

Л.В. Новиков

**ОСНОВЫ
ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА
СИГНАЛОВ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург

1999

УДК:621.391
519.21

Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. 1999. 152 с.: ил.

Приведен математический аппарат, в основном применяемый в теории вейвлетов, в его инженерном изложении, т. е. на языке понятий и определений, близком для специалистов с высшим техническим образованием. Понятие вейвлет-анализа введено в терминах привычного для инженеров Фурье-анализа. Даны определения различных типов вейвлет-анализа в зависимости от вида переменных – дискретных или непрерывных.

Пособие предназначено для инженеров и исследователей, а также аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области обработки сигналов.

**Учебное пособие создано при поддержке ФЦП "Интеграция"
УНЦ "Оптика и научное приборостроение" (проект А0141)
по проекту
"Поддержка и развитие учебного центра
"Приборы и средства автоматизации для научных исследований"
на базе СПГУАП и ИАнП РАН"**

Автор: Лев Васильевич Новиков
E-mail: nov@iai.rssi.ru

Редактор: З. К. Мусатова

Оригинал - макет подготовлен
Коробейниковой Е.В.

Подписано к печати 11.10.99 г.
Тираж 100 экз.
Отпечатано ООО "МОДУС+", Санкт-Петербург
Усл. печ. л. 7,6
Усл. изд. л. 6,3
Заказ 152

© ИАнП РАН, 1999 г.

Предисловие

Настоящая книга является попыткой построить мост между абстрактными понятиями математики и конкретными образами инженерного мышления. Использование вейвлетов в обработке сигналов находится в самом начале пути. Если учитывать, что история практического использования Фурье-анализа насчитывает уже многие десятилетия, вейвлет-анализу можно предсказать не менее продолжительное будущее.

Несмотря на интенсивное развитие теории вейвлетов в последнее десятилетие, это направление анализа сигналов продолжает привлекать внимание специалистов. Публикации на русском языке по вейвлетам (иногда их называют – всплесками) посвящены в большинстве случаев математическим вопросам теории, трудно понимаемой инженерами, имеющими совершенно иную подготовку. Однако, любая теория материализуется только тогда, когда ею овладевают массы именно инженеров, способных эту теорию воплотить в машины, приборы, прикладные программы и другие полезные вещи. В то же время, уровень развития теории вейвлетов таков, что ее уже давно пора адаптировать до уровня инженерного понимания сущности спектрального анализа сигналов в базисе функций вейвлет. Отсутствие соответствующей литературы на русском языке по этому вопросу является серьезным пробелом отечественной школы спектрального анализа, в особенности учитывая огромный интерес к этой области в прежние годы, приведший к выходу в свет ряда серьезных монографий и огромного количества публикаций.

Для освоения теории вейвлетов, даже в ее инженерном изложении, необходимо достаточно глубокое понимание некоторых разделов математики, таких как функциональный анализ, преобразования Фурье и Лапласа, z -преобразование. Этим вопросам в книге уделено большое

внимание и именно в тех аспектах, которые важны для теории вейвлетов. По глубокому убеждению, без этого невозможно квалифицированное и грамотное применение в различных приложениях результатов теории вейвлетов, которая является, как уже отмечалось, в основном прерогативой математики и развивается математиками. Собственно вейвлетам посвящена третья глава книги, причем, в объеме, который только вводит читателя в этот вид анализа сигналов, оставляя за пределами такие разделы, как *кратномасштабный (мультиразрешающий)* анализ, синтез вейвлетов и алгоритмов, примеры применения и др. вопросы. Автор уверен, что, освоив материал в объеме книги, читатели смогут самостоятельно разобраться в публикациях, посвященных применению вейвлетов в интересующей их области.

В основу книги легли труднодоступные зарубежные публикации, а также исследования самого автора, начатые еще в 1984 году с момента выхода в свет монографии в соавторстве с Русиновым Л.А. по синтезу и применению смещенных во времени базисных функций¹, которые являются, по существу, в терминах теории вейвлетов *масштабными функциями*. Надеюсь, что настоящее пособие дополнит изданные недавно на русском языке цитируемые книги А.П. Петухова и В.И. Воробьева в соавторстве с В.Г. Грибуниным и послужат общей задаче освоения методов вейвлет - анализа широкими инженерными массами.

Автор приносит благодарность к.ф - м. н. А. Л. Буляницу, взявшему на себя нелегкий труд прочесть рукопись и сделать ряд полезных замечаний по ее улучшению.

Автор благодарит также Лаврову С. Ю. и, в особенности, Коробейникову Е. В., выполнивших компьютерный набор и подготовку книги к изданию.

¹ Русинов Л.А., Новиков Л.В. Спектральный подход к первичной обработке сигналов. Изд. Ленинградского университета, 1984, Ленинград, 156 с.

В любом случае есть только один способ правильно вести спор: надо сначала хорошо понять, о чем идет речь.

Платон

Введение

Прогресс в области элементной базы вычислительной техники, естественно, требует постоянного внимания специалистов, занимающихся ее эффективным использованием в различных областях науки и техники. Одной из таких областей является построение процессоров реального времени для обработки сигналов первичных преобразователей (датчиков, сенсоров и т.п.) сложных технологических и экспериментальных установок, аналитических приборов, испытательных и диагностических центров. Эти обстоятельства стимулируют развитие не только аппаратной, но и алгоритмической поддержки процессоров обработки сигналов, что на практике проявляется в привлечении к разработке алгоритмов все более сложного математического аппарата.

Любая система обработки информации представляет собой единство трех компонент: технических средств (hardware), программного обеспечения (software) и алгоритмического обеспечения (brainware). В настоящей книге обсуждаются вопросы алгоритмического обеспечения спектрального анализа в базисе вейвлет с использованием математического аппарата, обычно читаемого в курсах математики учебных вузов, и поэтому не может быть препятствием для понимания сути вопроса.

Вейвлет-преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого – классическое преобразование Фурье. Применяемые для этой цели базисы названы *вейвлетами*² – солитонообразными функциями двух аргументов – масштаба и сдвига. Введенные сравнительно недавно, в 80-х годах, они в последующие годы получили быстрое теоретическое развитие и широкое применение в различных областях обработки сигналов и изображений. В отличие от традиционного преобразования Фурье, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерное представление исследуемого сигнала в частотной области в плоскости частота–положение. Аналогом частоты при этом является масштаб аргумента базисной функции (чаще всего – времени), а положение характеризуется ее сдвигом. Это позволяет разделять крупные и мелкие детали сигналов, одновременно локализуя их на временной шкале. Иными словами, вейвлет-анализ можно охарактеризовать как *локализованный спектральный анализ* или – *спектральный анализ локальных возмущений*. Аппаратурным аналогом одного из видов вейвлет-анализа является многоканальная полосовая фильтрация сигнала при постоянном отношении ширины полосы фильтра к центральной частоте.

В настоящее время вейвлет-преобразование широко применяется в задачах обработки и кодирования сигналов и изображений самой различной природы (речь, спутниковые изображения, рентгенограммы внутренних органов), распознавания образов, при изучении свойств поверхностей кристаллов и нанобъектов и во многих других случаях.

Вопросы обработки информации с помощью спектральных преобразований в базисе вейвлет практически не освещены в отечественной научной и учебной литературе. В то же время, в западных

² Следует отметить, что термин "вейвлет" произошел от английского wavelet, который на русский язык переводится как "короткая волна". В математической литературе понятие "вейвлет" обозначают иногда словом "всплеск", которое, на наш взгляд, сужает само понятие, тем более, что вейвлеты как раз и предназначены для анализа всплесков – сигналов нестационарного характера.

университетах читаются многочасовые курсы по различным аспектам теории и практики вейвлет-преобразования, издаются монографии и уже много лет проводятся научные конференции и семинары. Оперативная информация по вейвлетам располагается на сайте <http://www.wavelet.org/>. Широкие возможности, которые представляют базисные функции вейвлет в области обработки сигналов, послужили основной причиной появления настоящей книги, которая построена, в основном, на материале зарубежных изданий и, частично, на основе исследований автора.

В.1. Сигналы и их классификация

Сигнал – физический процесс, протекающий во времени и несущий информацию о каком-либо событии, состоянии объекта наблюдения либо передающий команды управления, указания, оповещения и т.п.

Источником сигналов является любая измерительная система, экспериментальная физическая установка, технологическое оборудование, физические и др. явления. Носителем сигнала может быть механическое или звуковое колебание, тепловое, рентгеновское или другое излучение, электрический ток, напряжение или заряд. Однако, в области анализа сигналов, предметом исследований является сигнал как математический объект, представленный в виде некоторой функции, обозначаемой $f(t)$, $g(t)$, $s(t)$ и т.п., где t – независимая переменная любой физической природы (время, перемещение, частота и т.п.). Функции, обозначающие реальный сигнал, всегда вещественные, т.е. являются вещественными функциями вещественных переменных.

Реальные сигналы всегда случайны, так как неслучайный, полностью известный (*детерминированный*) сигнал не может быть носителем новой информации. Поэтому на практике чаще всего приходится иметь дело с *квазидетерминированными* сигналами, которые описываются функциями с

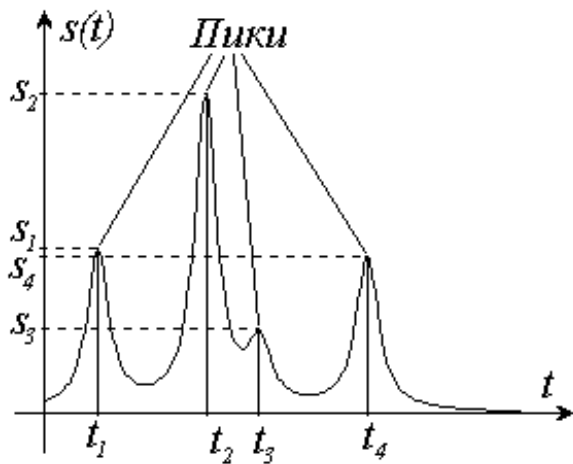


Рис. В.1.

Квазидетерминированный финитный сигнал: случайными являются моменты появления пика t_1, \dots, t_n , его интенсивность (амплитуда) – s_1, \dots, s_n

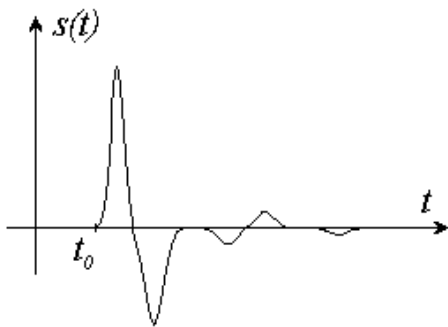


Рис. В.2.

Каузальный сигнал, например, реакция систем на некоторое воздействие в момент t_0

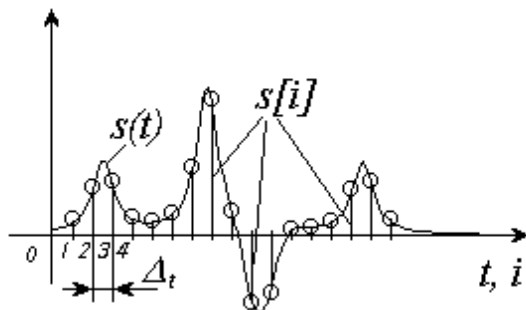


Рис. В.3.

Непрерывный сигнал $s(t)$, его отсчеты $s[i]$

неизвестными, случайными параметрами. Чтобы подчеркнуть наличие случайных параметров в таком сигнале, его записывают, например, в виде $s(t, \theta_0, \theta_1, \dots)$, где $\theta_0, \theta_1, \dots$ – некоторые случайные параметры, или $s(t, \theta)$, где θ – вектор случайных параметров. Финитным является сигнал, локализованный на некотором конечном интервале времени, т.е. $s(t) \neq 0$ только при $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, причем при $t \rightarrow t_{\min}$ и $t \rightarrow t_{\max}$ сигнал плавно стремится к нулю, например, по экспоненциальной кривой или по закону обратной пропорциональной зависимости. Иногда такие сигналы называют пиками (см. рис. В.1).

Каузальным называется сигнал, имеющий начало во времени. Такие сигналы чаще всего являются следствием какой-либо причины. Иногда начало сигнала привязывают к нулевому моменту времени $t_0 = 0$ (см. рис. В.2).

Непрерывным называется

сигнал, который определен в каждой точке оси времени. В противоположность ему, *дискретным* является сигнал, заданный в фиксированные моменты времени $t_i = i\Delta_t$, где Δ_t – шаг квантования по оси времени. Значения сигнала в эти моменты времени называют *отсчетами* (см. рис. В.3). Дискретные сигналы или функции будем обозначать теми же буквами, что и непрерывные сигналы, заключая дискретный аргумент в квадратные скобки, например, $s[i]$, $f[i]$, $g[i]$ и т.д.

В.2. Модели сигналов

В целом ряде случаев исследователю доступна некоторая априорная информация о сути физических процессов, происходящих в исследуемом явлении, на основании которой может быть составлено представление о виде ожидаемых сигналов: форме, продолжительности, количестве пиков и т.п. Чаще всего при этом удается подобрать аналитическое выражение этому сигналу, называемое *моделью*. Моделью является квазидетерминированный сигнал, который можно выразить в виде известной функции от t с параметрами – $f(t, \theta)$. Численные значения параметров θ определяют все множество сигналов, описываемых данной моделью. Выбор модели оказывает значительное влияние на достоверность извлекаемой из сигнала информации об исследуемом явлении. Примерами простейших моделей является гауссовая

$$f(t) = A \exp \left\{ \frac{-(t-t_0)^2}{2\mu_0^2} \right\}$$

или лоренцовая

$$f(t) = A \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{t-t_0}{\mu_0} \right)^2}$$

кривые, где A , t_0 и μ_0 – интенсивность, положение и ширина модели сигнала (рис. В.4).

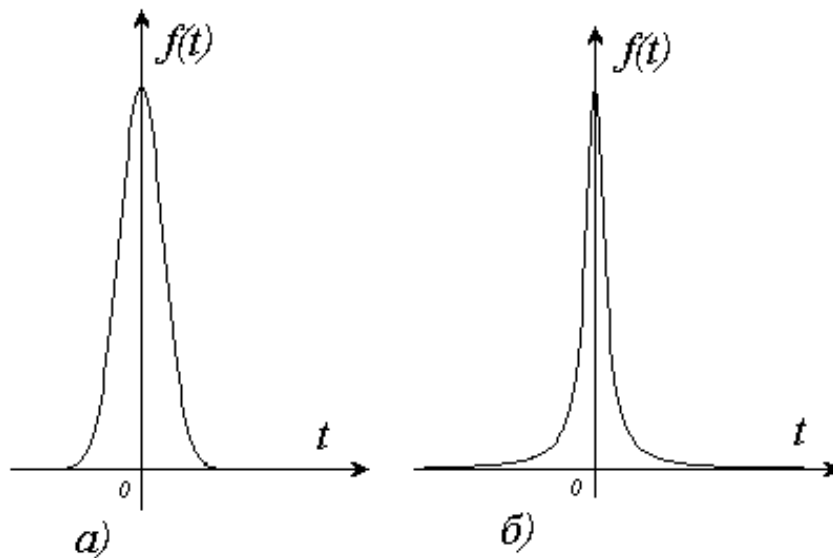


Рис.В.4.

Гауссовая – а) и лоренцовая – б) модели: $a = 1$; $t_0 = 0$; $\mu_0 = 5$

В отличие от функций, обозначающих реальный сигнал, функции, описывающие модели, могут быть как вещественными, так и комплексными, что доставляет исследователям ряд дополнительных возможностей, привлекая соответствующий математический аппарат.

Модели часто используются для проверки свойств системы: по искажению модели можно судить о параметрах системы.

В дальнейшем, если речь идет о сигнале, то будем иметь в виду его модель как некоторую математическую абстракцию, а не физическую сущность.

В.3. Обработка сигнала

Обработкой сигнала называется процесс преобразования и оценивания его информативных характеристик какой-либо технической системой.

Любой сигнал можно охарактеризовать некоторыми обобщенными величинами – *энергией, мощностью, моментами* или другой функцией, например, *сигнальной автокорреляционной функцией*. Сигнал также можно представить в виде суммы простых колебаний (например, синусоид) и охарактеризовать его набором чисел, называемым *спектром*, определяющим долю каждого колебания в сигнале. Если известна достаточно хорошо модель сигнала, то он тогда характеризуется вектором (набором) параметров θ этой модели (например, положение на оси времени, амплитуда, ширина, эксцесс и т.п.). Любой параметр сигнала может нести полезную информацию об исследуемом явлении. Таким образом, задачей *обработки* является выбор этих параметров и оценивание их величин, из которых затем извлекается информация об исследуемых процессах.

Процесс обработки можно представить в виде некоторой совокупности действий над сигналом по тем или иным правилам, называемых *алгоритмами*. Очевидно, что желательно выбрать или синтезировать такие алгоритмы, которые приводили бы к желаемому результату с минимальным количеством вычислительных процедур.

Этого можно достичь путем совмещения различных операций, например, процедуры фильтрации базовой линии и шумов с процедурой оценки параметров и т.п. Решение этой задачи требует тщательного подхода при выборе так называемых *весовых функций* линейных операторов обработки. Теория вейвлетов как раз и предоставляет широкий спектр возможностей при выборе таких функций.

Мгновенной мощностью сигнала называют величину

$$p(t) = s^2(t).$$

Мгновенная мощность суммы двух сигналов не равна сумме их мгновенных мощностей, так как

$$\{s_1(t) + s_2(t)\}^2 \neq s_1^2(t) + s_2^2(t).$$

Если функции $s(t)$ или $p(t)$ определяют сигнал в любой момент времени t , то величина энергии или мощности характеризует сигнал за некоторый конечный (или бесконечный) интервал времени $t_1 \leq t \leq t_2$.

Энергией сигнала на интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ называют величину

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt. \quad (\text{B.1})$$

Средняя мощность сигнала на интервале $T = t_2 - t_1$ определяется как

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt.$$

Финитные сигналы иногда характеризуют начальными и центральными моментами, аналогично тому, как характеризуются законы распределения случайных величин.

Начальным моментом ν -го порядка функции $s(t)$ называется интеграл (если он существует)

$$m_\nu = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} t^\nu s(t) dt, \quad (\text{B.2})$$

где m_0 – нулевой момент, площадь под кривой $s(t)$

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt.$$

Первый начальный момент – математическое ожидание, абсцисса центра тяжести распределения $s(t)$

$$m_1 = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} ts(t)dt. \quad (\text{B.3})$$

Центральным моментом ν -го порядка функции $s(t)$ называется интеграл

$$m_\nu = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} (t - m_1)^\nu s(t)dt. \quad (\text{B.4})$$

Очевидно, что центральный момент первого порядка равен нулю. Центральный момент второго порядка называется *дисперсией*. Он характеризует рассеивание значений функции $s(t)$ около ее математического ожидания. Центральный момент третьего порядка – характеристика *асимметрии* (скошенности) функции $s(t)$. Центральный момент четвертого порядка характеризует *эксцесс* (остроту) функции $s(t)$. Симметричная кривая распределения $s(t)$ характеризуется нулевой асимметрией, а еще точнее – все моменты нечетного порядка (если они существуют) для симметричной кривой равны нулю.

Два сигнала, описываемые функциями $s_1(t)$ и $s_2(t)$, *ортогональны*, когда их взаимная энергия, определяемая как

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t)dt, \quad (\text{B.5})$$

равна нулю.

Взаимная энергия характеризует степень *схожести* двух произвольных сигналов: если они полностью совпадают, то их суммарная энергия максимальна и равна $4E$.

Интегралом свертки (или уравнением свертки) функций $s(t)$ и $h(t)$ называется интеграл, обозначим его $S(t)$,

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (\text{B.6})$$

Если $h(t)$ – импульсный отклик линейной устойчивой системы, а $s(t)$ – входной сигнал, то выражение (В.6) позволяет определить выходной сигнал $S(t)$. Часто используют символическую запись интеграла (В.6)

$$S(t) = s(t) * h(t). \quad (\text{В.7})$$

Автокорреляционной функцией сигнала называется функция, полученная путем свертки сигнала с его зеркальным отображением:

$$K_s(t) = s(t) * s(-t).$$

Или в развернутом виде

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (\text{В.8})$$

То есть, автокорреляционная функция образуется путем интегрирования по всей оси времени произведения сигнала и его сдвинутой на время τ копии. Автокорреляционная функция имеет размерность энергии, т.к. при $\tau = 0$ (см. (В.1))

$$K_s(0) = E.$$

Автокорреляционная функция максимальна при $\tau = 0$ и стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Каждому сигналу соответствует определенная автокорреляционная функция, но она характеризует сигнал в среднем, т.к. является результатом интегрирования.

Интеграл

$$K_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t-\tau)dt \quad (\text{В.9})$$

носит название взаимокорреляционной функции. Если функции $s(t)$ и $g(t)$ отличаются друг от друга, то может оказаться, что $K_{sg}(\tau) \cong 0$. Тогда говорят, что они некоррелированы. В противоположном случае сильной

корреляционной зависимости функция $K_{sg}(\tau)$ ведет себя аналогично $K_s(\tau)$.

Спектральный анализ – разложение сложного сигнала на некоторое множество простых сигналов (колебаний) с целью определения интенсивности каждого колебания в этом сложном сигнале.

Спектром называется совокупность интенсивностей простых колебаний. Спектр может быть *дискретным*, если между соседними простыми колебаниями определен шаг, равный некоторой конечной величине. Если же такой шаг бесконечно мал, то спектр называется *непрерывным*.

Говорят, что сигнал $s(t)$ имеет дискретный спектр $S[k]$ в базисе $\varphi_k(t)$, если его можно выразить в виде суммы

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[k] \varphi_k(t), \quad (\text{B.9a})$$

где $S[k]$ – дискретный спектр сигнала $s(t)$:

$$S[k] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_k(t) dt. \quad (\text{B.9б})$$

Последнее выражение есть не что иное, как дискретная функция взаимной корреляции между сигналом и колебанием $\varphi_k(t)$. Если сигнал или какая-либо его компонента коррелированы с $\varphi_k(t)$, то величина $S[k]$ приобретает максимальное значение. Это позволяет, в частности, совместить операции спектрального анализа и обнаружения компонентов сигнала, коррелированных с базисными функциями $\varphi_k(t)$.

В.4. Историческая справка

История спектрального анализа восходит к И. Бернулли, Эйлеру и, особенно, Фурье, который впервые построил стройную теорию разложения функций в тригонометрические ряды. Однако это разложение, названное именем *Фурье*, долгое время применялось как математический прием и не связывалось с какими-либо физическими представлениями. Например, сам Герц, отец первой электромагнитной резонансной системы (диполя), отрицательно относился к спектральным разложениям. Спектральные представления долгое время применялись и развивались лишь сравнительно узким кругом физиков–теоретиков. Однако, начиная с 20-х годов, в связи с бурным развитием радиотехники и акустики, спектральные разложения приобрели физический смысл и практическое применение. На спектральном (частотном) языке стали объясняться между собой не только ученые, но и инженеры–разработчики радиоаппаратуры, техники, ремонтники – самый широкий круг специалистов.

Впоследствии было установлено, что функции можно разложить не только по синусам и косинусам, но и по другим ортогональным базисным системам, например, полиномам Лежандра и Чебышева, функциям Лагерра и Эрмита. Однако практическое применение они получили только в последние два десятилетия благодаря развитию вычислительной техники и методов синтеза цифровых линейных систем обработки данных. Тем не менее, непосредственно для целей спектрального анализа подобные ортогональные функции не нашли широкого применения из-за трудностей интерпретации получаемых результатов. По тем же причинам не получили развития одно время очень популярные для построения цифровых устройств спектрального анализа функции типа "прямоугольной волны" Хаара, Радемахера, Уолша, Крестенсена. Теоретические исследования ортогональных базисных систем общего вида привели к созданию в 70-х

годах *теории обобщенного спектрального анализа*, которая позволила не только по-новому оценить значение классического спектрального анализа Фурье и пределы его практического применения, но и создала методы и критерии синтеза базисных систем наиболее приспособленных для решения конкретной практической задачи.

Иллюстрацией этому является активно развивающаяся с начала 80-х годов *теория базисных функций типа вейвлет*. Здесь мы применяем, так же как и другие исследователи, русское написание английского термина wavelet, так как его дословный перевод "короткая волна" не очень удобен. Благодаря прозрачности физической интерпретации результатов анализа, очень сходной с "частотным" подходом в Фурье-анализе, ортогональный базис вейвлетов сразу стал популярным и эффективным средством анализа нестационарных сигналов и изображений в акустике, сейсмике, медицине и др. областях.

Вейвлет-анализ является разновидностью спектрального анализа, в котором роль простых колебаний играют функции особого рода, называемые вейвлетами.

Итак, базисная функция вейвлет – это некоторое "короткое" солитоноподобное колебание, но не только. Понятие частоты классического спектрального анализа здесь заменено масштабом, и, чтобы перекрыть "короткими волнами" всю временную ось, введен сдвиг функций во времени. Таким образом, базис вейвлетов – это функции типа $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, где: b – сдвиг, a – масштаб. Кроме того, чтобы быть вейвлетом, функция $\psi(t)$ должна иметь нулевую площадь и, еще лучше, равным нулю первый, второй и т.д. моменты. Фурье-преобразование таких функций равно нулю при $\omega = 0$ и имеет вид полосового фильтра. При различных значениях a это будет набор (блок) полосовых фильтров.

Первое упоминание о подобных функциях (которые вейвлетами еще не назывались) появилось в тезисах Хаара (Haar – 1909). Вейвлет Хаара – это короткое (на интервале $[0,1]$) прямоугольное колебание. Однако он интересен больше теоретически, так как не является непрерывно дифференцируемой функцией и потому имеет длинные "хвосты" в частотной области.

В 30-е годы физик Paul Levy, исследуя броуновское движение, обнаружил, что базис Хаара лучше, чем базис Фурье, для изучения некоторых деталей броуновского движения, тем самым впервые подтвердив эффективность вейвлетов.

Сам термин "вейвлет" использовался ранее в литературе, но свое текущее понятие он получил в статье J. Morlet и A. Grossman, опубликованной в 1984 г. Они занимались исследованиями сейсмических сигналов с помощью базиса, который называли *вейвлетом*. Эта работа дала начало развитию вейвлетов в течение последующих десяти лет целым рядом авторов: Meyer, Daubechies, Battle, Lemarie и другими; математическая формализация, данная работами Mallat и Meyer, привела к созданию теоретических основ вейвлет-анализа, названного мультиразрешающим анализом (или кратномасштабным анализом – при дословном переводе).

Литература

1. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V 15. P. 723-736.

2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Ч.1 и 2.

3. Френкс Л. Теория сигналов. М.: Сов.радио, 1974. 343 с.

4. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов.радио, 1972. 351 с.
5. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара. М.: Наука, 1989. 496 с.
6. *Новиков И.Я.* Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. V. 53. № 6. С.9-13.
7. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, №11. С.1145-1170.
8. *Русинов Л.А., Новиков Л.В.* Спектральный подход к первичной обработке сигналов. Л. Изд. Ленинградского университета, 1984. 156 с.
9. *Mallat S.G.* Multiresolution Approximations and Wavelet of orthonormal Bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Transactions of the American Mathematical Society. 1989. Vo. 315, N 1. P. 69-87.
10. *Cohen A., Daubechies I. and Feanveau J.-C.* Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1992. Vol. XLV. P. 485-560.
11. *Burrus C.Sidney, Ramesh A. Gopinath and Haitao Guo.* Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. Prentice Hall, New Jersey. 1998. 268 p.
12. *Vetterli Martin, Kovacevic Jelena.* Wavelets and Subband Coding. Prentice Hall, New Jersey. 1995. 430 p.
13. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets // CIAM. Philadelphia PA. 1992. Notes from the 1990 CBMS-NSF Conference on Wavelets and Applications at Lowell, MA.
14. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Communications on Pure and Applied Mathematics. November, 1988. V. 41. P. 909–926.
15. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. 131 с.
16. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 203 с.

Глава 1

Представление сигналов

Непрерывные или дискретные сигналы – это совокупность достаточно большого числа точек на графике или чисел в компьютере, которые сами по себе сигнал никак не характеризуют, особенно если сам сигнал скрыт в шумах. Некоторое представление о характере сигнала могут дать его энергия или мощность, но более полное – разложение (или его описание) по некоторым компонентам или простым колебаниям. Аналогом такого подхода является описание человека по его носу, губам, бровям и т.п. Здесь, конечно, имеет значение выбор самих компонент: при неудачном выборе их может потребоваться бесконечное множество, а при удачном – наоборот. Множество компонент образуют систему координат пространства сигналов, в котором каждый сигнал можно представить одной точкой. Это пространство может быть разбито на части – подпространства, в каждом из которых сигналы характеризуются некоторым общим свойством. Так, например, можно разделить все человечество на людей с прямыми носами или карими глазами и т.п.

Настоящая глава посвящена вопросам, связанным с представлением сигналов, которое является основой анализа сигнала.

1.1. Множества сигналов

Вся совокупность сигналов S , встречающихся как на практике, так и в теоретических исследованиях, может быть разбита на ряд групп или *множеств*, каждое из которых объединено каким-либо одним общим и единственным свойством P . Условно это записывается как: $V_P = \{s; P\}$, т.е. V_P есть множество всех s , для которых справедливо P . Следовательно, определив свойство P , мы определяем тем самым множество сигналов.

Множества чаще всего обозначаются заглавными буквами, например, S, V, F, G, L и т.д. Каждый сигнал (или другой объект) множества называется его элементом и обозначаются прописными буквами: s, u, v, f, g и т.д.

Периодические сигналы – множество периодических сигналов с периодом T

$$V_p(T) = \{s; s(t+nT) = s(t), -\infty < t < \infty, n \in Z\} \quad (1.1)$$

Запись $n \in Z$ означает, что n может принимать любое целочисленное значение, т.е. $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$.

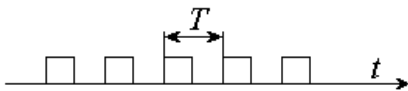


Рис. 1.1.
Периодические прямоугольные импульсы

Примером таких сигналов может служить последовательность импульсов, следующих друг за другом с определенным временным интервалом (периодом T) (см. рис. 1.1).

Сигналы с ограниченной энергией. Это, например, сигналы из множества

$$L_{2E} = \left\{ s; \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \right\}. \quad (1.2.)$$

О функциях $s(t)$, описывающих такой сигнал, говорят, что они интегрируемы с квадратом.

Очевидно, что неравенство в (1.2) справедливо, только если $\lim_{|t| \rightarrow \infty} s(t) \rightarrow 0$.

Иногда говорят о сигналах с ограниченной энергией, заданных на конечном интервале $T = t_2 - t_1$ (см. (B.1)).

Тогда (1.2) можно записать в виде

$$L_{2E}(T) = \left\{ s; \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Последнее множество сигналов можно рассматривать также как сигналы с ограниченной мощностью:

$$L_{2P}(T) = \left\{ s; \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

В дальнейшем для таких множеств будем пользоваться обозначением $L_2(T)$, опуская T при бесконечном интервале определения – L_2 .

К множеству сигналов $L_{2E}(T)$ или $L_{2P}(T)$ относятся, в частности, *финитные сигналы*.

Сигналы с ограниченной полосой. Спектр Фурье $S(f)$ таких сигналов ограничен некоторой предельной частотой W Гц, т.е.

$$V_B(W) = \{s; S(f) = 0\} \text{ для всех } |f| > W. \quad (1.3)$$

Именно для таких сигналов формулируется известная *теорема отсчетов*.

Сигналы ограниченной длительности. Это множество сигналов, которые равны нулю за пределами некоторого интервала $t_1 \leq t \leq t_2$, т.е.

$$V_t(T_0) = \{s; s(t) = 0, \text{ для } t_2 \leq t \leq t_1, T_0 = t_2 - t_1\}. \quad (1.4)$$

Комплексный гармонический сигнал – это множество сигналов

$$V_c = \left\{ s; s(t) = A e^{j(2\pi f t + \theta)} \right\}, \quad (1.5)$$

где A, f, θ – амплитуда, частота и начальная фаза колебаний, $j = \sqrt{-1}$.

Остановимся на некоторых операциях над множествами, с которыми будем встречаться позже.

Объединение множеств V_1 и V_2 записывается как

$$V_1 \cup V_2 = \{s; s \in V_1 \text{ или } s \in V_2\}$$

и иллюстрируется на рис. 1.2.

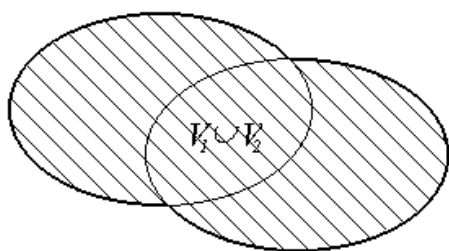


Рис. 1.2.

Объединение множеств V_1 и V_2

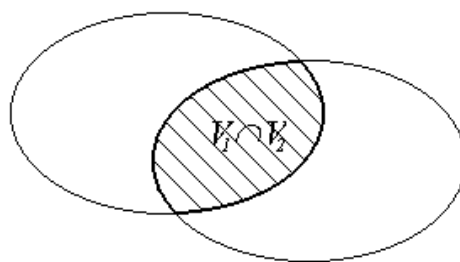


Рис. 1.3.

Пересечение множеств V_1 и V_2

Пересечение множеств V_1 и V_2 определяется как $V_1 \cap V_2 = \{s; s \in V_1 \text{ и } s \in V_2\}$ и иллюстрируется на рис. 1.3.

Запись $s \in V$ означает, что элемент s принадлежит множеству V ; запись $V_1 \subset V_2$ – каждый элемент множества V_1 входит в множество V_2 (иначе говоря, V_1 – *подмножество* V_2 см. рис. 1.4)

Примерами часто встречающихся множеств являются:

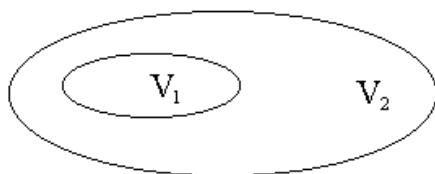


Рис. 1.4.

Множество V_1 является подмножеством множества V_2

N – натуральные числа;

R – вещественные

(действительные) числа;

C – комплексные числа;

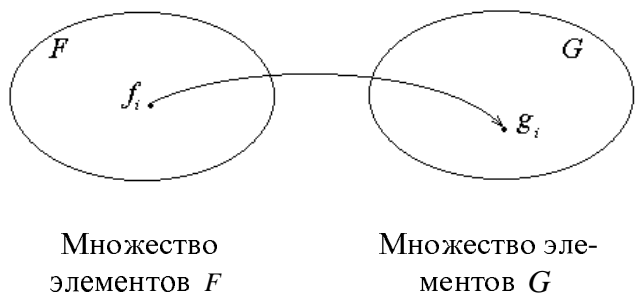
S – множество сигналов;

L – множество функций;

Z – целые числа.

Отображение множеств. Преобразование каждого элемента f_i одного множества F в элемент g_i другого множества G называется *отобра-*

жением, иногда – преобразованием (см. рис. 1.5) Элемент f_i называется



прообразом, а элемент g_i – образом. Если правило или закон преобразования обозначить Q , то преобразование F в G можно выразить формулой $f_i = Q[g_i]$.

Рис. 1.5.
Отображение множеств

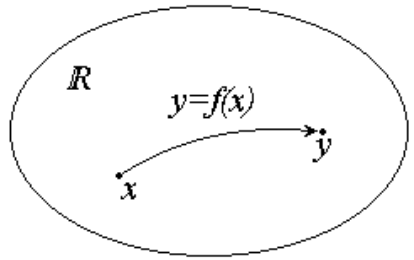
Преобразование будет линейным, если для некоторых вещественных чисел λ_1 и λ_2 выполняются условия аддитивности и однородности:

$$Q[\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2] = \lambda_1 Q[F_1] + \lambda_2 Q[F_2].$$

Приведем несколько примеров преобразований Q .

Пример 1.

Если F и G – числа, например x и y , принадлежащие одному множеству R , то преобразование Q порождает функциональную зависимость



$y = f(x)$ (рис. 1.6). Свойством линейности обладает линейная функция $y = \lambda_1 x + \lambda_2$.

Рис. 1.6.
Функциональная зависимость $y = f(x)$.
 R – множество чисел

Пример 2.

Если F и G – это функции из одного и того же множества L , например $f(t)$ и $g(t)$, то Q – это оператор преобразования функций $f(t)$ в $g(t)$

$$g(t) = Q[f(t)] \quad (\text{рис. 1.7}).$$

Свойством линейности здесь обладает оператор умножения на скаляр

$$f(t) = \lambda g(t)$$

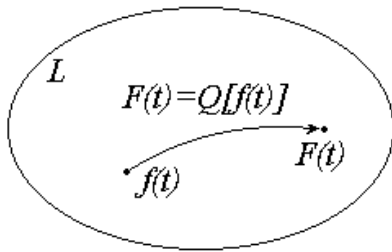
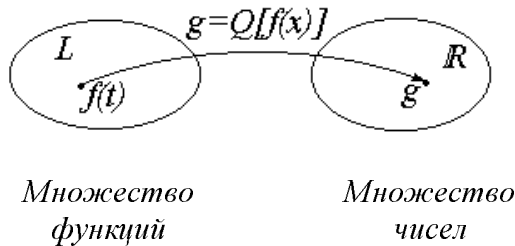


Рис. 1.7.
Оператор Q .
 L – множество функций

Пример 3.

Если множество F – это функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, а множество G – числа g , то преобразование Q – это функционал $g = Q[f(t)]$ (рис. 1.8).

Примером функционалов являются интегралы



Множество функций Множество чисел

Рис. 1.8.
Функционал Q

и оператор дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] &= \\ &= \lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t) \end{aligned}$$

и интегрирования

$$\begin{aligned} \int [\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] dt &= \\ &= \lambda_1 \int f_1(t) dt + \lambda_2 \int f_2(t) dt \end{aligned}$$

$$g_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt,$$

$$g_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\varphi(t)dt$$

(рис. 1.9).

Примером *линейных* функционалов является выражение для площади финитного сигнала

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt.$$

Если функции заданы на дискретном множестве точек t_i , то интегралы заменяются суммами.

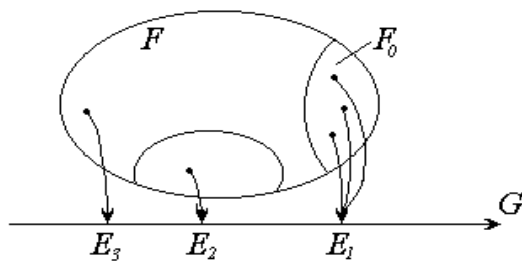


Рис. 1.9.
Отображение множества сигналов с конечной энергией F в действительные числа G ; F_0 – подмножество сигналов с энергией E_1

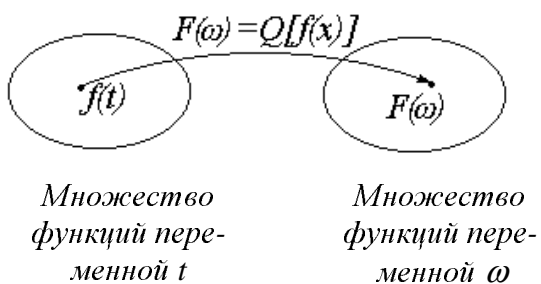


Рис. 1.10.

Функциональный оператор Q

Пример 4.

Если F – множество функций одной переменной, например ω , а G – множество функций другой переменной, например t , то преобразование Q – функциональный оператор (рис. 1.10)

$$F(\omega) = Q[f(t)]$$

Наиболее типичным примером функционального оператора является преобразование Фурье (рис. 1.11):

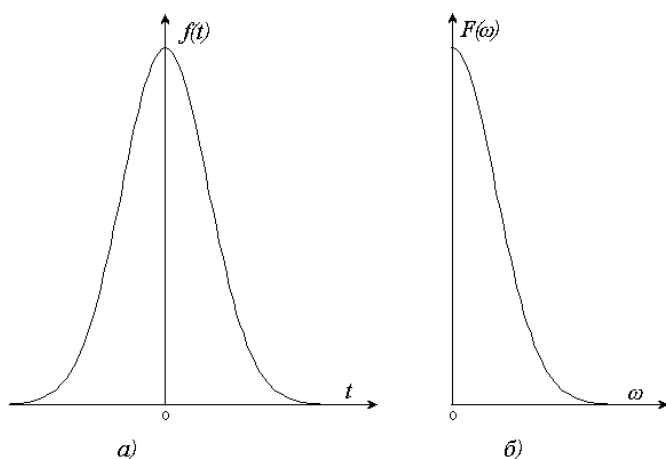


Рис. 1.11.

Преобразование Фурье:

- а) $f(t)$ – функция времени;
- б) $F(\omega)$ – спектр Фурье, функция частоты ω

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Еще одним примером является хорошо известная операция свертки (В.6) функции $f(t)$ с функцией $g(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

Иногда рассматривают функциональный оператор как разновидность функционала

на том основании, что каждое числовое значение функции $F(\omega)$, при фиксированном ω , определяется поведением функции $f(t)$ на всем интервале изменения переменной t .

1.2. Пространство сигналов

Метрическое пространство. Рассматривая элементы, в сущности, сигналы одного и того же множества, необходимо условиться о признаках или признаке, отличающих их друг от друга. Общий и интуитивно ясный подход заключается в том, чтобы эти элементы интерпретировать в виде точек в некоторой системе координат. Оказывается, что наиболее подходящим признаком, отличающим два элемента множества, например x и y , является расстояние между этими точками (обозначим его через $d(x, y)$).

Множество с подходящим образом определенным расстоянием называется *пространством*. Если, кроме того, установлено правило, с помощью которого вычисляется это расстояние, то пространство называется *метрическим*, а само правило называется *метрикой*. Расстояние d обладает следующими аксиоматическими признаками:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$, только если $x = y$,
 - 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметрия),
 - 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника).
- (1.6)

Так как расстояние – это число, а элементы x и y могут быть функциями, то $d(x, y)$ – это функционал.

Пример 5.

Действительная ось – множество действительных чисел R – является метрическим пространством с метрикой

$$d(x, y) = |x - y|; \quad x, y \in R.$$

То есть расстояние между действительными числами является просто модулем их разности.

Линейные пространства. После ввода понятия метрики дальнейшим продуктивным подходом к конструированию пространства для представления сигналов является рассмотрение сигналов как векторов, соединяющих

начало координат с точкой (элементом) этого пространства. Тогда каждому элементу x, y, z, \dots пространства соответствует набор чисел (вещественных или комплексных) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ и т.д., являющихся проекцией вектора на координатные оси. Кроме того, используя операции векторной алгебры, могут быть определены различные взаимосвязи между элементами пространства. Поскольку эти операции линейны, то и пространство, образованное множеством векторов, является *линейным*. Более точно: множество элементов x, y, z, \dots образует линейное пространство, если в нем определены следующие операции:

1. Каждой паре векторов x и y множества V соответствует вектор $x + y \in V$, называемый суммой x и y ;

2. Каждому элементу $x \in V$ и каждому числу (скаляру) λ поставлен в соответствие определенный элемент $\lambda x \in V$ – произведение на скаляр так, что для любых элементов $x + y \in V$ и любых скаляров λ и μ

а) сложение коммутативно $x + y = y + x$;

б) сложение ассоциативно $x + (y + z) = (x + y) + z$;

в) существует нулевой элемент $0 \in V$ такой, что $x + 0 = x$;

г) для любого x существует единственный вектор $(-x)$ такой, что $x + (-x) = 0$;

д) умножение на скаляр ассоциативно $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

е) $1x = x$ и $0x = 0$ для любого x ;

ж) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
 з) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ } (законы дистрибутивности).

Приведенные выше свойства позволяют ввести достаточные ясные алгебраические взаимосвязи между сигналами.

Если в качестве скаляров $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ и т.д. берутся вещественные числа, то такое пространство называется *вещественным (действительным)*

линейным пространством. В противном случае, имеем дело с *комплексным* линейным пространством.

Нормированные линейные пространства. Расстояние от начала координат до какой-либо точки пространства называется *нормой*, а пространство, где она введена – *нормированным*. Норма вектора x , обозначаемая как $\|x\|$, должна удовлетворять следующим аксиомам:

- а) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$, только если $x = 0$;
- б) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – неравенство треугольника.

Сопоставляя приведенные аксиомы с требованиями, которым должна удовлетворять метрика $d(x, y)$, легко видеть, что

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.8}$$

есть метрика, которая удовлетворяет условиям (1.6). Если такая метрика используется в *нормированном линейном пространстве*, то оно будет *метрическим*.

Пример 6.

Пусть R^n – множество, представляющее собой упорядоченный набор n вещественных чисел (вектор – строк из n чисел). Пусть $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $y = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, тогда следующие функционалы дают примеры метрик:

$$а) d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|,$$

$$б) d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^2 \right]^{1/2},$$

$$в) d_3(x, y) = \max\{|\alpha_i - \beta_i|; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Пространство со скалярным произведением. Взаимное отношение двух векторов, т.е. их геометрические свойства, может быть охарактеризовано с помощью числа, называемого *скалярным произведением*. Иными словами, это – отображение упорядоченных пар векторов линейного пространства на вещественную ось R или комплексную плоскость C . Скалярное произведение векторов x и y , обозначаемое как $\langle x, y \rangle$, часто называют *внутренним произведением*.

Линейное вещественное пространство, в котором введено понятие скалярного произведения, называется *евклидовым*. Элементы x и y евклидова пространства удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\
 б) \quad & \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\
 в) \quad & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\
 г) \quad & \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{и} \quad \langle x, x \rangle = 0, \quad \text{если и только если} \quad x = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

В евклидовом пространстве справедливо очень важное соотношение, известное как неравенство Коши-Буняковского:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,
 \tag{1.10}$$

которое вытекает из свойств (1.9а, б и в) скалярного произведения. Действительно, для любого вещественного λ имеем, согласно (1.9г),

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0.$$

Раскрывая левую часть неравенства, получим:

$$\langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Видно, что квадратный трехчлен (относительно λ) неотрицателен, следовательно его дискриминант отрицателен (или равен нулю), т.е.

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0.$$

Отсюда вытекает (1.10).

Важным следствием из свойств скалярного произведения является то, что норма вектора x может быть определена как

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.11)$$

Действительно, условия (1.7а и б) для нормы удовлетворяются.

Для доказательства аксиомы треугольника имеем с учетом (1.10):

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \langle \|x\| + \|y\| \rangle^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

и соотношение (1.11) удовлетворяет условию (1.7в) для нормы.

В соответствие с (1.11) можно утверждать, что скалярное произведение порождает норму, которая, в свою очередь, согласно (1.8), порождает метрику, благодаря чему пространство со скалярным произведением становится метрическим.

Взаимное отношение двух векторов в *комплексном* пространстве также может быть охарактеризовано с помощью скалярного произведения. Комплексное линейное пространство, в котором каждой паре его элементов x и y (векторов) поставлено в соответствие комплексное число $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение, называется *унитарным*. Элементы x и y унитарного пространства удовлетворяют тем же условиям (1.9), за исключением (1.9в), которое записывается в виде:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*, \quad (1.12)$$

где $*$ – знак комплексного сопряжения.

Заметим, что в унитарном пространстве для любого комплексного числа λ имеем $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda^* \langle x, y \rangle$, так как согласно (1.9 в) и (1.9 б):

$$\langle x, \lambda y \rangle = \langle \lambda y, x \rangle^* = \lambda^* \langle x, y \rangle.$$

В унитарном пространстве, так же как в евклидовом, можно ввести норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, удовлетворяющую всем аксиомам о норме.

1.3. Представление элементов векторного пространства

Любой вектор линейного пространства x может быть образован суммированием нескольких векторов u_1, u_2, \dots, u_n со скалярными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i . \quad (1.13)$$

Множество всех линейных комбинаций (1.13) векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ также образует линейное пространство.

Множество векторов u_1, u_2, \dots, u_n называется *линейно-независимым*, если любой из них не может быть выражен через остальные с помощью линейной комбинации. Иначе говоря, когда равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0 \quad (1.14)$$

справедливо только при всех α_i , равных нулю.

Обозначим через V линейное пространство всех комбинаций линейно-независимых векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Каждый вектор $x \in V$ соответствует единственному набору скалярных коэффициентов α_i , следовательно, на основе векторов $\{u_i; i = 1, \dots, n\}$ может быть выражен любой вектор из V . Множество векторов $\{u_i\}$, отвечающих условию линейной независимости, называется *базисом*, сами векторы имеют смысл осей координат, а совокупность чисел α_i – координаты вектора x .

Упорядоченная последовательность коэффициентов $\{\alpha_i\}$ может рассматриваться как n -мерная векторная строка. Это означает, что набор из n вещественных R^n или комплексных C^n чисел является представлением вектора x (в R^n или C^n) по отношению к базису $\{u_i\}$.

В одном и том же пространстве существует не одно множество линейно-независимых векторов, и соответственно, в нем может быть определен не один базис. Чтобы уточнить, какой же базис используется, говорят о пространстве V , *натяннутом* на этот базис.

Одно и то же пространство может быть разбито на подпространства, так же как элементы одного множества могут быть разбиты на ряд подмножеств. Если взять подмножество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, где $m < n$, то множество линейных комбинаций векторов подмножества образует линейное пространство, являющееся подпространством исходного линейного пространства.

Более строго, подмножество V_1 из V является *подпространством*, если:

а) для всех x и y из V_1 $x + y$ также принадлежит V_1 ;

б) для всех x из V_1 и λ из R или C

λx принадлежит V_1 .

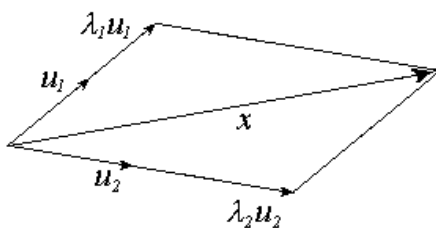


Рис. 1.12.

Представление двумерного вектора x на плоскости (u_1, u_2)

В зависимости от величины n вектор x можно рассматривать в двумерном, трехмерном и т.д., n -мерном пространстве. В двумерном пространстве два параллельных вектора u_1 и u_2 линейно-зависимы, т.к. между ними существует

очевидная линейная связь $u_2 = \lambda u_1$. Два пересекающихся вектора – линейно-независимы, так как между ними нет такой связи, но любой третий век-

тор x можно представить в виде линейной комбинации $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ (рис. 1.12).

Легко видеть, что в трехмерном пространстве будут линейно-независимы только три вектора, в четырехмерном – четыре и т.д. Максимально возможное число линейно-независимых векторов определяет *размерность* пространства.

Если углы между базисными векторами равны $\pi/2$, то такая система координат является *декартовой*, а базисная система ортогональной.

Вектор x , говорят, ортогонален множеству векторов $V_1 = \{y_i\}$, если $\langle x, y_i \rangle = 0$ для всех i . Это обозначают как $x \perp V_1$. Два подпространства V_1 и V_2 называются ортогональными, если все векторы из V_1 ортогональны всем векторам из V_2 , это записывают как $V_1 \perp V_2$.

Пусть векторы u_i в (1.13) образуют линейно-независимую систему. Тогда для определения α_i умножим скалярно левую и правую части (1.13) на векторы v_m попарно ортогональные u_i , т.е.

$$\langle u_i, v_m \rangle = \delta_{im}, \quad (1.15)$$

где δ_{im} – символ Кронекера, $\delta_{im} = 1$ для $i = m$ и $\delta_{im} = 0$ для $i \neq m$

$$\langle x, v_m \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_m \rangle \lambda_i. \quad (1.16)$$

Для α_i , с учетом (1.15), получаем

$$\alpha_i = \langle x, v_i \rangle. \quad (1.17)$$

Коэффициенты α_i называются коэффициентами Фурье в базисе $\{u_i\}$, а базис $\{v_m\}$, удовлетворяющий (1.15), называется *взаимным* базисом. Не трудно видеть, что:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle v_i \quad (1.18)$$

для любого $x \in V$ и любой пары взаимных базисов для V .

Если система координатных векторов $\{u_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ ортогональна, то такой базис называется *самовзаимным (самодуальным)* и

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i. \quad (1.19)$$

Ортогональный базис с нормой координатных векторов, равных единице, называется *ортонормальным*.

$$\langle u_i, u_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{при } i = m, \\ 0, & \text{при } i \neq m \end{cases}$$

В случае ортонормального базиса в евклидовом пространстве легко вычисляется скалярное произведение векторов через их проекции на координатные оси

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{m=1}^n \beta_m v_m \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i^* \quad (1.20)$$

и норма

$$\langle x, x \rangle = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}. \quad (1.21)$$

Расстояние между двумя точками в таком пространстве равно:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}. \quad (1.22a)$$

Неравенство Коши-Буняковского (1.10) имеет вид:

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \quad (1.22b)$$

Конечномерное векторное пространство, для которого справедливо соотношение

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} < \infty,$$

обозначают $l_2(n)$.

Бесконечномерное векторное пространство, для которого справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty,$$

обозначают l_2 .

Ясно, что если x и y входят в l_2 , то и $y = \lambda x$ входит в l_2 при любом λ , и сумма векторов $x + y$ входит в l_2 . Для l_2 справедливы соотношения (1.20), (1.21) и (1.22) при замене n на ∞ .

1.4. Полнота базиса

Базисная система $\{u_n\}$ называется полной, если размерность соответствующего пространства равна размерности представляемых в этой системе векторов. Например, если в трехмерном пространстве задан базис $\{u_1, u_2\}$, то все векторы, не лежащие в плоскости этого базиса и, следова-

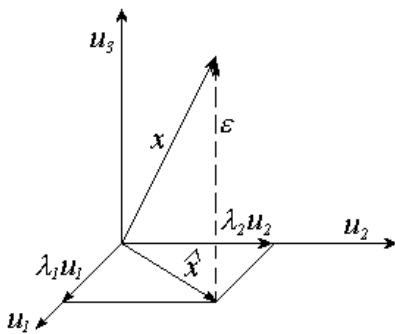


Рис. 1.13.

Представление трехмерного вектора x на плоскости (u_1, u_2) ; ϵ – ошибка представления

тельно, не принадлежащие двумерному пространству, будут представлены не точно, так как для их точного представления необходим еще третий базисный вектор u_3 (рис. 1.13). Однако, иногда для упрощения приходится идти на сокращение размерности пространства, представляя в них векторы с большей размерностью. Это

достигается с помощью процедуры *ортогонального проектирования* вектора, не принадлежащего заданному пространству V_n , на это пространство. *Теорема проектирования* утверждает, что для любого вектора $x \in V$ существует единственный вектор \hat{x} в V_n , задаваемый разложением (см. 1.18)

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle u_i, \quad (1.23)$$

так что разность $(x - \hat{x})$ ортогональна ко всем векторам из V_n , так как

$$\begin{aligned} \langle x - \hat{x}, v_i \rangle &= \langle x, v_i \rangle - \sum_{m=1}^n \langle x, v_m \rangle \langle u_m, v_i \rangle = \\ &= \langle x, v_i \rangle - \langle x, v_i \rangle = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Более того, для любого \tilde{x} из V_n : $\|x - \hat{x}\| < \|x - \tilde{x}\|$.

Вектор \hat{x} называется ортогональной проекцией x на V_n , $\varepsilon = x - \hat{x}$ – погрешность приближения x вектором \hat{x} . Точность приближения ε , или полнота базиса, характеризуется нормой

$$\|\varepsilon\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 = \|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2. \quad (1.24)$$

Более точное определение полноты базиса и соответствующего ему пространства заключается в следующем. Пусть мы имеем последовательность векторов $\{x_n\}$ в V_n , которую называют *сходящейся* к x в V , если $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Последовательность векторов $\{x_n\}$ называется последовательностью *Коши*, если $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Если каждая последовательность Коши из V_n сходится к вектору из V , то пространство V называется *полным*. Полное бесконечномерное нормированное пространство, в котором норма порождена скалярным произведением, называется *Гильбертовым пространством* H .

1.5. Функциональное пространство

Эквивалентность пространств. Рассмотрим множество сигналов с ограниченной энергией, заданных на конечном (или бесконечном) интервале времени, и покажем, что на основе линейного векторного пространства l_2 может быть сконструировано функциональное пространство, обозначим его L_2 , в котором каждой точке соответствует определенная функция времени. Два таких нормированных пространства называются алгебраически изоморфными и изометрическими, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие, такое что:

а) алгебраическим операциям над элементами из l_2 соответствуют те же операции над их образами в L_2 ;

б) нормы соответствующих друг другу элементов из обоих пространств равны.

Можно показать, что всякое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство H алгебраически изоморфно и изометрично пространству l_2 .

Таким образом, множество сигналов L_2 с ограниченной энергией (или мощностью) образует пространство L_2 на основе его эквивалентности с l_2 .

Скалярное произведение в L_2 определяется как

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt, \quad (1.25a)$$

норма

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}, \quad (1.25b)$$

а неравенство Коши - Буняковского имеет вид:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt. \quad (1.25в)$$

Проиллюстрируем изоморфизм на примере конечномерных пространств. Если в векторном пространстве $l_2(n)$ существует ортонормированный базис $\{u_k\}$, то в изоморфном ему пространстве сигналов $L_2(T)$ будет существовать ортонормальная базисная система функций, обозначим ее $\{\varphi(t,k) = \varphi_k(t)\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, т.е.

$$u_k \leftrightarrow \varphi_k(t).$$

Знак (\leftrightarrow) означает взаимное и однозначное соответствие.

Тогда, в соответствии с (1.13), будет существовать разложение сигнала $s(t) \leftrightarrow x$ по системе функций $\{\varphi_k(t)\}$:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(t), \quad (1.26а)$$

где при условии ортонормальности $\varphi_k(t)$ аналогично (1.17)

$$\lambda_k = \langle s(t), \varphi_k(t) \rangle. \quad (1.26б)$$

Определим норму сигнала как

$$\|s\| = \sqrt{\int_T |s(t)|^2 dt} \quad (1.27)$$

и покажем, что с учетом (1.26) она совпадает с (1.21).

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_T |s(t)|^2 dt &= \int_T \left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \\ &= \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2 \int_T \varphi_k^2(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=0 \\ k \neq m}}^{n-1} |\lambda_k| |\lambda_m| \int_T \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt. \end{aligned}$$

С учетом ортонормальности базисной системы, имеем

$$\int_T |s(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|^2$$

и

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|^2}.$$
(1.28)

Т.е. норма сигнала, определенная через его энергию, эквивалентна норме евклидова векторного пространства:

$$\|s(t)\| \leftrightarrow \|x\|.$$

Аналогично можно показать, что скалярное произведение двух сигналов равно сумме произведения их проекций на координатные оси

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_T s_1(t) s_2^*(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k \beta_k^*,$$
(1.29)

что эквивалентно (1.20)

$$\langle s_1, s_2 \rangle \leftrightarrow \langle x, y \rangle,$$

а расстояние между двумя сигналами равно

$$\|s_1 - s_2\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \beta_k)^2},$$
(1.30)

что эквивалентно (1.22а):

$$\|s_1 - s_2\| \leftrightarrow \|x - y\|.$$

Выражения (1.28) и (1.29) называются равенствами *Парсеваля*.

Таким образом, пространства $L_2(T)$ и $l_2(n)$ полностью эквивалентны. Эта эквивалентность пространств порождает функциональное пространство, базисом в котором является система линейно-независимых функций $\{\varphi_k(t)\}$.

Так как $L_2(T)$ образовано множеством $L_{2E}(T)$, то его называют еще пространством квадратично интегрируемых функций:

$$\int_{t \in T} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Условно любой сигнал в таком пространстве графически можно изобразить, как показано на рис. 1.14.

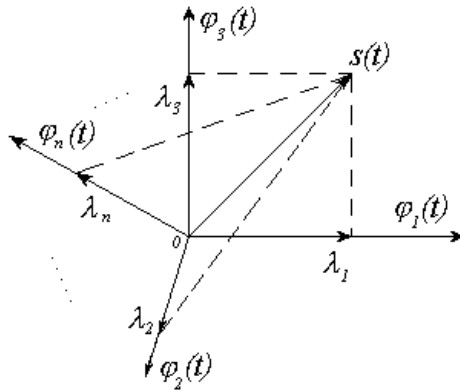


Рис. 1.14.

Представление сигнала $s(t)$ в n -мерном функциональном пространстве

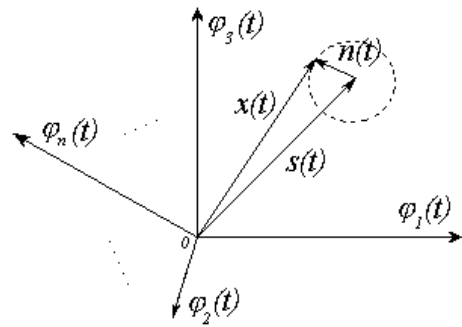


Рис. 1.15.

Представление смеси сигнала $s(t)$ с шумом $n(t)$

Аналогично, можно геометрически представить сумму сигнала и шума $\xi(t)$ с дисперсией σ^2 (см. рис. 1.15):

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Так как $n(t)$ – случайный вектор, то конец вектора $x(t)$ будет лежать на гиперсфере радиуса σ .

1.6. Дискретное представление сигналов

Таким образом, в основе представления и, как будет видно из дальнейшего, анализа сигналов лежит понятие многомерного пространства, в котором определены алгебраические операции над его элементами. Координатными осями в таком пространстве служит система линейно-независимых функций $\{\varphi_k(t)\}$, которая может быть или не быть ортогональной (ортонормированной). Если эта система функций ортонормирована, то проекции любого сигнала $s(t)$ вычисляются наиболее просто

по формуле (1.26.б). Дискретное представление целесообразно рассматривать для сигналов, заданных на конечном интервале времени T . Увеличение интервала ведет неизбежно к увеличению числа базисных функций (так как возрастает число точек исходной функции), что делает такое представление громоздким. В частности, для финитных сигналов интервал представления T целесообразно ограничивать областью, в которой они отличны от нуля.

Подпространства из $L_2(T)$. Пусть V_n – n -мерное подпространство из $L_2(T)$, натянутое на базис $\varphi_k(t)$. Если сигнал принадлежит V_n , то он единственным образом может быть представлен в виде:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_i(t), \quad (1.31)$$

$$s(t) \in V_n, t \in T,$$

где вектор-строка $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ является искомым представлением сигнала уже в пространстве вещественных R^n (или комплексных C^n) чисел.

Выражение (1.31) может быть записано в матричном виде:

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\varphi}'(t), \quad (1.32)$$

где $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ – вектор-столбец базисных функций $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Для определения $\boldsymbol{\lambda}$ умножим скалярно левые и правые части выражения (1.32) на $\boldsymbol{\varphi}(t)$, получим:

$$\boldsymbol{\lambda} \langle \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle = \langle \mathbf{s}(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle,$$

где всевозможные скалярные произведения $\langle \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle$ образуют матрицу скаляров $n \times n$, обозначим ее G .

Если существует обратная матрица G^{-1} , то

$$\boldsymbol{\lambda} = \langle \mathbf{s}(t), G^{-1} \rangle$$

или

$$\lambda_k = \langle s(t), \Phi_k(t) \rangle = \int_T s(t) \Phi_k(t) dt, \quad (1.33)$$

где $\Phi_k(t)$ имеет смысл взаимного базиса (аналогично базису v_k в (1.17)).

Причем,

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{ik} \varphi_k(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где γ_{ik} – элементы матрицы \mathbf{G}^{-1} и

$$\langle \varphi_i(t), \Phi_k(t) \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{ik}^* \langle \varphi_i(t), \Phi_k(t) \rangle = \delta_{ik}.$$

Выражения (1.31) и (1.33) носят названия, соответственно, прямого и обратного обобщенного преобразования Фурье. Коэффициенты λ_i называют *спектром* сигнала $s(t)$ в базисе $\{\varphi_k(t)\}$. Если функции $\{\varphi_k(t), k = 1, 2, \dots\}$ ортонормированы, то формулы (1.31) и (1.33) совпадают с (1.26). Представление сигнала в виде (1.31) иногда называют аппроксимацией сигнала обобщенным рядом Фурье или просто представлением сигнала в виде ряда.

Если функции $\{\varphi_k(t), k = 0, 1, 2, \dots\}$ ортогональны, то формулы обобщенного преобразования Фурье приобретают вид:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(t), \quad (1.34a)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{E_\varphi} \int_T s(t) \varphi_k(t) dt = \frac{1}{P_\varphi T} \int_T s(t) \varphi_k(t) dt, \quad (1.34b)$$

где: $E_\varphi = \int_T |\varphi_k(t)|^2 dt$ – энергия базисной функции,

$P_\varphi = \frac{E_\varphi}{T}$ – мощность базисной функции.

Напомним, что для ортонормированных систем $P_\varphi = 1$.

Ортогональное проектирование. Рассмотрим случай, когда сигнал $s(t)$ не принадлежит подпространству V_n . В этом случае аналогично с теоремой проектирования для векторов (1.23) может быть получен единственный сигнал $\hat{s}(t)$, являющийся ортогональной проекцией $s(t)$ на V_n

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \langle s_i(t), \Phi_i(t) \rangle \varphi_i(t).$$

Так же как и в случае векторов, разность $s(t) - \hat{s}(t)$ ортогональна ко всем сигналам из V_n и

$$\|s(t) - \hat{s}(t)\| < \|s(t) - \tilde{s}(t)\|,$$

где $\tilde{s}(t)$ любой другой сигнал из V_n .

Погрешность приближения численно характеризуется нормой

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}\|^2 &= \|s(t) - \hat{s}(t)\|^2 = \int_T |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt = \\ &= \int_T \left| s(t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t) \right|^2 dt = \quad (1.35) \\ &= \int_T |s(t)|^2 dt - \int_T |\hat{s}(t)|^2 dt = \|s(t)\|^2 - \|\hat{s}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Приближение с нормой (1.35) называется приближением в *средне-квадратическом*.

Естественным путем уменьшения ошибки приближения \mathcal{E} является увеличение размерности пространства V_n путем увеличения числа базисных функций в представлении (1.31), тогда оказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle s(t), \Phi_i(t) \rangle \varphi_i(t) = s(t).$$

Такой способ уменьшения погрешности возможен только тогда, когда по каким-либо соображениям число базисных функций можно увеличи-

вать. Чаще всего возникает другая задача: каким образом выбрать базисную функцию, чтобы минимизировать число коэффициентов λ_i в (1.31), достигнув при этом наилучшего приближения.

Из (1.35) для ортонормированных систем следует, что:

$$\|s(t) - \hat{s}(t)\|^2 = \|s(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i \varphi_i(t)|^2$$

или

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|s(t)\|^2. \quad (1.36a)$$

Соотношение (1.36a) носит название *неравенства Бесселя*, утверждающее, что сумма квадратов коэффициентов разложения ограничена сверху энергией сигнала.

Последовательность

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t)$$

является последовательностью Коши; если $\{\varphi_i(t)\}$ полная ортонормированная система, то эта последовательность сходится к $s(t)$. Для полной ортонормированной системы неравенство Бесселя (1.36) переходит в равенство Парсеваля:

$$\|s(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2. \quad (1.36б)$$

Нетрудно убедиться в том, что для ортогональных систем равенство Парсеваля будет иметь вид:

$$\|s\|^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 E_k. \quad (1.36в)$$

Это обстоятельство подчеркивает важность ортонормированных (ортогональных) базисных систем для представления сигналов. Здесь нужно

отметить, что всегда можно подобрать такое число базисных функций n_0 , чтобы для заданной величины ошибки $\varepsilon_0 > 0$ выполнялось неравенство:

$$\left\| s(t) - \sum_{i=1}^n \langle s(t), \varphi_i(t) \rangle \varphi_i(t) \right\| < \varepsilon_0 \quad (1.37)$$

при $n > n_0$.

Ортогонализация. Не всякая линейно-независимая система функций, образующая базис, является ортогональной. Однако, с помощью, например процедуры Грама-Шмидта, из этой системы можно синтезировать ортогональный базис.

Пусть $\{u_k(t)\}$ – система линейно-независимых функций, из которой требуется синтезировать ортогональный базис $\{\varphi_k(t)\}$. Способ Грама-Шмидта основан на применении следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= u_0(t), \\ \varphi_1(t) &= \gamma_{10} \varphi_0(t) + u_1(t), \\ \varphi_2(t) &= \gamma_{20} \varphi_0(t) + \gamma_{21} \varphi_1(t) + u_2(t), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_m(t) &= \gamma_{m0} \varphi_0(t) + \gamma_{m1} \varphi_1(t) + \dots + \gamma_{m,m-1} \varphi_{m-1}(t) + u_m(t). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Найдем скалярное произведение произвольной функции $\varphi_r(t)$ с функцией $\varphi_m(t)$. Получим (опустив для простоты переменную t):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_r, \varphi_m \rangle &= \gamma_{m0} \langle \varphi_r, \varphi_0 \rangle + \gamma_{m1} \langle \varphi_r, \varphi_1 \rangle + \\ &+ \dots + \gamma_{m,m-1} \langle \varphi_r, \varphi_{m-1} \rangle + \langle \varphi_r, u_m \rangle. \end{aligned}$$

Так как мы хотим, чтобы функции $\{\varphi_r(t)\}$ были ортогональны, то их скалярные произведения с разными индексами должны быть равны нулю. Отсюда получим:

$$0 = \gamma_{mr} \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle + \langle \varphi_r, u_m \rangle$$

и

$$\gamma_{mr} = -\frac{\langle \varphi_r, u_m \rangle}{\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle}. \quad (1.39)$$

Придавая в (1.39) индексу r значения $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$, получим все коэффициенты $\gamma_{m0}, \gamma_{m1}, \dots, \gamma_{m,m-1}$, необходимые для определения функции $\varphi_m(t)$.

Примеры ортогональных систем. Применение процедуры Грама-Шмидта к системе функций t, t^1, t^2, \dots на интервале $[-1, 1]$ дает полную ортогональную систему, порождаемую полиномами Лежандра $P_m(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}t; \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right); \\ \varphi_3(t) &= \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right); \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(t) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t), \end{aligned}$$

где $\{P_n(t)\}$ – полином Лежандра $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$.

Интересные результаты дает применение процедуры Грама-Шмидта к этой же системе функций, дополненной неотрицательной *весовой функцией* $w(t)$. В этом случае ортогонализации подвергается система функций $\{\sqrt{w(t)} \cdot t^m\}$ на различных интервалах. Получаемые при этом ортогональные многочлены ортогональны с весом $w(t)$. К ним относятся хорошо известные многочлены Чебышева (весовая функция $(1-t^2)^{1/2}$, интервал $[-1, 1]$), Эрмита (e^{-t^2} , $(-\infty, +\infty)$), Лагерра (e^{-t} , $(0, +\infty)$).

Целый ряд ортогональных систем порождается решением дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f_1(t) \frac{dy}{dt} + f_2(t) \cdot y = 0.$$

Это линейное уравнение с переменными коэффициентами имеет множество решений в зависимости от выбора функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. В частности, одним из решений этого уравнения является набор функций, который является основой базиса Фурье:

$$\{y_k(t)\}_f = \{A \cos kt + B \sin kt\},$$

где A и B определенные константы.

Одно время большой популярностью пользовались функции типа "прямоугольной волны" – система функций Уолша, образующая полную ортонормированную систему на интервале $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ с весом $w(t) = 1$.

Функции Уолша, в свою очередь, образуются перемножением функции Радемахера: $r_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Функции Уолша, как и функции Радемахера принимают только два значения -1 и 1 (**sign** – функция знака аргумента).

Важным свойством базисных систем является свойство *мультипликативности*, заключающееся в следующем:

а) базисная система $\{\varphi_k(t)\}$ вместе с функциями $\varphi_m(t)$ и $\varphi_n(t)$ содержит также функцию, образованную их произведением

$$\varphi_r(t) = \varphi_m(t) \varphi_k(t);$$

б) помимо функции $\varphi_k(t)$ система содержит также функцию

$$\varphi_l(t) = 1 / \varphi_k(t).$$

Свойство мультипликативности базисных систем особенно ценно для решения различных задач обработки сигналов. Таким свойством, в частно-

сти, обладает комплексный базис Фурье $\{e^{jk\omega_0 t}\}$, так как для всех $m, n, k \in Z$

$$e^{jm\omega_0 t} \cdot e^{jn\omega_0 t} = e^{j(m+n)\omega_0 t}$$

и

$$\frac{1}{e^{jk\omega_0 t}} = e^{j(-k)\omega_0 t}.$$

Причем, это свойство для базиса Фурье проявляется как по переменной k , так и по переменной t . Мультипликативными свойствами обладает также базис Уолша.

Некоторые замечания. При дискретном представлении сигналов необходимо, чтобы базисные функции отвечали следующим условиям:

1. Интервал определения сигнала и интервал ортогональности базисных функций должны совпадать. В противном случае какая-то часть сигнала никак не будет представлена коэффициентами в выбранном базисе. Для того, чтобы привести интервал определения сигнала $s(t)$ (пусть он будет равным T) и интервал ортогональности $\{\varphi_k(t)\}$ (пусть он будет равным X), можно воспользоваться следующим приемом. Выполним замену переменных $t = \frac{T}{X}x$. Тогда базисная функция $\varphi_k\left(\frac{T}{X}x\right)$ "растянется" (или "сожмется") так, что ее начало и конец совпадут с сигналом. При такой операции мощность функции $\varphi_k(x)$ останется неизменной, а энергия увеличится (уменьшится) в $\frac{T}{X}$ раз.

2. Система функций $\{\varphi_k(t)\}$ должна быть упорядоченной (по индексу, показателю степени и т.п.), что позволяет определить ее место в ряду базисных функций. Примером такого упорядочения является система

$$1, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin k\omega t, \dots$$

3. Базисные функции $\{\varphi_k(t)\}$ на конечном интервале ортогональности T должны иметь конечную энергию

$$E_\varphi = \int_T |\varphi_k(t)|^2 dt < \infty \quad (1.41)$$

и, соответственно, конечную мощность

$$P_\varphi = \frac{1}{T} \int_T |\varphi_k(t)|^2 dt. \quad (1.42)$$

На бесконечном интервале $T \rightarrow \infty$ энергия базисных функций бесконечно велика (помимо тех, у которых интервал ортогональности бесконечен). Поэтому для таких базисных функций имеет смысл ортогональности по мощности.

4. Желательно, чтобы базисная система $\{\varphi_k(t)\}$ была нормирована по энергии, тогда $E_\varphi = 1$, или по мощности (для бесконечного интервала ортогональности), тогда $P_\varphi = 1$.

5. Система функций $\{\varphi_k(t)\}$ на интервале определения должна быть ортогональной, т.е. взаимная энергия (или мощность) двух различных базисных функций должна быть равна нулю:

$$E_{\varphi_k, \varphi_l} = \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \int_T \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt = E_\varphi \delta(k-l), \quad \begin{cases} 0, k \neq l, \\ E_\varphi, k = l, \end{cases} \quad (1.43)$$

где $\delta(k)$ – символ Кронекера: $\delta(k) = \begin{cases} 0, k \neq 0, \\ 1, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$

1.7. Непрерывное (интегральное)

представление сигналов

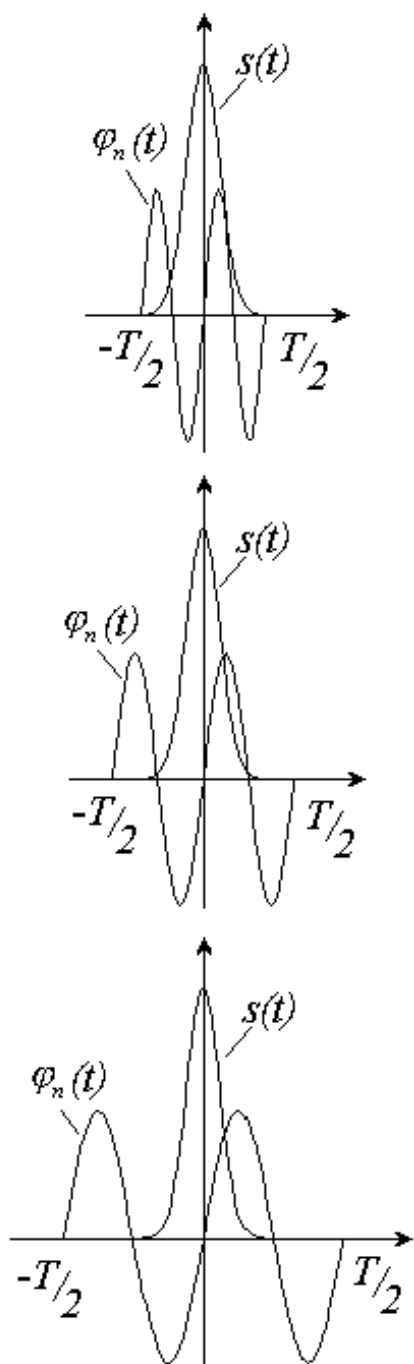


Рис.1.16.

Иллюстрация эффекта деформации базисной функции при увеличении интервала определения сигнала

Дискретное представление сигналов, рассмотренное в предыдущем пункте, удобно для решения задач обработки сигналов, так как каждый сигнал может быть представлен *конечным* числом компонентов.

Однако, в теоретических исследованиях, особенно при рассмотрении сигналов на бесконечном интервале, такое представление либо недостаточно, либо невозможно.

Ниже покажем, что непрерывное представление сигнала $s(t)$ вытекает из дискретного аналога при $T \rightarrow \infty$ и введении вместо индекса k частоты ω , а вместо коэффициентов разложения λ_k – спектральной плотности $S(\omega)$.

Рассмотрим непрерывный сигнал, заданный на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ и представим себе, что этот интервал увеличивается (расширяется) (см. рис. 1.16).

Предположим, что разложение этого сигнала производится по системе

базисных функций $\{\varphi_k(x)\}$ с интервалом ортогональности $\left[-\frac{X}{2}, \frac{X}{2}\right]$. Как было отмечено выше, чтобы совместить этот интервал с интервалом определения функции, необходимо выполнить замену переменной $t = \frac{T}{X}x$. Эта замена неизбежно приведет к деформации базисной функции: при увеличении T она растягивается (см. рис. 1.16, где в качестве базисной для наглядности выбрана некоторая гармоническая функция).

Рассмотрим теперь выражение для аппроксимации функции рядом, в котором удержано n членов

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(t). \quad (1.43)$$

При увеличении числа членов ряда $s_n(t)$ будет сходиться к $s(t)$ в

среднеквадратическом смысле. Ошибка приближения может оказаться неудовлетворительной при увеличении интервала и некотором фиксированном $n = n_0$ (см. 1.37). Дело в том, что вследствие эффекта растяжения базисной функции ее средняя частота уменьшается и в результате оказывается, что даже базисная функция высшего порядка $\varphi_n(t)$ не способна аппроксимировать быстрые изменения сигнала. Следовательно, для сохранения точности приближения необходимо одновременно с увеличением интервала добавлять следующие по порядку

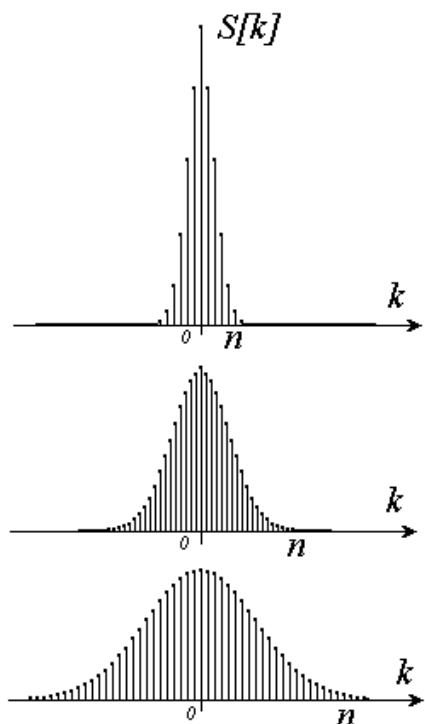


Рис.1.17.
Увеличение числа спектральных составляющих при растяжении интервала

базисные функции. Это приводит к увеличению числа спектральных компонентов и к уменьшению их интенсивности (рис. 1.17), в связи с тем, что при этом должно соблюдаться равенство Парсеваля (1.36б). Сохранить точность приближения можно, поддерживая отношение n/T приблизительно постоянным (увеличивая непрерывно T , приходится дискретно, "шажками" увеличивать n).

В пределе, появляются базисные функции бесконечного порядка и нулевые коэффициенты разложения в ряд, что, в общем, вызывает большие трудности в понимании. Чтобы избежать этих трудностей, вводят понятие частоты ω (для обобщенного преобразования Фурье – обобщенной частоты, которую можно трактовать как среднее число знакоперемен базисной функции в единицу времени) и спектральной плотности $S(\omega)$. Частота ω при этом имеет размерность радиан/сек, $\omega = 2\pi f$, где f имеет размерность Гц.

Обобщенная частота

$$\omega = \frac{2\pi k}{T}. \quad (1.44)$$

Частота ω принимает любые (не только целочисленные) значения, но с ростом k она составляет упорядоченную последовательность

$$\omega = 0, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \pm \frac{6\pi}{T}, \dots$$

с интервалом $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Теперь в систему базисных функций $\{\varphi_k(x)\}$ может быть введена частота:

$$\{\varphi_k(x)\} = \varphi(x, k) = \left\{ \varphi\left(\omega T, \frac{X}{T} t\right) \right\}.$$

Коэффициенты разложения λ_k для ортогональных систем будут иметь вид:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{P_\varphi} \cdot \frac{1}{T} \int s(t) \varphi^*(\omega, t) dt.$$

Как было отмечено, $\lambda(\omega)$ уменьшается с увеличением T , поэтому, если ввести произведение $S(\omega) = \lambda(\omega)T$, называемое *спектральной плотностью*, ее величина уже не будет стремиться к нулю при $T \rightarrow \infty$. Спектральная плотность имеет смысл доли коэффициента разложения в частотном интервале $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$:

$$S(\omega) = 2\pi \frac{\lambda(\omega)}{\omega_o}.$$

Итак, при $T \rightarrow \infty$ спектральная плотность дискретного спектра будет равна:

$$S(\omega) = \frac{1}{P_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi^*(\omega, t) dt.$$

Для ряда Фурье функции $s(t)$ при $T \rightarrow \infty$ будем иметь

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k T \varphi(k, t) \frac{2\pi}{T}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \lim_{k, T \rightarrow \infty} \lambda_k T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(\omega) T = S(\omega), \\ \lim_{k, T \rightarrow \infty} \varphi_k(t) &= \varphi(\omega, t), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = d\omega \end{aligned}$$

и сумма переходит в интеграл, получим *пару преобразований*:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (1.45a)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{P_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi^*(\omega, t) dt. \quad (1.45b)$$

Для ортонормированных по мощности базисных систем $P_\varphi = 1$.

Выражение (1.45а) является искомым представлением сигнала $s(t)$, принадлежащем L_2 , а (1.45б) – непрерывным преобразованием Фурье этого сигнала. Выражение (1.45а) является формулой обращения, а (1.45б) – формулой разложения; $S(\omega)$ – образ Фурье в базисе $\{\varphi(\omega, t)\}$.

Выражения (1.45) получены в предположении, что породившая их система базисных функций $\{\varphi_k(t)\}$ ортогональна. В биортогональном случае вместо (1.45) будем иметь:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (1.46a)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Phi^*(\omega, t) dt, \quad (1.46б)$$

где $\Phi(\omega, t)$ – взаимный базис.

Иногда, пользуясь терминологией интегральных уравнений, функцию $\varphi(\omega, t)$ называют *базисным ядром* интегрального преобразования, а функцию $\Phi(\omega, t)$ – *сопряженным базисным ядром*. Функция $S(\omega)$ характеризует *распределение* $s(t)$ относительно $\varphi(\omega, t)$.

Если базисные функции $\{\varphi_k(t), \Phi_k(t)\}$ отвечают условию биортогональности (1.34), то базисные ядра $\{\varphi(\omega, t), \Phi(\omega, t)\}$ должны отвечать этому же условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, t) \Phi^*(\omega, \tau) = \delta(t - \tau), \quad (1.47)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака (см. ниже).

1.8. Представление и анализ сигналов

Формулы (1.31) и (1.46а) позволяют представить сложный сигнал из L_2 в виде некоторой комбинации компонентов – более простых колебаний (сигналов). Если эти колебания имеют ясный физический смысл, то свойства самого сигнала могут быть объяснены в терминах самих колебаний. Это подводит нас к понятию анализа сигналов. *Анализом сигналов* называется процесс определения и оценки величины компонентов, осуществляемый некоторыми техническими средствами по формулам (1.33) и (1.46б).

Наибольшее распространение в радиотехнике получили гармонические колебания, которые легко генерируются, наглядны, понятны и объясняют многие свойства технических систем. Поэтому представление сигналов в системе гармонических колебаний (синусов и косинусов) и их анализ (традиционный Фурье или частотный анализ), получили наибольшее распространение. При изучении свойств других базисных систем используют так же традиционный анализ Фурье, позволяющий сравнить базисные системы между собой и объяснить механизм их взаимодействия с сигналами.

Приборы, которые осуществляют анализ сигналов, называются *анализаторами спектра*. В соответствии с формулой (1.33) такие анализаторы

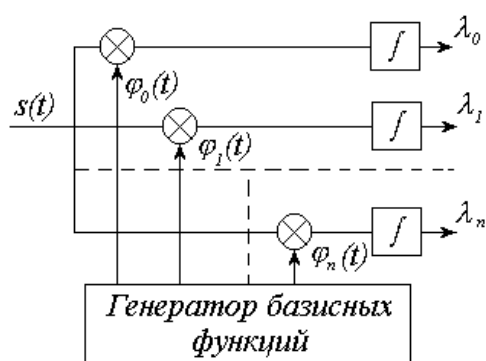


Рис. 1.18.

Пример анализатора
дискретного спектра

строятся по схеме рис. 1.18. Аналогично строятся анализаторы для оценки спектральной плотности $S(\omega)$ по (1.46б). Генератор базисных функций в этом случае генерирует множество функций $\varphi(k\Delta_\omega, t)$ с шагом Δ_ω по частоте ω .

Литература

1. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Ч.1 и 2. М.: Мир, 1983.

2. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974. 343 с.

3. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов.радио, 1972. 351 с.

4. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара. М.: Наука, 1989. 496 с.

5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 380 с.

Глава 2

Гармонический (частотный) анализ

В математике и физике еще в работах Л. Эйлера и Ж.Л. Лагранжа в 18 веке широкое распространение получил метод разложения периодических функций в ряды по синусам и косинусам, названные тригонометрическими рядами. В 19 веке французский математик и физик Ж. Фурье впервые сформулировал основные требования к функциям, представляемым такими рядами, обеспечивающими их сходимость, заложив основы гармонического анализа. В дальнейшем теория гармонического анализа была развита в работах Дирихле, Гаусса, Римана, Чебышева, Винера, Пэли и других. В частности, гармонический анализ периодических функций был распространен на функции с бесконечным периодом, получивший название *интеграла Фурье*.

Впоследствии теория преобразования Фурье периодических и непериодических функций вышла далеко за пределы математических дисциплин, став мощной теоретической базой в ряде прикладных областей, таких как радиоэлектроника и радиотехника, теория систем, теория автоматического регулирования, теория сигналов и др.

2.1. Ряды Фурье

Рядом Фурье может быть представлена периодическая функция $f(t) = f(t + nT), n \in Z$, удовлетворяющая условиям Дирихле: ограниченность, кусочная непрерывность (разрывы первого рода), конечное число экстремальных значений на периоде (ограниченная вариация), в любой точке периода конечность производной от функции, или хотя бы, правой или левой производной (условие Дини).

Если перечисленные условия удовлетворяются, то в соответствии с (1.34а) функция $f(t)$ может быть представлена рядом

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad (2.1.1a)$$

где $F[k]$ вычисляется по (1.34б):

$$F[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt. \quad (2.1.1б)$$

Обратим внимание, что в основу рядов Фурье положена ортогональная система функций $\{\varphi_k(t)\}$:

$$\varphi_k(t) = e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

для $t \in [-T/2, T/2]$ и $k \in Z$.

Легко проверить, что

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = E_\varphi \delta[l - k],$$

где $E_\varphi = T$, так как

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(l-k)\frac{t}{T}} dt = \frac{T}{\pi(l-k)} \sin(\pi(l-k)).$$

Формула (2.1.1б) определяет коэффициенты разложения (2.1.1а) единственным образом. Если $f(t)$ непрерывна, то ряд (2.1.1а) сходится равномерно к $f(t)$. Если $f(t)$ квадратично интегрируема, но необязательно непрерывна, то ряд сходится к $f(t)$ в смысле L_2 . Это означает, что ошибка $\|f(t) - \hat{f}_N(t)\|$ должна стремиться к нулю при $N \rightarrow \infty$, где $\hat{f}_N(t)$ обозначен усеченный ряд (2.1.1а) для k , изменяющемся от $-N$ до N . В точках разрыва предел суммы (2.1.1а) равен среднему $(f(t^+) + f(t^-))/2$. Однако сходимость в этой точке неравномерная, значение $\hat{f}_N(t)$ будет колебаться вблизи точки разрыва (явление Гиббса). Величина колебаний зависит от величины N .

Соотношение Парсеваля (1.29) – скалярное произведение двух произвольных периодических функций $f(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условию Дирихле, вычисленное по одному периоду, равно:

$$\langle f(t), g(t) \rangle_{[-T/2, T/2]} = T \langle F(k), G(k) \rangle.$$

В частности, для $g(t) = f(t)$

$$\|f(t)\|_{[-T/2, T/2]}^2 = T \|F(k)\|^2,$$

где

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_T |f(t)|^2 dt}.$$

Можно показать, что коэффициенты $F[k]$, вычисленные по (2.1.1б) обеспечивают наилучшее приближение рядом (2.1.1а), т.е. всегда ошибка аппроксимации рядом (2.1.1б) меньше ошибки аппроксимации любым другим рядом:

$$\left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k(t) \right\| \leq \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N a_k \varphi_k(t) \right\|,$$

где $\{a_k\}$ – произвольное множество коэффициентов.

Действительно, запишем правую часть неравенства в виде выражения

$$\|f(t)\|^2 - 2T\|a_k, F[k]\| + T\|a_k\|^2,$$

которое после преобразования с учетом (2.1.1б) будет иметь вид:

$$\|f(t)\|^2 - T\|F[k]\|^2 + T\|a_k - F[k]\|^2.$$

Очевидно, что это выражение и, следовательно, ошибка аппроксимации, минимальны, если $a_k = F[k]$.

В заключение отметим, что, заменяя переменную t в (2.1.1) на $t = \frac{Tx}{2\pi}$, получим пару преобразований уже для 2π -периодической функции $f(x)$:

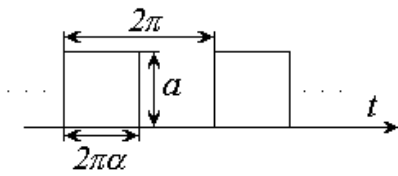


Рис. 2.1а.

Прямоугольный периодический импульс ($\alpha < 1$)

$$F[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx} dx, \quad (2.1.2a)$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]e^{jkx}. \quad (2.1.2б)$$

Последние выражения носят более общий характер, так как не зависят от величины периода T .

Рассмотрим несколько примеров преобразования Фурье периодических функций.

Пример 2.1.

Найти коэффициенты ряда Фурье прямоугольного импульса (рис. 2.1а)

Имеем из (2.1.2а)

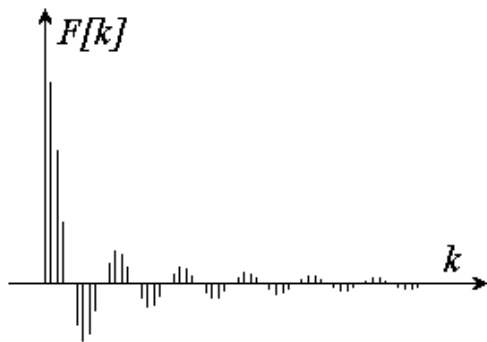


Рис. 2.1б.

Дискретный спектр Фурье прямоугольного импульса (рис. 2.1а)

$$F[k] = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} e^{-jkx} dx = \frac{a}{\pi k} \frac{e^{j\pi k\alpha} - e^{-j\pi k\alpha}}{2j} = a\alpha \frac{\sin \pi k\alpha}{\pi k\alpha}.$$

Дискретный спектр показан на рис. 2.1б.

Пример 2.2.

Найти коэффициенты ряда Фурье функции (рис. 2.2а):

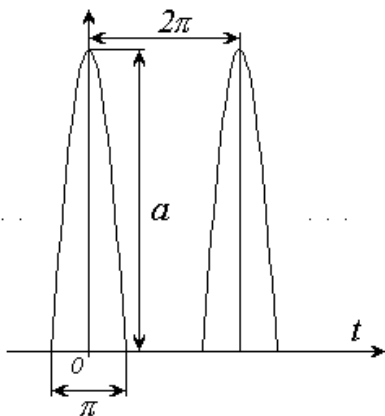


Рис. 2.2а.
Периодическая функция
"полуволна косинусоиды"

$$f(x) = a \cos x \quad \text{для} \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$$

Имеем из (2.1.2а):

$$\begin{aligned} F[k] &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x e^{-jkx} dx = \\ &= \frac{a}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jx} e^{-jkx} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jx} e^{-jkx} dx \right\} = \\ &= \frac{a}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2} [k-1]}{k-1} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} (k+1)}{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$F[0] = \frac{a}{\pi}, \quad F[\pm 1] = \frac{a}{4}, \quad F[2n-1] = 0$$

и

$$\begin{aligned} F[2n] &= \\ &= \frac{a}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2n-1)}{2n-1} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2n+1)}{2n+1} \right\}, \end{aligned}$$

для $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Дискретный спектр функции этого примера показан на рис. 2.2б.

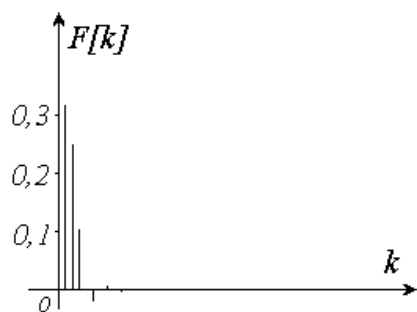


Рис. 2.2б.
Дискретный спектр Фурье
"полуволны косинусоиды"
(рис. 2.2а).

2.2. Интеграл Фурье

Интеграл Фурье – это, по существу, непрерывное представление сигналов, рассмотренное в п. 1.7 в классическом базисе Фурье. В этом случае сигнал рассматривается как функция, заданная на бесконечном интервале. Чтобы получить выражения, аналогичные (1.46), подставим (2.1.16) в (2.1.1a). Получим

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Так как $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$

При $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$, $k\omega_0 = \omega$ сумма превращается в интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.2.1a)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \langle e^{-j\omega t}, f(t) \rangle_t. \quad (2.2.16)$$

Интеграл (2.2.16) называется прямым, а (2.2.1a) – обратным преобразованием Фурье. Комплексная функция $F(\omega)$ имеет смысл спектральной плотности, ее иногда называют непрерывным спектром Фурье-функции $f(t)$.

Также как и в случае периодической функции, предполагается, что $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле или, что эквивалентно, абсолютно

интегрируема и удовлетворяет условию Дини. Тогда, если функция $f(t)$ непрерывна, то обратное преобразование (2.2.1а) точно равно $f(t)$. Если $f(t)$ квадратично интегрируема, то обратное преобразование Фурье справедливо в среднеквадратическом (в смысле L_2), т.е. норма

$$\|f(t) - \hat{f}(t)\| \approx 0.$$

Допуская, что прямое и обратное преобразования Фурье существуют, введем обозначение пары Фурье-преобразования:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega).$$

Отметим также, что

$$F^*(-\omega) = F(\omega), \quad F(-\omega) = F^*(\omega) \quad \text{и} \quad f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega),$$

так как

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Преобразование Фурье обладает рядом замечательных свойств.

Линейность. Следует из свойств линейности скалярного произведения. Для постоянных α и β имеем:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \quad (2.2.2)$$

Симметрия.

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega), \quad (2.2.3)$$

которая следует из (2.2.1б) после замены ω на t и сравнения полученного выражения с (2.2.1а):

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сдвиг. Сдвиг во временной области на t_0 приводит к умножению на фазовый коэффициент в Фурье области

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega). \quad (2.2.4a)$$

И наоборот, сдвиг в частотной области приводит к модуляции комплексной экспоненты во временной области

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0). \quad (2.2.4б)$$

Масштабирование. Умножение переменной t во временной области на вещественную константу α приводит к делению на эту константу переменной ω в частотной области, как следует из пары преобразований:

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (2.2.5)$$

Дифференцирование/интегрирование. Определим спектр производной $f'(t)$. Из (2.2.1б) получим, интегрируя по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как функция, представимая интегралом Фурье, обращается в нуль при $t = \pm\infty$, то, следовательно, имеем пару

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega).$$

В случае n -ой производной

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega). \quad (2.2.6)$$

Для спектра Фурье интеграла от функции $f(t)$ получим, интегрируя по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) dt = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}. \quad (2.2.7)$$

Дифференцирование в частотной области дает

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}. \quad (2.2.8)$$

Теорема моментов. Начальный момент n -го порядка (В.2) может быть определен как

$$(-j)^n m_n = \left. \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}. \quad (2.2.9)$$

Теорема о свертке. Спектр свертки функций $f(t)$ и $g(t)$ определяется из соотношения

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega), \quad (2.2.10)$$

где знак (*) означает свертку двух функций.

Для доказательства рассмотрим свертку двух функций из $L_1(R)$

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

и выполним ее преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} G(\omega) d\tau = F(\omega)G(\omega).$$

Свертка в частотной области дает пару преобразований

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega), \quad (2.2.11)$$

которая носит название *теоремы о модуляции*.

Действительно, обратное преобразование Фурье свертки

$$F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1)G(\omega - \omega_1)d\omega_1$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega \right] d\omega_1 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) e^{j\omega_1 t} g(t) d\omega_1 = g(t) f(t). \end{aligned}$$

Хорошей иллюстрацией применения приведенных выше соотношений является вывод формулы о производной свертки:

$$h'(t) = \frac{d[f(t) * g(t)]}{dt}.$$

Фурье-преобразование $h'(t)$ из (2.2.6) с учетом (2.2.10) равно

$$j\omega((F(\omega))G(\omega)) = (j\omega F(\omega))G(\omega) = F(\omega)(j\omega G(\omega)).$$

Отсюда

$$h'(t) = f'(t) * g(t) = f(t) * g'(t). \quad (2.2.12)$$

Эта формула широко используется для вычисления производной сигнала при одновременном его сглаживании с помощью фильтра, весовая функция которого является производной известной функции, например, гауссианы.

Формула Парсевалья утверждает, что взаимная энергия сигналов может быть вычислена по их спектру

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) G(\omega) d\omega. \quad (2.2.13)$$

При $g(t) = f(t)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.2.14)$$

Или, в соответствии с определением нормы (1.25),

$$\|f(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|F(\omega)\|^2.$$

Доказательство формулы (2.2.13) вытекает из (2.2.11). Действительно, так как преобразование Фурье $f^*(t) \cdot g(t)$ имеет вид $\frac{1}{2\pi} (F^*(-\omega) * G(\omega))$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)e^{-j\omega_1 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega)G(\omega_1 - \omega)d\omega,$$

откуда при $\omega_1 = 0$ получим (2.2.13).

Пример 2.3.

Найти преобразование Фурье функции рис. 2.1а

В соответствии с (2.2.1б) имеем

$$F(\omega) = a \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} e^{-j\omega t} dt = \frac{2a}{\omega} \frac{e^{\pi\omega\alpha} - e^{-\pi\omega\alpha}}{2j} = 2\pi\alpha a \frac{\sin \pi\omega\alpha}{\pi\omega\alpha}.$$

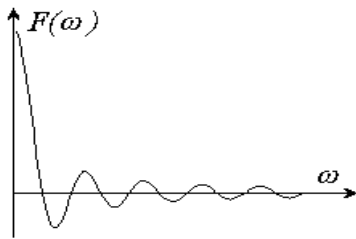


Рис .2.3.

Непрерывный спектр прямоугольного импульса ($\alpha = 0,2$)

Сравнивая этот результат с примером (2.1), видим, что с точностью до постоянного множителя при $\omega = k$ они совпадают, т.е. непрерывный спектр Фурье есть огибающая дискретного спектра (см. рис. 2.3). Этот вывод носит общий характер.

Интересен другой результат. Пусть спектр Фурье имеет вид прямоугольного импульса:

$$F(\omega) = 1 \text{ при } \omega \in [-\Omega_m, \Omega_m].$$

Тогда

$$f(t) = 2\Omega_m \frac{\sin \Omega_m t}{\Omega_m t}.$$

2.3. Дискретизация

Дискретизация – представление непрерывной функции $f(t)$ ее значениями в отдельные, чаще всего равноотстоящие моменты времени $t = n\Delta_t$

$$f(t) \Big|_{t = n\Delta_t} = f[n].$$

Значения функции $f[n]$ в моменты времени $t = n\Delta_t$ называются *отсчетами*. В реальных системах процесс дискретизации непрерывного сигнала во времени осуществляется на входе цифровой системы обработки путем кратковременной подачи сигнала в устройство хранения (чаще всего – конденсатор небольшой емкости), как показано на рис. 2.4.



Рис. 2.4.
Дискретизация непрерывного сигнала

Ключ К1 замыкается в моменты времени $t = n\Delta_t$; в этот же момент времени ключ К2 размыкается, давая возможность конденсатору С зарядиться до напряжения, равного величине сигнала в соответствующий момент времени. Далее ключ К2 замыкается на время Δ_t , а ключ К1 размыкается.

Такой процесс дискретизации, называемый иногда временным квантованием, математически может быть выражен с помощью *дельта-функции Дирака*.

2.3.1. Дельта-функция Дирака

В 1926 году английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ δ , названный им *дельта-функцией*, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения

δ -функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начало координат. Если этот заряд имеет величину e , то его плотность $\rho_o(t) = e \cdot \delta(t)$. Отсюда следует, что функция $\delta(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Дельта-функция может быть получена через предел

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (2.3.2)$$

где $\Phi(t)$ – некоторый импульс, такой, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = 1.$$

Примерами функций $\Phi(t)$ являются рассмотренные во Введении функции Лоренца и Гаусса, которые в нормированном виде можно представить как

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \quad - \quad \text{кривая Лоренца} \quad (2.3.3a)$$

и

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \quad - \quad \text{кривая Гаусса} . \quad (2.3.3b)$$

Графики этих функций показаны на рис. В.4.

Рассмотрим функцию

$$\Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2},$$

.интеграл в бесконечных пределах от которой равен единице

При достаточно малых ε величина $\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 \gg 1$, поэтому

$$\Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \approx \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\pi \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\pi t^2},$$

т.е. неограниченно убывает при уменьшении ε и $t \neq 0$. При $t = 0$ и $\varepsilon \approx 0$ функция $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2} = 1$, а функция $\Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \approx \frac{1}{\varepsilon}$ неограниченно возрастает

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из свойств (2.3.1) δ -функции следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (2.3.4a)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (2.3.4б)$$

Отметим еще, что

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (a = \text{const} \neq 0) \quad (2.3.4в)$$

и

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0). \quad (2.3.4г)$$

Последнее соотношение вытекает из равенства $\delta(t - t_0) = 0$ при $t \neq t_0$. Пара Фурье-преобразований δ -функции имеет вид:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (2.3.5a)$$

и

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}. \quad (2.3.5б)$$

Или в силу свойства симметрии Фурье-преобразования (2.2.3):

$$e^{+j\omega_0} \leftrightarrow 2\pi\hat{\delta}(\omega - \omega_0), \quad (2.3.6a)$$

$$e^{-j\omega_0} \leftrightarrow 2\pi\hat{\delta}(\omega + \omega_0). \quad (2.3.6b)$$

Напомним, что дискретным аналогом δ -функции Дирака является символ Кронекера $\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$

2.3.2 Отсчеты непрерывной функции

Свертка с δ -функцией любой функции дает значение этой функции в дискретной точке – ее *отсчет* в этой точке. Действительно, в силу свойства (2.3.4) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0). \quad (2.3.7)$$

Совокупность отсчетов непрерывной функции $f(t)$ получается при использовании *гребневой* функции Дирака:

$$d_{\Delta_t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta_t). \quad (2.3.8)$$

Свертка с $f(t)$ дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d(t - \tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta_t) = f_0(t), \quad (2.3.9)$$

где $f_0(t)$ -периодическая функция с периодом Δ_t , так как

$$f_0(t + m\Delta_t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - (n - m)\Delta_t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t - i\Delta_t) = f_0(t).$$

Предположим, что $f(t)$ достаточно гладкая и быстро затухающая функция, такая что ряд (2.3.9) сходится единственно к $f_0(t)$. Мы можем тогда разложить $f_0(t)$ в сходящийся ряд Фурье (см. (2.1.1)):

$$f_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta_t} \int_{-\Delta_t/2}^{\Delta_t/2} f_0(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau \right] e^{j2\pi kt/\Delta_t}. \quad (2.3.10)$$

Используя (2.3.9), получим, что коэффициенты ряда Фурье в этом разложении имеют вид:

$$\int_{-\Delta_t/2}^{\Delta_t/2} f_0(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau = \int_{-\Delta_t/2}^{\Delta_t/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta_t) e^{-j2\pi kt/\Delta_t} dt.$$

Произведя замену $\tau = t - n\Delta_t$ учитывая, что $e^{-j2\pi kn} = 1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\Delta_t/2}^{(2n+1)\Delta_t/2} f(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau = F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

2.3.3. Формула суммирования Пуассона

Для непрерывной и ограниченной функции $f(t)$ на основании (2.3.9), (2.3.10) и (2.3.11), учитывая, что $F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right)$ – коэффициенты Фурье периодической функции $f_0(t)$, получим в соответствии с (2.1.1а) формулу суммирования Пуассона:

$$f_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta_t) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) e^{j2\pi kt/\Delta_t}. \quad (2.3.12)$$

В частности, при $\Delta_t = 1$ в точке $t = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(2\pi k).$$

Из (2.3.12) с учетом (2.3.5) для гребневой δ -функции получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n\Delta_t) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t / \Delta_t}. \quad (2.3.13)$$

Используя формулу суммирования Пуассона, получим еще несколько интересных соотношений. Покажем, что

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) f(t - n\Delta_t) \leftrightarrow X(\omega) = \\ &= \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) G\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Для этого умножим (2.3.12) слева и справа на $g(t)$ и выполним преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{jt(\omega - 2\pi k / \Delta_t)} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) G\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Пусть $g(t) \equiv 1$ и $f(t) = \delta(t)$. Тогда по (2.3.6б)

$$G(\omega) = 2\pi \hat{\delta}(\omega),$$

а по (2.3.5б)

$$F(\omega) = 1.$$

и из формулы (2.3.14) получаем еще одно важное соотношение:

$$d_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta_t) = \frac{2\pi}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \quad (2.3.16)$$

2.3.4. Теорема отсчетов

Прежде чем сформулировать теорему отсчетов, используя (2.3.4г), получим связь между спектрами дискретизированного колебания $f_{\Delta}(t)$ и его непрерывного прототипа – функции $f(t)$:

$$f_{\Delta}(t) = f(t)d_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t)\delta(t - n\Delta_t). \quad (2.3.17)$$

В соответствии с теоремой о модуляции (2.2.11) и соотношением (2.3.16) получим из левой части (2.3.17)

$$F_{\Delta}(\omega) = F(\omega) * \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \quad (2.3.18)$$

Выполняя Фурье-преобразование правой части (2.3.17) с учетом (2.3.5б), получим

$$F_{\Delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t)e^{-jn\Delta_t\omega}. \quad (2.3.19)$$

Из (2.3.18) следует, что спектр дискретизированного колебания $f_{\Delta}(t)$ является периодической функцией частоты ω с периодом $\Delta_{\omega} = \frac{2\pi}{\Delta_t}$.

Предположим, что спектр непрерывного колебания $F(\omega)$ занимает полосу от 0 до Ω_m , т.е. $F(\omega) \neq 0$ при $|\omega| \in [0, \Omega_m]$.

Тогда спектр дискретизированного колебания можно изобразить так, как показано на рис. 2.5. Причем, при $\Delta_{\omega} = \frac{2\pi}{\Delta_t} < 2\Omega_m$, будет иметь место наложение ветвей (рис. 2.5а) периодически продолженной функции $F(\omega)$.

Эффект наложения приводит к искажению исходного сигнала при дискретизации.

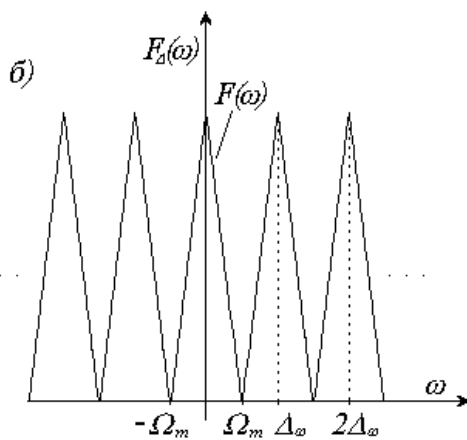
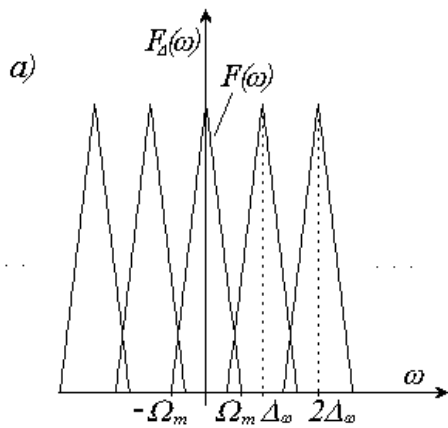


Рис. 2.5.

Спектр дискретизированного колебания

а) $\Delta\omega < 2\Omega_m$,

б) $\Delta\omega = 2\Omega_m$

Таким образом, частота дискретизации должна быть больше частоты самого высокочастотного сигнала Ω_m и, как следует из рис. 2.5б, чтобы избежать наложения – больше, чем в два раза. Тогда будет выполняться соотношение:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta_t} = \Omega_d \geq 2\Omega_m \quad (2.3.20)$$

Теорема отсчетов утверждает следующее:

Если функция $f(t)$ не содержит частот выше Ω_m , то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга на $\Delta_t = \frac{\pi}{\Omega_m}$.

Для доказательства умножим (2.3.18) слева и справа на прямоугольную функцию: $P_{\Omega_m}(\omega) = 1$ при $|\omega| \leq \Omega_m$

и 0 при других значениях ω .

Тогда получим

$$F_{\Delta}(\omega) \cdot P_{\Omega_m}(\omega) = \frac{1}{\Delta_t} F(\omega).$$

К обеим частям последнего выражения применим обратное преобразование Фурье (2.2.1а), в результате, с учетом теоремы о свертке (2.2.10) и Примера 2.3, получим

$$f_{\Delta}(t) * \frac{\sin \Omega_m t}{\Omega_m t} = f(t).$$

Подставляя вместо $f_{\Delta}(t)$ его выражение из (2.3.17) и выполняя операцию свертки с δ -функцией, будем иметь

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t) \frac{\sin \Omega_m(t - n\Delta_t)}{\Omega_m(t - n\Delta_t)}. \quad (2.3.21)$$

Из последнего выражения следует, что непрерывная функция может быть полностью восстановлена по своим отсчетам, взятым с интервалом $\Delta_t \geq \frac{\pi}{\Omega_m}$, с помощью функции $\frac{\sin \Omega_m(t - n\Delta_t)}{\Omega_m(t - n\Delta_t)}$, называемой идеальным интерполятором Котельникова (в зарубежной литературе – интерполятор Шеннона).

Интерполяционная формула (2.3.21) имеет, прежде всего, теоретический смысл, так как она применяется только тогда, когда по отсчетам необходимо восстановить аналоговый сигнал. Для этого достаточно отсчеты $f(n\Delta_t)$ пропустить через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза $\omega_c = \Omega_m$. Однако, на практике такой фильтр реализовать невозможно, так же как применить непосредственно формулу (2.3.21). Для этого необходимо знать все отсчеты сигнала на значительном временном интервале. Простейшим способом восстановления сигнала является применение либо аналогового фильтра нижних частот с большой крутизной фронта частотной характеристики, либо метода линейной интерполяции (соединения отсчетных точек прямой линией) с последующим применением низкочастотной фильтрации с целью сглаживания углов интерполяционной кривой.

2.4. Дискретное преобразование Фурье

В результате дискретизации непрерывного колебания $f(t)$ получается дискретная последовательность $f[n]$. Предположим, что эта последовательность имеет конечную длину N . Ее можно рассматривать как дискретный сигнал, заданный при всех $n \in Z$, причем при $n \notin [0, N-1]$ $f[n]=0$, или как периодическую функцию с периодом N , т.е. $f(n) = f(n + lN)$, $l \in Z$. В зависимости от этого будут иметь место различные *дискретные преобразования Фурье*: дискретное во времени преобразование Фурье или дискретно-временные ряды Фурье.

В дискретных преобразованиях особое значение имеет корень N -ой степени из единицы $\sqrt[N]{1} = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$ и обозначаемый как W_N . Корень N -ой степени из единицы обладает следующими очевидными свойствами:

$$W_N^N = 1, \quad (2.4a)$$

$$W_N^{kN+i} = W_N^i \quad \text{при } k, i \in Z, \quad (2.4б)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & n = lN, l \in Z, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.4в)$$

2.4.1. Дискретное во времени преобразование Фурье

Рассмотрим последовательность $\{f[n]\}_{n \in Z}$. Дискретное во времени преобразование Фурье (обозначается как DTFT – Discrete-Time Fourier Transform) имеет вид:

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n}, \quad (2.4.2a)$$

где аргумент $e^{j\omega}$ введен для того, чтобы не путать это преобразование с преобразованием Фурье (2.2.1б).

Легко проверить, что $F(e^{j\omega})$ – 2π -периодическая функция, так как $e^{-j\omega n} = e^{-j(\omega+2\pi l)n}$. Тогда, в соответствии с выражением (2.1.2а) для коэффициентов ряда Фурье этой функции получим:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.4.2б)$$

Достаточным условием для сходимости ряда (2.4.2а) является абсолютная суммируемость последовательности $f[n]$, т.е.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| < \infty.$$

Если это условие выполняется, то ряд сходится единственным образом к непрерывной функции от ω . Если последовательность $f[n]$ квадратично суммируемая, то имеет место сходимость в среднеквадратическом.

Предположим, что $f[n] = e^{j\omega_0 n}$, где DTFT такого комплексного колебания с учетом периодичности имеет вид

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0 + 2\pi n)}. \quad (2.4.3)$$

На основании (2.3.6б), получим

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi n).$$

В формулах (2.4.2а-в) частота ω , вообще говоря, не имеет размерности. Но часто возникает необходимость выразить спектр последовательности $f[n]$ в единицах частоты, связанных с интервалом дискретизации Δ_t , т.е. рассматривать $f[n] = f(n\Delta_t)$.

В соответствии с (2.3.18) и (2.3.19) Фурье-преобразование дискретизированного колебания

$$F_{\Delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t) e^{-jn\Delta_t\omega} = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta_t}k\right), \quad (2.4.4)$$

где для удобства спектр непрерывного колебания обозначен как $F_c(\omega)$.

С другой стороны, рассматривая (2.4.2а) в точках $n\Delta_t$, будем иметь

$$F(e^{j\omega\Delta_t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t) e^{-jn\Delta_t\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j2\pi n\omega/\omega_s} \quad (2.4.5а)$$

и, используя (2.4.4), получим

$$F(e^{j\omega\Delta_t}) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta_t}k\right) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(\omega - k\omega_s). \quad (2.4.5б)$$

В формулах (2.4.4) и (2.4.5) частота ω выражается в радианах/секунду, функция $F(e^{j\omega\Delta_t})$ периодична по частоте ω с периодом

$\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta_t}$. Формула обращения (2.4.2б) будет иметь вид

$$f[n] = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} F(e^{j\omega}) e^{-j2\pi n\omega/\omega_s} d\omega. \quad (2.4.5в)$$

Приведем два важных свойства DTFT. Возьмем две последовательно сти $g[n]$ и $f[n]$ и пусть их DTFT будут, соответственно, $G(e^{j\omega})$ и $F(e^{j\omega})$, тогда свертка:

$$\begin{aligned} f[n] * g[n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[(n-l)]g[l] = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[n-l] \leftrightarrow F(e^{j\omega})G(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

При тех же обозначениях, что и выше, справедливо соотношение Парсеваля:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega})G^*(e^{j\omega})e^{j\omega} d\omega. \quad (2.4.7)$$

В частности, при $g[n] = f[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

2.4.2. Дискретно-временные ряды Фурье

Рассмотрим теперь периодическую последовательность $f_0[n]$ с периодом N такую, что $f_0[n] = f_0[n + lN]$, $l \in Z$. Эта последовательность образована периодическим продолжением последовательности конечной длины $f[n]$ на всю ось (рис. 2.6), т.е.

$$f_0[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[n - lN].$$

Такая дискретная во времени функция представима *рядом* Фурье, а само преобразование обозначается как DTFS (Discrete-Time Fourier Series). Из формулы (2.1.1a) для ряда Фурье при $t = n\Delta_t$ имеем

$$f_o(n\Delta_t) = f_o(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_0[k] e^{jk \frac{2\pi}{T} n\Delta_t}.$$

Предположим, что в периоде T умещается N отсчетов функции $f(t)$, т.е. $\frac{T}{\Delta_t} = N$, тогда

$$f_o(n\Delta_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_o[k] e^{j \frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_o(k) W_N^{kn}. \quad (2.4.8)$$

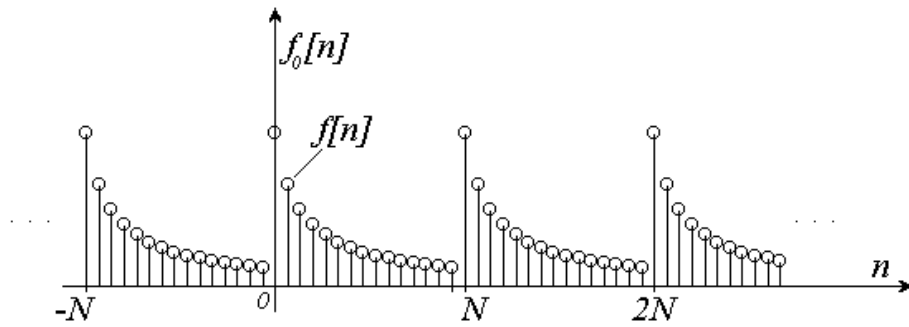


Рис. 2.6.
Периодизация дискретной последовательности $f[n]$

В выражении (2.4.8) частоты спектральных составляющих, образующих $f[n]$, принимают дискретные значения $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$. Легко проверить, что

$$e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k\pm mN)n},$$

$$W_N^{kn} = W_N^{(k\pm mN)n}.$$

Тогда (2.4.8) можно переписать как

$$f_o[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] \cdot W_N^{(k\pm mN)n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mNn} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] W_N^{nk}.$$

Первая сумма при любом значении n равна единице, поэтому ее можно опустить:

$$f_o[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] W_N^{nk}. \quad (2.4.9a)$$

Иногда пользуются другим выражением для $f_o[n]$, отличающимся коэффициентом, а именно

$$f_o[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] W_N^{nk}. \quad (2.4.9б)$$

Чтобы найти коэффициенты $F_o[k]$, умножим (2.4.9б) слева и справа на W_N^{-nm} и просуммируем результат по n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_o[n] W_N^{-mn} = \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k-m)}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k-m)} = \begin{cases} N, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases}$$

получим окончательно

$$F_o[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_o[n] W_N^{-mn}. \quad (2.4.10)$$

Следует отметить, что эту же формулу можно получить из (2.1.16), заменяя интеграл интегральной суммой.

Из (2.4.9) и (2.4.10) следует, что обе последовательности периодичны с периодом в N отсчетов. Из (2.4.9) и (2.4.10) следует, кроме того, важный вывод о том, что коэффициенты DTFS полностью определяются одним периодом $f_o[n]$ и, наоборот, коэффициенты DTFS конечной длины однозначно определяют саму последовательность. Итак, хотя все соотношения DTFS выведены для периодических последовательностей, ими можно полностью представлять последовательности конечной длины. На этом основании преобразования (2.4.9а-б) и (2.4.10) иногда называют просто дискретным преобразованием Фурье (DFT – Discrete Fourier Transform), имея в виду, что в вычислениях по этим формулам вместо периодических последовательностей $f_o[n]$ и $F_o[n]$ участвуют последовательности конечной длины $f[n]$ и $F[n]$.

DTFS (так же как и DFT) обладают теми же свойствами, что и классическое преобразование Фурье. Напомним некоторые из них.

Линейность. Если $f_o[n]$ и $g_o[n]$ – две периодические последовательности (с периодом N отсчетов) и $F_o[k]$ и $G_o[k]$ – их DTFS, то:

$$f_o[n] + g_o[n] \leftrightarrow F_o[k] + G_o[k]. \quad (2.4.11)$$

Это же справедливо и для DFT.

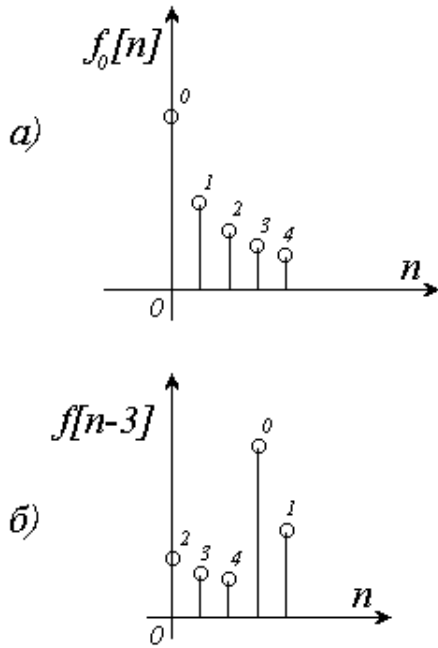


Рис. 2.7.

Круговой сдвиг последовательности
 а) исходная последовательность;
 б) сдвинутая последовательность
 при $n_0 = 3$

Сдвиг. Для периодической последовательности вида $f_0[n - n_0]$ справедливо следующее

$$f_0[n - n_0] \leftrightarrow F_0[k] W_N^{-n_0 k} \quad (2.4.12)$$

Естественно, что в силу периодичности целесообразно рассматривать сдвиг на величину $n_0 < N$. Нетрудно показать, что DFT сдвинутой последовательности (конечной длины) $f[n - n_0]$ получается путем *кругового сдвига* элементов последовательности $f[n]$ на n_0 отсчетов. *Круговой сдвиг* имеет место, когда в результате сдвига последние элементы последовательности

становятся соответственно первыми в последовательности $f[n - n_0]$, что иллюстрируется на рис. 2.7.

Свертка. Свертка двух периодических последовательностей становится теперь круговой (периодической) сверткой:

$$f_0[n] * g_0[n] = \sum_{l=0}^{N-1} f_0[n-l] g[l] = \sum_{l=0}^{N-1} f[(n-l) \bmod N] g[l].$$

Здесь последовательность $f[n]$, также как и выше, сдвигается "по кругу", давая название свертке. Для свертки справедливо соотношение:

$$f_0[n] * g_0[n] = f[n] *_{p} g[n] \leftrightarrow F[k] G[k], \quad (2.4.13)$$

где индекс $(*_{p})$ обозначает круговую свертку.

Формула Парсеваля. Для формулы Парсеваля справедливо, как и прежде,

$$\sum_{n=0}^{N-1} f^*[n]g[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k]G^*[k]. \quad (2.4.14)$$

Коэффициенты DTFS могут быть получены из DTFT следующим образом. Пусть $F(e^{j\omega})$ – DTFT последовательности конечной длины $f[n]$. Сравнивая (2.4.2а) и (2.4.10), получим

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} f_o[n]e^{-j\omega n}.$$

Отсюда следует, что

$$F_o[k] = F(e^{j\omega})_{\omega=k2\pi/N}.$$

Таким образом, мы имеем с учетом (2.4.9б) и последнего равенства

$$\begin{aligned} f_o[n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[n-lN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Сравнивая (2.4.15) и (2.3.12) можно видеть, что (2.4.15) является дискретно-временной версией формулы суммирования Пуассона. Для точки $n=0$ из (2.4.15) получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} f[lN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right].$$

Напомним, что здесь $f[n]$ – последовательность конечной длины $n=0,1,2,\dots,N-1$, а $F\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right]$ – ее DTFT, при $\omega = \frac{2\pi}{N}k$.

Подводя итоги обзора преобразований Фурье, приведем выражения для этих преобразований при различных вариантах (непрерывные и дискретные) переменных время-частота.

Таблица 2.1. Фурье-преобразования с различными комбинациями непрерывного/дискретного времени и частоты. Аббревиатурой *CT* и *DT* обозначены непрерывное и дискретное время, а *FT* и *FS* – преобразование Фурье и ряды Фурье соответственно. Другие обозначения: *C*, *D* – непрерывные или дискретные переменные; *P* – периодический сигнал; ω_s – частота дискретизации, $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta_t}$

Преобразование	Время	Частота	Анализ, синтез
а) Фурье-преобразование СТФТ	C	C	$F(\omega) = \int_t f(t) e^{-j\omega t} dt$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
б) Ряд Фурье CFTS	C P	D	$F[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$ $f(t) = \sum_k F[k] e^{j2\pi kt/T}$
в) Дискретное во времени преобразование Фурье DTFT	D	C P	$F[e^{j\omega}] = \sum_n f[n] e^{-j2\pi n\omega/\omega_s}$ $f[n] = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F(e^{j\omega}) e^{-j2\pi n\omega/\omega_s} d\omega$
г) Дискретный во времени ряд Фурье DTFS	D P	D P	$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi nk/N}$ $f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{-j2\pi nk/N}$

Различные виды преобразований Фурье иллюстрируются на рис. 2.8.

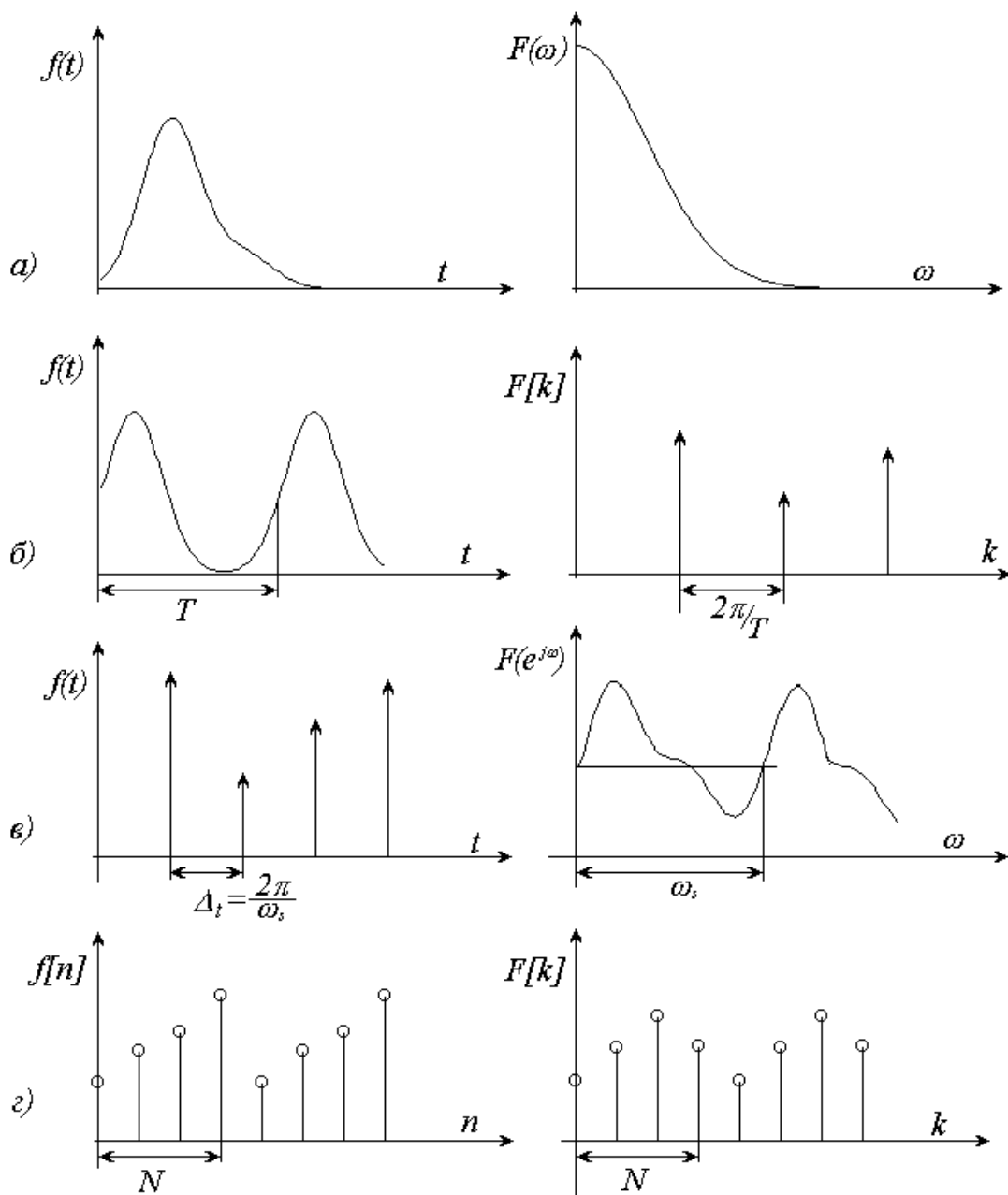


Рис. 2.8.

Преобразование Фурье при различных комбинациях непрерывно-
дискретного переменных времени и частоты.

а) Непрерывное во времени преобразование Фурье (формулы 2.2.1 - CTFT).

б) Непрерывный во времени ряд Фурье (формулы 2.2.1 - CTFS).

в) Дискретное во времени преобразование Фурье (формулы 2.4.2 - DTFT).

г) Дискретный во времени ряд Фурье (формулы 2.4.9, 2.4.10 - DTFST)

2.5. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа позволяет расширить приложение Фурье-преобразования, в частности, в область анализа и синтеза систем обработки данных, в том числе с использованием вейвлетов.

2.5.1. Определения

Как было отмечено выше, любая функция представима в виде интеграла Фурье, если только она абсолютно интегрируема (см. формулу (2.2.1a)). Абсолютно интегрируемая функция должна быть затухающей, т.е. $f(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Однако, для целого ряда важных в теории анализа и, особенно, теории систем, функций это условие не выполняется, в частности, для функций типа единичного скачка или незатухающих гармонических колебаний. Чтобы сделать в этих случаях преобразование Фурье возможным, умножают незатухающую функцию на экспоненту $e^{-\sigma t}$, выбрав $\sigma > 0$ таким, чтобы уже функция $f_o(t) = f(t)e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Тогда условие абсолютной сходимости выполняется для функции $f(t)e^{-\sigma t}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (2.5.1)$$

при некоторых постоянных $\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}$.

В этом случае для функции $f(t)$, "взвешенной" экспонентой $e^{-\sigma t}$, справедливы прямое и обратное преобразования Фурье (2.2.1):

$$F_o(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi,$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t} dt.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-(\sigma+j\omega)\xi} d\xi.$$

Отсюда получим для $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(\sigma+j\omega)\xi} d\xi. \quad (2.5.2)$$

Введем обозначения

$$s = \sigma + j\omega$$

и

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (2.5.3)$$

Тогда $d\omega = \frac{ds}{j}$, пределы интегрирования по s в первом интеграле (2.5.2)

будут лежать в пределах от $\sigma - j\omega$ до $\sigma + j\omega$ и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds. \quad (2.5.4)$$

Формула (2.5.3) называется *прямым (двусторонним)*, а (2.5.4) – *обратным* преобразованием Лапласа.

Для краткости написания прямого и обратного преобразований Лапласа часто употребляются обозначения $F(s) = L[f(t)] = L[f(t)]$ или $F(s) \leftrightarrow f(t)$.

Преобразование Лапласа есть *функциональное преобразование*,

связывающее точки $F(s)$ в пространстве *изображений* с точками $f(t)$ в пространстве *оригиналов* (п. 1.1).

Иначе говоря, преобразование Лапласа – это Фурье-преобразование функции $f(t)e^{-\sigma t}$, где экспоненциальный вес функций $e^{-\sigma t}$ "улучшает" функцию $f(t)$ таким образом, чтобы преобразование Фурье стало возможным. При этом интеграл (2.5.3) может сходиться не при всех значениях s .

Те значения s , при которых этот интеграл сходится, называется *областью сходимости ROC* (Region of Convergence).

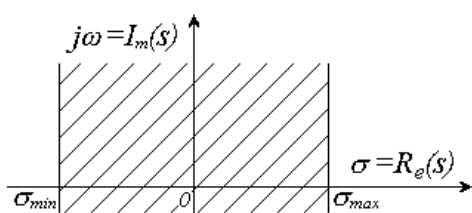


Рис. 2.9.
Область сходимости преобразования Лапласа

Так как сходимость определяется величиной σ , то область сходимости представляет собой полосы на плоскости s , параллельные оси $j\omega$, ограниченные значениями $\sigma_{\max} > \sigma > \sigma_{\min}$ (рис. 2.9).

Если ось $j\omega$ находится внутри ROC для некоторой функции $f(t)$, как на рис. 2.9, то для этой функции существует также преобразование Фурье. $F(s)$ является функцией комплексной переменной, следовательно, для нее справедливы соответствующие положения теории функций комплексной переменной.

Если сигнал является правосторонним, т.е. равен нулю при $t < t_0$, то-

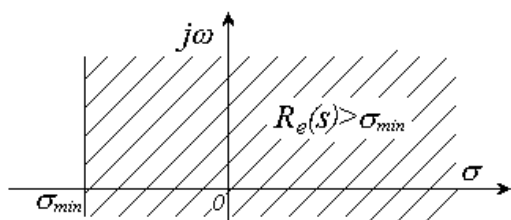


Рис. 2.10.
Область сходимости правостороннего сигнала

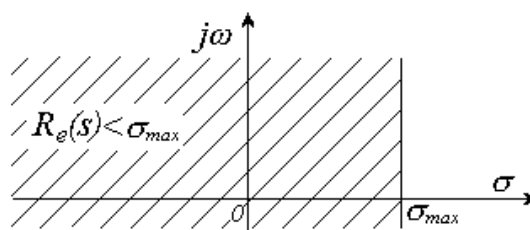


Рис. 2.11.
Область сходимости левостороннего сигнала

гда ROC будет правосторонней, т.е. она простирается от некоторой вертикальной линии $\sigma = R_e(s)$ (R_e – вещественная часть, I_m – мнимая часть комплексного числа), где сходится преобразование Фурье функции $f(t)e^{-\sigma t}$, до плюс бесконечности. Для левостороннего сигнала, равного нулю при $t > t_1$, ROC будет простирается от соответствующей вертикальной линии до минус бесконечности (рис. 2.10, 2.11). Для сигнала конечной длительности областью сходимости ROC является вся комплексная плоскость s . Если сигнал является двусторонним, ROC представляет собой пересечение ROC его лево- и правосторонних частей, т.е. полосу в плоскости s (рис. 2.9).

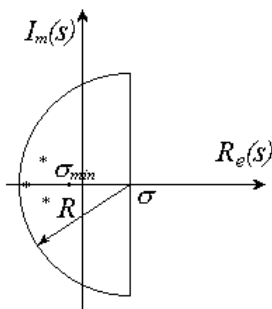


Рис. 2.12.

Пример расположения полюсов (*) Лапласова образа функции $f(t) - F(s)$

Функция $F(s)$ чаще всего представима в виде дробно-рациональной функции как отношение полиномов от s , причем степень полинома числителя, как правило, меньше степени полиномов знаменателя. Особыми точками этой функции являются *полюсы* (корни полинома знаменателя) и *нули* (корни полинома числителя). Для вещественной функции $f(t)$ полюсы всегда являются комплексно-

сопряженными, т.е. имеют вид $\sigma_0 \pm j\omega_0$ (рис. 2.12).

Интеграл (2.5.3) можно разбить на два интеграла:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{\infty} f(-t)e^{st} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \\
 &= L[f(-t), -s] + L[f(t), s],
 \end{aligned}
 \tag{2.5.5}$$

где $f(-t)$ – левосторонняя часть функции $f(t)$, а $f(t)$ – ее правосторонняя часть.

Для *каузальных* сигналов, равных нулю при $t < 0$, первый интеграл ра-

вен нулю. Тогда имеет место *одностороннее преобразование* Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.5.6)$$

Одностороннее преобразование существует для $\sigma_{\max} = \infty$, так как с увеличением σ функция $|f_0(t)| = |f(t)e^{-\sigma t}|$ только уменьшается. Величина же σ_{\min} , которая носит название *абсциссы абсолютной сходимости*, определяется для каждой функции $f(t)$ отдельно. Так, например, для $f(t) = e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) интеграл (2.5.6) сходится при $\sigma_{\min} = -\alpha$. Если $F(s)$ представима в виде дробно-рациональной функции, что часто бывает при исследовании реальных линейных систем, то σ_{\min} должно находиться правее самого правого полюса функции $F(s)$.

В целом, для сходимости интеграла (2.5.6) необходимо, чтобы функция $f(t)$ росла не быстрее некоторой показательной функции: $|f(t)| \leq Me^{\sigma_{\min} t}$, где M и σ_{\min} – постоянные, тогда для $\sigma > \sigma_{\min}$, т.е. для всех точек, лежащих правее прямой $R_e(s) = \sigma_{\min}$ (рис. 2.10), получим

$$\int_0^{\infty} |e^{-\sigma t} f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma - \sigma_{\min})t} dt = - \left. \frac{Me^{-(\sigma - \sigma_{\min})t}}{\sigma - \sigma_{\min}} \right|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - \sigma_{\min}}.$$

Из выражения (2.5.5) следует, что двустороннее преобразование сходится тогда и только тогда, когда оба интеграла $L[f(t); s]$ и $L[f(-t); -s]$ абсолютно сходятся. Областью сходимости для левостороннего сигнала при этом будет часть комплексной s -плоскости, лежащей левее самого левого полюса $F(s)$, так как при $\sigma \rightarrow -\infty$ функция $|f(-t)e^{\sigma t}|$ уменьшается, начиная с некоторой $\sigma = \sigma_{\max}$. Тогда областью сходимости двустороннего преобразования, как уже отмечалось, будет полоса в s -плоскости, определен-

ная двумя абсциссами абсолютной сходимости (рис. 2.9).

2.5.2. Обратное преобразование

Формула обращения (2.5.4) позволяет находить функцию $f(t)$ по ее Лапласову изображению $F(s)$. На основании леммы Жордана интегрирование (2.5.4) в пределах от $\sigma - j\infty$ до $\sigma + j\infty$ может быть заменено интегрированием по замкнутому контуру, образованному прямой $R_e(s) = \sigma$ и замыкающей ее концы полуокружностью радиуса R . При этом для правостороннего сигнала все полюсы функции $F(s)$ должны лежать внутри контура слева от прямой $R_e(s) = \sigma$ (рис. 2.12).

Тогда, согласно теореме о вычетах, интеграл (2.5.4) равен сумме вычетов (**Res**) подынтегральной функции $F(s)e^{st}$ относительно всех m особых точек s_i этой функции, лежащих внутри контура интегрирования, т.е.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^m \mathbf{Res}[F(s_i)e^{s_i t}], \quad (2.5.7)$$

причем $\sigma_1 \geq \sigma_{\min}$.

Не вдаваясь в детали, с которыми можно ознакомиться в специальной литературе, отметим лишь, что вычеты относительно простого полюса s_0 определяются по формуле:

$$\mathbf{Res}[\Phi(s_0)] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)\Phi(s) = e^{s_0 t} \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)F(s), \quad (2.5.8)$$

где обозначено

$$\Phi(s) = F(s)e^{st}.$$

Вычет относительно полюса n -ой кратности в точке s_0 определяется как

$$\mathbf{Res}[\Phi(s_0)] = \frac{1}{(n-1)!} \mathbf{lim}_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s-s_0)^n \Phi(s) \right]. \quad (2.5.9)$$

Для облегчения вычисления прямого и обратного преобразований Лапласа имеются специальные таблицы. Здесь же приведем несколько примеров.

Пример 2.4.

Пусть $F(s) = \frac{1}{s}$ – Лапласов образ правостороннего сигнала. Эта функция имеет единственную особую точку $s_0 = 0$, и интегрирование в (2.5.7) ведется по контуру слева от прямой $R_e(s) = \sigma_1 > 0$. По формуле (2.5.8) имеем:

$$\mathbf{Res}[\Phi(s_0)] = e^{s_0 t} \mathbf{lim}_{s \rightarrow 0} (s-0)F(s) = \mathbf{lim}_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} = 1.$$

Следовательно, функция $f(t)$ имеет вид единичного скачка:

$$f(t) = u(t) = 1 \quad \text{для } t > 0$$

и

$$f(t) = 0 \quad \text{для } t < 0.$$

Пример 2.5.

Пусть $F(s) = \frac{1}{s+a}$ – Лапласов образ правостороннего сигнала. Эта функция имеет единственный полюс в точке $s = -a$, и интегрирование в (2.5.7) ведется слева от прямой $R_e(s) = \sigma_1 > -a$. По формуле (2.5.8) имеем:

$$\mathbf{Res}[\Phi(-a)] = e^{-at} \mathbf{lim}_{s \rightarrow -a} \left[(s+a) \frac{1}{s+a} \right] = e^{-at}.$$

Следовательно:

$$f(t) = e^{-at} \quad \text{для } t > 0.$$

Пример 2.6.

Пусть функция $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$ – Лапласов образ правостороннего сигнала с полюсами в точках $s_1 = -1$ и $s_2 = -2$. σ_{\min} расположена правее самого правого полюса, т.е. $\sigma_{\min} > -1$ и интегрирование в (2.5.7) ведется слева от прямой $R_e(s) = -1$. Функция $f(t)$ при этом равна сумме вычетов в точках s_1 и s_2 , т.е.

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0.$$

Предположим теперь, что в последнем примере $F(s)$ есть Лапласов образ только *левостороннего* сигнала. Тогда $\sigma_{\max} < -2$ и интегрирование в (2.5.7) должно происходить по контуру по часовой стрелке справа от прямой $R_e(s) = -2$. Тогда

$$f(t) = -(e^{-t} - e^{-2t}), \quad t \leq 0.$$

Предположим, наконец, что функция $F(s)$ примера 2.6 – Лапласов образ *двустороннего* сигнала. Тогда областью сходимости $F(s)$ является полоса в s -плоскости $-2 < R_e(s) < -1$. Для определения $f(t)$ по формуле (2.5.7) интегрирование ведется по двум контурам: один слева от прямой $R_e(s) = -2$, второй – справа от прямой $R_e(s) = -1$.

Тогда

$$f(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t).$$

Последний пример показывает, что в преобразованиях Лапласа обязательно необходимо учитывать область сходимости и характер сигнала.

2.5.3. Свойства

Свойства преобразования Лапласа аналогичны свойствам преобразования Фурье. Отметим некоторые из них.

Свертка

$$f(t) = h(t) * g(t) \leftrightarrow H(s)G(s) \quad (2.5.10)$$

с областью сходимости, являющейся пересечением областей сходимости $H(s)$ и $G(s)$.

Производная.

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) \quad \text{при} \quad f(0) = 0.$$

Для доказательства рассмотрим одностороннее преобразование Лапласа:

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$L[f'(t)] = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0),$$

т.к. при

$$R_e(s) = \sigma > \infty,$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{st} f(t) = 0.$$

Преобразование Лапласа n -ой производной при равенстве нулю всех $n - 1$ производных в точке $t = 0$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)$$

с областью сходимости, совпадающей с областью сходимости $F(s)$.

2.5.4. Применение к анализу систем

Преобразование Лапласа позволяет значительно облегчить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые описывают класс линейных систем. Связь между входом $f(t)$ и выходом $y(t)$ линейной системы может быть выражена в виде уравнения:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = f(t), \quad (2.5.11)$$

где a_k – действительные числа, зависящие от параметров системы.

Функцию $f(t)$ называют иногда входным воздействием системы. При отсутствии такого воздействия уравнение (2.5.11) превращается в линейное однородное дифференциальное уравнение.

После выполнения преобразования Лапласа (2.5.11) при нулевых начальных условиях, получим

$$Y(s) \cdot \sum_{k=0}^N a_k s^k = F(s), \quad (2.5.12)$$

где $Y(s)$ и $F(s)$ – Лапласовы образы выхода и входа системы, соответственно.

Из (2.5.12) следует, что Лапласов образ выхода линейной системы связан с Лапласовым образом входа $F(s)$ соотношением

$$Y(s) = H(s)F(s), \quad (2.5.13)$$

где $H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$ носит название *передаточной функции системы*.

темы.

Передаточная функция характеризует конструктивные особенности системы и поэтому, как правило, известна уже на этапе проектирования.

Выполняя обратное преобразование (2.5.13) по формуле (2.5.7), можно получить выходной сигнал $y(t)$ при известном входном воздействии $f(t)$.

Однако о свойствах системы можно судить только по одной передаточной функции системы $H(s)$. При этом, одним из важнейших свойств является устойчивость системы.

Систему называют *устойчивой*, если после прекращения входного воздействия система возвращается в исходное состояние. Свидетельством устойчивости системы является вид решения однородного уравнения (2.5.11) при равной нулю правой части. Применение преобразования Лапласа позволяет не только упростить это решение, но и исследовать устойчивость системы по соотношениям между коэффициентами уравнения.

Известно, что решение однородного уравнения (2.5.11) имеет вид:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t}, \quad (2.5.14)$$

где A_i – постоянные, а s_i – корни характеристического уравнения (в данном случае – некрратные):

$$D(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0. \quad (2.5.15)$$

Из (2.5.14) следует: чтобы функция $y(t)$ была ограниченной, (затухающей), необходимо, чтобы корни s_i были либо отрицательными действительными величинами, либо комплексными с отрицательными вещественными частями. Иначе говоря, все корни характеристического уравнения должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости $s = \sigma + i\omega$ (см. рис. 2.12).

Из (2.5.13) следует, что корни характеристического уравнения являются полюсами передаточной функции $H(s)$. Следовательно, чтобы система была устойчивой, необходимо, чтобы все ее *полюсы* находились в левой полуплоскости переменного s . Зная передаточную функцию $H(s)$, можно определить реакцию системы на *любое* входное воздействие $f(t)$, а имен-

но, выполняя обратное преобразование Лапласа по формуле (2.5.7)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)X(s)e^{st} ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{F(s)}{D(s)} e^{st} ds.
 \end{aligned}
 \tag{2.5.16}$$

Реакция $y(t)$ линейной системы на входное воздействие может начаться не ранее самого воздействия, поэтому всегда можно положить, что $y(t) = 0$ при $t < 0$. Это означает, что при выполнении условия абсолютной интегрируемости функции $y(t)e^{-\sigma t}$ для $y(t)$ существует одностороннее преобразование Лапласа с областью сходимости, лежащей правее вертикальной прямой $Re(s) = \sigma > \sigma_{min}$.

Если этому условию удовлетворяет отношение Лапласовых образов $F(s)/D(s)$, то по (2.5.16) может быть выполнено обратное преобразование и найдено $y(t)$. При этом интегрирование ведется по замкнутому контуру, охватывающему все особые точки, лежащие в левой полуплоскости. В соответствии с теоремой о вычетах, этот интеграл равен сумме вычетов относительно полюсов функции $\frac{F(s)}{D(s)}$.

Обратное преобразование Лапласа передаточной функции $H(s)$ называют импульсным откликом системы и обозначают как $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} H(s)e^{st} ds.
 \tag{2.5.17}$$

Положим, что $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (такие системы называются физически реализуемыми), это означает, что при выполнении условия абсолютной интегрируемости функции $h(t)e^{-\sigma t}$ для $h(t)$ существует одностороннее преобразование Лапласа с областью сходимости, лежащей правее вертикаль-

ной прямой $R_e(s) = \sigma_{\min}$. Кроме того, область сходимости должна включать и мнимую ось $j\omega$, так как полюсы, лежащие на мнимой оси, приводят к неустойчивой системе. Если этому условию удовлетворяет Лапласов образ $1/D(s)$, то по (2.5.17) с помощью теоремы о вычетах может быть выполнено обратное преобразование и найден импульсный отклик $h(t)$.

2.6. Z -преобразование

Z -преобразование – обобщение дискретного во времени преобразования Фурье. Оно эффективно применяется для решения разностных уравнений и исследования дискретных систем, в частности, цифровых фильтров.

2.6.1. Определение

Как было отмечено, ряд (см. 2.4.2а)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} \quad (2.6.1)$$

сходится только тогда, когда последовательность $f[n]$ абсолютно суммируемая. Однако часто это не так, поэтому, чтобы расширить класс дискретных функций, представимых рядами, $f[n]$ умножают на степенную функцию r^{-n} ($r > 0$), такую, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]r^{-n}| < \infty, \quad (2.6.2)$$

где r – модуль некоторой новой комплексной переменной $z = r \cdot e^{-j \arg z} = \xi + j\eta$, $j = \sqrt{-1}$.

Тогда преобразование (2.6.1) может быть модифицировано в *двустороннее z -преобразование*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad (2.6.3)$$

сходимость которого определяется выражением (2.6.2).

Предположим, что (2.6.3) справедливо для всех z таких, что $|z|=r_1$. Это множество точек на комплексной z -плоскости образует окружность радиусом r_1 . Точно также (2.6.3) может быть справедливо для всех z таких, что $|z|=r_2$. В общем случае, областью сходимости является кольцеобразная область в z -плоскости

$$0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty. \quad (2.6.4)$$

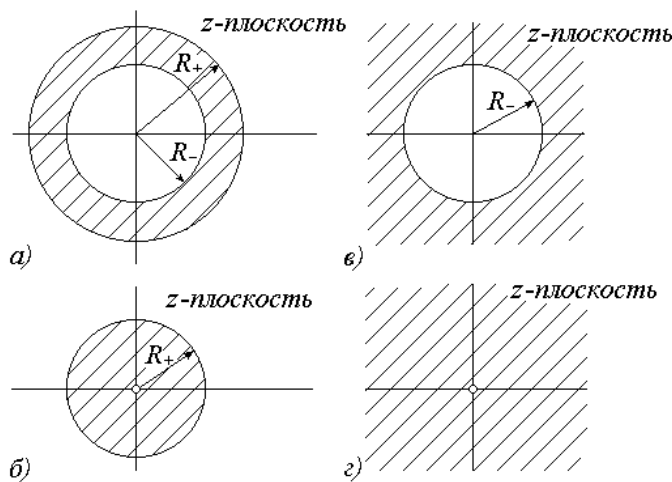


Рис .2.13.

Область сходимости $|z|=r_1$ -преобразования

- а) общий случай $0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty$;
- б) область сходимости внутри круга $|z| < R_+$ ($z=0$ может быть исключен);
- в) область сходимости вне круга $|z| > R_-$ ($z = \infty$ может исключаться);
- г) область сходимости – вся z -плоскость (возможно, за исключением $z=0$ и $z=\infty$)

Заметим, что $z=0$ или $z=\infty$ могут быть включены или не включены в область сходимости (см. рис. 2.13).

Рассмотрим пример последовательности, для которой z -преобразование существует, в то время как дискретное преобразование Фурье – нет. Таким примером является функция единичного скачка

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что условие абсолютной суммируемости не выполняется, в то время как:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| r^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} < \infty, \quad \text{при } r > 1,$$

т.е. область сходимости лежит вне единичной окружности.

Заметим, что z -преобразование, определенное на единичной окружности $z = e^{j\omega}$, совпадает с дискретным преобразованием Фурье (2.6.1). При этом $|z| = 1$, а $\arg z = \omega = \text{const}$:

$$F(z)_{z=e^{j\omega}} = F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.6.5)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что *если область сходимости включает единичную окружность, то дискретное преобразование Фурье DTFT последовательности существует, в противном случае – нет.*

Установим связь z -преобразования с преобразованием Лапласа. Для этого выполним двусторонние преобразования Лапласа левой и правой частей выражения (2.3.11) при $\Delta_t = 1$. Получим:

$$F_{\Delta}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-ns}.$$

Сравнивая последнее выражение с (2.6.3), видим, что

$$F_{\Delta}(s) = F(z)_{z=e^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-ns}.$$

Функция $F_{\Delta}(s)$ – 2π -периодическая вдоль прямой линии $R_e(s) = \sigma$, так как

$$F_{\Delta}(s + j2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-n(s+j2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-ns} e^{-2\pi n} = F_{\Delta}(s).$$

Рассмотрим связь между изображением на комплексной плоскости переменной $s = \sigma + j\omega$ и переменной $z = \zeta + j\eta$, связанной с s соотношением $z = e^s$.

С учетом этого, координаты произвольных точек $z_i = \xi_i + j\eta_i$ z -плоскости и $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ s -плоскости связаны между собою следующим образом:

$$\begin{aligned} z_i &= \xi_i + j\eta_i = e^{(\sigma_i + j\omega_i)}, \\ \xi_i &= e^{\sigma_i} \cos \omega_i, \\ \eta_i &= e^{\sigma_i} \sin \omega_i. \end{aligned} \quad (2.6.6a)$$

Представляя z в полярных координатах $z = re^{j \arg z}$, получим для точки z_i :

$$\begin{aligned} r_i = |z_i| &= \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2} = e^{\sigma_i}, \\ \arg z_i &= \omega_i + 2\pi k. \end{aligned} \quad (2.6.6b)$$

Из соотношений (2.6.6) легко видеть, что все точки отрезка мнимой оси s -плоскости от 0 до 2π переходят в z -плоскости в окружность радиуса $r_0 = 1$, так как при этом $\sigma_i = 0$, а $\arg z_i$ изменяется от 0 до 2π (рис. 2.14). При движении точки по мнимой оси $j\omega$ от $-j\infty$ до $+j\infty$ s -плоскости в z -плоскости она будет бесконечное число раз обходить указанную окружность.

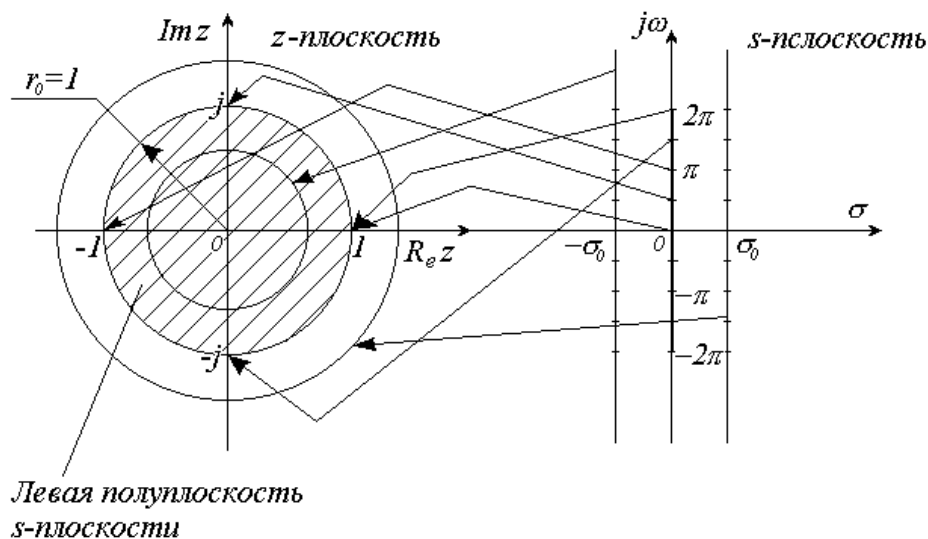


Рис. 2.14.
Трансформация прямых s -плоскости в окружности в z -плоскости

Рассмотрим теперь произвольную прямую s -плоскости $\sigma = \sigma_0$, параллельную оси $j\omega$. Тогда из соотношений (2.6.6) будет следовать, что при $\sigma_0 > 0$ все точки отрезка этой прямой от 0 до 2π переходят в z -плоскости в окружность радиуса $r_0 = e^{\sigma_0} > 1$. При $\sigma_0 < 0$ эти точки образуют окружность радиуса $r_0 = e^{-\sigma_0} < 1$. Точка, пробегающая в s -плоскости вдоль прямой от $\sigma_0 - j\infty$ до $\sigma_0 + j\infty$, будет бесконечное число раз вращаться по соответствующей окружности.

Множество точек полуплоскости, лежащей левее любой из указанных прямых s -плоскости, в z -плоскости окажутся внутри соответствующей окружности, так как их радиусы-векторы $r_i < r_0$.

Аналогично, правая полуплоскость трансформируется во внешнюю часть соответствующего круга z -плоскости.

Отметим также, что указание области сходимости, так же как и в Лапласовом преобразовании, для z -преобразования является обязательным, так как одному и тому же z -преобразованию, определенному в различных областях сходимости, соответствуют различные исходные последовательности. Если последовательность правосторонняя (левосторонняя) область сходимости распространяется за пределы (внутри) окружности с радиусом, соответствующим модулю крайнего внешнего (внутреннего) полюса. Напомним, что в s -плоскости – это область справа (слева) прямой, параллельной оси $j\omega$ (см.рис.2.13.б и в), если последовательность двусторонняя, область сходимости представляет собой кольцо (см.рис.2.13.а); в s -плоскости – это полоса.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.7.

Предположим, что $f[n]=1$ при $n=0$ и $f[n]=0$ во всех остальных случаях. Эта функция представляет собой аналог δ -функции Дирака в

дискретном случае – единичный импульс. Она обозначается также:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Выполняя ее z -преобразование согласно (2.6.3), получим:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1. \quad (2.6.7)$$

$F(z)$ сходится на всей z -плоскости.

Пример 2.8.

Пусть теперь $f[n] = u[n]$, т.е. представляет собой единичный скачок, правостороннюю последовательность:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (2.6.8)$$

Это преобразование сходится во всех точках z -плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > 1$, т.к. имеет одну единственную особую точку $z = 1$.

Напомним, что для функции единичного скачка не существует дискретного преобразования Фурье, так как в область сходимости (2.6.8) не входит единичная окружность.

Пример 2.9.

Найти z -преобразование экспоненциальной последовательности

$$f[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Подставляя $f[n]$ в (2.6.3), получим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad (2.6.9)$$

с областью сходимости при $|z| > a$, так как $F(z)$ имеет только одну особую точку $z = a$.

Пример 2.10.

Найти z -преобразование единичного скачка (левосторонней последовательности):

$$f[n] = \begin{cases} -u[n-1], & n \leq 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Имеем

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u[-n-1]z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (2.6.10)$$

Очевидно, что сумма в (2.6.10) сходится только для всех $|z| < 1$. Следовательно, $F(z)$ имеет область сходимости $|z| < 1$.

Обратим внимание, что z -преобразования (2.6.8) и (2.6.10) совпадают, но имеют совершенно различные области сходимости, потому что это – различные последовательности.

Пример 2.11.

Найти z -преобразование комплексной экспоненты

$$f[n] = \begin{cases} e^{j\omega n}, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Вычисляя z -преобразование, получим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{j\omega})^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{j\omega}} \quad (2.6.11)$$

с областью сходимости $|z| > 1$, так как единственной особой точкой является $z = e^{j\omega}$.

2.6.2. Обратное z -преобразование

Существуют два пути определения последовательности $f[n]$ по его z -преобразованию $F(z)$. Первый, формальный путь, это контурное интегрирование. Вторым – разложение на элементарные дроби с последующим использованием таблицы обратного z -преобразования.

Рассмотрим метод контурного интегрирования, который уже применялся при вычислении обратного преобразования Лапласа.

Умножим выражение (2.6.3) слева и справа на $\left(\frac{1}{2\pi j} z^{k-1}\right)$ и затем проинтегрируем результат по контуру в z -плоскости:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C z^{k-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n} dz.$$

Контур интегрирования C должен окружать все особые точки функции $F(z)$ и лежать в области сходимости, что позволяет изменить порядок суммирования и интегрирования в правой части. Получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \left(\frac{1}{2\pi j} \int_C z^{-n+k-1} dz \right).$$

Интеграл в круглых скобках правой части последнего выражения может быть определен в соответствии с теоремой Коши. А именно, интеграл равен единице только при $k = n$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C z^{-n+k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

и мы имеем окончательно:

$$f[k] = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz. \quad (2.6.12)$$

Контур интегрирования должен лежать в пределах области сходимости.

Согласно теореме о вычетах, интеграл (2.6.12) равен сумме вычетов подынтегральной функции $F(z)z^{k-1}$ относительно всех особых точек этой функции, лежащих *внутри* контура интегрирования. Для этого можно воспользоваться формулами (2.5.8) и (2.5.9), заменив при этом комплексную переменную s на комплексную переменную z .

Если преобразование представляет собой дробно-рациональную функцию, обратное преобразование лучше всего производить *методом разложения на элементарные дроби* с последующим почленным обращением с помощью таблицы преобразований.

Обращение осуществляется наиболее просто, если $F(z)$ может быть разложено по степеням z^{-1} .

Действительно, если, например, известны все простые (некратные) полюсы p_i и нули z_i функции $F(z)$, то ее можно представить как:

$$F(z) = \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}.$$

При $M < N$ это выражение приводится к виду:

$$F(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}}, \quad (2.6.13)$$

где $\alpha_i = (1 - p_i z^{-1})F(z) \Big|_{z=p_i}$.

С учетом (2.6.9) каждое слагаемое имеет обратное z -преобразование типа $\alpha_i (p_i)^n$. Тогда имеем:

$$f[n] = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i (p_i)^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.6.14)$$

В более сложных случаях целесообразно пользоваться таблицей преобразований.

*Таблица z -преобразований
для правосторонних последовательностей*

Последовательность $f[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$	z -преобразование $F(z) = \sum_{k=0}^N f[k]z^{-k}$
1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
k	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
k^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\binom{n}{k}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{z^{-n}}{(1-z^{-1})^{n+1}}$
a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
ka^k	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

2.6.3. Свойства

Свойства z -преобразования аналогичны свойствам преобразования Фурье. Отметим некоторые из них.

Свертка во времени. Свертка двух дискретных последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ имеет вид:

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X[Z]Y[Z].$$

Сдвиг во времени.

$$x[n-i] \leftrightarrow z^{-i} X(z) \quad (2.6.15)$$

с областью сходимости, совпадающей с областью сходимости $X(z)$.

Отсюда z -преобразование единичного импульса, называемого иногда оператором задержки, имеет вид: $\delta[n-i] \leftrightarrow z^{-i}$.

Вот почему обозначения z^{-1}, z^{-2} и т.д. часто используются в блок-схемах для обозначения задержек.

2.6.4. Применение к анализу линейных инвариантных во времени систем

Применение z -преобразований значительно облегчает решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, которыми описывается целый класс дискретных систем. Оно позволяет ввести понятие передаточной функции дискретной системы, анализ которой дает возможность судить о ее свойствах, вводить корректирующие элементы для изменения характеристик системы.

Линейное разностное уравнение, связывающее вход $x[n]$ и выход $y[n]$ системы можно записать в виде:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (2.6.16)$$

где a_n и b_n – действительные числа, определяющие параметры системы.

После выполнения z -преобразования (2.6.16) с учетом (2.6.15) при нулевых начальных условиях получим передаточную функцию системы

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad (2.6.17)$$

которую легко привести к виду (2.6.13).

Z -преобразование передаточной функции есть импульсная переходная функция дискретной системы $h[n]$, так как

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}.$$

Пример 2.12.

В качестве примера рассмотрим разностное уравнение (2.6.16) первого порядка

$$y[n] = x[n] + A y[n-1]$$

с нулевыми начальными условиями ($y(-1) = 0$).

Одностороннее z -преобразование имеет вид

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - Az^{-1}},$$

тогда:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - Az^{-1}}.$$

Воспользовавшись приведенной выше таблицей, получим

$$h[n] = A^n, \quad n \geq 0.$$

Очевидно, что система будет устойчива, если $A < 1$, т.к. в этом случае

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n < \infty.$$

2.7. Понижение и повышение числа отсчетов

Как будет видно из дальнейшего, алгоритмы спектрального вейвлет-анализа включают операции понижения (down-sampling) или повышения (up-sampling) числа отсчетов.

Иногда процесс понижения числа отсчетов называют децимацией (decimating – термин, который произошел из исторического факта уничтожения каждого десятого воина побежденной римлянами армии противника). Операцию повышения числа отсчетов называют в отечественной литературе *интерполяцией*. Если отсчеты взяты из некоторой непрерывной функции, то понижение или повышение числа отсчетов может привести к искажению исходной информации. Поэтому эти операции всегда сопровождаются фильтрацией.

2.7.1. Децимация

Понижение числа отсчетов (или прореживание) последовательности $x(n)$ на целое число N – это изъятие (отбрасывание) всех отсчетов, не кратных N . В результате получаем новую последовательность $y[n]$ такую, что

$$y[n] = x[nN].$$

Влияние такой операции на исходный сигнал легко проследить в Фурье-области. Из (2.4.4) и (2.4.5) имеем:

$$X(e^{j\omega}) = X\left(e^{\frac{j\omega\Delta_t}{4}}\right) = X_{\Delta_t}\left(\frac{\omega}{\Delta_t}\right) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{\Delta_t} - k \frac{2\pi}{\Delta_t}\right).$$

Следовательно:

$$Y(e^{j\omega}) = X_{N\Delta_t}\left(\frac{\omega}{N\Delta_t}\right) = \frac{1}{N\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{N\Delta_t} - k \frac{2\pi}{N\Delta_t}\right).$$

Заменяя в последнем выражении переменные $k = nN + l$, получим

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N\Delta_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} X\left(\frac{\omega}{N\Delta_t} - \frac{2\pi n}{\Delta_t} - \frac{2\pi l}{N\Delta_t}\right).$$

При $\Delta_t = 1$ $e^{2\pi n} = 1$ для всех n , поэтому получим окончательно:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((\omega - 2\pi k)/N). \quad (2.7.1)$$

Из последнего выражения вытекает, что спектр Фурье при децимации растягивается в N раз. Этот эффект иллюстрируется рис. 2.15 при $N = 3$.

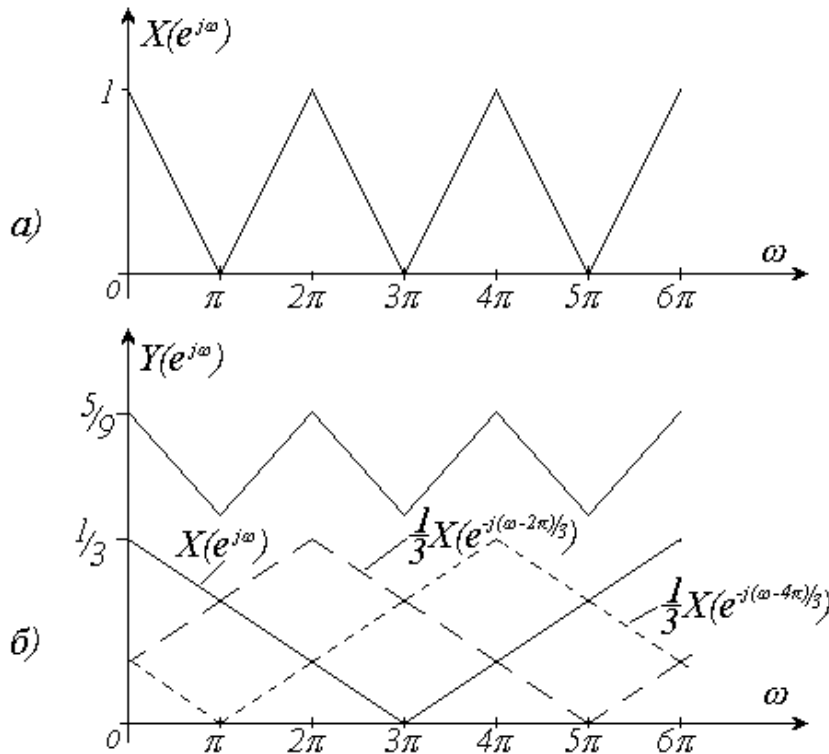


Рис. 2.15.

Иллюстрация наложения спектров при децимации:

а) исходный спектр дискретизированного колебания $x[n]$;

б) спектр после децимации $Y(e^{j\omega})$

Сравнивая его с рис. 2.5.1, видим, что эффект децимации аналогичен дискретизации сигнала с частотой, меньшей его максимальной частоты.

Именно поэтому происходит наложение спектров "прореженных" колебаний. Как уже отмечалось выше, такое наложение вызывает искажение

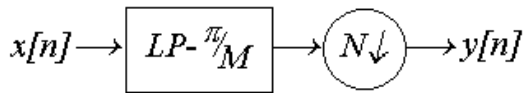


Рис. 2.16.

Иллюстрация процедуры прореживания отсчетов $x[n]$:

LP – низкочастотный фильтр;
 $N \downarrow$ – условное обозначение прореживания на N отсчетов

исходного сигнала. Чтобы его избежать, процедуре прореживания должна всегда предшествовать низкочастотная фильтрация с частотой отсечки $\frac{\pi}{N}$ и усилением $\frac{1}{N}$, как показано на рис. 2.16

Импульсный отклик идеального фильтра нижних частот с частотой отсечки π/N имеет вид:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/N}^{\pi/N} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}}.$$

Соотношение (2.7.1) полезно расширить на z -плоскость формальной заменой $e^{+j\omega}$ на z . Тогда, обозначая как прежде $W_N = e^{-j2\pi/N}$, получим:

$$Y(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(W_N^k z^{1/N}). \quad (2.7.2)$$

Это равенство и, соответственно, равенство (2.7.1) могут быть получены другим путем.

Рассмотрим последовательность $x'[n]$, значения которой равны $x[n]$ при значениях n , кратных N и нулю в остальных случаях. Ее спектр Фурье будет равен

$$X'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nN\Delta_t) e^{-j\omega n} = \frac{1}{N\Delta_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{N\Delta_t}\right).$$

Используя подстановку, аналогичную при выводе формулы (2.7.1), при $\Delta_t = 1$ получим:

$$X'(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right). \quad (2.7.3)$$

Или, переходя к z -преобразованию:

$$X'(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(W_N^k z). \quad (2.7.4)$$

Отметим, что последовательности $y[n]$ и $x'[n]$ отличаются наличием нулей между отсчетами $x[nN]$ последовательности $x'[n]$. Отбрасывание этих нулей – сжатие данных, т.е. переход к последовательности $y[n]$, означает, что в z -преобразовании (2.7.4) z необходимо заменить на $z^{1/N}$, получим при этом (2.7.2).

2.7.2. Интерполяция

Повышение числа отсчетов на целое число M – это добавление M нулевых отсчетов между соседними отсчетами исходной последовательности $x[n]$, или:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/M], & n = kM, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это ведет к уменьшению на M периода дискретизации Δ . Следовательно, в Фурье области будем иметь

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{jM\omega}) \quad (2.7.5)$$

или в z -плоскости

$$Y(z) = X(z^M). \quad (2.7.6)$$

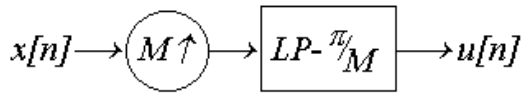


Рис. 2.17.

Процедура повышения числа отсчетов: LP – фильтр нижних частот с частотой отсечки π/M ; $M \uparrow$ – условное обозначение процедуры повышения числа отсчетов

Такое повышение числа отсчетов ведет к сужению в M раз спектра исходной последовательности.

Для того, чтобы повышение числа отсчетов не сопровождалось искажениями из-за M -кратного повторения на периоде 2π спектра

исходного сигнала, необходимо после этой операции применить идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки π/M , как показано на рис. 2.17. Импульсный отклик такого фильтра должен иметь усиление, равное единице

$$h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{M}}{\frac{\pi n}{M}}$$

Легко видеть, что $h[kM] = \delta[k]$. Следовательно, на выходе фильтра будем иметь

$$u[n] = y[n] * h[n],$$

и при $n = kM$

$$u[kM] = y[kM] = x[k],$$

т.е. идеальный фильтр, или идеальный интерполятор, пропускающий входные отсчеты без искажений, заполняя промежуточные недостающие отсчеты.

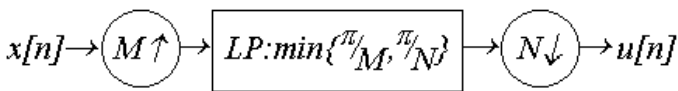


Рис. 2.18.

Изменение частоты отсчетов в рациональное число раз: LP – фильтр нижних частот с частотой отсечки, равной минимальной из двух π/M или π/N

Изменение частоты отсчетов в нецелое число раз (например M/N) получается путем последовательного использования операций

повышения и понижения частоты дискретизации с интерполяционным фильтром между ними, как показано на рис. 2.18.

Литература

1. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.
2. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Гос. изд. физ.-мат. л-ры, 1962. 236 с.
3. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Т. 1-2.
4. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 487 с.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 847 с.
6. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления. М.: Гос. изд. физ.-мат. л-ры., 1958. 296 с.
7. Vatterli M., Kovačević J. Wavelet and Subband Coding. Prentice Hall PTR, 1995. P.488.

Глава 3

Частотно-временной анализ

Классическое преобразование Фурье (непрерывное и дискретное) является весьма полезным математическим аппаратом для анализа и синтеза сигналов, однако иногда оказывается недостаточно эффективным при обработке сложных сигналов. Преобразование Фурье, например, не отличает сигналы из двух синусоид с разными частотами, один из которых представляет собой сумму синусоид, второй – последовательно следующие друг за другом синусоиды. В обоих случаях их спектр будет выглядеть как два пика на двух фиксированных частотах. Следовательно, преобразование Фурье в своем традиционном виде не приспособлено для анализа нестационарных сигналов в том числе локализованных на некотором временном интервале, так как теряется информация о временных характеристиках сигнала.

Следовательно, спектральный анализ реальных сигналов необходимо осуществлять как по частоте, так и во времени. Преимущества такого анализа очевидны. На практике чаще всего приходится иметь дело с нестационарными процессами, в которых информативным является сам факт изменения частотно-временных характеристик сигнала. Примерами таких сигналов являются спутниковые изображения Земли, рентгенограммы

внутренних органов, речь и музыка, турбулентные поля различной природы и т.д., т.е. фактически – весь объем информации, с которым приходится иметь дело в повседневной жизни. Для выполнения такого анализа требуются базисные функции, обладающие способностью выявлять в анализируемом сигнале как частотные, так и его временные характеристики. Другими словами, сами базисные функции должны обладать определенными свойствами, названными *частотно - временной локализацией*.

3.1. Частотно-временные свойства базисных функций

3.1.1. Плоскость частота-время

Для анализа и сравнения частотно-временных локализационных свойств различных базисов используют плоскость частота-время. Любая

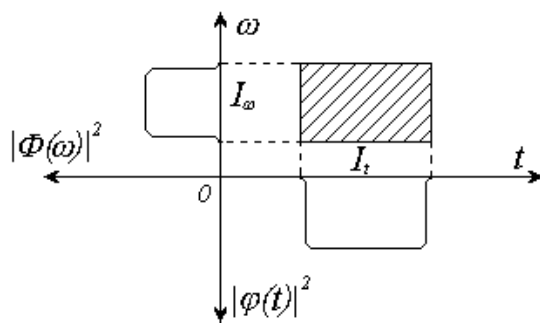


Рис. 3.1.

Характеристика частотно-временной локализации функции $\varphi(t)$

функция $\varphi(t)$ может характеризоваться интервалом I_t на временной оси и интервалом I_ω в Фурье области, в которых содержится 90% ее энергии, сосредоточенной около центра тяжести (В.3) функции $|\varphi(t)|^2$ и $|\Phi(\omega)|^2$. Тогда в этой плоскости функцию $\varphi(t)$ можно изобра-

зить в виде прямоугольника, как показано на рис. 3.1.

Очевидно, что смещение функции на τ от исходного состояния вызовет перемещение прямоугольника параллельно оси t . Модуляция этой

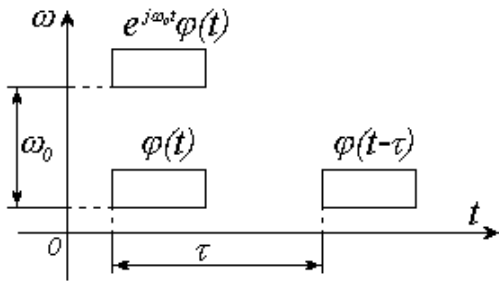


Рис. 3.2.

Влияние смещения на τ и модуляции $e^{j\omega_0 t}$ функции $\varphi(t)$ на ее положение на плоскости время-частота

функции комплексной экспонентой $e^{j\omega_0 t}$ сдвигает прямоугольник параллельно оси ω (рис. 3.2.).

Масштабирование функции (ее сжатие или растяжение) приводит к развороту прямоугольника. Действительно, получим новую функцию $\varphi_1(t)$ масштабированием функции $\varphi(t)$ на коэффициент a :

$$\varphi_1(t) = \varphi(at).$$

Энергия такой функции

$$E_{\varphi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(at)|^2 dt = \frac{1}{a} E_{\varphi}.$$

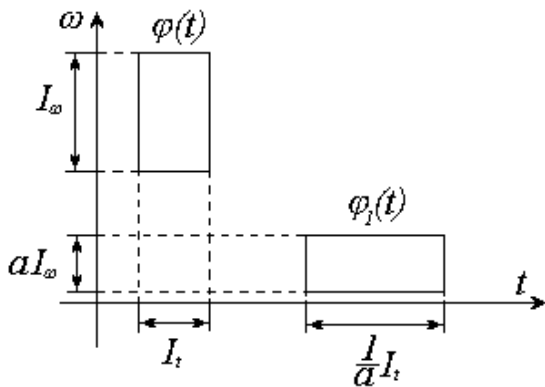


Рис. 3.3.

Положение функции $\varphi(t)$ на плоскости время-частота при масштабировании на коэффициент $a < 1$: $\varphi_1(t) = \varphi(at)$

Следовательно, ширина

функции $\varphi_1(t)$ равна $I_t' = \left(\frac{1}{a}\right) I_t$.

В соответствии со свойством масштабирования Фурье-преобразования (2.2.5) $I_{\omega} = a I_{\omega}$. Влияние масштабирования на положение функции в плоскости время-частота показано на рис. 3.3.

В качестве примеров функций, иллюстрирующих эффективность их представления в плоскости время-частота, рассмотрим δ -функцию Дирака и Фурье-базис. Известно, что δ -функция является идеальным базисом для временного анализа сигналов. Результатом такого анализа являются отсчеты, которые можно

рассматривать как временной спектр сигнала. На плоскости время-частота δ -функция $\delta(t - k\tau_0)$ выглядит как показано на рис. 3.4а, т.е. эта функция

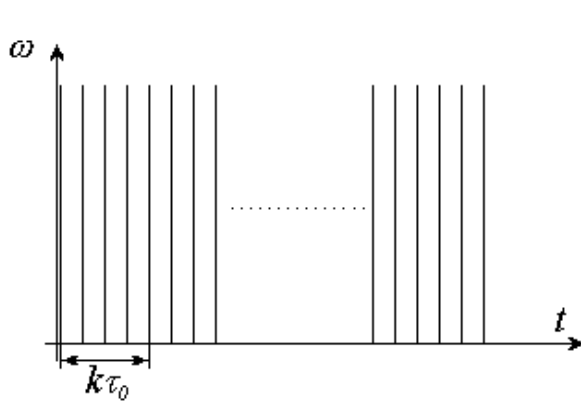


Рис. 3.4а.

δ -функция Дирака на плоскости время-частота

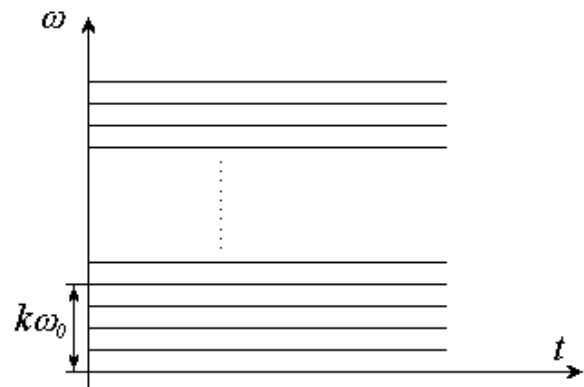


Рис. 3.4б.

Базисные функции $e^{jk\omega_0 t}$ Фурье-анализа на плоскости время-частота

обладает свойством хорошей временной локализации, но плохой локализацией в спектральной области (она имеет равномерный спектр на всех частотах). Базисные функции $e^{j\omega t}$ Фурье-анализа, наоборот, обладают хорошей частотной локализацией в то время, как во временной области они имеют бесконечную протяженность (см. рис. 3.4б).

3.1.2. Ограниченное во времени Фурье-преобразование

Локальность преобразования Фурье достигается путем ограничения анализируемого сигнала с помощью движущегося окна. Результатом такого анализа будет функция двух переменных – положения окна τ и частоты ω :

$$F(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.1.1)$$

Иначе говоря, спектральный анализ в окне данных производится вычислением скалярного произведения сигнала и базисной функции

$$g_{\tau}(\omega, t) = w(t - \tau)e^{j\omega t},$$

т.е.

$$F(\omega, \tau) = \langle g_{\tau}(\omega, t), f(t) \rangle$$

Не останавливаясь здесь на выборе окон $w(t)$ для проведения эффективного оконного Фурье-анализа, отметим, что таким образом в спектральный анализ, кроме частоты, вводится еще один параметр – время.

Как будет видно из дальнейшего, для достижения хорошей временной

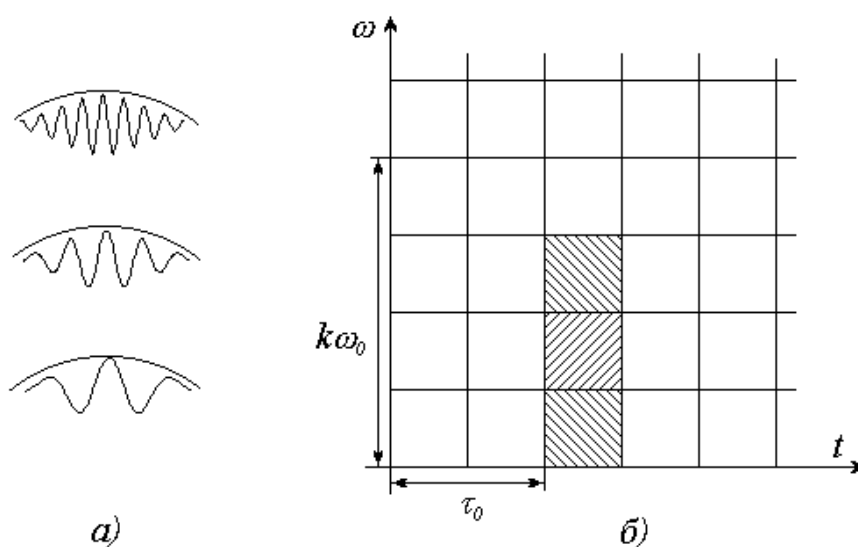


Рис. 3.5.

Ограниченное во времени преобразование Фурье на плоскости время-частота:

а) пример базисных функций преобразования

$$g_{\tau}(\omega, t) = e^{jk\omega_0 t} w(t - \tau_0) \text{ при сдвиге } \tau_0$$

и $k = 1, 2, 3$ (вещественная часть);

б) изображение функций в плоскости время-частота (заштрихованные прямоугольники)

локализации преобразования (3.1.1) в качестве окна необходимо выбирать функцию Гаусса. Такое Фурье-преобразование носит название преобразования Габора.

Ограниченное во времени преобразование Фурье на плоскости время-частота показано на рис. 3.5.

Как видно из этого рисунка, при сдвиге окна или изменении частоты модуляции ширина прямоугольника сохраняется неизменной. Это вызвано тем обстоятельством, что при всех этих операциях ширина самого окна не изменяется.

3.1.3. Принцип неопределенности

Как следует из свойства масштабирования Фурье-преобразования (2.2.5), ширина базисной функции во временной и частотной областях взаимосвязаны: расширение функции во временной области ведет к ее сужению в частотной и наоборот.

Закономерность, связывающая две эти величины, называется *принципом неопределенности*. В качестве меры концентрации энергии любой функции по времени и по частоте принимают произведение вторых центральных моментов функций $\varphi(t)$ и ее спектра $\Phi(\omega)$. Предположим, что $\varphi(t)$ и $\Phi(\omega)$ уже центрированные функции (если это не так, то путем сдвига и модуляции $\varphi(t)$ их можно отцентрировать).

Тогда ширины функций можно определить как

$$\begin{aligned}\mu_t^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\varphi(t)|^2 dt, \\ \mu_\omega^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\Phi(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

Принцип неопределенности утверждает, что, если $\varphi(t)$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{\sqrt{t}}$ при $t \rightarrow \pm\infty$, то

$$\mu_t^2 \mu_\omega^2 \geq \frac{\pi}{2}, \quad (3.1.3a)$$

где равенство справедливо только, если

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}, \quad (3.1.3b)$$

т.е. является функцией Гаусса.

Для доказательства предположим, что $\|\varphi(t)\| = 1$, и рассмотрим интеграл от произведения $t\varphi(t)\varphi'(t)$. Используя неравенство Коши-Шварца (1.25в), получим

$$\left| \int_R t\varphi(t)\varphi'(t) dt \right|^2 \leq \int_R |t\varphi(t)|^2 dt \int_R |\varphi'(t)|^2 dt \quad (3.1.4)$$

Первый интеграл справа в последнем выражении равен, очевидно, μ_t^2 . Для вычисления второго интеграла вспомним, что преобразование Фурье производной равно $j\omega\Phi(\omega)$. Тогда, в соответствии с формулой Парсеваля (2.2.14), имеем

$$\int_R |\varphi'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R \omega^2 |\Phi(\omega)|^2 d\omega = \mu_\omega^2.$$

Интеграл слева в выражении (3.1.4) вычисляется путем интегрирования по частям

$$\int_R t\varphi(t)\varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_R (t\varphi^2(t))'_t dt = \frac{1}{2} t\varphi^2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_R \varphi^2(t) dt.$$

При соблюдении условий затухания, налагаемых на функцию $\varphi(t)$, первое слагаемое равно нулю и сам интеграл, таким образом, равен $-\frac{1}{2}$.

Тогда из (3.1.4) имеем $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\pi} \mu_t^2 \mu_\omega^2$, что после преобразования дает

(3.1.3а).

Нетрудно видеть, что равенство в (3.1.4) возможно при $\varphi'(t) = at\varphi(t)$.

Отсюда следует, что $\varphi(t) = ce^{at^2/2}$. Следовательно, (3.1.3б) справедли-

во при $c = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ и $a = -2\alpha$.

3.2. Базисные функции частотно-временного анализа

Итак, частотно-временной анализ предназначен для выявления локальных частотно-временных возмущений сигнала. Вследствие кратковременности таких возмущений, сам сигнал может рассматриваться как заданный в L_2 , т.е. для одномерных сигналов – на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ с нормой

$$\|f(t)\|^2 < \infty.$$

Следовательно, базисные функции, которые получили название вейвлетов, также должны принадлежать L_2 и быстро убывать при $|t| \rightarrow \infty$. Тогда, чтобы перекрыть такими базисными функциями все возможные временные положения сигнала, необходимо, чтобы базисные функции представляли собой набор смещенных во времени функций. Удобнее всего, если этот набор образуется из одной и той же "материнской" функции $\psi(t)$ (прототипа), сдвинутой по оси t , т.е. $\{\psi(t-b)\}$. Чтобы обеспечить частотный анализ, базисная функция должна иметь еще один аргумент – масштабный коэффициент, который является аналогом частоты в Фурье-анализе. Тогда базисные функции для частотно-временного анализа будут

иметь вид

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in R,$$

где масштабный коэффициент a введен как делитель t , причем масштабированию подвергается также и сдвиг b . Это позволяет сохранить относительную "плотность" расположения базисных функций по оси t при расширении или сжатии самой функции и при $\frac{b}{a} = \Delta = \mathbf{const}$ (Рис. 3.6).

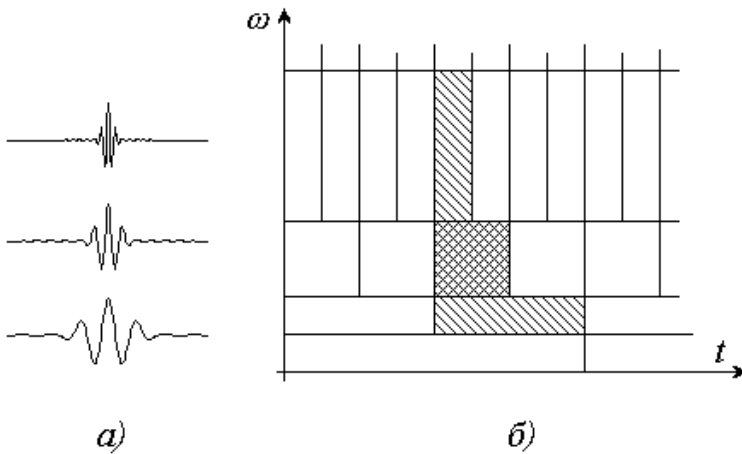


Рис. 3.6.

Вейвлет-преобразование на плоскости время-частота
 а) пример базисных функций вейвлет при различных масштабах: $(a - 2^k, k = 0, 1, 2)$;
 б) изображение функций в плоскости время-частота

Таким образом, базисные функции для частотно-временного анализа должны обладать следующими свойствами.

Ограниченность,

т.е. принадлежность L_2

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

Локализация. Ба-

зисные функции вейв-

лет-анализа, в отличие от преобразования Фурье, должны быть локализованы, т.е. определены на конечном интервале как во временной, так и в частотной областях. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq C \cdot (1 + |t|)^{-1-\varepsilon} \\ \text{и} \\ |\Psi(\omega)| &\leq C \cdot (1 + |\omega|)^{-1-\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

при $\varepsilon > 0$.

Нулевое среднее. Равенство нулю нулевого момента

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.2.2)$$

или, что иногда необходимо – равенство нулю момента m -го порядка

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0.$$

Это – вейвлеты m -го порядка, позволяющие анализировать более тонкую структуру сигнала, подавляя медленно изменяющиеся его составляющие.

3.3. Непрерывное вейвлет - преобразование

Введем базис, отвечающий перечисленным выше условиям

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (3.3.1)$$

где множитель $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ необходим для сохранения нормы

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|.$$

Пусть $a, b \in R$, т.е. принимают произвольные вещественные значения, тогда пара преобразований, которое носит название непрерывного вейвлет - преобразования, обозначаемое как CWT – continuous wavelet transform, будет иметь вид:

$$CWT_f(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (3.3.2a)$$

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db, \quad (3.3.2б)$$

где нормализующий коэффициент

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (3.3.3)$$

Интегрированием (3.3.3) по частям можно убедиться в том, что это условие всегда выполняется, если $\Psi(\omega) = 0$ при $\omega = 0$ и, следовательно, равен нулю по крайней мере, нулевой момент функции $\psi(t)$, т.е. выполняется условие (3.2.2).

Сравнивая формулы (3.3.2) с соответствующими выражениями для непрерывного преобразования Фурье (2.2.1), видим, что роль функции $e^{j\omega t}$ здесь играет функция $\psi_{a,b}(t)$, а C_ψ аналогичен коэффициенту 2π , причем роль частоты играет масштабный множитель $\frac{1}{a}$. Однако, также как в ограниченном во времени преобразовании Фурье, базисная функция зависит еще от параметра сдвига b .

Для упрощения доказательства справедливости (3.3.2), предположим, что $\psi(t) \in L_1$, $f(t) \in L_1 \cap L_2$, а также $F(\omega) \in L_1$. Тогда, учитывая, что $\Psi_{a,b}(\omega) = \sqrt{a} \cdot e^{-jb\omega} \Psi(a\omega)$, в соответствии с формулой Парсеваля (2.2.13) мы получим из (3.3.2а)

$$\begin{aligned} CWT_f(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,b}^*(\omega) F(\omega) d\omega = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) e^{jb\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Далее рассмотрим в (3.3.2б) отдельно интеграл по переменной b , ко-

торый будет функцией a , т.е. $I(a)$:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} CWT_f(a, b) \psi_{a, b}(t) db,$$

и, подставляя сюда (3.3.4), получим

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) e^{j\omega b} d\omega \right) \psi_{a, b}(t) db = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a, b}(t) e^{j\omega b} db. \end{aligned}$$

Второй интеграл после подставки $x = \frac{(t-b)}{a}$ равен

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a, b}(t) e^{j\omega b} db &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{j\omega b} db = \\ &= \sqrt{a} \cdot e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-j\omega a x} dx = \sqrt{a} \cdot e^{j\omega t} \Psi(a\omega). \end{aligned}$$

Тогда

$$I(a) = \frac{|a|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(a\omega)|^2 F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Проинтегрируем последнее выражение по a (см. (3.3.2б)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(a) \frac{da}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} d\omega da.$$

Благодаря ограничениям, наложенным на $f(t)$ и $\psi(t)$, мы можем изменить порядок интегрирования. Обозначив $a' = a\omega$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} da = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a')|^2}{|a'|} da' = C_{\Psi},$$

т.е. C_{Ψ} не зависит от ω .

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(a) \frac{da}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \cdot C_{\psi} d\omega = C_{\psi} f(t).$$

Отсюда вытекает справедливость (3.3.2б) и необходимость ограничения (3.3.3).

Приведем примеры материнских вейвлетов, формирующих базис (3.3.1). Наибольшей популярностью здесь, пожалуй, пользуются функции на основе производных функции Гаусса:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}. \quad (3.3.5)$$

Это вызвано тем обстоятельством, что, как уже было доказано выше, функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях.

При $m = 1$ получаем вейвлет (рис. 3.7, а), который называют WAVE – вейвлет с равным нулю нулевым моментом. При $m = 2$ получаем вейвлет (рис. 3.7, б), называемый “мексиканская шляпа” – МНАТ – вейвлет:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (3.3.6)$$

у него нулевой и первый моменты равны нулю. Спектр Фурье этого вейвлета уже, поэтому он имеет лучшее разрешение.

Функция Гаусса образует также DOG-вейвлет – разность двух Гауссиан:

$$\psi(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} - 0,5 \exp\left\{-\frac{t^2}{8}\right\}.$$

Широкое распространение получил вейвлет Морле (Morlet) (рис. 3.7, в),

$$\psi(t) = \exp\{j\omega_0 t\} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}. \quad (3.3.7)$$

где ω_0 – доминантная частота, позволяющая варьировать избирательностью базиса. Этот вейвлет отличается от других, прежде всего, тем, что он является комплексной функцией, у которой вещественные и мнимые части – модулированные гауссианой гармоники.

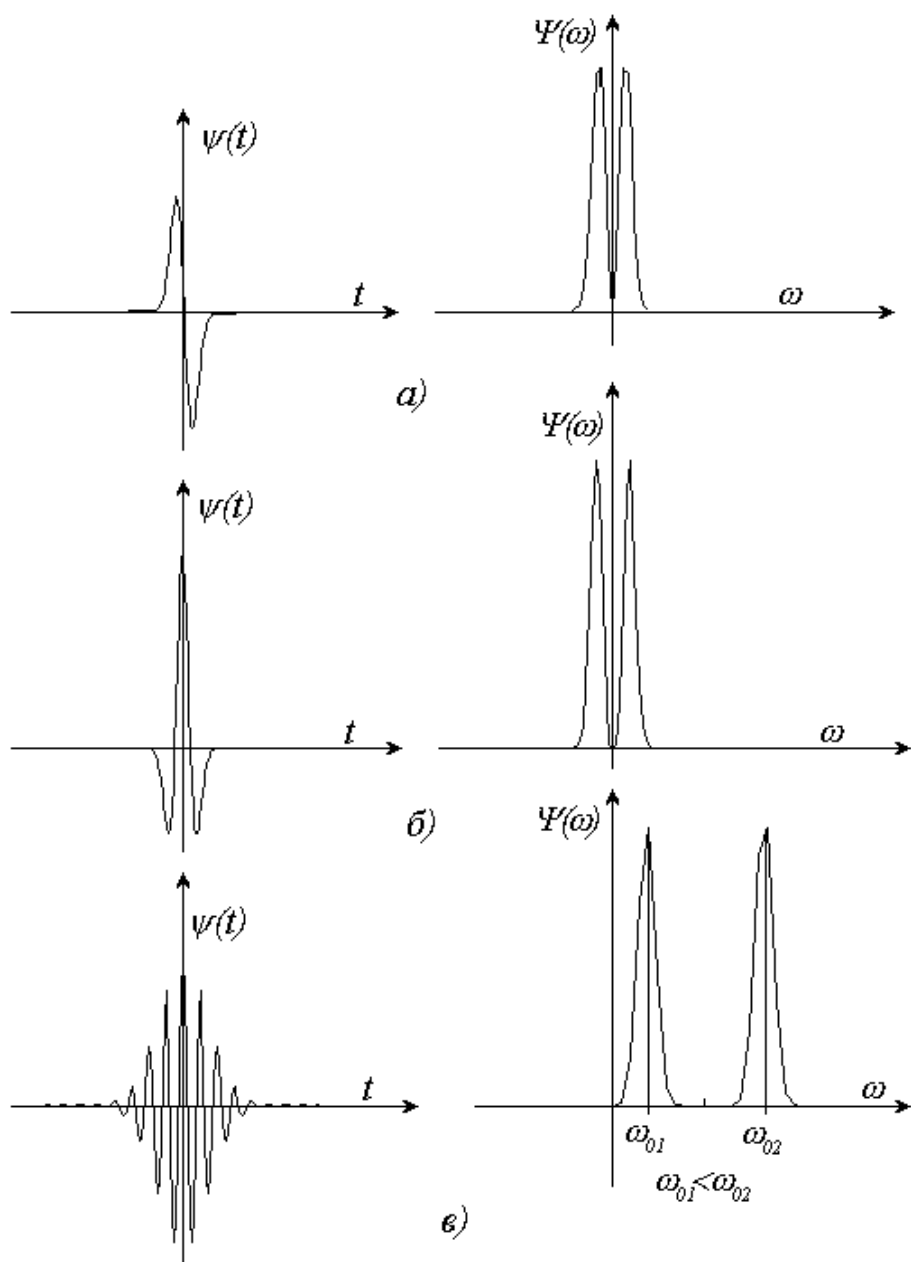


Рис. 3.7.
 Примеры базисных функций вейвлет:
 а) WAVE-вейвлет;
 б) МХАТ-вейвлет (мексиканская шляпа);
 в) вейвлет Морле

3.4. Свойства непрерывного вейвлет-преобразования

Линейность. Линейность непрерывного вейвлет-преобразования следует из линейности скалярного произведения (3.3.2а).

Пусть функции $f(t)$ и $g(t) \in L_2$. Тогда,

$$CWT_{f,g}(a,b) = CWT_f(a,b) + CWT_g(a,b). \quad (3.4.1)$$

Сдвиг. Рассмотрим непрерывное преобразование вейвлет-функции $f_1(t) = f(t - b')$. Тогда

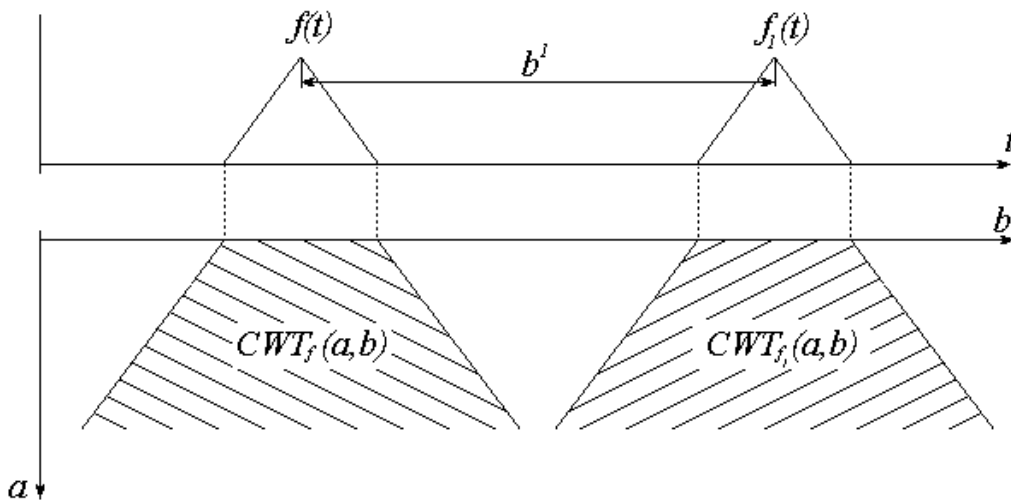


Рис.3.8.

Иллюстрация свойства сдвига непрерывного вейвлет-преобразования: сдвиг функции во временной области ведет к сдвигу ее вейвлет-образа

$$\begin{aligned} CWT_{f_1}(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - b') \psi\left(\frac{t - b}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \psi\left(\frac{t_1 + b' - b}{a}\right) dt' = CWT_f(a, b - b'), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

т.е. вейвлет - образ функции также сдвигается на b' . Это иллюстрируется на рис. 3.8.

Масштабирование. Рассмотрим, далее, непрерывное преобразование

вейвлет-функции $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(t/c)$, где множитель $\frac{1}{\sqrt{c}}$ введен для сохранения энергии.

Имеем:

$$\begin{aligned} CWT_{f_1}(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a| \cdot c}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f\left(\frac{t}{c}\right) dt = \\ &= \sqrt{\frac{c}{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{ct_1-b}{a}\right) f(t_1) dt_1 = CWT_f\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right), \end{aligned}$$

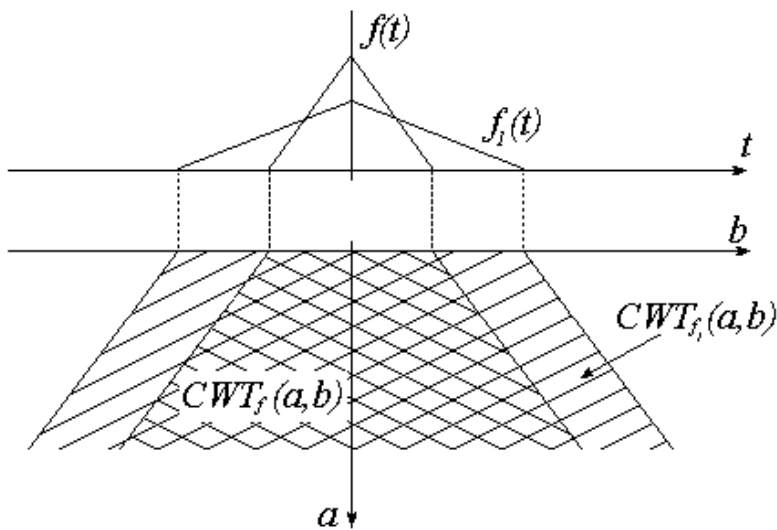


Рис. 3.9.

Иллюстрация свойства масштабирования при $c = 2$
(Преобразование вейвлет-функции $f_1(t)$ $CWT_{f_1}(a,b)$
"перекрывают" $CWT_f(a,b)$)

т.е. вейвлет-преобразование также подвергается масштабному преобразованию. Это означает, что, если функция расширяется во временной области, то в масштабно-временной (частотно-временной) плоскости $[a,b]$ она также расширяется (рис. 3.9).

Аналог теоремы

Парсеваля. Для каж-

дой функции $f(t) \in L_2$ и ее непрерывного преобразования вейвлет справедливо следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2}. \quad (3.4.3)$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2}.$$

В соответствии с (3.3.4) можем записать:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(a\omega) F(\omega) e^{jb\omega} d\omega \right|^2 db \right) \frac{da}{a^2}. \end{aligned}$$

Обозначим $P(\omega) = \Psi^*(a\omega)F(\omega)$.

Тогда, дважды воспользовавшись теоремой Парсеваля (2.2.14), получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{jb\omega} d\omega \right|^2 db \right) \frac{da}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |P(b)|^2 db \right) \frac{da}{|a|} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega)|^2 d\omega \right) \frac{da}{|a|}. \end{aligned}$$

С учетом введенного обозначения для $P(\omega)$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi^*(a\omega)|^2 |F(\omega)|^2 d\omega \right) \frac{da}{|a|} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} da. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен C_ψ . Снова применяя теорему Парсеваля, с учетом обозначения для I получим окончательно для (3.4.3):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |CWT_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \cdot \frac{C_\psi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

что доказывает (3.4.3).

Свойства локальности. Локальные свойства базиса (3.3.1) во временной и частотной областях характеризуются концентрацией энергии базисной функции $\psi_{a,b}(t)$ во временной и частотной областях. Поэтому количественно это свойство можно определить величиной вторых центральных моментов функций $|\psi_{a,b}(t)|^2$ и $|\psi(\omega)|^2$, квадратный корень из которых характеризует область наибольшей концентрации энергии этих функций.

Обозначим через t_0 и Δ_t^2 , соответственно, величины первого и второго центральных моментов функции $|\psi(t)|^2$, т.е.

$$t_0 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt,$$

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt \right].$$

Тогда первый момент (центр тяжести, среднее значение функции) $|\psi_{a,b}(t)|^2$ будет равен

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{a\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt.$$

После замены переменной на $t_1 = \frac{t-b}{a}$ и преобразований, получим:

$$\bar{t}_1 = \frac{a}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t_1 |\psi(t_1)|^2 dt_1 + b \frac{1}{\|\psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t_1)|^2 dt_1 = b + at_0. \quad (3.4.4)$$

Отсюда следует, что центр тяжести базисной функции $\psi_{a,b}(t)$ изменяется с масштабом a : чем шире базисная функция (больше a), тем больше расстояние между центрами базисных функций.

Определим второй центральный момент функции $|\psi_{a,b}(t)|^2$. Имеем

(В.4):

$$\begin{aligned} \Delta_\psi^2 &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \left\{ \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} (t-b-at_o)^2 \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \left\{ a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t-b}{a}-t_o\right)^2 \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $t_1 = \frac{t-b}{a}$:

$$\Delta_\psi^2 = \frac{a^2}{\|\psi\|^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t_1-t_o)^2 |\psi(t_1)|^2 dt_1 \right\} = a^2 \Delta_t^2.$$

Тогда ширина (иногда говорят – радиус) функции $\psi_{a,b}(t)$ во временной области будет равен

$$R_\psi = a\Delta_t. \quad (3.4.5)$$

Следовательно, функция $\psi_{a,b}(t)$ занимает "окно" во временной области:

$$Win_t = [b+at_o - a\Delta_t, b+at_o + a\Delta_t]. \quad (3.4.6)$$

Это "окно" шириной $2a\Delta_t$ будет расположено около точки $t_w = b+at_o$. Последнее означает, с одной стороны, что значение анализируемой функции $f(t)$, взятое в некоторой точке t_o , влияет на значение коэффициента $CWT_f(a,b)$ с ростом масштаба во все большем временном диапазоне, образуя в плоскости (a,b) так называемый угол влияния (рис. 3.10, а). С другой стороны, величина коэффициента $CWT_f(a,b)$ в точке (a_0,b_0) будет определяться значениями функции $f(t)$ в окрестности точки b_0 , определяемой тем же углом влияния (3.10, б).

Из рис. 3.10, в частности, следует важный вывод о том, что

мелкомасштабные вариации функции $f(t)$ будут проявляться в вейвлет-области при малых значениях масштаба a , в то время как при больших значениях масштаба они будут сглаживаться, но при этом будут проявляться крупномасштабные изменения функции $f(t)$.

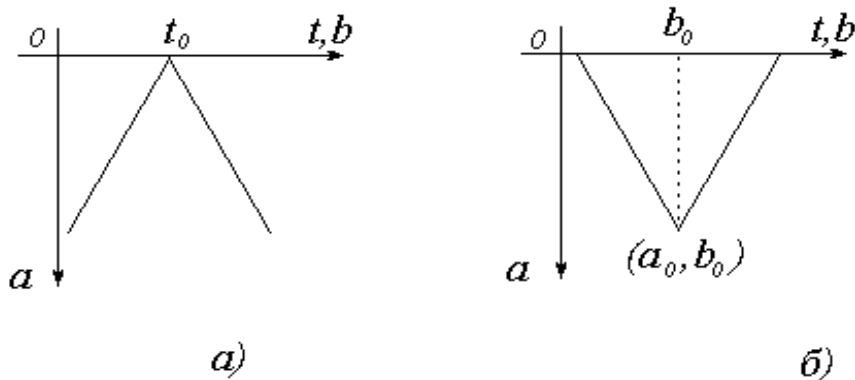


Рис. 3.10.

Угол влияния на величины коэффициентов $CWT_f(a, b)$ с ростом масштаба - а) и на величину коэффициента $CWT_f(a_0, b_0)$ значений функции $f(t)$ в окрестности точки b_0 - б).

Определим далее локальные свойства вейвлета $\psi(t)$ в частотной области. Обозначим через ω_0 и Δ_ω^2 величины первого и второго центральных моментов функции $\Psi(\omega)$. Как было отмечено выше, благодаря равенству нулю первых моментов вейвлета $\psi(t)$, функция $\Psi(\omega)$ описывает полосовой фильтр с центральной частотой, равной ω_0 . Если ввести функцию $\eta(\omega) = \Psi(\omega - \omega_0)$, имеющую нулевое среднее значение и ширину Δ_ω , то вейвлет-преобразование в Фурье-области аналогично (3.3.4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 CWT_f(a, b) &= \\
 &= \frac{a\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{jb\omega\} \eta * \left(a \left(\omega - \frac{\omega_0}{a} \right) \right) F(\omega) d\omega.
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Оконная функция $\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega_0}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega_0) = \Psi(a\omega)$ имеет ширину

$\frac{\omega_0}{a}$. Поэтому, с точностью до константы и фазового сдвига $e^{jb\omega}$, вейвлет-преобразование (3.3.4) дает локальную информацию о спектре анализируемой функции $F(\omega)$ в полосе $\pm \frac{\Delta\omega}{a}$ с центром в точке $\frac{\omega_0}{a}$, т.е. в окне

$$Win_\omega = \left[\frac{\omega_0}{a} - \frac{\Delta\omega}{a}, \frac{\omega_0}{a} + \frac{\Delta\omega}{a} \right].$$

При этом отношение центральной частоты $\frac{\omega_0}{a}$ к ширине окна $2\frac{\Delta\omega}{a}$,

равное $\frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$, остается постоянным

при любых значениях a . Частотный анализ при постоянном значении $\frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$

носит название анализа с постоянной добротностью избирательной системы – анализ с постоянным Q . Этим

вейвлет-анализ отличается от обычного Фурье-анализа или Фурье-анализа на ограниченном временном интервале. Площадь частотно-

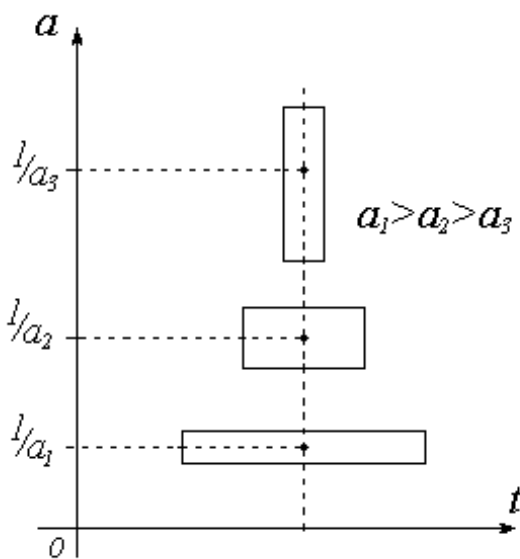


Рис. 3.11.

Функции вейвлет-анализа на плоскости время-частота

временного окна вейвлет-анализа будет равна $2a\Delta_t \frac{2\Delta\omega}{a} = 4\Delta_t\Delta\omega$, т.е. она

будет постоянной при всех значениях масштаба a . Причем, при увеличении масштаба (смещение в низкочастотный диапазон анализа) окно будет расширяться по временной шкале в плоскости время-частота (рис. 3.11) и сужаться по частотной шкале. При уменьшении масштаба – наоборот.

3.5. Дискретное вейвлет-преобразование

Представление функции $f(t)$ через ее непрерывное вейвлет-преобразование является избыточным. В задачах обработки информации, встречающихся на практике, сигнал, во-первых, имеет ограниченную полосу и, во-вторых, допускаются те или иные погрешности в получаемых результатах. Поэтому используют дискретное представление непрерывных сигналов, при которых параметры преобразования, в данном случае a и b , приобретают дискретные значения. Вейвлет-преобразование, при котором значения a и b дискретны, называют дискретным вейвлет-преобразованием (DWT - Discrete Wavelet Transform).

3.5.1. Дискретизация масштаба

Рассмотрим сначала случай дискретного масштаба a и положим $a = a_m = a_0^m$ ($a_0 > 1$). Это равноценно разбиению частотной оси на поддиапазоны (частотные полосы). Предположим, что $\omega_0 = (a_0 + 1)\Delta_\omega$ (это можно сделать всегда, умножив функцию ψ на некоторый модуляционный множитель $e^{j\alpha t}\psi(t)$ (см. (2.2.4б))). Тогда частотное окно будет равно

$$\left(\frac{\omega_0}{a_m} - \frac{\Delta_\omega}{a_m}, \frac{\omega_0}{a_m} + \frac{\Delta_\omega}{a_m} \right) = \left(a_0^{-m+1}\Delta_\omega, a_0^{-m+2}\Delta_\omega \right),$$

а центральная частота m -го вейвлета:

$$\frac{\omega_0}{a_m} = (a_0 + 1)a_0^{-m}\Delta_\omega.$$

Базисом для DWT является функция, полученная из (3.3.1) при $a = a_0^m$:

$$\psi_{m,b}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}(t-b)). \quad (3.5.1.)$$

Если справедливо (3.3.3) и если $\psi(t)$ достаточно быстро затухает, то любая функция из L_2 может быть представлена в виде дискретной по $m \in Z$ последовательности

$$DWT_f(m,b) = \langle f, \psi_{m,b} \rangle = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-m}t - b) dt. \quad (3.5.2.)$$

Для восстановления $f(t)$ по дискретным значениям (3.5.2.) на базис $\psi_{m,b}(t)$ налагаются дополнительные ограничения, а именно, образ Фурье вейвлета $\psi_{m,b}(t)$ должен удовлетворять соотношению

$$A \leq \sum_{m \in Z} |\Psi(a_0^m \omega)|^2 \leq B, \quad (3.5.3.)$$

где константы A и B такие, что $0 < A \leq B < \infty$.

Условие (3.5.3.) в терминах радиотехники имеет довольно прозрачное толкование. Действительно, так как при каждом значении масштаба a_0^m вейвлет представляет собой полосовой фильтр, то набор (сумма) этих фильтров (блок фильтров) является некоторым устройством с неравномерной частотной характеристикой, определяемой константами A и B (рис. 3.12). Сигнал, например звуковой, на выходе такого устройства при сильной неравномерности частотной характеристики претерпевает существенные искажения. Поэтому для его восстановления принимают специальные меры, в частности, устанавливают фильтр, компенсирующий искажения частотной характеристики. В вейвлет-преобразовании таким фильтром является дуальный (или двойственный) вейвлет $\tilde{\psi}(t)$, Фурье-образ которого имеет вид:

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \frac{\Psi(\omega)}{\sum_n |\Psi(a_0^n \omega)|^2}. \quad (3.5.4.)$$

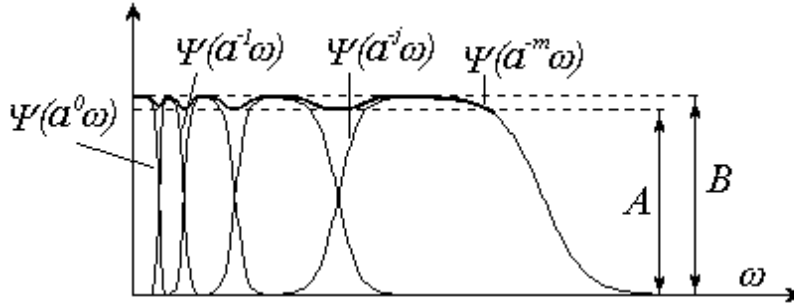


Рис. 3.12.

Частотная характеристика набора полосовых фильтров, образованных вейвлетами $\Psi(a^m \omega)$ с разным масштабом при $m = 0, -1, -2, -3, -4$

Покажем, что с помощью такого вейвлета по коэффициентам DWT полностью восстанавливается сигнал. Действительно, используя соотношение Парсеваля (2.2.13) и формулу (3.5.4.), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} DWT_f(m, b) \left\{ a_0^{-\frac{m}{2}} \tilde{\Psi}(a_0^{-m}(t-b)) \right\} db = \\ & = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} DWT_f(m, \omega) \tilde{\Psi}(a_0^m \omega) e^{it\omega} d\omega = \\ & = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \Psi^*(a_0^m \omega) \tilde{\Psi}(a_0^m \omega) e^{it\omega} d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{it\omega} d\omega = f(t). \end{aligned}$$

Из (3.5.4.) и (3.5.3.) можно показать, что

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Psi}(a_0^m \omega)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

3.5.2. Дискретизация масштаба и сдвига. Фреймы

В этом случае полагают дискретными величины a и b , т.е. $a = a_m = a_0^m$ и $b = kb_0 a_0^m$. Частотное окно для анализа сохраняется прежним. Ширина временного окна (3.4.6.) равна $2a_0^m \Delta_t$, а среднее значение $(t_0 + kb_0)a_0^m$ изменяется дискретно пропорционально m -ой степени a_0 -масштабу вейвлета. Чем уже функция ψ , т.е. меньше величина a_0^m , тем меньше (на ту же величину) шаг сдвига этой функции.

Базисными функциями для дискретного вейвлет-преобразования будут функции, получаемые из (3.3.1) при $a = a_0^i$ и $b = kb_0 a_0^i$

$$\psi_{ik}(t) = a_0^{-i/2} \psi\left(\frac{t - a_0^i k t_0}{a_0^i}\right) = a_0^{-i/2} \psi(a_0^{-i} t - kb_0). \quad (3.5.5)$$

Коэффициенты разложения любой функции из L_2 могут быть получены как

$$\begin{aligned} DWT_f(i, k) &= \langle f(t), \psi_{ik}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ik}(t) dt = a_0^{-i/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-i} t - kb_0) dt. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Выражение (3.5.6) является дискретным вейвлет-преобразованием функции $f(t)$ – DWT .

Чтобы обратное преобразование во временную область было справедливым, должно выполняться следующее условие:

$$A \|f\|^2 < \sum_{i,k} |\langle f, \psi_{ik} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.5.7)$$

для всех $f \in L_2(R)$, если константы A и B такие, что $0 < A \leq B < \infty$.

В этом случае формула для восстановления функции $f(t)$ по коэффициентам $DWT_f(i, k)$ будет иметь вид

$$f(t) = \frac{2}{A+B} \sum_{i,k} DWT_f(i,k) \psi_{ik}(t) + R, \quad (3.5.8)$$

где ошибку восстановления R можно оценить как $\|R\| \leq O\left(\frac{B}{A}-1\right)\|f\|$.

Разделив все члены неравенства (3.5.7) на $\|f\|^2$, можно видеть, что константы A и B являются границами нормированной на $\|f\|^2$ энергии – скалярного произведения $\langle f, \psi_{ik} \rangle$. Они (эти константы) как бы "обрамляют" нормированную энергию коэффициентов $DWT_f(i,k)$. Отсюда произошел термин фрейм (frame), которым называют множество функций $\{\psi_{ik}(t); i, k \in Z\}$, при которых условие (3.5.7) выполняется.

Если $A = B$, то $\|R\| = 0$ и множество $\{\psi_{ik}(t)\}$ называют *плотным фреймом*. При этом выражение $A\|f\|^2 = \sum_{i,k} |\langle f, \psi_{ik} \rangle|^2$, вытекающее из (3.5.7), является обобщением теоремы Парсеваля на плотные фреймы.

Для плотных фреймов из (3.5.8) получаем

$$f(t) = A^{-1} \sum_{i,k} DWT_f(i,k) \psi_{i,k}(t).$$

Если $A = B = 1$, то плотный фрейм становится *ортонормальным базисом*.

Заметим, что для вейвлетов, образованных материнским вейвлетом (3.3.6), хорошие результаты при восстановлении сигналов получаются при

$a_0 = 2^{1/4}, b_0 = 0,5$, так как $\frac{B}{A} - 1 < 10^{-5}$. Для бóльших величин, например

$a_0 = 2$, будет $\frac{B}{A} - 1 \cong 0,08$, т.е. восстановление приводит к бóльшим искажениям.

3.5.3. Примеры вейвлетов для дискретного преобразования

Как было отмечено выше, функции вейвлет обладают свойством частотно-временной локализации, т.е. они ограничены как в частотной, так и во временной областях. Ниже рассмотрим два примера: первый – спектр вейвлетов в частотной области представляет собой идеальный полосовой фильтр, второй – сами функции вейвлет представляют собой прямоугольники. Все вейвлеты, с точки зрения частотно-временных свойств, занимают промежуточное положение между этими крайними случаями.

Sinc-базис. Разобьем ось частот на интервалы (поддиапазоны), как показано на рис. 3.13 при $a_0 = 2$. Такое разбиение называют логарифмическим, так как отношение верхней и нижней границ диапазонов постоянно и

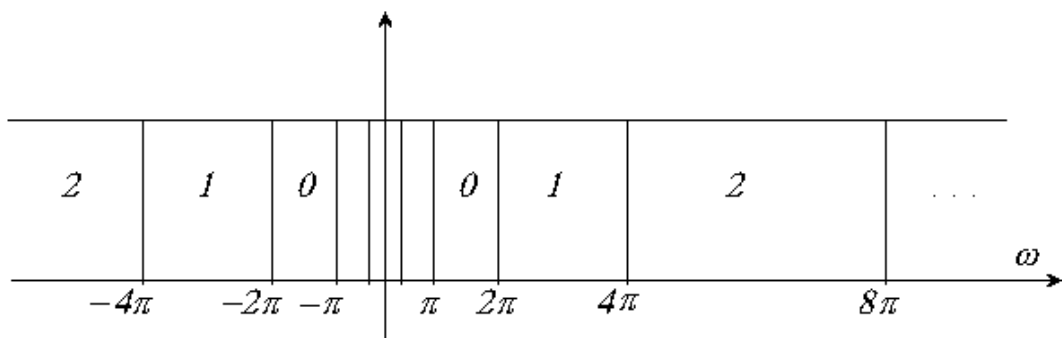


Рис. 3.13.

Разбиение оси частот в логарифмическом масштабе при $a_0 = 2$

равно 2. Такое разбиение является еще и идеальным, так как оно реализуется идеальными полосовыми фильтрами. Подобная идеализация нужна для исследования свойств частотного разложения с помощью идеализированных вейвлетов, что позволит в дальнейшем перейти к более сложным разложениям. Любой сигнал $f(t) \in L_2$ со спектром $F(\omega)$ может занимать полосу частот, охватывающую несколько таких поддиапазонов. Тогда

$F(\omega) = \sum_m F_m(\omega)$ и $f(t) = \sum_m f_m(t)$, т.е. сигнал представляет собой сумму

некоторого числа элементарных сигналов. В рассматриваемом идеальном случае частотные каналы не перекрываются, поэтому имеет место ортогональность этих элементарных сигналов, т.е.

$$\int f_i(t)f_k(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int F_i(\omega)F_k(\omega)d\omega = \delta(i-k).$$

Выберем из всего множества сигналов такие, которые ограничены полосой частот 2^I , т.е. имеющие спектр $F_I(\omega)$

Рассмотрим периодическую функцию $\Phi_I(\omega)$ такую, что

$$\Phi_I(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_I(\omega - 2\pi 2^I k),$$

т.е. полученную периодизацией $F_I(\omega)$ (рис. 3.14). Тогда спектр функции

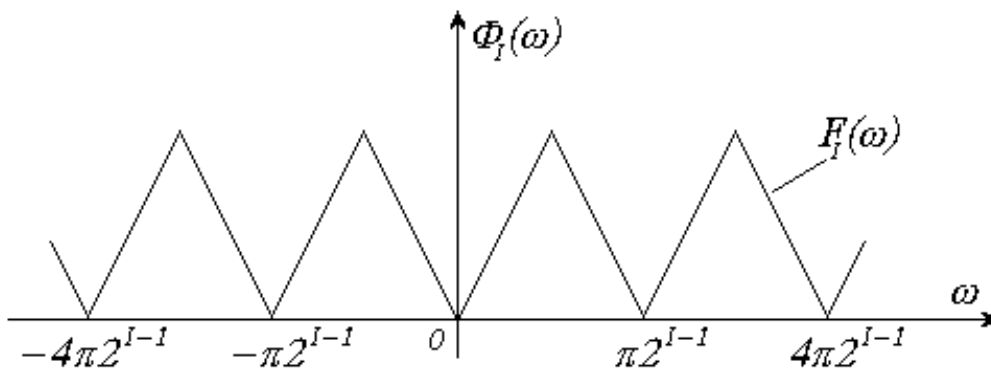


Рис. 3.14.

Периодизация функции $F_I(\omega)$

$F_i(\omega)$ при произвольном I можно представить в виде

$$F_i(\omega) = \Phi_i(\omega) \left(\prod \left(\frac{\omega}{\pi 2^{i+1}} \right) - \prod \left(\frac{\omega}{\pi 2^i} \right) \right), \quad (3.5.9)$$

где $\prod(x)$ – функция окна такая, что

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Посмотрим, как при этих условиях можно представить функцию $f(t)$ во временной области. Для этого разложим периодическую функцию $\Phi_i(\omega)$ с периодом $\frac{T}{2} = \pi 2^i$, в ряд Фурье (см. (2.1.1)):

$$\Phi_i(\omega) = \sum_k b_i[k] e^{jk \frac{2\pi}{2\pi 2^i} \omega} = \sum_k b_i[k] e^{jk 2^{-i} \omega}, \quad (3.5.10a)$$

где

$$b_i[k] = \frac{1}{2\pi 2^i} \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} F_i(\omega) e^{-jk 2^{-i} \omega} d\omega. \quad (3.5.10б)$$

Подставляя (3.5.10a) в (3.5.9) и выполняя обратное преобразование Фурье, получим:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k b_i[k] e^{jk 2^{-i} \omega} d\omega \cdot \prod \left(\frac{\omega}{\pi 2^{i+1}} \right) \cdot e^{i\omega t} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k b_i[k] e^{jk 2^{-i} \omega} \cdot \prod \left(\frac{\omega}{\pi 2^i} \right) \cdot e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Вычислим первый интеграл. Переставляя операции суммирования и интегрирования и ограничивая пределы интегрирования с учетом функции окна, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \int_{-\pi 2^{i+1}}^{\pi 2^{i+1}} e^{jk 2^{-i} \omega} e^{j\omega t} d\omega = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \int_{-\pi 2^{i+1}}^{\pi 2^{i+1}} e^{j\omega(t+k 2^{-i})} d\omega = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \int_{-\pi 2^{i+1}}^{\pi 2^{i+1}} \frac{e^{j\omega(t+k 2^{-i})}}{j(t+k 2^{-i})} d(j\omega(t+k 2^{-i})) = \\
& = \frac{2\pi 2^{i+1}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \frac{e^{j(t+k 2^{-i})\pi 2^{i+1}} - e^{-j(t+k 2^{-i})\pi 2^{i+1}}}{2\pi j(t+k 2^{-i}) 2^{i+1}} = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] 2^{i+1} \frac{\sin \pi(2^{i+1} t + k)}{\pi(2^{i+1} t + k)}.
\end{aligned}$$

Аналогично для второго интеграла получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \cdot e^{jk 2^{-i} \omega} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] 2^i \frac{\sin \pi(2^i t + k)}{\pi(2^i t + k)},
\end{aligned}$$

Тогда из (3.5.11):

$$f_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] (2^{i+1} \varphi(2^{i+1} t + k) - 2^i \varphi(2^i t + k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i[k] \Psi_{ik}(t),$$

где функция

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \text{sinc}(x) \quad (3.5.12)$$

показана на рис. (3.15).

Сумма элементарных сигналов $f_i(t)$ равна

$$f(t) = \sum_{i=0}^{M-1} f_i(t) = \sum_{i,k} a_i[k] \psi_{ik}(t), \quad (3.5.13)$$

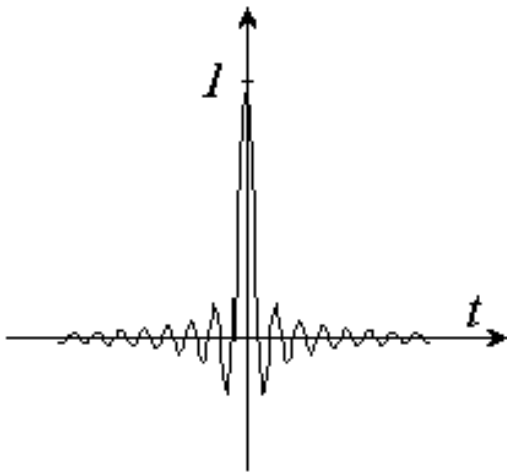


Рис. 3.15.
Sinc -функция

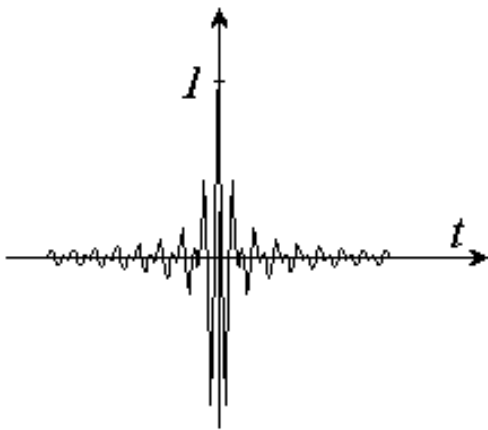


Рис 3.16.
Sinc -вейвлет

$$a_i[k] = 2^{i/2} b_i[k],$$

где вейвлет

$$\psi_{ik}(t) = 2^{i/2} \psi(2^i t - k) \quad (3.5.14)$$

и (см. рис. 3.16):

$$\psi(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x). \quad (3.5.15)$$

Выражение (3.5.13) является представлением функции $f(t)$ в базисе вейвлет. В рассматриваемом частном случае идеальной полосовой фильтрации вейвлетом является функция (3.5.14), образованная из материнской функции $\psi(x)$ по (3.5.15) с учетом (3.5.12). Такой вейвлет называется **sinc**-вейвлетом по имени функции (3.5.12), которая его образует, а функция (3.5.12) получила название масштабной функции.

Множитель $2^{i/2}$ при $\psi_{ik}(t)$ необходим для сохранения нормы $\|\psi_{ik}(t)\|$

вне зависимости от величины масштаба, так как:

$$\|\psi_{ik}(t)\| = 2^i \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^i t - k)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \|\psi(x)\|.$$

Покажем, что в рассматриваемом частном случае $b_i[k] = 2^{-i} f_i(2^{-i} k)$, т.е. определяется отсчетами функции $f_i(t)$ при $t = 2^{-i} k$.

Рассмотрим интеграл Фурье (2.2.1а) при дискретных значениях $t \in k\Delta_t$

функции $F_i(\omega)$, заданной на интервале $|\omega| < \pi 2^i$.

Имеем, с учетом (3.5.10б):

$$\begin{aligned} f_i(k\Delta_t) &= \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} F_i(\omega) \cdot e^{j\omega k\Delta_t} d\omega = \\ &= 2^i \frac{1}{2\pi 2^i} \int_{-\pi 2^i}^{\pi 2^i} F_i(\omega) \cdot e^{j\omega k\Delta_t} d\omega = 2^i b_{ik}. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Последнее равенство справедливо при $\Delta_t = 2^{-i}$ и вещественных $f(t)$.

Следовательно,

$$b_{ik} = 2^{-i} f_i(2^{-i} k).$$

Выполнив преобразование Фурье выражения (3.5.14), можно видеть, что спектр Фурье **sinc**-вейвлета представляет собой идеальный полосовой фильтр, в общем случае занимающий полосу частот от $2\pi 2^i$ до $2\pi 2^{i+1}$.

Вейвлет Хаара. Разобьем теперь временную ось на интервалы, как показано на рис. 3.17 и определим на единичном интервале функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.5.17)$$

Эта функция является материнским вейвлетом, так как она удовлетворяет условию (3.2.2). Система сдвигов таких функций $\psi(t-n)$ образует ортонормальный базис, так как их взаимная энергия (В.5) равна нулю при $n \neq 0$ и равна единице при $n = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

Преобразование Фурье (2.2.1б) вейвлета Хаара имеет вид

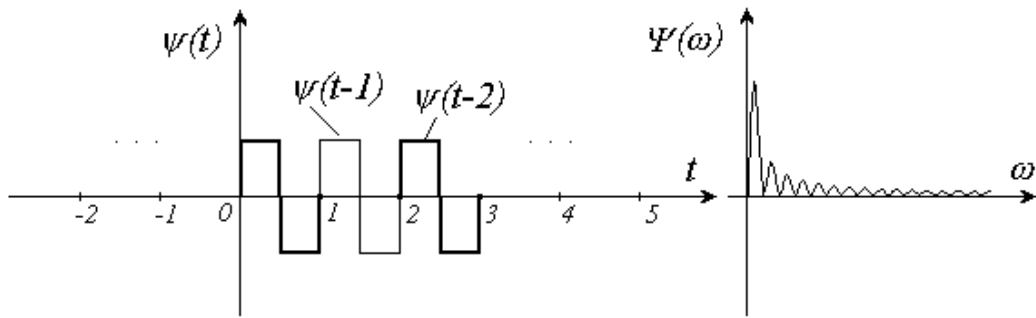


Рис. 3.17.

Функция Хаара.

а) вейвлет $\psi(t)$;

б) спектр Фурье амплитуды

$$\psi(\omega) = je^{-j\omega/2} \frac{(\sin \omega/4)}{\omega/4} \quad (3.5.18)$$

и показано на рис. 3.17б.

Функции Хаара, также как **sin c**-вейвлет, могут быть получены с помощью масштабной функции

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.5.19)$$

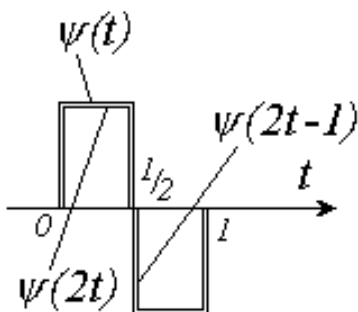


Рис. 3.18.

Формирование вейвлета Хаара с помощью масштабных функций

что иллюстрируется на рис. 3.18.

Из приведенных примеров следует ряд интересных выводов:

1. Представление вейвлет-функции в виде прямоугольников в любой из областей (частотной или временной) ведет к бесконечному расширению в противоположной области (сравните рис. 3.14 и 3.16;

рис. 3.17,а и 3.17,б).

Следовательно, для того, чтобы функции вейвлет были локализованы одновременно во временной и частотной областях, они должны убывать с ростом аргумента, по крайней мере, по закону обратной пропорционально-

сти (см. (3.2.1)).

2. Вейвлеты $\psi(t)$, спектры Фурье которых представляют собой полосовые фильтры, могут быть выражены через масштабные функции $\varphi(t)$, спектры Фурье которых представляют собой фильтры нижних частот (см. формулы (3.5.15) и (3.5.19)).

3. Базисные функции для DWT могут быть получены из одной материнской функции путем ее масштабирования и сдвига (см. формулы (3.5.14) и (3.5.15)).

4. Любой сигнал $f(t)$ из L_2 может быть представлен своим вейвлет-разложением (3.5.13), если число компонентов $f_i(t)$ таково, что они занимают полосу частот большую, чем полоса сигнала.

Литература

1. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // *Успехи математических наук*. 1998. V. 53. № 6. С.9-13.

2. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. 131 с.

3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 203 с.

4. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН*. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145-1170.

5. Martin Vatterli, Jelena Kovačević. Wavelets and Subband Coding. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

Предисловие	3
Введение	5
В.1. Сигналы и их классификация	7
В.2. Модели сигналов	9
В.3. Обработка сигнала	11
В.4. Историческая справка	16
Литература	19
Глава 1. Представление сигналов	20
1.1. Множества сигналов	21
1.2. Пространство сигналов	27
1.3. Представление элементов векторного пространства	32
1.4. Полнота базиса	36
1.5. Функциональное пространство	38
1.6. Дискретное представление сигналов	41
1.7. Непрерывное (интегральное) представление сигналов	51
1.8. Представление и анализ сигналов	56
Литература	57
Глава 2. Гармонический (частотный) анализ	58
2.1. Ряды Фурье	59
2.2. Интеграл Фурье	63
2.3. Дискретизация	69
2.3.1. Дельта-функция Дирака	69
2.3.2. Отсчеты непрерывной функции	72
2.3.3. Формула суммирования Пуассона	73
2.3.4. Теорема отсчетов	75
2.4. Дискретное преобразование Фурье	78
2.4.1. Дискретное во времени преобразование Фурье	78
2.4.2. Дискретно-временные ряды Фурье	81
2.5. Преобразование Лапласа	88
2.5.1. Определение	88
2.5.2. Обратное преобразование	93
2.5.3. Свойства	95
2.5.4. Применение к анализу систем	96
2.6. Z -преобразование	100
2.6.1. Определение	100
2.6.2. Обратное z -преобразование	107
2.6.3. Свойства	109
2.6.4. Применение к анализу линейных инвариантных во времени систем	110
2.7. Понижение и повышение числа отсчетов	112
2.7.1. Децимация	112

2.7.2. Интерполяция	115
Литература	117
Глава 3. Частотно-временной анализ	118
3.1. Частотно-временные свойства базисных функций	119
3.1.1. Плоскость частота-время	119
3.1.2. Ограниченное во времени Фурье-преобразование	121
3.1.3. Принцип неопределенности	123
3.2. Базисные функции частотно-временного анализа	125
3.3. Непрерывное вейвлет-преобразование	127
3.4. Свойства непрерывного вейвлет-преобразования	132
3.5. Дискретное вейвлет-преобразование	139
3.5.1. Дискретизация масштаба	139
3.5.2. Дискретизация масштаба и сдвига. Фреймы	142
3.5.3. Примеры вейвлетов для дискретного преобразования	144
Литература	151