrm{div}\vec{A}+(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}.$$

Göstəriş: $\vec{\nabla}$-dan sağda dayanan funksiyalara (vektorlara) $\vec{\nabla}$-nın növbə ilə təsirini nəzərə alın. Məsələn,

$$\vec{C}\cdot\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{B})=(\vec{C}\vec{\nabla})(\vec{A}\vec{B})=(\vec{C}\vec{\nabla})(\vec{A}_C\vec{B})+(\vec{C}\vec{\nabla})(\vec{A}\vec{B}_C)=\vec{A}(\vec{C}\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{B}(\vec{C}\vec{\nabla})\vec{A}.$$

2.3. Əgər $\varphi(r)$ və $\vec{A}(r)$ yalnız r-in $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ modulundan, asılıdırsa, $\vec{\nabla}$-nın onlara təsiri $\vec{\nabla}\varphi(r)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{\nabla}r=\varphi'\frac{\vec{r}}{r}$ və $\vec{\nabla}\vec{A}(r)=$ $=(\vec{\nabla}r,\frac{\partial\vec{A}}{\partial r})=\frac{\vec{r}}{r}\vec{A}'$ şəklində hesablanar. Bunu nəzərə alaraq aşağıdakı misalları hesablayın:

$\mathrm{grad}\varphi(r)$, $\mathrm{div}\varphi(r)\vec{r}$, $\mathrm{rot}\varphi(r)\vec{r}$, $(\vec{\ell}\vec{\nabla})\varphi(r)\vec{r}$;

$\mathrm{div}(\vec{a}\vec{r})\vec{r}$, $\mathrm{rot}(\vec{a}\vec{r})\vec{r}$, $\mathrm{div}\varphi(r)[\vec{a}\vec{r}]$, $\mathrm{rot}\varphi(r)[\vec{a}\vec{r}]$, $\mathrm{div}[\vec{r}[\vec{a}\vec{r}]]$, $\mathrm{rot}[\vec{r}[\vec{a}\vec{r}]]$;

$\mathrm{grad}(\vec{A}(r)\vec{r})$, $\mathrm{grad}(\vec{A}(r)\vec{B}(r))$, $\mathrm{div}\varphi(r)\vec{A}(r)$, $\mathrm{rot}\varphi(r)\vec{A}(r)$, $(\vec{\ell}\vec{\nabla})\varphi(r)\vec{A}(r)$;

Cavablar: $\frac{\vec{r}}{r}\varphi'$, $3\varphi+r\varphi'$, 0, $\vec{\ell}\varphi+\vec{r}\frac{(\vec{\ell}\vec{r})}{r}\varphi'$;

$4(\vec{a}\vec{r}),[\vec{a}\vec{r}], 0, (2\varphi+r\varphi')\vec{a}-\frac{\vec{r}(\vec{a}\vec{r})}{r}\varphi', -2(\vec{a}\vec{r}), 3[\vec{r}\vec{a}]$;

$\vec{A}+\frac{\vec{r}}{r}(\vec{r}\vec{A}'), \frac{\vec{r}}{r}(\vec{A}'\vec{B}+\vec{A}\vec{B}'), \frac{\varphi'}{r}(\vec{r}\vec{A})+\frac{\varphi}{r}(\vec{r}\vec{A}'), \frac{\varphi'}{r}[\vec{r}\vec{A}]+\frac{\varphi}{r}[\vec{r}\vec{A}']$,

$\frac{\vec{l}\vec{r}}{r}(\varphi'\vec{A}+\varphi\vec{A}')$;

$\vec{a}$, $\vec{\ell}$ vektorları sabitdir.

2.4. Kəsirin törəməsi düsturundan istifadə edərək aşağıdakı bərabərlikləri yoxlayın:

$$\mathrm{grad}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}=\frac{1}{r^5}(\vec{p}r^2-3\vec{r}(\vec{p}\vec{r})),\quad \mathrm{rot}\frac{[\vec{p}\vec{r}]}{r^3}=\frac{1}{r^5}(3\vec{r}(\vec{p}\vec{r})-\vec{p}r^2),$$

$$\mathrm{grad}\frac{(\vec{a}\vec{r})^2}{r^2}=\frac{2(\vec{a}\vec{r})}{r^2}(\vec{a}-\frac{(\vec{a}\vec{r})\vec{r}}{r^2}),\quad \mathrm{grad}\frac{r^2}{(\vec{a}\vec{r})^2}=\frac{2}{(\vec{a}\vec{r})^2}(\vec{r}-\frac{r^2\vec{a}}{(\vec{a}\vec{r})}),$$

$$\mathrm{rot}\frac{[\vec{b}\vec{r}]}{r^2}=\frac{2\vec{r}(\vec{b}\vec{r})}{r^4},\ \mathrm{div}\frac{[\vec{b}\vec{r}]}{r^2}=0,\ \mathrm{rot}\frac{[\vec{b}\vec{r}]}{(\vec{a}\vec{r})^2}=\frac{2\vec{r}(\vec{a}\vec{b})}{(\vec{a}\vec{r})^3},$$

$$\mathrm{div}\frac{[\vec{b}\vec{r}]}{(\vec{a}\vec{r})^2}=-\frac{2[\vec{b}\vec{r}]\vec{a}}{(\vec{a}\vec{r})^3},$$

$\vec{p},\vec{a},\vec{b}$ – sabit vektorlardır.

2.5. Göstərin ki, $\mathrm{div}\varphi(r)\vec{r}=0$ diferensial tənliyin həlli $\varphi=cr^{-3}$-dür.

2.6. $\oint\vec{r}(\vec{a}\vec{n})dS$ və $\oint(\vec{a}\vec{r})\vec{n}dS$ inteqrallarını hesablayın. Burada $\vec{a}$ - sabit vektordur, $\vec{n}$ səthin normalıdır.

Göstəriş: İnteqralları sabit $\vec{c}$ vektoruna vurmaqla hesablayın.

Cavab: $\vec{a}V$ və $\vec{a}V$ -dir. V səthin daxilindəki həcmdir.

2.7. Qapalı S səthi üzrə olan $\oint\vec{n}\varphi dS$, $\oint[\vec{n}\vec{a}]dS$, $\oint(\vec{n}\vec{b})\vec{a}dS$ inteqrallarını bu səthin daxilində qalan həcm üzrə inteqrallara cevirin. Burada $\vec{b}$ - sabit vektor, $\vec{n}$ isə səthin normalıdır.

Göstəriş: Məsələni sabit $\vec{c}$ vektoruna vurmaqla həll edin.

Cavab: $\int_V \mathrm{grad}\varphi dV$, $\int_V \mathrm{rot}\vec{a}dV$, $\int_V(\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a}dV$.

2.8. Ümumiləşmiş Qauss teoremi

Biz bu teoremi adi Qauss teoreminin xüsusi halından istifadə edərək isbat edəcəyik. Əgər (Ə2.15) adi Qauss teoremində $A_x=\varphi, A_y=A_z=0$ yazsaq, onun $\int_V\frac{\partial\varphi}{\partial x}dV=\oint_S\varphi n_x dS$ sadə şəklini alarıq. Burada $x\to y$ və $x\to z$ yazmaqla əlavə 2 ədəd sadə teorem alırıq.

Fərz edək ki, aşağıdakı şərti ödəyən diferensiallanan xətti $f(\vec{a},\vec{r})$ funksionalı verilmişdir:

$$f(c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2,\vec{r})=c_1f(\vec{a}_1,\vec{r})+c_2f(\vec{a}_2,\vec{r}).$$

Burada c_1 və c_2 ixtiyari skalyar sabitlərdir.

İsbat edək ki, əgər V ixtiyari həcm, S onun səthi və $\vec{n}$ səthin normalıdırsa, aşağıdakı ümumiləşmiş Qauss teoremi doğrudur.

$$\int_V f(\vec{\nabla},\vec{r})dV = \oint_S f(\vec{n},\vec{r})dS. \qquad (Ə2.20)$$

Burada $f(\vec{\nabla},\vec{r})$ ifadəsindəki $\vec{\nabla}$ operatoru funksionalın daxilində özündən sonra gələn (yazılan) və $\vec{r}$-dən asılı olan istənilən funksiyaya (funksiyalar sisteminə) ixtiyari şəkildə (rot, div, grad kimi) təsir edir. $\vec{\nabla}$-nın yerini bərabərliyin sağ tərəfində $f(\vec{n},\vec{r})$ funksionalının daxilində $\vec{n}$ normalı tam şəkildə zəbt etmiş olur. (Ə2.20) bərabərliyin sol tərəfini yuxarıda verilmiş qaydalara əsasən hesablayaraq son nəticəni alırıq.

$$\int_V f(\vec{\nabla},\vec{r})dV = \int_V f\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},\vec{r}\right)dV = \int_V f\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x},\vec{r}\right)dV +$$
$$+\int_V f\left(\vec{j}\frac{\partial}{\partial y},\vec{r}\right)dV + \int_V f\left(\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},\vec{r}\right)dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{i},\vec{r})dV +$$
$$+\int_V \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{j},\vec{r})dV + \int_V \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{k},\vec{r})dV = \oint_S f(\vec{i},\vec{r})n_x dS + \oint_S f(\vec{j},\vec{r})n_y dS +$$
$$+\oint_S f(\vec{k},\vec{r})n_z dS = \oint_S f(\vec{i}n_x + \vec{j}n_y + \vec{k}n_z,\vec{r})dS = \oint_S f(\vec{n},\vec{r})dS.$$

Biz burada xətti $f(\vec{\nabla},\vec{r})$ funksionalının xassəsindən və Qauss teoreminin sadə şəkillərindən istifadə etdik. Fərz edək ki, $f(\vec{\nabla},\vec{r}) = [\vec{\nabla}\vec{A}(\vec{r})]$ şəklindədir. Bunu (Ə2.20)-də yerinə yazsaq:

$$\int_V \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r})dV = \oint_S [\vec{n}\vec{A}(\vec{r})]dS \qquad (Ə2.20')$$

düsturunu alarıq. Qeyd edək ki, (Ə2.20′) düsturu çox geniş tədqiqat oblastına malikdir.

2.9. Qapalı kontur üzrə aparılan $\oint_l \varphi d\vec{\ell}$ inteqralını bu kontura söykənən səth üzrə inteqrala çevirin.

Göstəriş: İnteqralı sabit $\vec{c}$ vektoruna vurmaqla məsələni həll edin.

Cavab: $\int_S [\vec{n}\,\mathrm{grad}\varphi]dS$.

2.10. Qapalı kontur üzrə aparılan $\oint_\ell udf$ inteqralını bu kontura söykənən səth üzrə inteqralla əvəz edin (u, f skalyar funksiyalardır).

Göstəriş: $df = (\vec{\nabla} f d\vec{\ell})$ olduğunu nəzərə alın.

Cavab: $\int\limits_S [\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad} f] d\vec{S}$.

2.11. $\vec{A}$ vektoru V həcmində $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ və həcmin səthində $A_n = 0$ şərtlərini ödəyir. İsbat edin ki, $\int\limits_V \vec{A} dV = 0$ -dır.

Göstəriş: $\vec{A}$ -nı sabit $\vec{c}$ vektoruna vurun və $\vec{A}\vec{C} = \mathrm{div}(\vec{A}(\vec{C}\vec{r}))$ olduğunu nəzərə alın.

2.12. $\oint\limits_\ell [d\vec{\ell}\vec{A}] = \int\limits_S [[\vec{n}\vec{\nabla}]\vec{A}] dS$ eyniliyinin doğruluğunu yoxlayın. Burada ℓ qapalı konturdur, S həmin kontura söykənən səthdir və $\vec{n}$ səthin müsbət normalıdır.

Göstəriş: Sol tərəfdəki inteqralı sabit $\vec{C}$ vektoruna skalyar vuraraq Stoks teoremindən istifadə etmək lazımdır.

2.13. Ümumiləşmiş Stoks teoremi

Bu teoremi isbat etmək üçün yuxarıda göstərilmiş 2.9. və 2.12. eyniliklərinin ifadələrindən və adi Stoks teoreminin yazılmış formasından istifadə edəcəyik:

$$\oint\limits_\ell d\vec{\ell}\varphi = \int\limits_S [\vec{n}\vec{\nabla}]\varphi dS,$$

$$\oint\limits_\ell [d\vec{\ell}\vec{A}] = \int\limits_S [[\vec{n}\vec{\nabla}]\vec{A}] dS,$$

$$\oint\limits_\ell d\vec{\ell}\vec{A} = \int\limits_S \mathrm{rot}\vec{A} d\vec{S} = \int\limits_S [\vec{\nabla}\vec{A}]\vec{n} dS = \int\limits_S [\vec{n}\vec{\nabla}]\vec{A} dS .$$

Bu üç ifadəni ümumiləşdirərək onu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\oint d\vec{l}(\cdots) = \int [\vec{n}\vec{\nabla}](\cdots) ds . \qquad (\text{Ə}2.21)$$

Burada $(\cdots)$ simvolu ixtiyari ranqlı tenzoru ifadə edir. Yuxarıdakı bərabərliyin sol tərəfində $d\vec{l}$ vektoru $(\cdots)$ simvoluna nə şəkildə – skalyar, vektor və qarışıq hasil şəklində vurulursa bərabərliyin sağ tərəfində $[\vec{n}\vec{\nabla}]$ vektoru da həmin simvola eyni şəkildə vurulur.

2.14. Aşağıdakı Qrin düsturlarının doğruluğunu isbat edin:

a) $\int\limits_V(\varphi\Delta\psi+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)dV=\oint\limits_S\varphi\vec{\nabla}\psi d\vec{S}$,

b) $\int\limits_V(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)dV=\oint\limits_S(\varphi\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\varphi)d\vec{S}$.

Burada φ və ψ diferensiallanan skalyar funksiyalardır.

Göstəriş: $\vec{\nabla}(\varphi\vec{\nabla}\psi)=\varphi\vec{\nabla}^2\psi+\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi$ olduğunu bilərək adi Qauss teoremindən istifadə etsək a) bərabərliyini alarıq ($\vec{\nabla}^2=\Delta$). b) bərabərliyi üçün $\vec{\nabla}(\varphi\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\varphi)=\varphi\vec{\nabla}^2\psi-\psi\vec{\nabla}^2\varphi$ olduğunu bilərək adi Qauss teoremindən istifadə etməklə teoremi isbat edirik. Adətən $\varphi\vec{\nabla}\psi d\vec{S}=\varphi\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n}dS=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$ şəklində yazılır.

Ə3.

3.1. Əyrixətli koordinat sistemlərinə keçid və bu sistemlərdə qrad, div, rot, və Δ-nın hesablanması.

Fizikanın müxtəlif bəhslərində Dekart koordinat sistemindən başqa müxtəlif ortoqonal və qeyri-ortoqonal əyrixətli koordinat sistemlərindən istifadə edilir. Biz burada yalnız əyrixətli ortoqonal koordinat sistemləri ilə məşğul olacağıq. Bunlara misal olaraq sferik, silindrik, elliptik və s. koordinat sistemlərini göstərmək olar. Biz əyrixətli koordinatları əyrixətli oxlar boyunca dəyişən q_1,q_2 və q_3 ilə işarə edəcəyik. Bu sistemin ortoqonal ort vektorlarını $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ şəklində göstərəcəyik.

Hər hansı nöqtənin dekart koordinatları bu nöqtənin əyrixətli koordinatları ilə müəyyən funksiyalarla əlaqədardır:

$$x=f_1(q_1,q_2,q_3),\ y=f_2(q_1,q_2,q_3),\ z=f_3(q_1,q_2,q_3). \qquad (Ə3.1)$$

Əgər funksional determinant sıfırdan fərqlidirsə, yəni $J=\left|\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right|\neq 0$ şərti ödənirsə (Ə3.1) tənliklər sistemini tərsinə həll edərək q_i-lərin x_i-lərdən asılılığını tapmaq olar:

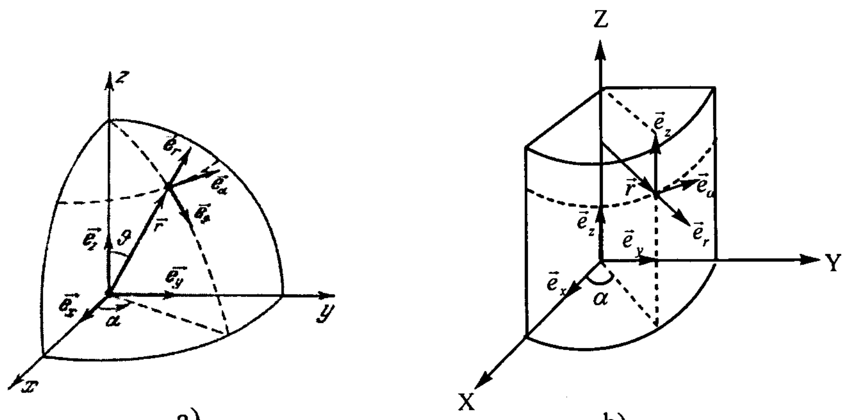
$$q_1=F_1(x,y,z),\ q_2=F_2(x,y,z),\ q_3=F_3(x,y,z).$$

Bu asılılıqlar bizə məlumdur. Məsələn, sferik və silindrik koordinat sistemləri üçün (Ə3.1) düsturları aşağıdakı kimi yazılır:

$$x = r\sin\theta\cos\alpha,\ y = r\sin\theta\sin\alpha,\ z = r\cos\theta;$$
$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha,\ z = z. \qquad (Ə3.1')$$

Burada r, θ, α sferik koordinat sistemində və r, α, z isə silindrik koordinat sistemində nöqtənin əyrixətli koordinatlarıdır. Biz (Ə3.1′) düsturlarını bilavasitə dekart koordinat sistemi ilə sferik və silindrik sistemlərin müqayisəsindən ala bilərik (bax: şəkil Ə3.1 a və b):

Sferik sistemdə $\vec{r}$-in x, y və z oxları üzrə proyeksiyasını hesablayırıq, silindrik sistemdə isə $\vec{r}$-in x və y oxları üzrə proyeksiyasını alırıq. Ort vektorlar sferik sistemdə $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha$ ilə, silindrik sistemdə isə $\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z$ ilə işarə edilir. Şəkildə θ bucağı polyar, α isə azimut bucağı adlanır. Bəzən kontekstdən asılı olaraq azimut bucağını φ və ya ψ ilə işarə edəcəyik.



Şəkil **Ə3.1**

$\vec{e}_\theta$ ortunun toxunduğu punktir yarımçevrəyə uzunluq və ya meridian xətti, $\vec{e}_\alpha$ ortunun toxunduğu punktir yarımçevrəyə isə en və ya paralel xətt deyilir. Paralel xətt Z oxuna perpendikulyar olan müstəvidə yerləşir.

Məlumdur ki, dekart koordinat sistemində tillərin uzunluğu dx, dy, və dz olan elementar paralelepipedin diaqonalının uzunluğunu vektor şəklində aşağıdakı kimi göstərə bilərik:

$$d\vec{\ell} = dx\cdot\vec{e}_x + dy\cdot\vec{e}_y + dz\cdot\vec{e}_z. \qquad (Ə3.2)$$

Bu cür uzunluq elementini istənilən əyrixətli koordinat sistemində yazmaq olar. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, əksər əyrixətli koordinat oxları boyunca uzunluq yox, bucaqlar göstərilir (məsələn, sferik sistemdə θ və α oxu boyunca). Ona görə əyrixətli koordinat oxları boyunca uzunluq elementi almaq üçün koordinatların diferensiallarını müəyyən parametrlərə vurmaq lazımdır. Onda istənilən əyrixətli koordinat sistemində elementar uzunluq vektorunu

$$d\vec{\ell} = h_1 dq_1 \vec{e}_1 + h_2 dq_2 \vec{e}_2 + h_3 dq_3 \vec{e}_3 \qquad (\text{Ə}3.2')$$

şəklində göstərmək olar. h_1, h_2, h_3 parametrləri Lame əmsalları adlanır və onlar ümumiyyətlə koordinatlardan asılıdır. Bu əmsalları sferik və silindrik sistemlərdə çox asanlıqla təyin etmək olar. Məsələn, $\vec{e}_r$ istiqamətində koordinatın artımı dr-dir. $\vec{e}_\theta$ istiqamətində uzunluq elementini almaq üçün θ-ya $d\theta$ artımını verərək $d\theta$ mərkəzi bucağa söykənən meridianın elementar $rd\theta$ uzunluğunu nəzərə almaq lazımdır. $\vec{e}_\alpha$ istiqamətində uzunluq elementini tapmaq üçün *r*-i paralelin yerləşdiyi müstəviyə proyeksiyalayaraq ($r_{\text{proek.}} = r\sin\theta$) bu proyeksiyanı elementar $d\alpha$ bucağı qədər fırlatmaq lazımdır. Burada $d\alpha$ mərkəzi bucağa söykənən çevrə qövsünün elementar $r\sin\theta d\alpha$ uzunluğunu hesablamaq kifayətdir. Beləliklə sferik koordinat sistemində elementar uzunluq vektoru

$$d\vec{\ell} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\alpha\vec{e}_\alpha \qquad (\text{Ə}3.2'')$$

şəklində olur. Silindrik koordinat sistemində $\vec{e}_r$ və $\vec{e}_z$ istiqamətində koordinat artımı artıq uzunluq elementi olduğundan, yalnız $\vec{e}_\alpha$ istiqamətindəki koordinat artımını uzunluq elementinə çevirmək lazımdır. Bunu da çox asanlıqla həll edərək $rd\alpha$ alırıq. Beləliklə sferik və silindrik əyrixətli koordinat sistemlərində Lame parametrlərini çox asanlıqla müəyyən etmiş oluruq:

Sferik sistemdə: $h_1 \equiv h_r = 1, h_2 \equiv h_\theta = r, h_3 \equiv h_\alpha = r\sin\theta,$

Silindrik sistemdə: $h_1 \equiv h_r = 1, h_2 \equiv h_\alpha = r, h_3 \equiv h_z = 1$ (Ə3.3)

alırıq. Məlumdur ki, ümumi halda, hətta mürəkkəb koordinat sistemlərində Lame parametrlərini aşağıdakı düsturla hesablayırlar:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, i = 1,2,3. \qquad (\text{Ə}3.4)$$

Əyrixətli koordinatlarda qradiyent. Fəzanın hər hansı (q_1, q_2, q_3) nöqtəsindən ona çox yaxın olan $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$ nöqtəsinə yerdəyişmə zamanı skalyar φ funksiyası aşağıdakı şəkildə dəyişir:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}dq_3 . \qquad (Ə3.5)$$

Bu dəyişməni biz skalyar hasil şəklində yaza bilərik:

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{\ell} = (\vec{\nabla}\varphi)_{q_1} \cdot h_1 dq_1 + (\vec{\nabla}\varphi)_{q_2} \cdot h_2 dq_2 + (\vec{\nabla}\varphi)_{q_3} \cdot h_3 dq_3 . \qquad (Ə3.5')$$

Yazılmış iki ifadənin müqayisəsindən

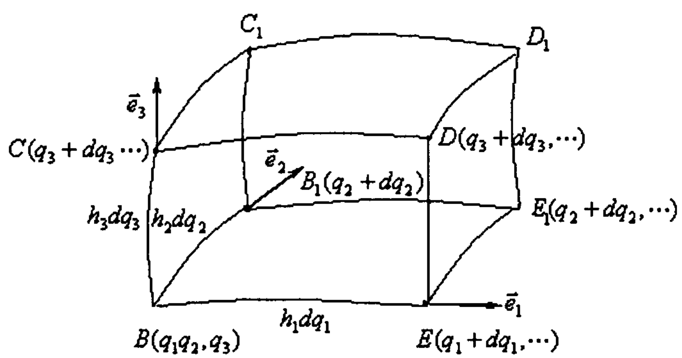
$$(\vec{\nabla}\varphi)_{q_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \quad (\vec{\nabla}\varphi)_{q_2} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \quad (\vec{\nabla}\varphi)q_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$$

münasibətlərini alırıq. Beləliklə φ skalyarının əyrixətli qradiyentini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3 . \qquad (Ə3.6)$$

İndi (Ə3.3) Lame parametrlərindən istifadə edərək qradiyentin sferik və silindrik koordinatlarda ifadəsini aşkar şəkildə yaza bilərik (bunu gələcəkdə edəcəyik).

Əyrixətli koordinatlarda divergensiya. Divergensiyanın alınmasında həcm və səthdən istifadə olunduğuna görə, əvvəlcə həcm elementini (əyrixətli elementar prizmanı) quraq (şəkil Ə3.2)



***Şəkil* Ə3.2**

Şəkildə oxlar boyunca elementar uzunluqlar, ort vektorlar və bəzi səth nöqtələrində koordinatlar və onların elementar artımları göstərilmişdir. Hesabat sağ koordinat sistemində aparılır. Əyrixətli koordinat sistemində hər hansı $\vec{A}$ vektorunu komponentlərə ayrılmış şəkildə yazaq:

$$\vec{A} = A_{q_1}\vec{e}_1 + A_{q_2}\vec{e}_2 + A_{q_3}\vec{e}_3 .$$

Bu vektorun şəkildəki elementar prizmanın səthindən keçən $\oint\limits_{\Delta S_{priz}}\vec{A}d\vec{S}$ selini hesablamaq lazımdır. Prizmanın sonsuz kiçik h_1dq_1, h_2dq_2 və h_3dq_3 tilləri limitdə bir-birinə perpendikulyar olduğundan prizmanın həcmi

$$dV = (h_1h_2h_3)dq_1dq_2dq_3 \qquad (Ə3.7)$$

olacaqdır. Prizmanın ön üzünün (BCDE üzü) xarici normalı $\vec{e}_2$-nin əksinə yönəldiyindən bu üzün səthi

$$d\vec{S} = -(h_1dq_1)(h_3dq_3)\vec{e}_2 = -(h_1h_3)dq_1dq_3\vec{e}_2$$

olacaqdır. Bu üzdə $\vec{A}d\vec{S}$ hasili $\vec{A}d\vec{S} = -(h_1h_3A_{q_2})dq_1dq_3$ olur. Prizmanın arxa üzünün ($B_1C_1D_1E_1$ üzü) səth elementi $d\vec{S} = (h_1h_3)dq_1dq_3\vec{e}_2$-dir və bu üz q_2 koordinatının $q_2 + dq_2$ qiymətinə uyğun müstəvidə yerləşir. Bu səthdən keçən selin qiyməti də koordinatın $q_2 + dq_2$ qiymətinə uyğun olmalıdır. Məlumdur ki, diferensiallanan hər hansı $F(q_2 + dq_2)$ funksiyasını təqribən $F(q_2) + \dfrac{\partial F}{\partial q_2}dq_2$ şəklində yazmaq olar. Bütün bunları nəzərə alaraq ön və arxa səthlərdən keçən $\vec{A}$-nın tam selini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_{q_2})dq_1dq_2dq_3 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_{q_2})dV .$$

Analoji olaraq alt və üst səthlərdən keçən tam seli $\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\times$ $\times\dfrac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_{q_3})dV$ şəklində yazmaq mümkündür. Buna oxşar olaraq yan səthlərdən keçən tam seli aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_{q_1})dV.$$

Bu üç seli toplayaraq elementar prizmanın tam səthindən keçən $\vec{A}$ vektorunun seli üçün aşağıdakı nəticəni alırıq:

$$\oint_{\Delta S_{PRIZ}} \vec{A}d\vec{S} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_{q_3})\right\}dV. \quad (Ə3.8)$$

Burada dV həcm elementinin önündə dayanan kəmiyyət əyrixətli divergensiyadır:

$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv (\vec{\nabla}\vec{A}) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\times$$

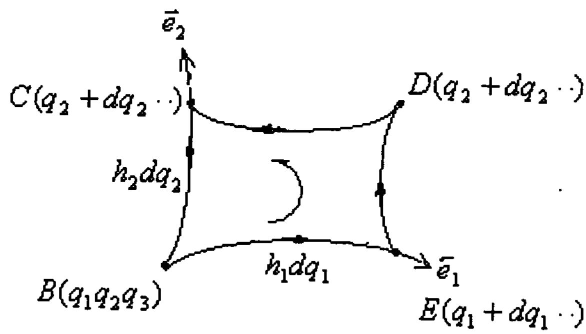
$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_{q_3})\right\}. \quad (Ə3.9)$$

Sonsuz kiçik həcm üçün $\int\limits_{\Delta V} FdV \approx FdV$ olduğuna görə (Ə3.8) düsturunu

$$\oint \vec{A}d\vec{S} = \int(\vec{\nabla}\vec{A})dV \quad (Ə3.10)$$

şəklində yazmaq olar. Bu, divergensiya teoremidir. (Ə3.10) sonsuz kiçik həcm və kiçik səth üçün yazılmışdır. Lakin biz sonlu həcmi sonsuz kiçik həcmlərə bölərək, hər bir kiçik həcm üçün (Ə3.10) düsturunu yazırıq və sonra bu həcmlər üzrə cəmləmə apararaq (Ə3.10) düsturunun istənilən sonlu həcm və səth üçün doğru olduğunu göstərə bilərik.

Əyrixətli rotor. Biz fəzada hər hansı bir $B(q_1,q_2,q_3)$ nöqtəsindən başlayaraq q_3 koordinatını sabit saxlamaqla, q_1 və q_2 koordinatlarına kiçik artımlar verərək 4-bucaqlı bir çərçivə əldə edə bilərik (şəkil Ə3.3). Bu çərçivənin konturu boyunca hər hansı $\vec{A}$ vektorunun $\oint \vec{A}d\vec{\ell}$ sirkulyasiyasını hesablamalıyıq. Hesabat sağ koordinat sistemində aparıldığına görə çərçivənin səthinin müsbət normalı konturu dolanma istiqaməti ilə sağ yivli burğu təşkil edərək səthə perpendikulyar olan $\vec{e}_3$ istiqamətində yönələcəkdir. Onda çərçivənin elementar səthi $d\vec{S} = (h_1h_2)dq_1dq_2\vec{e}_3$ olar. Konturun alt kənarının uzunluq elementi $d\vec{\ell} = h_1dq_1\vec{e}_1$ -dir və bu elementin sirkulyasiya inteqralına verdiyi əlavə $\vec{A}d\vec{\ell} = (h_1A_{q_1})dq_1$ olacaqdır.



Şəkil Ə3.3

Konturun üst kənarının verdiyi əlavə $\vec{A}d\vec{\ell}_{ust} = -(h_1A_{q_1})dq_1$ olur (burada $d\vec{\ell}_{ust} = -h_1dq_1\vec{e}_1$-dir). Lakin bu əlavə q_2 koordinatının q_2+dq_2 qiymətində hesablanmalıdır. Bu iki əlavəni birlikdə götürsək

$$\left[-(h_1A_{q_1})_{q_2+dq_2} + (h_1A_{q_1})_{q_2}\right]dq_1 = -\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_{q_1})\right]dq_1dq_2$$

alarıq. Buna oxşar olaraq sağ və sol kənarların verdiyi birgə əlavə

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_{q_2})\right]dq_1dq_2$$

olur. Beləliklə baxdığımız əyrixətli inteqralın cavabı

$$\oint\vec{A}d\vec{\ell} = \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_{q_1})\right]dq_1dq_2 =$$

$$= \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_{q_1})\right]\vec{e}_3\cdot d\vec{S} \qquad (Ə3.11)$$

olur. Sağ tərəfdə $\vec{A}$-nın rotorunun $\vec{e}_3$ komponentinin $d\vec{S}$ elementar səthdən keçən seli ifadə olunur. Rotorun $\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ komponentlərini analoji yolla hesablasaq, $\vec{A}$ vektorunun əyrixətli rotorunun tam ifadəsini alarıq:

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla}\vec{A}\right] = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3A_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2A_{q_2})\right]\vec{e}_1 +$$

$$+\frac{1}{h_1h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1A_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3A_{q_3})\right]\vec{e}_2 +$$

$$+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2A_{q_2})-\frac{\partial}{\partial q_2}(h_1A_{q_1})\right]\vec{e}_3. \qquad (Ə3.12)$$

Biz sonsuz kiçik səth və kontur üçün (Ə3.11) düsturunu

$$\oint \vec{A}d\vec{\ell}=\int[\vec{\nabla}\vec{A}]d\vec{S} \qquad (Ə3.13)$$

şəklində yaza bilərik. Əlbəttə, sonlu səthi çoxlu sayda sonsuz kiçik səthlərin cəmi şəklində götürərək və hər bir kiçik səthə (Ə3.13) düsturunu tətbiq etməklə və bu səthlər üzrə cəmləmə aparmaqla bu düsturun sonlu səthə və sonlu kontur üçün doğru olduğunu göstərmək olar.

Əyrixətli koordinatlarda Laplas operatoru. Bilirik ki, qradiyentin divergensiyası Laplas operatorunu verir:

$$\text{divgrad}\varphi=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi)=\vec{\nabla}^2\varphi\equiv\Delta\varphi.$$

Əyrixətli grad (Ə3.6) düsturu ilə və əyrixətli div isə (Ə3.9) ifadəsi ilə təsvir olunur. Məqsədimizə nail olmaq üçün $\text{div}\vec{A}$ -nın (Ə3.9) ifadəsində Aq_1-in yerinə $\text{grad}\varphi$ -dəki $\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$ həddini yazmaq lazımdır. Eyni qayda ilə $\text{div}\vec{A}$ -da Aq_2-nin yerinə $\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}$ və Aq_3-ün yerinə isə $\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$ yazmaq lazımdır:

$$\vec{\nabla}^2\varphi\equiv\Delta\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right\}. \square \qquad (Ə3.14)$$

Bu, əyrixətli koordinat sistemində Laplas operatorunun ifadəsidir.

3.2. Sferik və silindrik sistemlərdə grad, div, rot və Δ-nın ifadələri.

Əyrixətli koordinatlarda yazılmış (Ə3.6), (Ə3.9), (Ə3.12) və (Ə3.14) düsturlarında (Ə3.3) Lame parametrlərini nəzərə alsaq çox asanlıqla yuxarıdakı operatorların aşkar ifadələrini yaza bilərik. Əvvəlcə sferik koordinat sistemindən başlayaq. Yuxarıdakı düsturlarda növbə ilə $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=r\sin\vartheta$, $\frac{\partial}{\partial q_1}=\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial q_2}=\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial}{\partial q_3}=\frac{\partial}{\partial\alpha}$, $A_{q_1}=A_r$, $A_{q_2}=A_\theta$, $A_{q_3}=A_\alpha$, $\vec{e}_1=\vec{e}_r, \vec{e}_2=\vec{e}_\theta$ və $\vec{e}_3=\vec{e}_\alpha$ yazaq:

$$\text{grad}\varphi = \vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\alpha}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha};$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha};$$

$$(\text{rot}\vec{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\alpha\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\alpha}\right];$$

$$(\text{rot}\vec{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r};$$

$$(\text{rot}\vec{A})_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta};$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}.$$

Silindrik koordinat sistemində yuxarıdakı operatorların aşkar ifadələrini almaq üçün (Ə3.6), (Ə3.9), (Ə3.12) və (Ə3.14) düsturlarında $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$, $\frac{\partial}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial q_3} = \frac{\partial}{\partial z}$, $A_{q_1} = A_r$, $A_{q_2} = A_\alpha$, $A_{q_3} = A_z$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\alpha$ və $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ yazmaq lazımdır:

$$\text{grad}\varphi = \vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\alpha}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$(\text{rot}\vec{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z};$$

$$(\text{rot}\vec{A})_\alpha = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r};$$

$$(\text{rot}\vec{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha};$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

3.3. Sferik koordinatlarda Laplas tənliyinin həlli olan skalyar funksiyanın aşağıdakı şərtlər daxilində ifadəsini tapın: funksiya yalnız a) *r*-dən asılıdır, b) yalnız θ-dan asılıdır, c) yalnız α-dan asılıdır.

Göstəriş: yuxarıdakı şərtlər daxilində $\Delta\varphi = 0$ tənliyini həlll etmək lazımdır.

Cavab: $\varphi(r) = A + \frac{B}{r}$, $\varphi(\theta) = A + B\ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $\varphi(\alpha) = A + B\alpha$.

3.4. Silindrik koordinat sistemində $\Delta\varphi = 0$ Laplas tənliyinin a) yalnız r-dən, b) yalnız α-dan və c) yalnız z-dən asılı olan həllərini tapın.

Cavab: $\varphi(r) = A + B\ln r$, $\varphi(\alpha) = A + B\alpha$, $\varphi(z) = A + Bz$.

Ə4.

4.1. δ-funksiya, onun xassələri və tətbiqi

Dirak 1926-cı ildə δ-funksiyanı qeyri-məxsusi sinqulyar funksiya kimi elmə daxil etmişdir. Bu funksiya nöqtəvi obyektlərin (nöqtəvi yük, nöqtəvi kütlə, nöqtəvi elektrik və maqnit momentləri, nöqtəvi yükün yaratdığı cərəyan və s.) sıxlığını təsvir etmək üçün işlədilir. δ-funksiyalardan həm klassik fizikada, həm də kvant nəzəriyyəsində geniş istifadə olunur. Müasir riyaziyyat δ-funksiyanı ümumiləşmiş funksiyalar sinfinə aid edir. Lakin fiziklər δ-funksiyaya qeyri-məxsus sinqulyar funksiya kimi baxaraq bütün məsələləri dəqiq həll edə bilirlər. Biz də bu yolla gedəcəyik. Dirakın δ-funksiyası aşağıdakı iki xassəni ödəyir:

$$1)\ \delta(x - x_1) = \begin{cases} 0, x \neq x_1 \text{ olduqda}, \\ \infty, x = x_1 \text{olduqda}, \end{cases}$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_1)dx = 1. \qquad (\text{Ə}4.1)$$

Xüsusi halda $x_1 = 0$ olarsa, onda

$$1)\ \delta(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \text{ olduqda}, \\ \infty, x = 0, \text{ olduqda}, \end{cases}$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad (\text{Ə}4.1')$$

olar. Burada $(-\infty,+\infty)$ inteqrallanma oblastını x_1 nöqtəsini (və ya sıfır nöqtəsini) öz daxilində saxlayan $[-a,+a]$ oblastı ilə əvəz etmək olar. δ-funksiya müxtəlif şəkillərə malikdir və biz əsas mətində §34-də bu funksiyanın ən çox yayılmış sadə şəkli ilə məşğul olmuşuq:

$$\delta(x) = \lim_{K\to\infty} \delta(K, x) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^{+K} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \ . \qquad (\text{Ə}4.2)$$

(Ə4.2) bir ölçülü δ-funksiyanın əsas şəklidir. Bəzən $e^{ikx}=\cos kx+ +i\sin kx$ yazaraq $\delta(x)$ funksiyanı daha sadə

$$\delta(x)=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{+K}(\cos kx+i\sin kx)dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kxdk= \\ =\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos kxdk \qquad (Ə4.2')$$

şəklində göstərirlər.

Biz burada δ-funksiyanın mühüm xassələrini isbat edəcəyik. Əgər $f(x)$ funksiyası diferensiallanan sonlu funksiyadırsa, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_1)dx=f(x_1) \qquad (Ə4.3)$$

münasibəti doğrudur. Bunu isbat etmək üçün $\delta(x-x_1)$-funksiyasının $x=x_1$-in yaxın ətrafında sıfırdan fərqli olduğunu və inteqralın orta qiyməti teoremini nəzərə alaraq, yazırıq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_1)dx=\int_{-a}^{+a}f(x)\delta(x-x_1)dx=\lim_{\varepsilon\to0}f(x_1+\alpha\varepsilon)\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon}\delta(x-x_1)dx= \\ =\lim_{\varepsilon\to0}f(x_1+\alpha\varepsilon)=f(x_1). \qquad (Ə4.3')$$

Burada $[-a,+a]$ seqmenti x_1 nöqtəsini öz daxilində saxlayan oblastdır. α isə seçilmiş parametrdir $(|\alpha|<1)$.

δ-funksiya öz dəqiq mənasına inteqral altında nail olur. Bunu nəzərə alsaq aşağıdakı iki münasibətin doğruluğunu yəqin edərik:

$$\begin{aligned} &f(x')\delta(x'-x)=f(x)\delta(x'-x), \\ &x\delta(x)=0. \end{aligned} \qquad (Ə4.4)$$

Bu münasibətləri inteqrallasaq, onların doğru olduğunu görərik.

Fərz edək ki, δ-funksiyanın arqumenti hər hansı $F(x)$ funksiyasıdır və o, müəyyən sayda sadə köklərə malikdir: $F(x_s)=0$, burada $x_s(s=1,2,..n)$ funksiyanın sadə kökləridir. İndi inteqrallanma oblastını ayrı-ayrı $[x_s-\varepsilon_s,x_s+\varepsilon_s]$intervallarına $(\varepsilon_s \rangle 0)$ elə bölək ki, hər bir intervalda $F(x)$ funksiyasının bir kökü yerləşsin. İnteqrallamada x-dan yeni U dəyişəninə keçək:

$$F(x)=U,\ dF(x)=dU,\ F'(x)dx=dU,\ dx=\frac{dU}{F'(x)}=\frac{dU}{U'}.$$

Aşağıdakı inteqralı hesablayaq:

$$g_s=\int_{x_s-\varepsilon_s}^{x_s+\varepsilon_s}f(x)\delta(F(x))dx=\int_{F(X_s-\varepsilon_s)}^{F(X_s+\varepsilon_s)}f(x)\delta(U)\frac{dU}{U'}=$$

$$=\int_{-\varepsilon_s U_s'+\frac{1}{2}\varepsilon_s^2U_s''+\cdots}^{\varepsilon_s U_s'+\frac{1}{2}\varepsilon_s^2U_s''+\cdots}f(x)\delta(U)\frac{dU}{U'}. \qquad (Ə4.5)$$

Biz burada $F(x_s\pm\varepsilon_s)$ funksiyasını sıraya ayırmışıq:

$$F(x_s\pm\varepsilon_s)=F(x_s)\pm\varepsilon_sF'(x_s)+\frac{1}{2}\varepsilon_s^2F''(x_s)+\cdots=\pm\varepsilon_sU_s'+\frac{1}{2}\varepsilon_s^2U_s''+\cdots,$$

$$U_s=F(x_s)=0,\ U_s'=F'(x_s)\neq 0.$$

ε_s parametrini elə seçək ki, (Ə4.5) ifadəsində inteqralın yuxarı və aşağı sərhədinin işarəsi ε_s-in xətti hissəsilə təyin edilsin. Onda $U_s'>0$ olduqda $g_s=\frac{f(x_s)}{U_s'}=\frac{f(x_s)}{|U_s'|}$ olar.

Əgər $U_s'<0$ olarsa, biz inteqralda sərhədlərin yerlərini dəyişirik ki, aşağı sərhəd yuxarıdakından kiçik olsun:

$$g_s=-\int_{\varepsilon_sU_s'}^{-\varepsilon_sU_s'}f(x)\frac{\delta(U)}{U'}dU=-\frac{f(x_s)}{U_s'}=\frac{f(x_s)}{|U'_s|}.$$

İnteqrallanmanı bütün intervallar üzrə aparsaq,

$$\int_a^b f(x)\delta(F(x))dx=\sum_{s=1}^{n}g_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{f(x_s)}{|F'(x_s)|}$$

olar. Bu ifadəni almaq üçün simvolik olaraq

$$\delta(F(x))=\sum_{s=1}^{n}\frac{\delta(x-x_s)}{|F'(x_s)|} \qquad (Ə4.6)$$

yazmalıyıq. Son ifadə δ-funksiyanın əsas xassələrindən biridir. Sadə halda $F(x)=ax$ və $F(x)=x^2-a^2$ olarsa, $\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}$ və $\delta(x^2-a^2)=$

$$=\frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|}\text{ olar.}$$

δ-funksiya çüt funksiyadır, yəni $\delta(x-x_1)=\delta(-x+x_1)$. Doğrudan da (Ə4.3) ifadəsinin sol tərəfində $\delta(-x+x_1)$ yazaraq, yenə də inteqralın $f(x_1)$ olduğunu yəqin edərik. δ-funksiyasını sıraya ayırmaq və onu diferensiallamaq mümkündür. Əgər inteqral altında δ-funksiyanın törəməsi iştirak edirsə, biz ifadəni hissə-hissə açaraq son nəticəni ala bilərik:

$$\int_a^b f(x)\frac{\partial\delta(x-x_1)}{\partial x}dx = f(x)\delta(x-x_1)\Big|_a^b-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}\delta(x-x_1)dx=-\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}. \quad (Ə4.7)$$

Burada $a<x_1<b$.

δ-funksiyasını kəsilməz funksiyanın limit halı kimi də göstərmək olar. Aşağıdakı kəsilməz funksiyaya nəzər salaq:

$$\gamma(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k}\frac{\sin kx}{k}dk=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}. \quad (Ə4.8)$$

Bu funksiya aşağıdakı limit halına malikdir:

$$\lim_{\alpha\to 0}\gamma(x,\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x>0\text{ olarsa,}\\ -\frac{1}{2}, & x<0\text{ olarsa.}\end{cases} \quad (Ə4.8')$$

Baxdığımız funksiyanın x-ə görə törəməsini $\delta(x,\alpha)$ ilə işarə etsək

$$\gamma'(x,\alpha)=\delta(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k}\cos kx dk=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2} \quad (Ə4.9)$$

alarıq. (Ə4.9) düsturunda inteqralı açmaq üçün üstlü funksiyaya keçmişik:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha k}\cos kx dk=\int_0^\infty e^{-\alpha k}\frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx})dk=\frac{1}{2}\int_0^\infty(e^{k(-\alpha+ix)}+e^{k(-\alpha-ix)})dk=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{-\alpha+ix}e^{k(-\alpha+ix)}\Big|_0^\infty+\frac{1}{-\alpha-ix}e^{k(-\alpha-ix)}\Big|_0^\infty\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{-\alpha+ix}+\frac{-1}{-\alpha-ix}\right\}=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}. \quad (Ə4.9')$$

$\delta(x,\alpha)$-nın $\alpha\to 0$-da limiti

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\begin{cases}0,\ x\neq 0\,\text{olduqda},\\ \infty,\ x=0\,\text{olduqda},\end{cases}$$

olur. Beləliklə, biz limitdə δ -funksiyanı alırıq:

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\lim\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}. \qquad (\text{Ə}4.11)$$

Gələcəkdə bizə (Ə4.9′) inteqralına oxşar olan aşağıdakı inteqral da lazım olacaqdır:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha k}\sin kx dk=\int_0^\infty e^{-\alpha k}\frac{1}{2i}(e^{ikx}-e^{-ikx})dk=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{k(-\alpha+ix)}-e^{k(-\alpha-ix)})dk=$$

$$=\frac{x}{\alpha^2+x^2}. \qquad (\text{Ə}.4.9'')$$

İndi nəzəri hesablamalarda çox istifadə olunan mühüm bir düsturun – Sokotski düsturunun alınması ilə məşğul olaq. Burada eyni bir inteqralın müxtəlif variantlarda yazılmasından istifadə olunacaqdır. Aşağıdakı sadə inteqralı açaq:

$$\int_0^\infty \underset{\alpha\to 0}{e^{i(x+i\alpha)k}}dk=\underset{\alpha\to 0}{\frac{1}{i(x+i\alpha)}}e^{(ixk-\alpha k)}\Big|_0^\infty=\underset{\alpha\to 0}{\frac{-1}{i(x+i\alpha)}}. \qquad (\text{Ə}4.12)$$

Bu inteqralı başqa şəkildə yazaraq, onu yenidən hesablayaq:

$$\int_0^\infty \underset{\alpha\to 0}{e^{i(x+i\alpha)k}}dk=\int_0^\infty \underset{\alpha\to 0}{e^{-\alpha k}}\cos kx dk+i\int_0^\infty \underset{\alpha\to 0}{e^{-\alpha k}}\sin kx dk. \qquad (\text{Ə}4.13)$$

Burada iştirak edən inteqralları biz artıq (Ə4.9′) və (Ə4.9″) düsturlarında hesablamışıq:

$$\int_0^\infty \underset{\alpha\to 0}{e^{-\alpha k}}\cos kx dk=\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2},\qquad \int_0^\infty \underset{\alpha\to 0}{e^{-\alpha k}}\sin kx dk=\frac{x}{\alpha^2+x^2}. \qquad (\text{Ə}4.14)$$

(Ə4.14) ifadələrini (Ə4.13) -də yerinə yazaq və (Ə4.13) düsturunu (Ə4.12) ilə müqayisə edək:

$$\underset{\alpha\to 0}{\frac{-1}{i(x+i\alpha)}}=\underset{\alpha\to 0}{\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}}+i\underset{\alpha\to 0}{\frac{x}{\alpha^2+x^2}}.$$

Bu bərabərliyi «-i»-yə vuraraq (Ə4.11) düsturunu nəzərə alsaq:

$$\frac{1}{x+i\alpha} = -i\pi\delta(x) + \frac{x}{\alpha^2 + x^2} \qquad (Ə4.15)$$

olar. Bu düsturdan bəzi inteqralların açılmasında istifadə edilir və buradakı bütün hədlər inteqralın altında yazılır. İnteqralda həqiqi ox üzərində məxsusiyyət ortaya çıxarsa, biz inteqralı baş qiymət mənasında açarıq (Главное значение və ya *Prinsipial value*). Ona görə (Ə4.15-də) axırıncı həddin qabağında P simvolu yazılır:

$$\underset{\alpha\to 0}{\frac{x}{\alpha^2+x^2}} \to \underset{\alpha\to 0}{P\frac{x}{\alpha^2+x^2}} = \underset{\alpha\to 0}{P\frac{1}{x}} .$$

Son nəticədə

$$\underset{\alpha\to 0}{\frac{1}{x+i\alpha}} = -i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}. \qquad (Ə4.15')$$

düsturunu alırıq. Bu məşhur Sokotski düsturudur. (Ə4.15′) düsturunda $x \to -x$ yazaraq, alınmış ifadəni «-1»-ə vursaq, düsturun başqa variantını alarıq:

$$\underset{\alpha\to 0}{\frac{1}{x-i\alpha}} = i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}.$$

Bu iki ifadəni birləşdirərək Sokotsk düsturunun ümumi ifadəsini yaza bilərik:

$$\underset{\alpha\to 0}{\frac{1}{x\pm i\alpha}} = \mp i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}. \qquad (Ə4.15'')$$

Sokotski düsturları bir çox fiziki məsələlərin riyazi həllində effektiv rol oynayır.

δ-funksiyalarından isə klassik və kvant fizikasının diferensial tənliklərinin həllində, Qrin funksiyalarının qurulmasında, kommutasiya münasibətlərində və s. geniş istifadə olunur.

4.2. x_0 nöqtəsi sonlu kəsilmə nöqtəsi olan

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<x_0 \text{ olduqda}, \\ f_2(x), & x>x_0 \text{ olduqda}, \end{cases}$$

funksiyanın törəməsinin aşağıdakına bərabər olduğunu isbat edin:

$$f'(x)=h\delta(x-x_0)+\begin{cases} f_1'(x), & x<x_0 \text{ olduqda}. \\ f_2'(x), & x>x_0 \text{ olduqda}. \end{cases} \quad h=f_2(x_0)-f_1(x_0).$$

Göstəriş: $f(x)$ funksiyasını belə seçin:

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}+\gamma(x-x_0)\right)f_2(x)+\left(\frac{1}{2}-\gamma(x-x_0)\right)f_1(x).$$

Burada $\gamma(x-x_0)$ (Ə4.8′) şərtini ödəyən funksiyadır.

4.3. Göstərin ki, sonlu kəsilən $\theta(x)=\begin{cases} 1, & x>x_0 \text{ olduqda}, \\ 0, & x<x_0 \text{ olduqda}. \end{cases}$ Xevisayd funksiyasının törəməsi δ -funksiyadır: $\frac{d\theta(x)}{dx}=\delta(x)$.

Göstəriş: Əvvəlki məsələdən istifadə edin.

4.4. Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

$$\int_{-3}^{5}(x^2-2x+3)\delta(-2x)dx; \qquad \int_{-10}^{-3}(x+5)\delta(x+6)dx;$$

$$\int_{0}^{5}(x+3)\delta(x+3)dx; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha x}\delta(x^2+x-2)dx;$$

$$\int_{0}^{2}(4x^2+5x)\delta(2x^2+3x-1)dx; \qquad \int_{0}^{1}\delta(x-1)dx.$$

Cavablar: $\frac{3}{2}; -1; 0; \frac{1}{3}(e^{\alpha}+e^{-2\alpha}); 0; \frac{1}{2}$.

4.5. Aşağıdakı ifadələri sadələşdirin:

$$(x-a)\delta(x-a); \quad f(x)\delta(x-a); \quad (3x^3-7x)\delta(2x^2-6x+4).$$

Cavablar: $0; f(a)\delta(x-a); 5\delta(x-2)-2\delta(x-1)$.

4.6. Liyenar-Vixert potensiallarının δ -funksiya vasitəsilə hesablanması.

Liyenar-Vixert potensialları nöqtəvi relyativistik yükün yaratdığı sahənin potensiallardıdır. Biz §63-də onları sadə üsulla almışıq. İndi isə bu potensialları yüklər sisteminin yaratdığı gecikən potensiallardan istifadə edərək hesablayacağıq. Gecikən skalyar potensialın ifadəsini yazaq (§62):

$$\varphi(R_0,t)=\int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}'). \qquad (\text{Ə}4.16)$$

Burada $\vec{r}'$ yüklər sisteminin ρ yük sıxlığının yerləşdiyi həcm elementinin radius vektorudur, zamandan asılı deyildir və inteqrallanma parametridir, t-müşahidə anıdır, $\vec{R}_0$ müşahidə nöqtəsinin radius vektorudur, $R=\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|$ həcm elementi ilə müşahidə nöqtəsi arasındakı məsafədir və $t'=t-\frac{R}{c}$ gecikmə zamanıdır. Liyenar-Vixert potensialını almaq üçün (Ə4.16) düsturunda gecikməni dəqiq nəzərə alaraq yüklər sisteminin V həcmini sıfıra yaxınlaşdırmalıyıq, yəni nöqtəvi yükə keçməliyik. Gecikməni aşkar göstərmək üçün (Ə4.16)-nı belə yazırıq:

$$\varphi(R_0,t)=\lim_{V\to 0}\int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}')=$$

$$=\lim_{V\to 0}\int\limits_V\int\limits_{t_1'}^{t_2'}\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|}\delta\left(t'-t+\frac{\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|}{c}\right)(d\vec{r}')dt'. \qquad (\text{Ə}4.16')$$

Burada $[t_1', t_2']$ seqmenti δ-funksiyanın arqumentinin sıfır nöqtəsini öz daxilində saxlayan zaman intervalıdır. Son düsturda t' üzrə inteqrallanma aparsaq, δ-funsiyasının köməyi ilə əvvəlki düstura qayıtmış oluruq. İndi fərz edək ki, yüklər sistemi nöqtəvi e_a yükündən ibarətdir və onun radius vektoru $\vec{r}_a(t')$-dır. Onda $\rho(\vec{r}',t')$ nöqtəvi yükün sıxlığı olacaqdır və onu $\rho(\vec{r}',t')=e_a\delta(\vec{r}'-r_a(t'))$ şəklində yazırıq. Bunu (Ə.16')-də yerinə yazaraq $\delta(\vec{r}'-\vec{r}_a(t'))$-nın köməyi ilə həcm üzrə inteqrallanma aparırıq. Nəticədə həcm üzrə inteqral aradan çıxır və inteqralaltı funksiyada $\vec{r}'$ vektoru $\vec{r}_a(t')$ ilə əvəz olunur:

$$\varphi(R_0,t)=\int\limits_{t_1'}^{t_2'}\frac{e_a}{\left|\vec{R}_0-\vec{r}_a(t')\right|}\delta\left(t'-t+\frac{\left|\vec{R}_0-\vec{r}_a(t')\right|}{c}\right)(dt').$$

(Ə.16′) düsturunda yazılmış $\lim V \to 0$ şərti artıq son düsturda avtomatik nəzərə alınmışdır, çünki nöqtəvi yükün həcmi sıfırdır. Biz §63-də nöqtəvi yük olaraq elektronu götürmüşük və onun yükünə e və radius vektoruna $\vec{r}'(t')$ demişik. Ona görə son düsturda $e_a \equiv e$ və $\vec{r}_a(t') \equiv \vec{r}'(t')$ yazaq və $|\vec{R}_0 - \vec{r}_a(t')| \equiv |\vec{R}_0 - \vec{r}'(t')| = R(t')$ qısa yazılışdan istifadə edək:

$$\varphi(R_0, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \frac{e}{R(t')}\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right)(dt').$$

Burada δ funksiyanın arqumenti mürəkkəb funksiyadır və onu $F(t') = t' - t + \dfrac{R(t')}{c}$ ilə işarə edək. Bəzi mülahizələrə görə $F(t')$ funksiyasının bir həqiqi kökü vardır və ona t_s'-deyək. Onda $F(t_s') = 0$ olur. δ-funksiyanın (Ə4.6) xassəsinə əsasən

$$\delta(F(t')) = \frac{\delta(t' - t_s')}{\left|\dfrac{dF(t')}{dt'}\right|}$$

yazaraq, son nəticəni aça bilərik:

$$\varphi(R_0, t) = \frac{e}{R(t')\left|1 + \dfrac{dR(t')}{cdt'}\right|} = \left.\frac{e}{R(t')\left|1 - \dfrac{\vec{V}(t')\vec{n}(t')}{c}\right|}\right|_{t' = t - \frac{R(t')}{c}}. \qquad (Ə4.16'')$$

Biz burada §63-64-də aldığımız bəzi sadə ifadələrdən istifadə etmişik:

$$\frac{d\vec{R}(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'}(\vec{R}_0 - \vec{r}'(t')) = -\frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} = -\vec{V}(t')$$

– elektronun sürətidir, $R^2(t') = \vec{R}^2(t')$ bərabərliyini diferensiyallayaraq

$$2R(t')\frac{dR(t')}{dt'} = 2\vec{R}(t')\frac{d\vec{R}(t')}{dt'} \quad \text{və ya} \quad \frac{dR(t')}{dt'} = -\vec{V}(t')\frac{\vec{R}(t')}{R(t')} = -\vec{V}(t')\vec{n}(t')$$

alırıq. $\vec{n}(t')$ kəmiyyəti $\vec{R}(t')$ istiqamətində vahid vektordur. Gələcəkdə adətən sadəlik xatirinə $\vec{n}$, $\vec{V}$ və $\vec{R}$ vektorlarının t' arqumentini yazmayacağıq. İndi (Ə4.16″) düsturunu yığcam şəkildə yazaq:

$$\varphi(\vec{R}_0,t)=\frac{e}{R(1-\vec{\beta}\vec{n})}\bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \qquad (\text{Ə}4.16''')$$

Bu, Liyenar-Vixertin skalyar potensialıdır. Bərabərliyin sağ tərəfində bütün funksiyalar t' anında götürülür və $\vec{\beta}(t')=\frac{\vec{V}(t')}{c}$. Liyenar-Vixertin vektor potensialını analoji yolla yüklər sisteminin yaratdığı gecikən vektor potensialın ifadəsindən alırıq:

$$\vec{A}(\vec{R}_0,t)=\lim_{V\to 0}\frac{1}{c}\int_V\frac{\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}(d\vec{r}')=$$

$$=\lim_{V\to 0}\frac{1}{c}\int_V\int_{t_1'}^{t_2'}\frac{\vec{j}(\vec{r}',t')}{\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|}\delta\left(t'-t+\frac{\left|\vec{R}_0-\vec{r}'\right|}{c}\right)(d\vec{r}')dt'. \qquad (\text{Ə}4.17)$$

Nöqtəvi yük üçün $\vec{j}(\vec{r}',t')=e_a\vec{V}_a(t')\delta(\vec{r}'-\vec{r}_a(t'))$ şəklində yazılır. Analogiyanı davam etdirsək

$$A(\vec{R}_0,t)=\vec{\beta}\frac{e}{R(1-\vec{\beta}\vec{n})}\bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}=\vec{\beta}\varphi \qquad (\text{Ə}4.17')$$

alarıq. (Ə4.16‴) və (Ə4.17′) düsturları elektron üçün yazılmış Liyenar-Vixert potensialları adlanır və onlar §63-də alınmış ifadələrlə üst-üstə düşür.

4.7. Nöqtəvi relyativistik elektronun sahəsinin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ intensivliklərinin aşkar ifadələrinin alınması

Verilmiş məsələnin həlli üçün potensialları aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\varphi(\vec{R}_0,t)=\frac{ec}{Rc-\vec{V}\vec{R}}\bigg|_{t'},\quad A(\vec{R}_0,t)=\frac{e\vec{V}}{Rc-\vec{V}\vec{R}}\bigg|_{t'}. \qquad (\text{Ə}4.18)$$

§64-də alınmış bəzi ifadələri bizə lazım olacaq şəkildə götürək:

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{cR}{cR-\vec{V}\vec{R}},\quad \vec{\nabla}t'=-\frac{\vec{n}}{c-\vec{n}\vec{V}},\quad \frac{d\vec{R}'}{dt'}=-\vec{V},\quad \frac{dR'(t')}{dt'}=-\frac{\vec{V}\vec{R}}{R}.$$

$\vec{E}$ və $\vec{H}$-ı hesablamaq üçün biz potensiallardan R_0-a görə grad və rot almalıyıq və onları t-yə görə diferensiallamalıyıq. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, potensiallar həm bilavasitə $\vec{R}_0$-dan asılıdır və həm də t' vasitəsilə $\vec{R}_0$-dan asılı olur. Digər tərəfdən potensiallar yalnız t' vasitəsilə t-dən asılıdır. Potensialların bu mürəkkəb asılılığını nəzərə alaraq hesablamanı aparırıq:

$$\vec{E}(\vec{R}_0,t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\varphi=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}-\vec{\nabla}_{R_0}\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\vec{\nabla}_{R_0}t'.$$

Buradakı hər bir həddi ayrılıqda hesablayaq və sonda onları toplayaq.

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{Rc}{Rc-\vec{V}\vec{R}}\cdot\frac{e\dot{\vec{V}}(Rc-\vec{V}\vec{R})-e\vec{V}\left[-c\frac{\vec{V}\vec{R}}{R}-(\dot{\vec{V}}\vec{R}-V^2)\right]}{(Rc-\vec{V}\vec{R})^2}=-$$

$$-\frac{eR\dot{\vec{V}}(Rc-\vec{V}\vec{R})+e\vec{V}(c(\vec{V}\vec{R})+R(\dot{\vec{V}}\vec{R})-RV^2)}{(Rc-\vec{V}\vec{R})^3}=$$

$$=-\frac{e\dot{\vec{V}}}{R(c-\vec{n}\vec{V})^2}-\frac{e\vec{V}}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}(c(\vec{n}\vec{V})+\dot{\vec{V}}\vec{R}-V^2);$$

$$-\vec{\nabla}_{R_0}\varphi=\frac{ec}{(Rc-\vec{V}\vec{R})^2}\vec{\nabla}(Rc-\vec{V}\vec{R})=\frac{ec}{(Rc-\vec{V}\vec{R})^2}(c\frac{\vec{R}}{R}-\vec{V})=$$

$$=\frac{ec}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^2}(c\vec{n}-\vec{V});$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\vec{\nabla}t'=\frac{ec}{(Rc-\vec{V}\vec{R})^2}(c\vec{n}\vec{V}+\dot{\vec{V}}\vec{R}-\vec{V}^2)\frac{\vec{n}}{c-\vec{n}\vec{V}}=\frac{ec}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}\times$$

$$\times(c\vec{n}\vec{V}+\dot{\vec{V}}\vec{R}-V^2)\vec{n};$$

$$-\mathrm{grad}\varphi=-\vec{\nabla}_{R_0}\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\vec{\nabla}t'=\frac{1}{R^2}\frac{ec}{(c-\vec{V}\vec{n})^2}\left\{-\vec{V}+\frac{\vec{n}}{c-\vec{n}\vec{V}}(c^2-(\vec{n}\vec{V})c+\right.$$

$$\left.+c(\vec{n}\vec{V})+\dot{\vec{V}}\vec{R}-V^2)\right\}=\frac{ec}{R^2(c-\vec{V}\vec{n})^2}\left\{-\vec{V}+\frac{\vec{n}}{c-\vec{n}\vec{V}}(c^2-V^2+\dot{\vec{V}}\vec{R})\right\};$$

$$\vec{E}=-\frac{e\dot{\vec{V}}}{R(c-\vec{n}\vec{V})^2}-\frac{e\vec{V}}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}(c(\vec{n}\vec{V})+\dot{\vec{V}}\vec{R}-V^2)+\frac{ec}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^2}\times$$

$$\times\left[-\vec{V}+\frac{\vec{n}}{c-\vec{n}\vec{V}}(c^2-V^2+\dot{\vec{V}}\vec{R})\right]=e\left\{\frac{1}{R(c-\vec{n}\vec{V})^3}(-\dot{\vec{V}}(c-\vec{n}\vec{V})-\vec{V}(\dot{\vec{V}}\vec{n})+\right.$$

$$+c\vec{n}(\dot{\vec{V}}\vec{n}))+\frac{1}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}(-\vec{V}(c\vec{n}\vec{V}-V^2)+c(c-\vec{n}\vec{V})(-\vec{V})+c\vec{n}(c^2-V^2))\Bigg\}=$$

$$=e\left\{\frac{1}{R(c-\vec{n}\vec{V})^3}\left[c\vec{n}(\vec{n}\dot{\vec{V}})-(\vec{n}\dot{\vec{V}})\vec{V}-c\dot{\vec{V}}+(\vec{n}\vec{V})\dot{\vec{V}}\right]+\frac{1}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(c^2-V^2)(\vec{n}c\vec{V})\right]\right\}=\frac{e\left[\vec{n}\left[c\vec{n}-\vec{V},\dot{\vec{V}}\right]\right]}{R(c-\vec{n}\vec{V})^3}+\frac{e(c^2-V^2)(\vec{n}c-\vec{V})}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}=\vec{E}_1+\vec{E}_2.$$

Burada $\vec{n}=\dfrac{\vec{R}}{R}$ yazsaq və surət və məxrəci c^3-na bölsək mətindəki düsturu alarıq.

İndi $\vec{H}(\vec{R}_0,t)$ intensivliyini eyni üsulla hesablayaq.

$$\vec{H}=\text{rot}\vec{A}=\frac{1}{c}\text{rot}\varphi\vec{V}=\frac{\varphi}{c}\text{rot}\vec{V}+\frac{1}{c}\left[\text{grad}\varphi,\vec{V}\right]=\frac{e}{R(c-\vec{V}\vec{n})}\left[\vec{\nabla}t',\dot{\vec{V}}\right]+$$

$$+\frac{1}{c}\left[\vec{V},\frac{ec}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^2}\left\{-\vec{V}+\frac{\vec{n}}{c-\vec{n}\vec{V}}(c^2-V^2+\dot{\vec{V}}\vec{R})\right\}\right]=-\frac{e}{R\ (c-\vec{n}\vec{V})^2}\times$$

$$\times\left[\vec{n}\dot{\vec{V}}\right]+\frac{e}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}\left[\vec{V}\vec{n}\right](c^2-V^2+\dot{\vec{V}}\vec{R})=\frac{e}{R(c-\vec{n}\vec{V})^3}\times$$

$$\times\left\{\left[\vec{V}\vec{n}\right](\dot{\vec{V}}\vec{n})-\left[\vec{n}\dot{\vec{V}}\right](c-\vec{n}\vec{V})\right\}+\frac{e(c^2-V^2)\left[\vec{V}\vec{n}\right]}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}=$$

$$=\frac{e}{R(c-\vec{n}\vec{V})^3}[\vec{n}[\vec{n}[c\vec{n}-\vec{V},\ \dot{\vec{V}}]]]+\frac{e(c^2-V^2)\left[\vec{n},\ \vec{n}c-\vec{V}\right]}{R^2(c-\vec{n}\vec{V})^3}.$$

$\vec{H}$-la $\vec{E}$-nin müqayisəsindən alırıq:

$$\vec{H}=[\vec{n}\vec{E}]=\vec{H}_1+\vec{H}_2.$$

Bu əlavədə δ-funksiyadan xeyli danışdıq. İndi təkrarən δ-funksiyanın ən çox işlədilən şəkillərini verək:

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2},$$

$$\delta(x)=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x},$$

$$\delta(x)=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 Kx}{Kx^2},$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dk,$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos kxdk.$$

Ə5. Ortoqonal sistemlər, funksiyanın Furye sırasına və Furye inteqralına ayrılması. Coxdəyişənli funksiyaların ayrılışı. 4-ölçülü Qauss teoremi. Maksvel tənlikləri və sahə qanunlarının tezlik və dalğa vektorunda təsviri. Sərbəst Dalamber və Kleyn-Qordon-Fok tənliklərinin həlli

Fizikanın müxtəlif bəhslərində, xüsusilə optikada, elektrodinamikada, kvant mexanikasında sahə funksiyalarının Furye sırasına və inteqralına ayrılmasından çox geniş istifadə olunur. Ona görə biz burada Furye sırası və inteqralı haqda bir qədər məlumat verməyi lazım bilirik.

5.1. Funksiyanın bir qat (bir ölçülü) Furye sırasına ayrılması

Ümumiyyətlə funksiyaları ortonormal sistemə görə sıraya ayırırlar. Məsələn x arqumenti $[0,2\pi]$ və ya $[-\pi,+\pi]$ seqmentində dəyişdikdə

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ldots\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ldots \tag{5.1}$$

triqonometrik sistemi ortonormal sistemdir. Burada istənilən iki həddin hasilinin $[-\pi,+\pi]$ seqmentində inteqralı sıfırdır və hər bir həddin kvadratının inteqralı vahidə bərabərdir. Biz $\cos nx=\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ və $\sin nx=\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$ ifadələrindən istifadə edərək yeni ortonormal sistem ala bilərik:

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\{1,\ e^{\pm ix},\ e^{\pm 2ix},\ldots,\ e^{\pm nix},\ldots\}. \tag{5.1'}$$

Doğrudan da burada iki həddin hasilinin inteqralını hesablasaq,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}dx = \frac{e^{ix(m-n)}}{i2\pi(m-n)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi(m-n)}-1}{i2\pi(m-n)} =$$

$$= \frac{\sin 2\pi(m-n)}{2\pi(m-n)} = \begin{cases} 0,(m\neq n \text{ olarsa}) \\ 1,(m=n \text{ olarsa}) \end{cases} = \delta_{mn} \qquad (5.2)$$

alarıq. Bu ortonormallılıq şərtidir, yəni müxtəlif həddlərin hasili sıfırdır. Ümumiyyətlə riyaziyyatda çoxlu sayda ortonormal (və ya ortoqonal) sistemlər mövcuddur. Lakin biz triqonometrik ortonormal sistemlərlə məşğul olacağıq.

Fərz edək ki, f(x) funksiyası 2π perioduna malik mürəkkəb periodik funksiyadır və o, $[0,2\pi]$ və ya $[-\pi,+\pi]$ intervalında mütləq qiymətcə inteqrallanandır. Göstərək ki, belə funksiyanı Furye sırasına ayırmaq olar:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (5.3)$$

Məsələnin qoyuluşu ondan ibarətdir ki, mürəkkəb f(x) funksiyasını sadə dövri funksiyaların (cosx, sinx) cəmi şəklində göstərə bilərik. Sıranın a_n və b_n əmsallarını tapmaq üçün (5.3) sırasını ayrılıqda cosmx və sinmx funksiyalarına vuraraq onu x üzrə $-\pi$-dən $+\pi$-yə qədər inteqrallamaq lazımdır. İndi sırada ortaya çıxan sinnx və cosmx funksiyalarının hasillərini $\sin(n\pm m)x$ və $\cos(n\pm m)x$ funksiyalarının cəmi və fərqi şəklində göstərərək inteqrallanmanı sadəcə aparmaq olar:

$$\left.\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x), \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x), \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x). \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Sonda inteqral altında ayrıca coskx və sinkx qalır ($(m\pm n)=k$ qəbul etmişik), və $k\neq 0$ olduqda bu inteqrallar sıfıra bərabər olur. Lakin k=0 olduqda bu inteqralların bəziləri sıfırdan fərqlidir:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}=0 \text{ (k≠o olduqda)}, \\ \left. x\right|_{-\pi}^{\pi}=2\pi \text{ (k=0 olduqda)}. \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\, dx = \begin{cases} \left.\dfrac{-\cos kx}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}=0 \text{ (k≠o olduqda)}, \\ \left. 0\right|_{-\pi}^{\pi}=0 \text{ (k=0 olduqda)}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Bunları nəzərə alaraq aşağıdakı ifadələri yazırıq:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \pi\delta_{mn}, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \pi\delta_{mn}, \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

(5.3) sırasını $\cos mx$-a vurub inteqrallayaraq (5.7) inteqrallarını nəzərə alsaq a_n əmsalını taparıq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = \pi a_m \text{ və ya } a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos mx\, dx. \tag{5.8a}$$

İndi (5.3) sırasını $\sin mx$-a vuraraq uyğun əməliyyatı aparsaq

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx = \pi b_m \text{ və ya } b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx \tag{5.8b}$$

alarıq. Son ifadələrin sol və sağ tərəfində m indeksinə n demək lazımdır. Onda $a_m \to a_n$ və $b_m \to b_n$ olur və bu da (5.3) sırasının yazıldığı şəklə uyğun gəlir. Sıranın a_0 əmsalını tapmaq üçün (5.3) sırasını sadəcə inteqrallamaq lazımdır:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}.2\pi = \pi a_0 \text{ və ya } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx \tag{5.8s}$$

Beləliklə 2π perioduna malik mürəkkəb f(x) funksiyasının Furye sırasına ayrılışının əmsalları (5.8a, b, s) düsturları ilə verilir.

İndi biz istənilən 2L perioduna malik funksiyanı Furye sırasına ayıra bilərik. Fərz edək ki, [-L, L] seqmentində təyin edilmiş 2L perioduna malik mütləq inteqrallanan f(x) funksiyası verilmişdir. Dəyişənləri

$x = \frac{L}{\pi} y$ şəklində əvəz etsək, y arqumenti $[-\pi, \pi]$ intervalında dəyişən $f(\frac{L}{\pi} y)$ funksiyanı alarıq və belə funksiyanın y-ə görə Furye sırasına ayrılışı (5.3) şəklində yazılır:

$$f(\frac{L}{\pi} y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny). \qquad (5.3')$$

Sıranın a_n, b_n əmsalları aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{L}{\pi} y) \cos ny dy, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{L}{\pi} y) \sin ny dy. \qquad (5.8')$$
$$(n = 0,1,2...) \qquad\qquad (n = 1,2,3...)$$

Yenidən əvvəlki x dəyişəninə qayıdaraq yuxarıdakı düsturlarda $y = \frac{\pi}{L} x$ yazsaq (5.3') və (5.8') ifadələrinin şəkli bir qədər dəyişər:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \qquad (5.9)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \; b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \qquad (5.10)$$

Beləliklə istənilən perioda (dövrə) malik funksiyanı Furye sırasına ayıra bildik.

5.2. Furye sırasının kompleks şəkildə yazılışı

Bu məsələni həll etmək üçün sadə şəkildə yazılışı (5.3) sırasından istifadə edəcəyik. Kosinus və Sinus üçün Eyler düsturundan istifadə edərək aşağıdakını yazırıq:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}.$$

Burada $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} \frac{a_n + ib_n}{2}$ (bax(5.8, a,b)).

(5.3) sırasındakı $\frac{a_0}{2}$ həddini c_0-la işarə edərək Furye sırasında həd-lərin xüsusi sonlu cəmini aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = c_o + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Alınmış yeni c_n əmsallarını aşkar şəkildə yazsaq

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\, dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \; (n\rangle o)$$

olar. Son ifadədən bilavasitə görünür ki, bu düstur həm n=0 və həm də n⟨o halı üçün doğrudur (son halda nəzərə almaq lazımdır ki, $c_{-n} = c^*$). İndi (5.3) düsturuna qayıdaraq yazırıq:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Beləliklə

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{5.11}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

(5.11) düsturunun sağ tərəfi 2π perioduna (dövrünə) malik f(x) fun-ksiyası üçün Furye sırasının kompleks şəklidir.

Biz indi (5.9) və (5.10) düsturları ilə ifadə olunan Furye sırasına ay-rılışın kompleks şəklini asanlıqla yaza bilərik:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \tag{5.12}$$

$$A_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Bu düstur 2L perioduna malik olan f(x) funksiyasının Furye sırasının kompleks şəklidir. Bu düstur bizim üçün əsas düstur olacaqdır. Qeyd edək ki, fiziklər həmişə Furye sıraları və Furye inteqrallarının kompleks şəkillərindən istifadə edirlər.

5.3. Funksiyanın Furye inteqralına ayrılması

İndi f(x) funksiyasını sonlu $-L \le x \le L$ intervalında eksponensial Furye sırasına ayıraq, yəni (5.12) düsturundan istifadə edək:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{in\pi x}{L}} \cdot \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(x')e^{-i\frac{in\pi x'}{L}}dx'. \qquad (5.13)$$

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \Delta k_n = \frac{\pi}{L} = k_{n+1} - k_n, g(k_n) = \int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik_n x}dx. \qquad (5.14)$$

Onda (5.13) düsturunu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} g(k_n)e^{ik_n x}. \qquad (5.13')$$

(5.13') sırasının köməyi ilə ya (-L,L) intervalında verilmiş, və ya da 2L perioduna malik dövri funksiyanı təsvir etmək olar.

İndi fərz edək ki, f(x) funksiyası bütün həqiqi ədədi OX oxu boyunca təyin edilmişdir. İstənilən qədər böyük L götürərək f(x) funksiyasını (-L, L) intervalında (5.13') sırası şəklində təsvir etmək olar. Qarşımızda belə bir məsələ durur: (5.13') düsturun da $L \to \infty$ olduqda f(x) funksiyası nə şəkildə təsvir ediləcəkdir? (5.14)-də $\frac{1}{2L} = \frac{\Delta k_n}{2\pi}$ olduğunu və digər işarələnmələri (5.13')-də nəzərə alaraq yazırıq:

$$f(x) = \sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} g(k_n)e^{ik_n x}\frac{\Delta k_n}{2\pi}. \qquad (5.13'')$$

(5.13") düsturunda $L \to \infty$, $\Delta k_n \to o$ limit halını nəzərə alaraq və limitdə cəmləməni inteqralla əvəz edərək, biz f(x) funksiyasını Furye inteqralına ayırmış oluruq:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{ikx}dk. \tag{5.15}$$

Analoji olaraq

$$g(k)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{-ikx}dx. \tag{5.16}$$

yazırıq. Bu ifadələrdə $h(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(k)$ işarələnməsini qəbul etsək, yuxarıdakı düsturları simmetrik şəkildə yaza bilərik:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(k)e^{ikx}dk, \tag{5.17}$$

$$h(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{5.18}$$

Burada (5.17) düsturu f(x) funksiyasının Furye inteqralına ayrılmasını ifadə edir və h(k) Furye əmsalı və ya «Furye obrazı» adlanır. (5.18) düsturu Furye əmsalının təyin olunması düsturudur. Bu düsturlar qarşılıqlı əlaqədədir və onlarda $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ vuruğu simmetrik iştirak edir. Adətən bu düsturları simmetrik yazırlar ((5.17) və (5.18) şəklində). Bəzən bu simmetrikliyə əhəmiyyət vermirlər. Məsələn, (5.15) və (5.16) çevrilmələri Furye inteqralına ayrılmanı təsvir edir, burada g(k) Furye əmsalıdır, lakin simmetriklik yoxdur. Burada f(x)-də $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ vuruğu ikincı tərtibdən iştirak edir, lakin g(k)-da bu vuruq iştirak etmir. Əgər biz (5.15)-(5.16) düsturlarında $h'(k)=\frac{g(k)}{2\pi}$ qəbul etsəydik, onda

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} h'(k)e^{ikx}dk \text{ və } h'(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx \tag{*}$$

olardı. Bu düsturlar da Furye inteqralına ayrılmanı ifadə edir, lakin simmetrik deyillər (burada h′(k) Furye əmsalıdır). Yəni simmetriyanın bir o qədər əhəmiyyəti yoxdur və bu, Furye inteqralına ayrılmanı aparan şəxsin zövqündən asılıdır. Çox vaxt f(x) funksiyasının Furye inteqralına ayrılması düsturuna ((5.15), (5.17)) *düzünə çevrilmə* və Furye əmsalının təyin edilməsi düsturuna ((5.16), (5.18)) isə *tərsinə çevrilmə* deyilir.

Biz burada bir arqumentli funksiyanın bir qat Furye sırasına ayrılması ilə məşğul olduq. Gələcəkdə çox arqumentli funksiyanın çox qat Furye sırasına ayrılmasına baxacağıq. Qeyd edək ki, ixtiyari Furye inteqralında düz və tərs çevrilmənin hər birisinin əvvəlindəki, $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, 2, ...)$ vuruğunun bir-birinə hasili verilmiş Furye inteqralı üçün eynidir və Furye inteqralına ayrılmanın tam normallayıcı vuruğu adlanır. Məsələn, bir qat Furye inteqralına ayrılmada normallayıcı vuruq $\frac{1}{2\pi}$-dir (bax: (5.15)-(5.16), (5.17)-(5.18) və $(*)$ düsturları). Göstərəcəyik ki, ikiqat, üçqat və.s Furye inteqralına ayrılmada normallayıcı vuruq $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$ və s. olacaqdır.

Gələcəkdə işlərimizi asanlaşdırmaq üçün burada bir halı ayrıca qeyd etməliyik. Əgər bizə hər hansı funksiyanın Furye inteqralına ayrılması

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{+ikx}dk, \qquad (5.a)$$

verilmişdirsə, buradakı f(k) Furye əmsalını əvvəllərə qayıtmadan bilavasitə (5.a) düsturundan istifadə edərək tapırıq. Bunun üçün (5.a) bərabərliyini inteqralın altındakı eksponentin ştrixlənmiş kompleks qoşlamasına, yəni $e^{-ik'x}$ funksiyasına vuraraq alınmış ifadənin sağ və sol tərəfini bütün «x» fəzası üzrə inteqrallayırıq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ik'x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)dk\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(k-k')}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\delta(k-k')dk = f(k'). \qquad (5.b)$$

Burada $\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(k-k')}dx$ şəklində yazılmış δ-funksiyasının xassəsindən istifadə etmişik. (5.b) düsturunun sol və sağ tərəfində $k' = k$ qəbul edərək

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx \qquad (5.1)$$

alırıq. Burada yazılmış (5.a) və (5.b) düsturları (5.15) və (5.16) düsturlarının özüdür. Biz bu əməliyyatı istənilən çox arqumentli funksiyanın çox qat Furye inteqralına ayrılmasına tətbiq edəcəyik.

5.4. Çoxarqumentli funksiyanın Furye inteqralına ayrılması.

İstənilən çoxarqumentli funksiyanı çoxqat Furye inteqralına ayırmaq olar. Biz hələlik iki arqumentli f(x,y) funksiyasına baxacağıq. Fərz edək ki, f(x,y) funksiyası (x,y) müstəvisində $(-\infty \le x \le +\infty, -\infty \le y \le +\infty)$ təyin edilmişdir və mütləq qiymətcə inteqrallanandır. Əvvəlcə y arqumentini sabit saxlayaraq f(x,y) funksiyasını «x» arqumentinə görə Furye inteqralına ayırırıq:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y,k_1,)e^{ik_1x}dk_1, \tag{5.19}$$

$$h(y,k_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-ik_1x}dx. \tag{5.20}$$

İndi (5.20) düsturunda k_1-i fiksə edərək, $h(y,k_1)$ funksiyasını y-ə görə Furye inteqralına ayıraq:

$$h(y,k_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_1,k_2)e^{ik_2y}dk_2, \tag{5.21}$$

$$g(k_1,k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y,k_1)e^{-ik_2y}dy. \tag{5.22}$$

Sonda $h(y,k_1,)$ funksiyasının (5.21) ifadəsini (5.19) düsturunda yerinə yazaraq, axtardığımız ayrılmanı almış oluruq:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} dk_1dk_2g(k_1,k_2)e^{i(k_1x+k_2y)}. \tag{5.23}$$

(5.20) düsturunu (5.22)-də yerinə yazsaq, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$g(k_1,k_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} dxdyf(x,y)e^{-i(k_1x+k_2y)}. \tag{5.24}$$

Analoji yolla üç arqumentli $f(x,y,z)$ funksiyasını Furye inteqralına ayırsaq, aşağıdakı düsturlar alınar:

$$f(x,y,z) \equiv f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d^3k. \tag{5.25}$$

$$g(k_1,k_2,k_3) \equiv g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}d^3x. \tag{5.26}$$

Burada $d^3k = dk_1 dk_2 dk_3 = dk_x dk_y dk_z$, $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3 = dx\ dy\ dz$ $\vec{k}$ və $\vec{r}$ fəzasında həcm elementləridir. Biz $\vec{k}$ fəzasına dalğa vektoru fəzası deyəcəyik. Yuxarıdakı düsturlar simmetrik şəkildə yazılmışdır, yəni hər iki düsturda inteqralın qabağında eyni bir $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ vuruğu yazılmışdır.

Əgər (5.25) düsturunda $\frac{1}{(2\pi)^3}$ vuruğu yazılsaydı, onda biz (5.a,b,s) əməliyyatını apararaq, $g(\vec{k})$ üçün aşağıdakı düsturu alardıq:

$$g(\vec{k}) = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3x. \qquad (5.26')$$

Beləliklə düz və tərs çevrilmədə düsturların simmetrik olması məcburi deyil, lakin məsləhətdir. Ancaq 3-ölçülü fəzada çevrilmədə ümumi normallayıcı vuruğun $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$ olması məcburidir.

Bəzən funksiyanı Furye inteqralına ayıranda (5.25) düsturunda inteqralın qabağında $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$ yazılmır və onun əvəzində 1 yazılır:

$$f(\vec{r}) = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \qquad (5.25a)$$

İndi (5a,b,s) əməliyyatını apararaq $g(\vec{k})$ Furye əmsalını tapaq:

$$\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}'\vec{r}} d^3x = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\, g(\vec{k}) \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')} d^3x =$$

$$= \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\, g(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}')(2\pi)^3 = (2\pi)^3 g(\vec{k}').$$

Son nəticədə birinci və axırıncı hədlərdə $\vec{k} = \vec{k}'$ yazaraq $g(\vec{k})$-nı tapırıq:

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3x \qquad (5.26a)$$

Biz burada 3-ölçülü δ-funksiyanın $\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')} d^3x$ ifadəsindən və onun xassəsindən istifadə edərək axırıncı inteqralı açmışıq. İnteqralların sayı diferensialların sayına bərabər olduğuna görə, sadəlik üçün diferensialları olduğu kimi saxlayaraq inteqralları şərti olaraq bir ədəd inteqralla əvəz edəcəyik. Məsələn,

$$g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3x$$

Beləliklə, yazılış qaydasından asılı olaraq normallayıcı $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\alpha}$ $(\alpha = 0,1,2,...)$ vuruğu funksiyadan Furye əmsalına və əksinə «hərəkət» edə bilər və bu, son nəticəni dəyişdirmir. Ona görə müxtəlif müəlliflərdə bu vuruq müxtəlif şəkildə iştirak edir. Bizim sonda aldığımız (5.25a) və (5.26a) düsturları da Furye inteqralına ayrılmanı ifadə edir, lakin simmetrik deyillər.

Müasir ədəbiyyatda Furye çevrilməsində Furye əmsalını elə ilk funksiya şəklində, lakin başqa arqumentlə təsvir edirlər:

$f(\vec{r})$-ilk funksiya, $f(\vec{k})$-Furye əmsalı; $f(\vec{r},t)$-ilk funksiya, $f(\vec{k},\omega)$-Furye əmsalı və s. Biz gələcəkdə dördqat Furye inteqralına ayrılma ilə də məşğul olacağıq. Lakin indi Furye inteqralları vasitəsilə dalğa tənliklərinin necə həll edilməsini göstərmək istəyirik.

5.5. Dalğa tənliklərinin Furye inteqralları vasitəsilə həlli

Biz əsas mətndə göstərmişik ki, sərbəst elektromaqnit sahəsi üçün $\vec{A},\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorları sərbəst Dalamber tənliyini ödəyir:

$$\square \vec{A},\vec{E},\vec{H} = 0 \text{ və } \square = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{-Dalamber operatordur.} \qquad (5.27)$$

Bu vektorlar əvəzinə sadə skalyar funksiya üçün Dalamber tənliyini yazaraq, onu həll edək.

$$\square \psi(\vec{r},t) = \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0. \qquad (5.27')$$

$\psi(\vec{r},t)$ funksiyasını $\vec{r}$ arqumentinə görə üçqat Furye inteqralına ayıraq:

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \qquad (5.28)$$

(5.28) ifadəsini (5.27')-də yerinə yazaq:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}}\left[-k^2\psi(\vec{k},t)-\frac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\vec{k},t)\right]d^3k=0. \qquad (5.29)$$

Burada inteqral altında $\vec{\nabla}^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}=-\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}$ və $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{k},t)=-\frac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\vec{k},t)$ olduğunu nəzərə almışıq. (5.29) tənliyini $e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$ funksiyasına vuraraq alınmış ifadəni bütün üç ölçülü $\vec{r}$ fəzası üzrə inteqrallayaq:

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\left[-\vec{k}^2\psi(\vec{k},t)-\frac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\vec{k},t)\right]\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')}=$$

$$=(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\left[-\vec{k}^2\psi(\vec{k},t)-\frac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\vec{k},t)\right]\delta(\vec{k}-\vec{k}')=$$

$$=(2\pi)^3\left[-\vec{k}'^2\psi(\vec{k}',t)-\frac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\vec{k}',t)\right]. \qquad (5.30)$$

Biz burada $\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')}=\delta(\vec{k}-\vec{k}')$ olduğunu nəzərə almışıq və $\vec{k}$ fəzası üzrə inteqralı δ-funksiyanın köməyi ilə açmışıq. Son bərabərlikdə $\vec{k}=\vec{k}'$ deyərək, bərabərliyi $-(2\pi)^3$-na ixtisar etsək

$$k^2\psi(\vec{k},t)+\frac{1}{c^2}\ddot{\psi}(\vec{k},t)=0 \qquad (5.31)$$

olar. Burada $ck=\omega$ qəbul etsək, alınmış bircins $\ddot{\psi}+\omega^2\psi=0$ diferensial tənliyin xarakteristik tənliyini $\mu^2+\omega^2=0$ şəklində yazırıq. Buradan $\mu_{1,2}=\mp i\omega$ alırıq. Beləliklə son diferensial tənliyin həlli $\psi(\vec{k},t)=$ $=c_1(\vec{k})e^{-i\omega t}+c_2(\vec{k})e^{i\omega t}$ olur. $\psi(\vec{k},t)$-nin bu qiymətini (5.28)-də yerinə yazaraq, dalğa tənliyinin həllini tapmış oluruq:

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{c_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+c_2(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t)}\}d^3k. \qquad (5.28')$$

Son ifadədə eksponentlər bizə əsas mətindən məlum olan müstəvi monoxromatik dalğanı təsvir edir. Beləliklə dalğa (Dalamber) tənliyinin həlli müstəvi dalğaların superpozisiyasından ibarətdir. Bu yazılışda $\vec{k}$

dalğa vektoru və ω dalğanın tezliyidir $\left(k=\frac{\omega}{c}\right)$. Sahənin korpuskulyar təsvirində $\hbar\vec{k}$ fotonun impulsu, $\hbar\omega$ isə onun enerjisidir. Fotonların kütləsi sıfırdır və ona görə onun ödədiyi dalğa tənliyində «kütlə həddi» yoxdur.

(5.28') həllində çox kiçik dəyişiklik etmək üçün ikinci həddi ayrıca inteqral şəklində yazaq və bu inteqralda $\vec{k}\to-\vec{k}$ əvəzləməsini aparaq:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3kc_2(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega t)} = \int_{+\infty}^{-\infty}(-d^3k)c_2(-\vec{k})e^{i(-\vec{k}\vec{r}+\omega t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3kc_2(-\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$

Son ifadəni almaq üçün biz ikinci bərabərlikdə üç ölçülü inteqralın sərhədlərinin yerini dəyişərək $(-d^3k)$ vuruğundakı mənfi işarəsini müsbətə çevirmişik. Son ifadəni yenidən (5.28')-də yerinə yazaq və $C_1(\vec{k})=A(\vec{k}), C_2(-\vec{k})=B(\vec{k})$ əvəzlənməsini aparaq:

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{A(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+B(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\}d^3k \qquad (5.28'')$$

Elektromaqnit sahəsi həqiqi sahə olduğundan $\psi(\vec{r},t)=\psi^*(\vec{r},t)$ yazaraq, bunu (5.28")-də nəzərə alsaq, $B\ (\vec{k})=A^*(\vec{k})$ şərtini alarıq. Bundan istifadə edərək, dalğa tənliyinin həllinin müasir ədəbiyyatdakı şəklini yazırıq:

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{A(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}+A^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\}d^3k \qquad (5.28''')$$

Bu yazılışda birinci və ikinci hədd bir-birinin kompleks qoşmasıdır. İndi (5.27) dalğa tənliyindəki $\vec{E}(\vec{r},\vec{t})$ və $\vec{H}(\vec{r},\vec{t})$ sahələrinin həlləri də (5.28"') şəklində yazılacaqdır. Lakin indi $A(\vec{k})$ və $A^*(\vec{k})$ skalyar amplitudlar artıq vektor olacaqdır ($\vec{A}(\vec{k}), \vec{A}^*(\vec{k})$).

Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, relyativistik fizikada elə zərrəciklər mövcuddur ki, onların spini (məxsusi hərəkət miqdarı momenti) sıfırdır, lakin kütləsi sıfırdan fərqlidir. Bunlar skalyar və psevdoskalyar zərrəciklər adlanır. Onlara misal π-mezonları göstərmək olar. Belə məlum olur ki, bu zərrəciklər də Dalamber tənliyinə oxşar tənliyi ödəyirlər. Başqa sözlə Dalamber tənliyinə «kütlə həddini» əlavə etsək skalyar zərrəciklərin ödədiyi tənliyi alarıq:

$$(\Box - æ^2)\varphi(\vec{r},t) = 0 \qquad (5.32)$$

Burada kütlə həddi $æ = \frac{mc}{\hbar}$-dır, m-zərrəciyin kütləsi, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – Plank sabiti, c-işığın vakuumda sürətidir. Bu tənlik Kleyn-Qordon-Fok tənliyi adlanır və relyativistik fizikanın əsas tənliklərindən biridir. Bu tənliyi də Furye inteqralına ayırmaq yolu ilə həll edirlər:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{k},t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \qquad (5.33)$$

Əvvəlki misaldakı analogiyanı davam etdirsək, (5.31) tənliyi əvəzinə

$$(\vec{k}^2 + æ^2)\varphi(\vec{k},t) + \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}(\vec{k},t) = 0$$

tənliyini alarıq. Buradakı $\vec{k}^2 + æ^2$ vuruğunu ya K^2 və ya K_0^2 ilə işarə edirlər:

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + æ^2}.$$

Analogiyanı davam etdirərək $\varphi(\vec{k},t) = C_1(\vec{k})e^{-ik_0ct} + C_2(\vec{k})e^{ik_0ct}$ alırıq. Burada hər şey analoji gedir. Son nəticədə

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \{A(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-k_0ct)} + A^*(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{r}-k_0ct)}\}d^3k \qquad (5.34)$$

alırıq. Bu Kleyn-Qordon-Fok tənliyinin həllidir. Burada $\hbar\vec{k}$ skalyar zərrəciyin impulsu, $\hbar ck_0$ onun enerjisi, $\varphi(\vec{r},t)$ isə skalyar zərrəciyin dalğa funksiyasıdır.

5.6. Maksvel tənlikləri və sahə qanunlarının tezlik və dalğa vektoru təsvirində yazılışı

Biz yuxarıda göstərdik ki, elektromaqnit sahəsini müstəvi monoxrometik dalğaların superpozisiyası şəklində göstərmək olar. Ona görə elektromaqnit sahəsinin $\vec{E}$ və $\vec{H}$ vektorlarını tezlik və dalğa vektoruna görə Furye inteqralına ayırmaq tam yerinə düşərdi:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\, \vec{E}(\omega,\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \\ \vec{E}(\omega,\vec{k}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x\, \vec{E}(\vec{r},t) e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \end{aligned} \qquad (5.35)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d^3k\vec{H}(\omega,\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)},$$
$$\vec{H}(\omega,\vec{k})=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x\,\vec{H}(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \tag{5.36}$$

Buradakı $\vec{E}(\omega,\vec{k})$ və $\vec{H}\,(\omega,\vec{k})$ Furye əmsallarını (5.a,b,s) əməliyyatı vasitəsilə hesablamışıq. $\vec{E}(\vec{r},t)$ və $\vec{H}\,(\vec{r},t)$ funksiyalarının Furye inteqralına ayrılmasında $\frac{1}{(2\pi)^4}$ vuruğu iştirak etdiyinə görə Furye əmsallarında artıq belə vuruq iştirak etmir. Burada dördqat Furye inteqralına ayrılma aparılmışdır. Qeyd edə ki, funksiyanın $\vec{r}$-dən asılılığını sabit saxlayaraq onun t-dən asılılığını tezlik üzrə birqat Furye inteqralına ayırmaq və ya t-dən asılılığı sabit saxlayaraq funksiyanın $\vec{r}$-dən asılılığını üçqat Furye inteqralına ayırmaq mümkündür. Biz bu cür ayrılmalardan da istifadə edəcəyik.

İndi sadə bir məsələyə baxaq: $\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ tənliyini ω və $\vec{k}$-ya görə dördqat Furye inteqralına ayıraq. Əvvəlcə bu Maksvel tənliyini

$$\mathrm{rot}\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0. \tag{5.37}$$

şəklində yazaraq, bu bərabərliyi dördqat Furye inteqralına ayıraq:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d^3k\left\{i\left[\vec{k}\vec{E}(\omega,\vec{k})\right]-\frac{i\omega}{c}\vec{H}(\omega,\vec{k})\right\}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}=0.$$

İndi bu bərabərliyi $e^{-i(\vec{k}'\vec{r}-\omega' t)}$ funksiyasına vuraraq bütün $\vec{r}$ fəzası və t oxu üzrə inteqrallayaq və δ-funksiyaların köməyi ilə d^3k və $d\omega$ üzrə inteqralları açaq:

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d^3k\left\{i\left[\vec{k}\vec{E}(\omega,\vec{k})\right]-\frac{i\omega}{c}\vec{H}(\omega,\vec{k})\right\}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-\omega')t}\times$$
$$\times dt\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')}d^3x=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d^3k\left\{i\left[\vec{k}\vec{E}(\omega,\vec{k})\right]-\frac{i\omega}{c}\vec{H}(\omega,\vec{k})\right\}\times$$
$$\times\delta(\omega-\omega')\delta(\vec{k}-\vec{k}')=\left\{i\left[\vec{k}'\vec{E}(\omega',\vec{k}')\right]-\frac{i\omega'}{c}\vec{H}(\omega',\vec{k}')\right\}.$$

Axırıncı bərabərlikdə $\omega'=\omega$ və $\vec{k}'=\vec{k}$ yazaq və bərabərliyi i-yə bölək:

$$\left[\vec{k}\vec{E}(\omega,\vec{k})\right]=\frac{\omega}{c}\vec{H}(\omega,\vec{k}). \tag{5.38}$$

Bu, (5.37) Maksvel tənliyinin ω və $\vec{k}$ təsvirində və ya Furye əmsallarında yazılışıdır. (5.37) Maksvel tənliyi xüsusi törəməli diferensial tənlik olduğu halda, onun Furye «obrazlarında» yazılmış (5.38) ifadəsi artıq cəbri tənlikdir.

İndi Maksvelin (5.37) tənliyini yalnız tezlik təsvirində yazmaq üçün $\vec{E}$ və $\vec{H}$-ın bir ölçülü Furye ayrılışından istifadə edirik:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{H}(\vec{r},t)\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega e^{-i\omega t}\left\{\begin{array}{l}\vec{E}(\omega,r),\\ \vec{H}(\omega,\vec{r}).\end{array}\right. \tag{5.39}$$

(5.37) tənliyini (5.39) dan istifadə edərək tezlik üzrə birölçülü Furye inteqralına ayırsaq və yuxarıdakı əməliyyatı təkrar etsək

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\omega,\vec{r})=\frac{i\omega}{c}\vec{H}(\omega,\vec{r}) \tag{5.39'}$$

münasibətini alırıq. Bu, (5.37) Maksvel tənliyinin tezlik təsvirində yazılışıdır və özü də yalnız $\vec{r}$ arqumentinə görə diferensial tənlikdir.

Furye sırasına və ya inteqralına ayrılmanı biz fiziki sistemlərə tətbiq edirik. Əgər sistemin halı diskret, yəni sıçrayışla dəyişərsə biz sistem üçün Furye sırasını, yox əgər sistem kəsilməz dəyişərsə Furye inteqralını əsas tutacağıq. Beləliklə kəsilməz spektrdə Furye inteqralından istifadə edəcəyik:

$$f(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d^3k,\ f(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}d^3x. \tag{5.40}$$

Burada $f(\vec{k})$ inteqrala ayrılmanın kəsilməz Furye əmsalıdır.

Biz Furye sırasına ayrılmanı (5.12) düsturu ilə ifadə etmişdik. Bu düsturda f(x) funksiyasının dövrü (periodu) 2L götürülmüşdür. Müasir ədəbiyyatda adətən f(x) funksiyasının periodunu ℓ qəbul edirlər. Buna uyğun olaraq biz (5.12) düsturlarında $2L=\ell$, $\frac{\pi nx}{L}=\frac{2\pi nx}{2L}=\frac{2\pi nx}{\ell}=k_n x$ və $\int_{-L}^{+L}...dx=\int_0^{\ell}...dx$ qəbul edəcəyik:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_n e^{ik_n x},\quad A_n=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)e^{-ik_n x}dx\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,...). \tag{5.12'}$$

Sıraya ayrılmanı simmetrik etmək üçün $A_n = \frac{1}{\ell^{1/2}}\ell^{1/2}A_n = \frac{1}{\ell^{1/2}}B_n$ yazırıq:

$$f(x) = \frac{1}{\ell^{1/2}}\sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{ik_nx}, \quad B_n = \frac{1}{\ell^{1/2}}\int_0^l f(x)e^{-ik_nx}dx \quad (n = 0, \ \pm1, \ \pm2, \ ...). \quad (5.12')$$

İndi üç arqumentli $f(x,y,z) \equiv f(\vec{r})$ funksiyasının üçqat Furye sırasına ayrılmasını aşağıdakı kimi yazırıq:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\ell^{3/2}}\sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad f_{\vec{k}} = \frac{1}{\ell^{3/2}}\int_{V=\ell^3} f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}d^3x \ . \qquad (5.41)$$

Burada $f_{\vec{k}}$ diskret Furye əmsalıdır və inteqral sonlu $V=\ell^3$ həcmi üzrə aparılır. Beləliklə, müasir ədəbiyyatda kəsilməz və diskret spektrdə $\vec{k}$ dalğa vektoru Furye əmsallarına arqument kimi ($f_{(\vec{k})}$) və ya indeks kimi ($f_{\vec{k}}$) daxil olur. Qeyd edək ki, $\varphi(\vec{r},\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec{k}\vec{r}}$ funksiyaları bütün sonsuz $V \to \infty$ həcimdə və $\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\ell^{3/2}}e^{i\vec{k}\vec{r}}$ funksiyaları isə sonlu $V = \ell^3$ həcmində ortonormal sistem təşkil edir. Doğrudan da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{r},\vec{k}')\varphi^*(\vec{r},\vec{k})d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')}d^3x = \delta(\vec{k}-\vec{k}'),$$

$$\int_{V=\ell^3} \varphi_{\vec{k}}(\vec{r})\varphi^*_{\vec{k}'}(\vec{r})d^3x = \frac{1}{\ell^3}\int_{V=\ell^3} e^{i\vec{r}(\vec{k}-\vec{k}')}d^3x = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} = \begin{cases} 1, (\vec{k}=\vec{k}' \text{ olsa}) \\ 0, (\vec{k}\neq\vec{k}' \text{ olsa}). \end{cases} \qquad b(5.42)$$

5.7. 4-ölçülü fəzada Qauss teoremi

Real fiziki fəza və zaman vahid bir tam təşkil edir. Bu fəzanın həndəsəsi Psevdoevklid həndəsəsidir. Alman fiziki H.Minkovski psevdoevklid həndəsəsinə malik 4-ölçülü fəzanı qurdu. Bu fəzada hər bir nöqtə 4 koordinatla (x_1, x_2, x_3, x_4=ict) təyin edilir və fəza Minkovski fəzası adlanır. Fəzanın metrikasını müəyyən edən iki yaxın nöqtə arasındakı məsafə $ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ şəklində kvadratik forma ilə təsvir edilir. Kvadratik formada müxtəlif işarəli kvadratlar iştirak edir və bu da fəzanın psevdoevklid olmasını göstərir.

Biz 4-ölçülü fəzada Qauss teoremini yazmaq üçün 3-ölçülü fəza ilə analogiyadan istifadə edəcəyik. 3-ölçülü fəzada Qauss teoremini isbat etdik və aşağıdakı riyazi ifadəni aldıq:

$$\oint_S \vec{J}d\vec{s} = \int_V \mathrm{div}\vec{J}dV. \tag{5.43}$$

Burada V ixtiyari 3-ölçülü həcm, S həcmi əhatə edən qapalı səth və $d\vec{s} = \vec{n}ds$ səthin xarici normalı istiqamətində yönəlmiş səth elementidir. Əgər biz (5.43)-də törəməni və vektorların hasilini komponentlərdə yazsaq

$$\oint_S J_i ds_i = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial J_i}{\partial x_i} \; (i = 1,2,3)$$

və ya

$$\oint_S \{J_1 ds_1 + J_2 ds_2 + J_3 ds_3\} = \int dx_2 dx_3 J_1 \Big|_{x_1}^{x_2} + \int dx_1 dx_3 J_2 \Big|_{y_1}^{y_2} + \int dx_1 dx_2 J_3 \Big|_{z_1}^{z_2}$$

alarıq. Müqayisədən alınır ki, səth üzrə inteqraldan həcm üzrə inteqrala kecmək aşağıdakı operator əməliyyatına gətirilir:

$$ds_i \to d^3x \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5.44}$$

İkinci sıradakı inteqralları müqayisə etsək

$$ds_1 = dx_2 dx_3 = \frac{d^3x}{dx_1},\; ds_2 = dx_1 dx_3 = \frac{d^3x}{dx_2},\; ds_3 = dx_1 dx_2 = \frac{d^3x}{dx_3}$$

olduğunu görərik. Bunu ümumi şəkildə yazsaq

$$ds_i = \frac{d^3x}{dx_i} \tag{5.45}$$

olur. Bu aldıqlarımızı 4-ölçülü həcm və onu əhatə edən hipersəthə və onlar üzrə inteqrallara tətbiq etsək

$$d\sigma_\mu \to d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} \; (\mu = 1,2,3,4) \tag{5.44'}$$

operator münasibətini alarıq. Burada $d\sigma_\mu$ 4-ölçülü həcmi əhatə edən hipersəth elementidir. Hipersəth elementi 4-ölçülü həcm elementi ilə

$$d\sigma_\mu = \frac{d^4x}{dx_\mu} \qquad (5.45')$$

şəklində əlaqədardır. Bələliklə 4-ölçülü Qauss teoremi

$$\oint_\Sigma d\sigma_\mu J_\mu = \int_{R(4)} d^4x \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} \qquad (5.43')$$

şəklində yazılır. Burada Σ 4-ölçülü R(4) həcmini əhatə edən hipersəthdir.

Ədəbiyyatda adətən 4-ölçülü həcm elementi $d^4x = d^3x dt$ şəklində qəbul edilir. Lakin bu həcm elementini c-yə və ya ic-yə vurmaqla alınan onun digər iki şəkli də mövcuddur: $d^4x = d^3xdt \to d^3xdx_0 \to d^3xdx_4$. Burada $x_0 = ct, x_4 = ict$-dir, c işığın boşluqda yayılma sürətidir. Onda $d\sigma_\mu = \frac{d^4x}{dx_\mu}$ üç şəklə malik olur. Biz d^4x-in I və III şəkillərini götürsək:

$$d\sigma_\mu^{(1)} = \left\{dx_2dx_3dt, dx_1dx_3dt, dx_1dx_2dt, \frac{1}{ic}dx_1dx_2dx_3\right\},$$

$$d\sigma_\mu^{(3)} = \{dx_2dx_3dx_4, dx_1dx_3dx_4, dx_1dx_2dx_4, dx_1dx_2dx_3\}$$

olar. Burada hansı şəklin götürülməsi yazılış kontekstindən aydın olacaq. Biz çox vaxt $d\sigma_\mu^{(3)}$-dən istifadə edəcəyik. Bu yazılışda metrika $dx_\mu = \{d\vec{r}, dx_4\}$ şəklindədir.

MƏSƏLƏ VƏ MİSALLAR

Yuxarıdakı verilmiş materialı daha ətraflı mənimsəmək üçün aşağıdakı məsələ və misalları həll etməyi məsləhət görürük. Furye inteqrallarına ayrılmada aşağıdakı standart düsturlarından istifadə edin.

5.8. Harmonik rəqslərə ayrılma:

$$f(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r,\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \; f(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r},t)e^{i\omega t}dt. \qquad (A)$$

5.9. Müstəvi dalğalara ayrılma:

$$f(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{r}}d^3k, \; f(\vec{k},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r},t)e^{-i\vec{k}\vec{r}}d^3x. \qquad (B)$$

5.10. Müstəvi monoxromatik dalğalara ayrılma:

$$f(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}d^3k\,d\omega,\ f(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r},t)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}dtd^3x.\ \text{(C)}$$

5.11. $G = \frac{1}{r}$ Qrin funksiyasının üç ölçülü Furye əmsalını hesablayın.

Göstəriş: $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ vuruğunu hesablayanda polyar oxu z boyunca yönəlmiş sferik koordinat sistemindən istifadə edin.

$$\int ...e^{-i\vec{k}\vec{r}}d^3x = \int ...e^{-ikr\cos\theta}r^2drd\Omega\,.$$

5.12. Sükunətdəki nöqtəvi e yükünün sahəsinin $\varphi(\vec{r})$ potensialı və $\vec{E}(\vec{r})$ intensivliyini müstəvi dalğalara ayırın.

Göstəriş: $\vec{\nabla}^2\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \equiv -4\pi e\delta(\vec{r})$ Laplas-Puasson tənliyindən istifadə edin.

5.13. $\vec{A}(\vec{r},t)$ və $\varphi(\vec{r},t)$ potensialları üçün Dalamber tənliyi və Lorens şərtini Furye əmsalları üçün yazın. Furye ayrılışının bütün üç (A), (B), (C) variantlarını nəzərə alın.

Göstəriş: Tənlikləri

$$\Box\vec{A}(r,t) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \text{ və } \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

şəklində yazaraq Furye inteqralına ayırın.

5.14. Sahənin $\vec{E},\vec{H}$ vektorları ilə $\vec{A},\varphi$ potensialları arasındakı əlaqəni Furye əmsalları ilə ifadə edin. Hər üç variantı (A, B, C) nəzərə alın ($\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\varphi = 0, \vec{H} - [\vec{\nabla}\vec{A}] = 0$ yazaraq inteqrala ayırın).

5.15. Maksvel tənliklərini Furye əmsalları vasitəsilə hər üç variantda yazın (tənliklərdə bütün hədləri bir tərəfə keçirərək Furye inteqralına ayırın).

5.16. Sabit $\vec{\upsilon}$ sürətilə hərəkət edən nöqtəvi yüklü zərrəciyin $\vec{A}(r,t)$ və $\varphi(\vec{r},t)$ potensiallarını müstəvi monoxromatik dalğalara ayrılmış şəkildə yazın.

Cavablar:

5.11. $G(\vec{k}) = \lim\limits_{R\to\infty}\frac{4\pi}{k^2}(1-\cos kR)$, $\lim\limits_{R\to\infty}\cos kR$ – ossilyasiya edən həddi atmaq olar.

5.12. $\varphi(\vec{k})=\dfrac{4\pi e}{k^2}$, $\vec{E}(\vec{k})=-i\vec{k}\varphi(\vec{k})$.

5.13.

$$(A):\ \Delta\vec{A}(\vec{r},\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A}(\vec{r},\omega)=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},\omega),\ \Delta\varphi(\vec{R},\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\varphi(\vec{R},\omega)=$$
$$=-4\pi\rho(\vec{R},\omega),$$

$$\mathrm{div}\vec{A}(\vec{R},\omega)-\frac{i\omega}{c}\varphi(\vec{R},\omega)=0.$$

$$(B):\ \ddot{\vec{A}}(\vec{k},t)+k^2c^2\vec{A}(\vec{k},t)=4\pi c\vec{j}(\vec{k},t),\ \ddot{\varphi}(\vec{k},t)+k^2c^2\varphi(\vec{k},t)=$$
$$=4\pi c^2\rho(\vec{k},t),$$

$$ic\vec{k}\vec{A}(\vec{k},t)+\dot{\varphi}(\vec{k},t)=0,$$

$$(C)\quad \left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{A}(\vec{k},\omega)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega),\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi(\vec{k},\omega)=4\pi\rho(\vec{k},\omega),$$

$$\vec{k}\cdot\vec{A}(\vec{k},\omega)-\frac{\omega}{c}\varphi(\vec{k},\omega)=0.$$

5.14. (A): $\vec{E}(\vec{r},\omega)=-\mathrm{grad}\varphi(\vec{r},\omega)+i\dfrac{\omega}{c}\vec{A}(\vec{r},\omega),\ \vec{H}(\vec{r},\omega)=\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r},\omega)$,

(B): $\vec{E}(\vec{k},t)=-i\vec{k}\varphi(\vec{k},t)-\dfrac{1}{c}\dot{\vec{A}}(\vec{k},t),\ \vec{H}(\vec{k},t)=i\left[\vec{k}\vec{A}(\vec{k},t)\right]$,

(C): $\vec{E}(\vec{k},\omega)=-i\vec{k}\varphi(\vec{k},\omega)+i\dfrac{\omega}{c}\vec{A}(\vec{k},\omega),\ \vec{H}(\vec{k},\omega)=i\left[\vec{k}\vec{A}(\vec{k},\omega)\right]$.

5.15. (A): $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)=i\dfrac{\omega}{c}\vec{H}(\vec{r},\omega),\ \mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)=4\pi\rho(\vec{r},\omega)$,

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r},\omega)=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}(\vec{r},\omega)+\frac{4\pi}{c}j(\vec{r},\omega),\ \mathrm{div}H(\vec{r},\omega)=0;$$

(B): $i\left[\vec{k}\vec{E}(\vec{k},t)\right]=-\dfrac{1}{c}\dot{\vec{H}}(\vec{k},t),\ i\vec{k}\vec{E}(\vec{k},t)=4\pi\rho(\vec{k},t)$,

$$i\left[\vec{k}\vec{H}(\vec{k},t)\right]=+\frac{1}{c}\dot{\vec{E}}(\vec{k},t)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},t),\ \vec{k}\cdot\vec{H}(\vec{k},t)=0;$$

(C): $\left[\vec{k}\vec{E}(\vec{k},\omega)\right]=\dfrac{\omega}{c}\vec{H}(\vec{k},\omega),\ i\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{k},\omega)=4\pi\rho(\vec{k},\omega)$,

$$i\left[\vec{k}\vec{H}(\vec{k},\omega)\right]=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}(\vec{k},\omega)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k},\omega),\ \vec{k}\cdot\vec{H}(\vec{k},\omega)=0\,.$$

5.16. $\vec{v}$ sürətilə hərəkət edən yükün sıxlığı $\rho(\vec{r},t)=e\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$ şəklindədir. Onun Furye əmsalı

$$\rho(\vec{k},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e\delta(\vec{r}-\vec{v}t)e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}d^3xdt=\int_{-\infty}^{+\infty} e\cdot e^{-i(\vec{k}\vec{v}-\omega)t}dt=2\pi e\delta(\omega-\vec{k}\vec{v})$$

olar. 5.13 (C) həllindən istifadə etsək,

$$\varphi(\vec{k},\omega)=\frac{4\pi\rho(\vec{k},\omega)}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}=\frac{8\pi^2 e\delta(\omega-\vec{k}\vec{v})}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$$

alarıq. Hərəkət edən yükün cərəyan sıxlığı $\vec{j}(\vec{r},t)=e\vec{v}\delta(\vec{r}-\vec{v}t)$ -dir. Analoji olaraq $\vec{A}(\vec{k},\omega)=\dfrac{8\pi^2 e\vec{v}\delta(\omega-\vec{k}\vec{v})}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$ olur.

ƏDƏBİYYAT

1. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970
2. *Беккер Р.* Теория электричества, т.II, Электронная теория, Гостехиздат, 1941
3. *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965
5. *Jackson J.D.* Classical Electrodynamics. New York, John Wiley, Sons, 1975, 1999
6. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958
7. *Иваненко Д.Д, Соколов А.А.* Классическая теория поля. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951
8. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Издательство АН СССР, 1951
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. т.II, М.: Наука, 1960, 1967, 1973
10. *Leviç B.* Nəzəri fizika kursu. Maarif, 1972
11. *Левич В.* Г. Курс теоретической физики. т. I, М.: 1969
12. *Матвеев А.Н.* Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980
13. *Məmmədov H.Ə., İsmibəyli E.Q., İslamov İ.C.* Elektrodinamika və radioekologiya. Bakı: Elm, 2011
14. *Наджафов И. М., Кулиева Г.Г.* Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2004, №1, s.109
15. *Наджафов И.М., Касимова А.М.* Интенсивности излучения произвольно движущегося релятивистского электрона // Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2010, №3, s.97
16. *Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А.* Электродинамика. М.: Наука, 1978
17. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. М.: ГИФМЛ, 1963
18. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовая электродинамика. Издательство Московского Университета, 1983
19. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976
20. *Угаров В.А.* Специальная теория относительности. М.: Наука, 1977

İsmət Məhəmməd oğlu NƏCƏFOV

MÜASİR KLASSİK ELEKTRODİNAMİKA

I hissə

Xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi, relyativistik mexanika və mikroskopik elektrodinamika

Dövlət universitetlərinin fizika ixtisası üzrə bakalavr və magistrləri üçün dərs vəsaiti

Texniki Redaktor: Aynur Əsgərli

Dizayner: Rafael Qasımov

Çapa imzalanmışdır: 09.07.2012
Kağız formatı: 70x100 1/16
Həcmi: 34,37 ç.v; Sifariş: 83; Sayı: 150

«ADİLOĞLU» nəşriyyatında nəşrə hazırlanmış
və ofset üsulu ilə çap edilmişdir.
Ünvan: Bakı şəh., Şərifzadə küçəsi, 202
Tel.: 433 00 43; (050) 593 27 77
Web: www.adiloglu.az;
E-mail: adiloglu2000@gmail.com