

А. М. КУТЕПОВ, А. Д. ПОЛЯНИН, Э. Д. ЗАПРЯНОВ,
А. В. ВЯЗЬМИН, Д. А. КАЗЕНИН

ХИМИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКВА
КВАНТУМ
1996

Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запryanов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. **Химическая гидродинамика:** Справочное пособие. — М.: Квантум, 1996. — 336 с.

Книга представляет собой краткий справочник по химической гидродинамике и смежным разделам гидродинамики, теплообмена, механики дисперсных систем и химической технологии. Исследуется движение и массоперенос в трубах, каналах, пленках, струях и пограничных слоях. Рассматривается обтекание и массо- и теплообмен частиц, капель и пузырей различной формы с поступательным и сдвиговым потоком при различных числах Рейнольдса и Пекле.

Анализируются процессы массопереноса, осложненные объемной или поверхностной химической реакцией. Учитывается зависимость коэффициента диффузии от концентрации. Приводятся новые универсальные зависимости, позволяющие при расчете коэффициентов массо- и теплопереноса учитывать геометрические, реологические и физико-химические факторы. Основные результаты представлены в виде точных или простых приближенных формул, удобных для практических расчетов.

Книга предназначена для широкого круга научных работников, преподавателей, инженеров и студентов, специализирующихся в области гидродинамики, теплообмена, механики дисперсных систем, химической технологии и биомеханики.

Табл. 24. Ил. 36. Библиогр. 319 назв.

КУТЕПОВ Алексей Митрофанович
ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
ЗАПРЯНОВ Запryan Димитров
ВЯЗЬМИН Андрей Валентинович
КАЗЕНИН Дмитрий Александрович

ХИМИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Компьютерная верстка А. И. Журов

К $\frac{0000}{-96} \frac{0}{0}$

© А. М. Кутепов, А. Д. Полянин и др., 1996
© Квантум, оформление, 1996

Подписано к печати 27.12.95. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 21,5. Тираж 1500 экз. Заказ тип. № . С — .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	7
1. Течения жидкости в пленках, трубах, струях и пограничных слоях	9
1.1. Уравнения и граничные условия гидродинамики	10
1.2. Течение, вызванное вращением диска	17
1.3. Гидродинамика тонких стекающих пленок	21
1.4. Струйные течения	25
1.5. Ламинарное течение в трубах различной формы	31
1.6. Продольное обтекание плоской пластины. Пограничный слой	36
2. Движение частиц, капель и пузырей в жидкости	41
2.1. Общее решение уравнений Стокса в осесимметричном случае	41
2.2. Обтекание сферической частицы, капли и пузыря поступательным стоксовым потоком	44
2.3. Сферические частицы в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса	52
2.4. Сферические капли и пузыри в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса	56
2.5. Обтекание сферической частицы, капли и пузыря сдвиговым потоком	62
2.6. Обтекание несферических твердых частиц	65
2.7. Обтекание цилиндра (плоская задача)	76
2.8. Обтекание деформированных капель и пузырей	82
2.9. Стесненное движение частиц	88
3. Массо- и теплоперенос в пленках жидкости, трубах и плоских каналах	97
3.1. Уравнения и граничные условия теории конвективного тепло- и массопереноса	98
3.2. Диффузия к вращающемуся диску	109
3.3. Теплоперенос к плоской пластине	111
3.4. Массоперенос в пленках жидкости	114
3.5. Тепло- и массоперенос при ламинарном течении в круглой трубе	122
3.6. Тепло- и массоперенос при ламинарном течении в плоской трубе	131
3.7. Предельные числа Нуссельта при ламинарном течении жидкостей по трубам различной формы	133
4. Массо- и теплообмен частиц, капель и пузырей с потоком	136
4.1. Метод асимптотических аналогий в теории массо- и теплопереноса	136
4.2. Внутренние задачи о теплообмене тел различной формы	138
4.3. Массо- и теплообмен частиц различной формы с неподвижной средой	143
4.4. Массоперенос в поступательном потоке при малых числах Пекле	147
4.5. Массоперенос в линейном сдвиговом потоке при малых числах Пекле	154
4.6. Массообмен частиц и капель с потоком при больших числах Пекле (теория диффузионного пограничного слоя)	157
4.7. Диффузия к сферической частице, капле и пузырю в поступательном потоке при различных числах Пекле и Рейнольдса	164
4.8. Диффузия к сферической частице, капле и пузырю в линейном сдвиговом потоке при малых числах Рейнольдса и любых числах Пекле	168
4.9. Диффузия к сфере в поступательно-сдвиговом потоке и потоке с параболическим профилем	173

4.10. Массообмен несферических частиц и пузырей с поступательным потоком	175
4.11. Массо- и теплообмен цилиндров с поступательным и сдвиговым потоком (плоская задача)	181
4.12. Нестационарный массообмен частиц, капель и пузырей с установившимся поступательным и сдвиговым потоком	189
4.13. Качественные особенности массопереноса внутри капли при больших числах Пекле	193
4.14. Массообмен частиц и капель с потоком при произвольной зависимости коэффициента диффузии от концентрации	199
4.15. Диффузионный след. Массообмен цепочек капель и частиц с жидкостью	204
4.16. Массо- и теплообмен при стесненном обтекании систем частиц, капель и пузырей	210
5. Массообмен, осложненный поверхностной или объемной химической реакцией	215
5.1. Массоперенос, осложненный поверхностной химической реакцией	215
5.2. Диффузия к вращающемуся диску и плоской пластине при протекании объемной реакции	218
5.3. Внешние задачи массообмена частиц, капель и пузырей с потоком при различных числах Пекле и наличии объемной химической реакции	220
5.4. Внутренние задачи массопереноса при наличии объемной химической реакции	223
5.5. Нестационарный массообмен с объемной реакцией	228
6. Термогидродинамические явления	231
6.1. Термогравитационная и термокапиллярная конвекция в слое жидкости	232
6.2. Термокапиллярный дрейф капли	238
6.3. Хемокапиллярный эффект при движении капли	244
7. Гидродинамика, массо- и теплообмен в неньютоновских жидкостях	248
7.1. Реологические модели неньютоновских несжимаемых жидкостей	248
7.2. Движение пленок неньютоновских жидкостей	256
7.3. Массоперенос в пленках реологически сложных жидкостей	262
7.4. Движение неньютоновских жидкостей по трубам и каналам	264
7.5. Теплоперенос в плоском канале и круглой трубе (с учетом диссипации)	270
7.6. Гидродинамический тепловой взрыв в неньютоновских жидкостях	274
7.7. Обтекание плоской пластины степенной жидкостью	280
7.8. Затопленная струя степенной жидкости	284
7.9. Движение частиц, капель и пузырей в степенной жидкости	287
Приложения	290
П.1. Точные решения линейных уравнений тепло- и массопереноса	290
П.2. Преобразования уравнений тепло- и массопереноса	311
П.3. Ортогональные криволинейные системы координат	313
П.4. Уравнение конвективной диффузии в различных системах координат	318
П.5. Уравнения движения жидкости в различных системах координат	319
П.6. Уравнения движения и теплообмена неньютоновских жидкостей	320
Список литературы	322

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагаются классические задачи и современные достижения по основным разделам физико-химической гидродинамики и смежным проблемам гидродинамики, тепломассообмена, механики дисперсных систем, химической технологии и биомеханики.

Авторы стремились обобщить и систематизировать результаты многочисленных научных публикаций в данной области за последние 15 — 20 лет. При отборе материала предпочтение отдавалось простым точным и приближенным формулам, имеющим широкую область практических приложений.

В каждом разделе книги сначала дается краткая физическая и математическая формулировка рассматриваемой проблемы, а затем сразу приводятся окончательные результаты для искомых величин в виде универсальных зависимостей или итоговых таблиц (при этом метод решения, как правило, не излагается, а даются лишь некоторые пояснения и необходимые ссылки). Такой подход упрощает восприятие текста и приводит к расширению возможного круга читателей.

В первой и второй главах книги изучаются течения жидкостей, составляющие основу многих химико-технологических процессов. Излагаются полученные к настоящему времени результаты об обтекании частиц, капель и пузырей различной формы поступательным и сдвиговым потоком в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Рассматриваются как одиночные частицы, так и системы частиц. Исследуются пленочные и струйные течения; движения жидкостей по трубам и каналам различной формы; обтекание пластины, цилиндра и диска.

В третьей и четвертой главах анализируется массотеплоперенос в плоских каналах, трубах и пленках жидкости. Рассматривается массотеплообмен частиц, капель и пузырей с поступательным и сдвиговым потоком при различных числах Пекле и Рейнольдса. Приведенные результаты имеют большое значение для создания научно обоснованных методик расчета целого ряда технологических процессов, таких как растворение, сушка, адсорбция, осаждение аэрозолей и коллоидов, гетерогенные каталитические реакции, абсорбция, экстракция и ректификация.

В пятой главе изучается диффузионный перенос при конечных скоростях объемной или поверхностной химической реакции. Приведены результаты решения соответствующих задач для реакции любого порядка и различных течений. Получены универсальные зависимости и итоговые таблицы, позволяющие при расчетах одновременно учитывать различные геометрические и физико-химические факторы.

Шестая глава посвящена анализу ряда термогидродинамических явлений, которые в последнее десятилетие привлекали повышенное

внимание российских и зарубежных исследователей. Указанное обстоятельство обусловлено интенсификацией процессов переноса в пленках и каплях жидкости благодаря эффекту Марангони (и возможностью использования этого эффекта в процессах космической технологии).

В седьмой главе излагаются вопросы гидродинамики и массотеплопереноса в неньютоновских жидкостях. Описаны основные модели реологически сложных жидкостей, используемых в химической технологии. Исследуется движение и массообмен степенных и вязкопластичных жидкостей в трубах, каналах и пленках. Рассматривается обтекание частиц, капель и пузырей неньютоновской жидкостью.

В приложении даны таблицы с точными решениями уравнений теплопроводности. Приведены уравнения конвективной диффузии, неразрывности, движения жидкостей в некоторых криволинейных ортогональных системах координат и другие справочные материалы.

Расположение разделов книги отвечает принципу «от простого к сложному». Такой подход существенным образом облегчает работу с материалом. Подробное оглавление поможет читателю находить искомую информацию.

Авторы признательны А. Е. Редникову и Ю. С. Рязанцеву, которые написали гл. 6, и А. Г. Петрову, участвовавшему в работе над разд. 2.4, 2.8.

Авторы благодарят А. И. Журова за полезные замечания и неоценимую помощь при создании оригинал-макета этой книги.

Авторы надеются, что книга окажется полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях гидродинамики, тепломассообмена, механики дисперсных систем, физико-химической гидродинамики, химической технологии, энергетики, метеорологии и биомеханики.

Авторы

Основные обозначения

Латинский алфавит

- a — характерный масштаб длины (для сферических частиц и кругового цилиндра, если не оговорено специально, в качестве характерного масштаба длины выбирается радиус);
- C — массовая концентрация;
- C_i — невозмущенная концентрация (в набегающем потоке, вдали от частицы);
- C_s — концентрация у поверхности частицы;
- c — безразмерная концентрация (в разных задачах вводится по разному, см. табл. 3.1 в разд. 3.1);
- c_f — коэффициент сопротивления;
- D — коэффициент диффузии;
- G_{km} — коэффициенты матрицы сдвига;
- g_{ij} — компоненты метрического тензора;
- K_s — константа скорости поверхностной химической реакции;
- K_v — константа скорости объемной химической реакции;
- Ma — число Марангони;
- Nu — среднее число Нуссельта;
- n — порядок поверхностной или объемной химической реакции;
- P — давление;
- P_i — невозмущенное давление вдали от частицы (капли, пузыря);
- Pe — число Пекле, $Pe = aU/D$;
- R, θ, φ — сферические координаты, $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;
- \mathcal{R}, Z, φ — цилиндрические координаты, $\mathcal{R} = \sqrt{X^2 + Y^2}$;
- Re — число Рейнольдса, $Re = aU/\nu$;
- r — безразмерная сферическая координата, $r = R/a$;
- Sc — число Шмидта, $Sc = \nu/D$;
- Sh — среднее число Шервуда;
- Sh_0 — асимптотика среднего числа Шервуда при малых значениях характерного параметра задачи;
- Sh_∞ — асимптотика среднего числа Шервуда при больших значениях характерного параметра задачи;
- T — безразмерная температура;
- T_* — температура;
- T_i — невозмущенная температура (в набегающем потоке, вдали от частицы);
- T_s — температура на поверхности частицы;
- T_1 — температура при $X < 0$;
- T_2 — температура при $X > 0$;
- t — время;
- U — характерная скорость потока;
- U_i — невозмущенная скорость жидкости (в набегающем потоке, вдали от частицы);
- U_{max} — максимальная скорость жидкости на поверхности пленки, на оси трубы;
- V_X, V_Y, V_Z — компоненты скорости жидкости в декартовой системе координат;

- V_R, V_θ, V_φ — компоненты скорости жидкости в сферической системе координат;
 $V_{\mathcal{R}}, V_Z, V_\varphi$ — компоненты скорости жидкости в цилиндрической системе координат;
 $V_R^{(1)}, V_\theta^{(1)}$ — компоненты скорости жидкости в сплошной фазе (вне капли) в осесимметричном случае;
 $V_R^{(2)}, V_\theta^{(2)}$ — компоненты скорости жидкости в дисперсной фазе (внутри капли) в осесимметричном случае;
 We — число Вебера, $We = aU_i^2 \rho_1 / \sigma$ (σ — поверхностное натяжение);
 X, Y, Z — декартовы координаты;
 X_1, X_2, X_3 — декартовы координаты; $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$,
 x, y, z — безразмерные декартовы координаты.

Греческий алфавит

- β — отношение динамических вязкостей внутри и вне капли,
 $\beta = \mu_2 / \mu_1$;
 μ — динамическая вязкость жидкости;
 μ_1 — динамическая вязкость жидкости сплошной фазы (вне капли);
 μ_2 — динамическая вязкость жидкости дисперсной фазы (внутри капли);
 ν — кинематическая вязкость жидкости, $\nu = \mu / \rho$;
 ρ — плотность жидкости;
 ρ_1 — плотность жидкости в сплошной фазе (вне капли);
 ρ_2 — плотность жидкости в дисперсной фазе (внутри капли);
 ϱ — безразмерная цилиндрическая координата, $\varrho = \mathcal{R} / a$;
 Ψ — функция тока,
 $\Psi^{(1)}$ — функция тока в сплошной фазе (вне капли);
 $\Psi^{(2)}$ — функция тока в дисперсной фазе (внутри капли).

1. Течения жидкости в пленках, трубах, струях и пограничных слоях

Информация о полях скорости и давления, необходимая для решения задач о распределении и превращении веществ в реакционных аппаратах, часто может быть получена из рассмотрения чисто гидродинамической стороны проблемы. Огромное разнообразие реальных течений жидкости, подчиняющихся одним и тем же уравнениям гидродинамики, обусловлено множеством геометрических, физических и режимных факторов, определяющих область, тип и структуру течения. Классификацию течений для описания их специфических свойств можно произвести различными способами. Например, широко распространена классификация течений по величине важнейшего режимно-геометрического параметра — числа Рейнольдса Re : течения при малых числах Рейнольдса [178], течения при больших числах Рейнольдса (пограничные слои [184]), течения при закритических числах Рейнольдса (турбулентные течения [179]). Следует заметить, что такая классификация* имеет важный методический смысл, поскольку определяет малый параметр, Re или Re^{-1} , и указывает надежный метод решения нелинейных гидродинамических задач — метод разложения по малому параметру. Не отрицая плодотворность такой классификации течений, в данной книге будем исходить не из математических и вычислительных удобств исследователя гидродинамических задач, а из практических потребностей технолога, рассчитывающего конкретный аппарат с почти predetermined его конструкцией типом течения реагирующей среды. В этой связи материал по гидродинамике разбит на две главы. В первой из них рассматриваются течения, определяемые взаимодействием протяженных текучих сред со стенками аппарата или между собой: течения в пленках, трубах, каналах, струях и пограничных слоях вблизи твердой поверхности. Во второй главе рассматривается гидродинамическое взаимодействие частиц различной природы (твердых, жидких, газообразных) с обтекающей эти частицы дисперсионной средой.

* Встречаются также другие способы классификации течений, например, по специфике поверхности, ограничивающей область течения: течение жидкости со свободными границами [152], течение жидкости с поверхностью раздела [46, 180], течение вдоль проницаемой границы [77]. Такая классификация также позволяет описать свойства различных течений и указать методы их исследования.

1.1. Уравнения и граничные условия гидродинамики

Приведем уравнения и граничные условия, которые используются при решении гидродинамических задач. Детальный вывод и установление области применимости этих уравнений и граничных условий, различные физические постановки и решения соответствующих задач, а также прикладные вопросы использования результатов содержатся, например, в книгах [36, 91, 98, 103, 165, 184]. Будем считать, что плотность ρ и динамическая вязкость жидкости μ постоянны.

Уравнения движения жидкости. Замкнутая система уравнений движения вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости состоит из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = 0 \quad (1.1.1)$$

и трех уравнений Навье — Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_X}{\partial t} + V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_X}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_X}{\partial Z} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial Z^2} \right) + g_X, \\ \frac{\partial V_Y}{\partial t} + V_X \frac{\partial V_Y}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Y}{\partial Z} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_Y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_Y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_Y}{\partial Z^2} \right) + g_Y, \\ \frac{\partial V_Z}{\partial t} + V_X \frac{\partial V_Z}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Z}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_Z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_Z}{\partial Z^2} \right) + g_Z, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Уравнения (1.1.1), (1.1.2) записаны в прямоугольной декартовой системе координат; X, Y, Z — соответствующие координаты рассматриваемой точки физического пространства; t — время; g_X, g_Y, g_Z — компоненты вектора плотности массовой силы (например, силы тяжести); $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости. Искомыми величинами являются три компоненты скорости жидкости V_X, V_Y, V_Z и давление P .

Вводя вектор скорости жидкости $\vec{V} = \vec{i}_X V_X + \vec{i}_Y V_Y + \vec{i}_Z V_Z$, где $\vec{i}_X, \vec{i}_Y, \vec{i}_Z$ — единичные направляющие векторы декартовой системы координат, и используя символические дифференциальные операторы

$$\nabla = \vec{i}_X \frac{\partial}{\partial X} + \vec{i}_Y \frac{\partial}{\partial Y} + \vec{i}_Z \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2},$$

можно записать систему уравнений (1.1.1), (1.1.2) в компактном векторном виде:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{g}. \quad (1.1.4)$$

Уравнения неразрывности и Навье — Стокса в цилиндрической и сферической системах координат приведены в приложении 5.

Начальные и граничные условия. Для того чтобы решение системы (1.1.1), (1.1.2) однозначно определяло распределения скоростей и давления, необходимо сформулировать начальные и граничные условия.

В нестационарных задачах, когда в уравнениях движения сохраняются члены с частными производными по времени, во всей области течения должны быть заданы начальные распределения компонент скорости жидкости, причем последние в начальный момент времени должны удовлетворять уравнению неразрывности (1.1.1). Начального распределения давления задавать не следует, так как уравнения не содержат производной давления по времени*.

Область, в которой находится движущаяся реагирующая смесь, как правило, занимает не все пространство, а лишь его часть, ограниченную некоторыми поверхностями. В зависимости от того, принадлежит или не принадлежит области течения бесконечно удаленная точка, задача определения искомых функций называется соответственно внешней или внутренней задачей гидродинамики.

На поверхности твердого тела S , движущегося в потоке вязкой жидкости, выставляется условие прилипания. Это условие равенства вектора скорости жидкости на поверхности тела $\vec{V}|_S$ вектору скорости твердого тела \vec{V}_0 . Если твердое тело покоится, то $\vec{V}|_S = 0$. В проекциях на нормаль \vec{n} и касательную $\vec{\tau}$ к поверхности S это дает:

$$V_n|_S = 0, \quad V_\tau|_S = 0. \quad (1.1.5)$$

Более сложные граничные условия выставляются на поверхности раздела двух жидкостей (см. далее, например, разд. 2.2 и 6.1).

Для решения внешней гидродинамической задачи следует также задать условие на бесконечности (т.е. вдали от обтекаемого тела, капли или пузыря). Для ограниченного тела, помещенного в однородный

* В противном случае, если задать произвольное начальное распределение давления, то может оказаться, что определяемые уравнениями движения распределения компонент скорости при $t > 0$ не удовлетворяют уравнению неразрывности [160]. Для стационарных задач таких проблем не возникает.

поступательный поток, движущийся со скоростью \vec{U}_1 , граничное условие вдали от тела имеет вид

$$\vec{V} \rightarrow \vec{U}_1 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (1.1.6)$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Рассмотрим более сложные ситуации, характерные для градиентных течений с неоднородной структурой течения.

Сдвиговые течения. Произвольное стационарное поле скоростей $\vec{V}(\vec{R})$ в несжимаемой среде в окрестности точки $\vec{R} = \vec{0}$, принятой за начало отсчета, приближенно может быть представлено в виде двух членов разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} V_k(\vec{R}) &= V_k(\vec{0}) + G_{km} X_m, \\ G_{km} &\equiv (\partial V_k / \partial X_m)_{\vec{R}=\vec{0}}, \quad G_{11} + G_{22} + G_{33} = 0. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Здесь V_k и G_{km} — компоненты скорости жидкости и тензора сдвига в декартовой системе координат X_1, X_2, X_3 . По повторяющемуся индексу m ведется суммирование; равенство нулю суммы диагональных элементов G_{mm} следует из условия несжимаемости жидкости.

Для частиц, размеры которых много меньше характерного пространственного масштаба неоднородности поля течения, распределение скоростей (1.1.7) в задачах о вязком обтекании частицы может рассматриваться как распределение скоростей вдали от частицы. Частный случай $G_{km} = 0$ соответствует однородному поступательному потоку. При $V_k(\vec{0}) = 0$ выражение (1.1.7) описывает поле скоростей в произвольном линейном сдвиговом потоке.

Любой тензор $\|G_{km}\|$ может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров

$$\begin{aligned} \|G_{km}\| &= \|E_{km}\| + \|\Omega_{km}\|, \\ E_{km} = E_{mk} &= \frac{1}{2}(G_{km} + G_{mk}), \quad \Omega_{km} = -\Omega_{mk} = \frac{1}{2}(G_{km} - G_{mk}). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

В свою очередь симметричный тензор $\|E_{km}\|$ путем поворота системы координат может быть приведен к диагональному виду с элементами E_1, E_2, E_3 , которые являются корнями кубического уравнения для λ : $\det \|E_{km} - \lambda \delta_{km}\| = 0$, где δ_{km} — символ Кронекера. Диагональные элементы E_1, E_2, E_3 приведенного к главным осям тензора $\|E_{km}\|$ определяют интенсивность растягивающего (сжимающего) движения вдоль осей координат. В соответствии с условием несжимаемости жидкости только два элемента из трех будут независимы: $E_1 + E_2 + E_3 = 0$.

Разбиение тензора $\|G_{km}\|$ на симметричную и антисимметричную части соответствует представлению поля скоростей линейного сдвигового течения жидкости в виде суперпозиции линейного деформационного течения с коэффициентами растяжения по главным осям $E_1,$

E_2 , E_3 и вращения жидкости как твердого тела с угловой скоростью $\vec{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$.

В случае однородного поступательного течения скорость невозмущенного потока не зависит от координат, так что все $G_{km} = 0$. При этом имеем простейший случай обтекания тела с граничным условием на бесконечности (1.1.6).

Рассмотрим теперь наиболее часто встречающиеся типы линейных сдвиговых течений.

1°. Простой сдвиг (течение Куэтта):

$$V_X = GY, \quad V_Y = 0, \quad V_Z = 0,$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & 0 \\ \frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & 0 \\ -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Величина G в данном случае называется градиентом скорости течения или скоростью деформации. Течение Куэтта может быть реализовано между двумя движущимися параллельными плоскостями или в зазоре между коаксиальными цилиндрами, вращающимися с разными скоростями.

2°. Плоское безвихревое движение:

$$V_X = \frac{1}{2}GY, \quad V_Y = \frac{1}{2}GX, \quad V_Z = 0,$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & 0 \\ -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & 0 \\ \frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Это течение имеет такую же деформационную составляющую движения, как и простой сдвиг, но не имеет вращательной составляющей.

3°. Плоский деформационный сдвиг:

$$V_X = \frac{1}{2}GX, \quad V_Y = -\frac{1}{2}GY, \quad V_Z = 0,$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & 0 \\ \frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Это течение можно реализовать при помощи прибора Тейлора, состоящего из четырех вращающихся цилиндров [308, 309]. Следует отметить, что течение 2° отличается от течения 3° только использованием другой системы координат (поворотом вокруг оси Z против часовой стрелки на 45°).

4°. Плоское твердотельное вращение:

$$V_X = GY, \quad V_Y = -GX, \quad V_Z = 0,$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & G & 0 \\ -G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & G & 0 \\ -G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Течение характеризует вращение жидкости вокруг оси Z с угловой скоростью G .

5°. Осесимметричный сдвиг (осесимметричное деформационное течение):

$$V_X = -\frac{1}{2}GX, \quad V_Y = -\frac{1}{2}GY, \quad V_Z = GZ,$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Это течение может быть реализовано при вытяжке цилиндрической деформируемой нити или на приборе, аналогичном прибору Тейлора [309] с двумя тороидальными валами, вращающимися в противоположных направлениях.

6°. Экстензиометрическое течение:

$$V_X = G_1 X, \quad V_Y = G_2 Y, \quad V_Z = G_3 Z, \quad G_1 + G_2 + G_3 = 0;$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Это течение является обобщением течения 5° на неосесимметричный случай.

7°. Ортогональное реометрическое течение:

$$V_X = GY - HZ, \quad V_Y = 0, \quad V_Z = HX,$$

$$\|G_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & G & -H \\ 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|E_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & 0 \\ \frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|\Omega_{km}\| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}G & -H \\ -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Течение характеризует сдвиг вдоль оси X , осложненный вращением вокруг осей Y и Z .

При моделировании обтекания градиентным невозмущенным потоком в качестве граничных условий на бесконечности (вдали от тела) следует брать условия стремления компонент скорости жидкости при $R \rightarrow \infty$ к соответствующим компонентам рассмотренных градиентных течений.

Функция тока. Большинство задач, рассматриваемых в первых двух главах, обладают теми или иными свойствами симметрии. В этих случаях вместо компонент скоростей жидкости часто удобно ввести функцию тока Ψ . При этом уравнение неразрывности (1.1.3), на основе которого она вводится, будет удовлетворяться автоматически. Функция тока обычно вводится в следующих трех случаях.

1. В плоских задачах все величины не зависят от координаты Z , и уравнение неразрывности (1.1.3) принимает вид

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} = 0. \tag{1.1.9}$$

Функция тока $\Psi(X, Y)$ вводится с помощью соотношений

$$V_X = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V_Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \tag{1.1.10}$$

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно.

2. В осесимметричных задачах в цилиндрической системе координат \mathcal{R}, θ, Z все величины не зависят от осевой координаты Z . В этом случае уравнение неразрывности (после умножения обеих частей на \mathcal{R}) записывается так:

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{R}}(\mathcal{R}V_{\mathcal{R}}) + \frac{\partial V_{\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (1.1.11)$$

Функция тока вводится с помощью формул

$$V_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_{\theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}}. \quad (1.1.12)$$

3. В осесимметричных задачах в сферической системе координат R, θ, φ все величины не зависят от координаты φ . В этом случае уравнение неразрывности (после умножения обеих частей на R) имеет вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R^2 V_R) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(V_{\theta} \sin \theta) = 0. \quad (1.1.13)$$

Функция тока в этом случае вводится соотношениями

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_{\theta} = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}. \quad (1.1.14)$$

Во всех описанных выше трех случаях функция тока зависит только от двух ортогональных координат. Линии тока определяются равенством $\Psi = \text{const}$. Каждой линии тока отвечает постоянное значение функции тока. Вектор скорости жидкости направлен по касательной к линии тока. (Отметим, что с траекториями жидких частиц линии тока совпадают только в стационарном случае.)

В табл. 1.1 приведены уравнения для функции тока в различных системах координат, полученные из уравнений Навье — Стокса (1.1.1), (1.1.2).

Уравнения гидродинамики в безразмерном виде. Для анализа уравнений гидродинамики (1.1.3), (1.1.4) удобно ввести безразмерные переменные и искомые величины по формулам

$$\tau = \frac{Ut}{a}, \quad x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad z = \frac{Z}{a}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{V}}{U}, \quad p = \frac{P}{\rho U^2},$$

где a и U — характерные масштабы длины и скорости. В результате получим

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.1.15)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\vec{g}}{g}. \quad (1.1.16)$$

При записи уравнения (1.1.16) использованы основные безразмерные режимно-геометрические параметры течения:

$$\text{Re} = \frac{aU}{\nu} \quad \text{— число Рейнольдса,} \quad \text{Fr} = \frac{gU^2}{a} \quad \text{— число Фруда.}$$

Медленным («ползущим») течениям соответствуют малые значения чисел Рейнольдса, а быстрым течениям — большие. Наличие в этих предельных случаях малого или большого безразмерного параметра позволяет эффективно использовать различные модификации метода возмущений [38].

1.2. Течение, вызванное вращением диска

В этом разделе будет описан один из немногих случаев, когда нелинейная краевая задача для уравнений Навье — Стокса допускает точное аналитическое решение.

Рассмотрим течение, вызываемое вращением бесконечного плоского диска с постоянной угловой скоростью ω . Условие прилипания на поверхности диска приводит к возникновению достаточно сложного трехмерного движения жидкости, подсасываемой из объема вдоль оси вращения к диску и отбрасываемой вблизи его плоскости на периферию. Такое течение достаточно хорошо моделирует гидродинамику широко используемых в химической технологии дисковых мешалок, а также дисковых электродов, применяемых в качестве датчиков в электрохимии [100].

Используем цилиндрическую систему координат \mathcal{R} , φ , Z , где координата Z отсчитывается от поверхности диска вдоль оси вращения. Учитывая симметрию задачи (искомые величины не зависят от угловой координаты φ), запишем уравнения неразрывности и Навье — Стокса в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\mathcal{R}}}{\partial \mathcal{R}} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} + \frac{V_{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} &= 0, \\ V_{\mathcal{R}} \frac{\partial V_{\mathcal{R}}}{\partial \mathcal{R}} + V_Z \frac{\partial V_{\mathcal{R}}}{\partial Z} - \frac{V_{\varphi}^2}{\mathcal{R}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \mathcal{R}} + \nu \left(\Delta V_{\mathcal{R}} - \frac{V_{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \right), \\ V_{\mathcal{R}} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \mathcal{R}} + V_Z \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial Z} + \frac{V_{\mathcal{R}} V_{\varphi}}{\mathcal{R}} &= \nu \left(\Delta V_{\varphi} - \frac{V_{\varphi}}{\mathcal{R}^2} \right), \\ V_{\mathcal{R}} \frac{\partial V_Z}{\partial \mathcal{R}} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + \nu \Delta V_Z, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где Δ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\Delta \equiv \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \left(\mathcal{R} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}. \tag{1.2.2}$$

Для завершения математической формулировки задачи дополним уравнения гидродинамики (1.2.1) граничными условиями прилипания жидкости на поверхности диска и условиями невозмущенности радиального и углового движений и давления вдали от диска:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}} = 0, \quad V_{\varphi} = \mathcal{R}\omega, \quad V_Z = 0 & \quad \text{при } Z = 0, \\ V_{\mathcal{R}} \rightarrow 0, \quad V_{\varphi} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow P_i & \quad \text{при } Z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Следуя Карману, решение задачи (1.2.1) — (1.2.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}} = \omega \mathcal{R} u_1(z), \quad V_{\varphi} = \omega \mathcal{R} u_2(z), \quad V_Z = \sqrt{\nu \omega} v(z), \\ P = P_i + \rho \nu \omega p(z), \quad \text{где } z = \sqrt{\omega/\nu} Z. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Подставляя эти выражения в (1.2.1) — (1.2.3), после некоторых преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по z):

$$\begin{aligned} u_1'' &= \nu u_1' + u_1^2 - u_2^2, \\ u_2'' &= \nu u_2' + 2u_1 u_2, \\ v'' &= \nu v' + p', \\ v' &= -2u_1 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad v = 0 & \quad \text{при } z = 0, \\ u_1 \rightarrow 0, \quad u_2 \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0 & \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Отметим, что осевое распределение давления можно найти из третьего уравнения (1.2.5) после решения первых двух уравнений. Давление выражается через поперечную компоненту скорости по формуле

$$p = v'(z) - \frac{1}{2}v^2(z) - v'(\infty) + \frac{1}{2}v(\infty). \quad (1.2.7)$$

В работах [184, 220] приводятся результаты численного решения задачи (1.2.5), (1.2.6). Соответствующие зависимости u_1 , u_2 , v от z показаны на рис. 1.1.

Получены следующие разложения искоемых функций вблизи и вдали от поверхности диска [103]:

при $z \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} u_1(z) \simeq 0,51 z - 0,5 z^2, \quad u_2(z) \simeq 1 - 0,616 z, \\ v(z) \simeq -0,51 z^2 + 0,333 z^3, \quad p(z) \simeq 0,393 - 1,02 z, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Рис. 1.1. Распределение компонент скорости вблизи вращающегося диска

при $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u_1(z) &\simeq 0,934 \exp(-0,886 z), & u_2(z) &\simeq 1,208 \exp(-0,886 z), \\ v(z) &\simeq -0,886, & p(z) &\simeq 0,393. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

С помощью формул (1.2.9) можно оценить возмущения, которые диск вносит в жидкость вдали от вращающейся поверхности. Из граничных условий (1.2.3) следует, что давление, радиальная и угловая компоненты скорости не возмущаются при $z \rightarrow \infty$. При этом безразмерная осевая компонента скорости вдали от диска отлична от нуля: $v(\infty) = -0,886$. Эта величина показывает, с какой скоростью диск «захватывает» окружающую жидкость. Из рис. 1.1 видно, что давление, радиальная и угловая компоненты скорости возмущаются вращающимся диском лишь вблизи от его поверхности, в так называемом динамическом пограничном слое. Толщина этого слоя не зависит от радиальной координаты* и приблизительно равна $\delta = 3\sqrt{\nu/\omega}$.

Все указанные закономерности справедливы для диска бесконечного радиуса. Однако, если взять круговой диск конечного радиуса a , линейные размеры которого существенно превосходят толщину пограничного слоя ($a \gg 3\sqrt{\nu/\omega}$), то эти закономерности будут выполняться приближенно. Сказанное позволяет получить несколько важных практических оценок.

* В разд. 3.2 будет показано, что диффузионный пограничный слой на вращающемся диске также имеет постоянную толщину. Это позволяет считать поверхность вращающегося диска, используемого в электрохимических экспериментах в качестве электрода, равнодоступной поверхностью.

Исходя из скорости захвата жидкости диском $V_Z(\infty) = -0,886\sqrt{\nu\omega}$, можно найти расход увлекаемой и отбрасываемой диском радиуса a жидкости:

$$q = 0,886 \pi a^2 \sqrt{\nu\omega}. \quad (1.2.10)$$

Если учесть двусторонний захват жидкости вращающимся диском, то общий расход отбрасываемой жидкости следует увеличить в два раза: $Q = 2q$. Удобно записать общий расход через число Рейнольдса:

$$Q = 1,77 \pi a^3 \omega \text{Re}^{-1/2}, \quad \text{Re} = a^2 \omega / \nu. \quad (1.2.11)$$

Аналогичным образом можно оценить момент сопротивления жидкости вращению диска, который определяется интегралом

$$m = -2\pi\mu \int_0^a \mathcal{R}^2 \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial Z} \right)_{Z=0} d\mathcal{R}.$$

Вычисление дает для двустороннего момента $M = 2m$ следующую оценку:

$$M = 0,616 \pi \rho a^4 \sqrt{\nu\omega^3}. \quad (1.2.12)$$

Для безразмерного коэффициента момента сопротивления имеем

$$c_M \equiv \frac{M}{\frac{1}{2} \rho a^5 \omega^2} = 3,87 \text{Re}^{-1/2}. \quad (1.2.13)$$

Теоретическая оценка (1.2.13) хорошо подтверждается экспериментально вплоть до критического числа Рейнольдса $\text{Re}_* \approx 3 \cdot 10^5$, когда рассматриваемое течение становится неустойчивым и начинается переход к турбулентному режиму.

Для турбулентного режима течения (при $\text{Re} > 3 \cdot 10^5$) приближенные расчеты, основанные на интегральном методе пограничного слоя, приводят к следующим оценкам для кругового диска радиуса a [103]:

для двустороннего расхода:

$$Q = 0,438 a^3 \omega \text{Re}^{-1/5}, \quad (1.2.14)$$

для коэффициента двустороннего момента сопротивления:

$$c_M = 0,146 \text{Re}^{-1/5}. \quad (1.2.15)$$

Толщину турбулентного динамического пограничного слоя на диске можно оценить по формуле $\delta = 0,5 a \text{Re}^{-1/5}$.

1.3. Гидродинамика тонких стекающих пленок

Предварительные замечания. Пленочный тип течения широко используется в химической технологии (в контактных устройствах абсорбционных, хемосорбционных и ректификационных колонн; в выпарных, сушильных и теплообменных аппаратах; пленочных химических реакторах; экстракторах и конденсаторах [87, 153]).

Обычно в аппарат, в котором осуществляется физико-химическая обработка текучих материальных сред, одновременно подаются как жидкая, так и газовая фазы. Поэтому, вообще говоря, происходит динамическое взаимодействие фаз вплоть до наступления режима «захлебывания» при противоточном движении газа и жидкости. Однако при сравнительно малых расходах газа динамическим взаимодействием можно пренебречь и считать, что жидкие пленки стекают только под действием силы тяжести.

В зависимости от величины числа Рейнольдса $Re = Q/\nu$, где Q — плотность орошения (т.е. объемный расход жидкости на единицу ширины пленки), течение жидкости в гравитационной пленке может осуществляться в ламинарном, волновом и турбулентном режимах. Известно [5, 23, 180], что ламинарный режим теряет устойчивость при значениях критического числа Рейнольдса $Re_* = 2 \div 6$. Однако известно также [23], что реальное появление волн наблюдается лишь начиная с точки, существенно смещенной вниз по потоку. Во всяком случае, даже для чисел Рейнольдса $6 \leq Re \leq 400$, соответствующих волновым режимам [5], значительная часть длины пленки будет безволновой. Если учесть, что эта длина существенно превосходит длину начального участка, где происходит формирование стационарного профиля скорости и установление толщины пленки, то следует признать, что гидродинамические закономерности установившегося ламинарного течения пленки при равновесии вязких и гравитационных сил являются определяющими при расчете интенсивности массообмена во многих аппаратах. Таковы, например, широко распространенные в химической и нефтехимической промышленности насадочные абсорбционные и ректификационные колонны, где пленки стекают по поверхности насадочных тел, протяженность которых не превышает нескольких сантиметров (кольца Рашига, кольца Палля, седла Берля и др. [180]).

Парадоксально, но для практического использования закономерностей ламинарного течения пленки существуют ограничения по расходам (или числам Рейнольдса) не сверху, а снизу. Действительно, существует [45] порог плотности орошения Q_{\min} , ниже которого энергетически более выгодным становится разрывное, «ручейковое», сте-

кание пленки. Этот предел был теоретически определен в работе [240]

$$Q_{\min} = 2,15 \left(\frac{\nu \sigma^3}{\rho g^3} \right)^{1/5} (1 - \cos \theta)^{3/5},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, θ — краевой угол смачивания жидкостью материала стенки (рис. 1.2). Угол θ определяется из фундаментального соотношения Юнга [36]

$$\sigma_{\text{gw}} = \sigma \cos \theta + \sigma_{\text{fw}},$$

где σ_{gw} и σ_{fw} — удельные избыточные поверхностные энергии границ раздела газ–стенка и жидкость–стенка.

Рис. 1.2. К определению краевого угла смачивания

Применяемый на практике технологический прием гидрофилизации стенки [23], состоящий в обработке поверхности спиртом, уменьшает краевой угол смачивания и, следовательно, уменьшает предел минимальной плотности орошения.

Пленка на наклонной плоскости. Рассмотрим тонкий слой жидкости, стекающий по твердой плоской поверхности под действием силы тяжести (рис. 1.3). Пусть α — угол наклона плоскости к горизонту. Движение считаем достаточно медленным, так что силами инерции (т.е. конвективными членами) можно пренебречь по сравнению с вязким трением и силой тяжести. Пусть толщина пленки h , которая предполагается постоянной, много меньше ее длины. В этом случае в первом приближении нормальная компонента скорости жидкости будет мала по сравнению с продольной составляющей, а производными вдоль поверхности пленки можно пренебречь по сравнению с производными по нормали.

Указанные допущения приводят к одномерному профилю скорости $V = V(Y)$ и давлению $P = P(Y)$, где Y — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности пленки. Соответствующие уравнения гидродинамики тонких пленок имеют вид условий равновесия вязкой и гравитационной сил:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 V}{dY^2} + \rho g \sin \alpha &= 0, \\ \frac{dP}{dY} - \rho g \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Уравнения следует дополнить граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dY} = 0, \quad P = P_0 & \quad \text{при } Y = 0, \\ V = 0 & \quad \text{при } Y = h, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

которые выражают равенство нулю касательного напряжения, равенство давления атмосферному давлению P_0 на свободной поверхности и условие прилипания на поверхности плоскости.

Решение задачи (1.3.1), (1.3.2) имеет вид

$$\begin{aligned} V &= U_{\max}(1 - y^2), \\ P &= P_0 + \rho gh \cos \alpha y, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где $y = Y/h$ — безразмерная поперечная координата, $U_{\max} = \frac{1}{2}(g/\nu)h^2 \sin \alpha$ — максимальная скорость течения (скорость на свободной границе).

Плотность орошения вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^h V(Y) dY = \frac{gh^3 \sin \alpha}{3\nu} = \frac{2}{3} U_{\max} h. \quad (1.3.4)$$

Среднерасходная скорость $\langle V \rangle$ составляет $2/3$ от максимальной:

$$\langle V \rangle = \frac{2}{3} U_{\max}.$$

Определим число Рейнольдса для пленочного течения:

$$\text{Re} = \frac{Q}{\nu} = \frac{gh^3 \sin \alpha}{3\nu^2}.$$

Отсюда можно выразить толщину пленки через число Рейнольдса и плотность орошения:

$$h = \left(\frac{3\nu^2}{g \sin \alpha} \text{Re} \right)^{1/3} = \left(\frac{3\nu}{g \sin \alpha} Q \right)^{1/3}.$$

Пленка на цилиндрической поверхности. Пусть тонкий слой жидкости толщиной h стекает по поверхности вертикального кругового цилиндра радиуса a . В цилиндрической системе координат \mathcal{R}, φ, Z для единственной ненулевой компоненты скорости жидкости имеем уравнение

$$\mu \left(\frac{d^2 V_Z}{d\mathcal{R}^2} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial V_Z}{\partial \mathcal{R}} \right) + \rho g = 0. \quad (1.3.5)$$

Граничные условия на стенке и свободной поверхности записываются так:

$$V_Z = 0 \quad \text{при} \quad \mathcal{R} = a, \quad \frac{dV_Z}{d\mathcal{R}} = 0 \quad \text{при} \quad \mathcal{R} = a + h. \quad (1.3.6)$$

Решение задачи (1.3.5), (1.3.6) дается формулой

$$V_Z(\mathcal{R}) = \frac{\rho g}{4\mu} \left\{ a^2 - \mathcal{R}^2 + [(a + h)^2 - a^2] \frac{\ln(\mathcal{R}/a)}{\ln(1 + h/a)} \right\}. \quad (1.3.7)$$

Двойные гидродинамические пленки. Некоторые процессы химической технологии удобно вести в двойных гидродинамических слоях (например, процессы жидкофазной экстракции, а также реакции нитрирования и сульфонирования жидких углеводородов).

На рис. 1.4 показана схема двухслойного пленочного течения и выбранная система координат. Краевая задача для X -компонент скоростей слоев $V_a(Y)$ и $V_b(Y)$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \mu_a \frac{d^2 V_a}{dY^2} - \rho_a g \sin \alpha &= 0, \\ \mu_b \frac{d^2 V_b}{dY^2} - \rho_b g \sin \alpha &= 0, \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} V_a &= 0 && \text{при} \quad Y = 0, \\ V_a &= V_b && \text{при} \quad Y = h_a, \\ \mu_a \frac{dV_a}{dY} &= \mu_b \frac{dV_b}{dY} && \text{при} \quad Y = h_a, \\ \frac{dV_b}{dY} &= 0 && \text{при} \quad Y = h_a + h_b. \end{aligned}$$

Рис. 1.4. Схема двухпленочного течения

Решение задачи о ламинарном течении двух несмешивающихся жидких пленок дается формулами [304]

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{\rho_a g \sin \alpha}{2\mu_a} \left[2 \left(h_a + h_b \frac{\rho_b}{\rho_a} \right) Y - Y^2 \right] && \text{при} \quad 0 \leq Y \leq h_a, \\ V_b &= \frac{\rho_b g \sin \alpha}{2\mu_b} \left[\left(\frac{\rho_a \mu_b}{\rho_b \mu_a} - 1 \right) h_a^2 + 2h_a h_b \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} - 1 \right) + 2(h_a + h_b) Y - Y^2 \right] \\ &&& \text{при} \quad h_a \leq Y \leq h_a + h_b. \end{aligned}$$

Для плотностей орошения в каждой из пленок имеем

$$\begin{aligned} Q_a &= \frac{\rho_a^2 h_a^3 g \sin \alpha}{3\mu_a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\rho_b h_b}{\rho_a h_a} \right), \\ Q_b &= \frac{\rho_b^2 h_b^3 g \sin \alpha}{3\mu_b} \left(1 + 3 \frac{h_a \mu_b}{h_b \mu_a} + 3 \frac{h_a^2 \rho_a \mu_b}{h_b^2 \rho_b \mu_a} \right). \end{aligned}$$

При заданном отношении плотностей орошения Q_a/Q_b отношение толщин пленок $\lambda = h_a/h_b$ удовлетворяет следующему кубическому уравнению:

$$\lambda^3 + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{Q_a}{Q_b} \right)^{2/3} \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} \right)^{7/3} - \frac{\rho_b}{\rho_a} \frac{Q_a}{Q_b} \right] \lambda^2 - 3 \left(\frac{\rho_b}{\rho_a} \right)^2 \lambda - \frac{\mu_a \rho_b^2}{\mu_b \rho_a^2} \frac{Q_a}{Q_b} = 0.$$

Результаты графического решения этого уравнения приведены в работе [304].

1.4. Струйные течения

Струйные течения представляют собой обширный и весьма распространенный класс движений вязкой жидкости. В этом разделе ограничимся рассмотрением стационарных струйных течений несжимаемой жидкости в пространстве, заполненном жидкостью с теми же физическими свойствами (так называемые «затопленные» струи). Будет рассмотрена задача о струе-источнике в безграничном пространстве [36, 98] и приведена важная для практики информация о структуре следа за движущимися телами [3, 46, 184].

Затопленная струя-источник. Рассматривается течение в безграничном пространстве, вызванное бьющей из конца тонкой трубки струей жидкости. Источник струи считается точечным, практически же размер и форма сечения насадка становятся несущественными на некотором удалении от его среза. Струя обладает осевой симметрией в направлении течения. При отсутствии «закрутки» жидкости движение, рассматриваемое в сферической системе координат (R, θ, φ) , не зависит от азимутальной угловой координаты φ и, кроме того, должно выполняться условие $V_\varphi = 0$.

Соответствующая гидродинамическая задача описывается уравнениями движения

$$\begin{aligned} V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \\ &+ \nu \left(\Delta V_R - \frac{2V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R^2} \right), \\ V_R \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_R V_\theta}{R} &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ &+ \nu \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

где

$$\Delta \equiv \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

и уравнением неразрывности, которое после введения функции тока Ψ по формулам (1.1.14) будет удовлетворяться тождественно.

Будем искать функцию тока и давление в виде

$$\Psi(R, \theta) = \nu R f(\xi), \quad P = P_i + \frac{\rho \nu^2}{R^2} g(\xi), \quad \xi = \cos \theta. \quad (1.4.2)$$

Заменим сначала в уравнениях (1.4.1) компоненты скорости жидкости через функцию тока (1.1.14), а затем подставим выражения (1.4.2). В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций f и g :

$$\begin{aligned} g &= -\frac{f^2}{2(1-\xi^2)} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} [f f' - (1-\xi^2) f''], \\ g' &= -f'' - \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \frac{f^2}{1-\xi^2}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Из системы (1.4.3) можно исключить функцию g и после трехкратного интегрирования получить для f уравнение

$$f^2 - 2(1-\xi^2)f' - 4\xi f = C_1 \xi^2 + C_2 \xi + C_3, \quad (1.4.4)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Эти постоянные должны определяться с учетом особенностей течения на оси симметрии [36]. Самое простое течение с минимальным числом особенностей описывается частным решением при $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Уравнение для f в этом случае предельно упрощается, и преобразование

$$f(\xi) = (1-\xi^2)h(\xi)$$

позволяет перейти к уравнению с разделяющимися переменными: $2h' - h^2 = 0$. Его решение дается формулой $h(\xi) = 2(A - \xi)^{-1}$, где A — еще одна постоянная интегрирования.

В результате для функций f и g получаются следующие окончательные выражения:

$$f(\xi) = \frac{2(1-\xi^2)}{A-\xi}, \quad g(\xi) = -\frac{4(A\xi-1)}{A-\xi}. \quad (1.4.5)$$

Значение постоянной A можно найти, зная единственную количественную характеристику струи-источника — ее импульс J_0 , определяемый как

$$J_0 = \int_S \rho V^2 dS, \quad (1.4.6)$$

где интегрирование ведется по площади сечения S среза насадка, из которого происходит истечение; V — локальная скорость в произвольной точке этого сечения.

Может показаться, что не менее существенной количественной характеристикой струи, влияющей на картину течения, является массовый расход $G_0 = \int_S \rho V dS$, однако это не так. В действительности значение функции тока на оси течения не имеет особенностей. Оно не испытывает скачка при переходе через начало координат и равно нулю как на луче $\theta = 0$ (т.е. при $\xi = 1$), так и на луче $\theta = \pi$ (т.е. при $\xi = -1$). Это означает, что струя-источник, создающая рассматриваемое течение, является только источником импульса, но не источником массы [36], поэтому значение G_0 несущественно для рассматриваемого поля течения.

Для того чтобы найти связь постоянной A с импульсом струи J_0 , необходимо приравнять импульсу струи осевую проекцию полного потока импульса через произвольную сферу с центром в начале координат. В этом случае найденное решение (1.4.5) позволяет установить окончательную зависимость [98]

$$J_0 = 16\pi\nu^2\rho A \left[1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A + 1}{A - 1} \right], \quad (1.4.7)$$

график которой представлен в работе [46].

При изменении импульса струи J_0 от 0 до ∞ значения A изменяются от ∞ до 1. Поскольку решение справедливо лишь для ламинарных течений, практическое применение может иметь лишь случай малых J_0 (слабые струи). В этом случае для определения A пригодна зависимость

$$A = \frac{16\pi\rho\nu^2}{J_0}. \quad (1.4.8)$$

Иногда удобно выразить постоянную A через число Рейнольдса $Re = Ud/\nu$, где d — диаметр насадка, U — характерная скорость. Полагая $J_0 = \frac{1}{4}\pi d^2\rho U^2$, можно получить

$$A = \frac{64}{Re^2}. \quad (1.4.9)$$

Поскольку согласно [3] ламинарная струя теряет устойчивость при $Re > 5$, минимальное значение A , при котором еще можно использовать указанные выше соотношения, пригодные для ламинарного истечения, составляет примерно 2,5.

Несмотря на то, что струя-источник вовлекает в движение жидкость во всем пространстве, картина линий тока, описанная, например, в монографиях [36, 46, 98], позволяет ставить вопрос о границах

струи и законе ее расширения. Дело в том, что на каждой линии тока имеется характерная точка поворота, находящаяся на минимальном расстоянии от оси струи. Множество таких точек уместно назвать границей струи. Она определяется как условный минимум функции $R \sin \theta$ при $\frac{R \sin^2 \theta}{A - \cos \theta} = \text{const}$ и является конической поверхностью с вершиной в начале координат (рис. 1.5) и углом полураствора

$$\theta_0 = \arccos \frac{1}{A}. \quad (1.4.10)$$

Из оценок (1.4.8), (1.4.9) видно, что чем сильнее струя, тем более узкой она является. При этом самой узкой ламинарной струе соответствуют значения $A \approx 2,5$ и $\theta_0 \approx 65^\circ$.

Практически интересен также вопрос о «дальнобойности» струи. Максимальная скорость, достигаемая на оси струи ($\theta = 0$) и вычисляемая с помощью полученных выше соотношений, составляет

Рис. 1.5. Линии тока вблизи ламинарной струи-источника и условная ширина струи

$$V_{\max} = \frac{\nu}{R} \frac{2}{A-1}. \quad (1.4.11)$$

Таким образом, эта скорость больше для сильных струй (более низкие значения A) и убывает с увеличением расстояния вдоль оси как R^{-1} . Подчеркнем, что все эти характеристики не зависят от расхода жидкости в струе, а определяются лишь ее импульсом.

Распределение давления в струе определяется формулами (1.4.2), (1.4.6). Вдоль оси струи (при $\xi = 1$) оно изменяется как

$$P = P_1 - 4 \frac{\rho \nu^2}{R^2}, \quad (1.4.12)$$

и, следовательно, уже на небольших расстояниях от источника практически не отличается от давления в окружающей среде.

Приближение пограничного слоя. Изложенная задача Ландау представляет собой пример точного решения уравнений Навье — Стокса. Иной, приближенный подход к решению задачи о струе-источнике был предложен Шлихтингом [184]. Этот подход основан на приближениях теории пограничного слоя (см. разд. 1.6) и состоит в том, что градиенты нормальных напряжений в уравнениях движения не учитываются. В цилиндрической системе координат (\mathcal{R} , φ , Z) с

учетом осевой симметрии ($V_\varphi = 0$) при отсутствии «закрутки» потока ($\partial/\partial\varphi = 0$) система уравнений пограничного слоя имеет вид

$$\begin{aligned} V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} + V_{\mathcal{R}} \frac{\partial V_Z}{\partial \mathcal{R}} &= \frac{\nu}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \left(\mathcal{R} \frac{\partial V_Z}{\partial \mathcal{R}} \right), \\ \frac{\partial V_Z}{\partial Z} + \frac{\partial V_{\mathcal{R}}}{\partial \mathcal{R}} + \frac{V_{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}} = 0, \quad \frac{\partial V_Z}{\partial \mathcal{R}} = 0 & \quad \text{при} \quad \mathcal{R} = 0, \\ V_Z \rightarrow 0 & \quad \text{при} \quad \mathcal{R} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Функцию тока Ψ , вводимую с помощью соотношений

$$V_Z = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{R}}, \quad V_{\mathcal{R}} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad (1.4.15)$$

ищем в виде

$$\Psi = \nu Z F(\eta), \quad \eta = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{KZ}}, \quad (1.4.16)$$

где η — автомодельная переменная.

В результате для определения F можно получить следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \left(F'' - \frac{F'}{\eta} \right)' + \left(\frac{FF'}{\eta} \right)' &= 0, \\ \frac{F'}{\eta} = 1, \quad \frac{F}{\eta} = 0 & \quad \text{при} \quad \eta = 0, \\ F' \rightarrow 0 & \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Постоянная K в автомодельной переменной определяется импульсом струи J_0

$$K = \frac{16\pi}{3} \frac{\rho\nu^2}{J_0}. \quad (1.4.18)$$

Задача (1.4.17) допускает точное решение в замкнутой форме. Окончательное выражение для поля скорости имеет вид [184]

$$\begin{aligned} V_Z &= \frac{3}{8\pi} \frac{J_0}{\rho\nu} \frac{1}{Z} \left(1 + \frac{\eta^2}{4} \right)^{-2}, \\ V_{\mathcal{R}} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi} \frac{J_0}{\rho}} \frac{1}{Z} \left(\eta - \frac{\eta^3}{4} \right) \left(1 + \frac{\eta^2}{4} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Решение (1.4.19), естественно, отличается от решения Ландау, но многие качественные особенности течения остаются прежними. Например, зависимость поля скорости лишь от импульса струи или убывание скорости на оси струи обратно пропорционально расстоянию от источника.

Как уже отмечалось ранее, решение для ламинарной струи имеет ограниченное практическое применение (лишь для $Re < 5$). Однако, как показано в работе [184], аналогичный подход может быть распространен и на случай турбулентных струй. Оказывается, для турбулентных струйных течений кажущаяся кинематическая турбулентная вязкость ν_t является постоянной. Однако эта константа может быть определена лишь эмпирически, поскольку зависит от геометрических особенностей насадка, из которого происходит истечение струи. Тем не менее, распределение скоростей в струе по-прежнему определяется формулами (1.4.19) с той только разницей, что физическую постоянную среды ν следует заменить эмпирической константой ν_t . Экспериментальное определение этой величины составляет отдельную проблему. Заметим только, что для оценочных расчетов можно воспользоваться соотношением для постоянной K , приведенным в работе [3]:

$$K = \frac{16\pi}{3} \frac{\rho\nu_t^2}{J_0} \quad (K \approx 0,002 \div 0,005).$$

Структура следа за движущимися телами. Течение в следе за телами, движущимися в безграничной неподвижной жидкости, обладает всеми атрибутами свободных струйных течений и может быть рассчитано методами теории пограничного слоя [184]. Заметим, что спутные течения позади движущегося тела почти всегда являются турбулентными, даже если пограничный слой на теле остается ламинарным. Это является следствием наличия точек перегиба на всех без исключения профилях скорости спутного потока. Как известно [184], такие распределения скорости являются особенно неустойчивыми.

Для практических оценок приведем распределение осевой составляющей скорости в направлении, совпадающем с направлением движения плоского тела [184]:

$$\frac{V_X}{U_i} = 1 - \left(\frac{c_f d}{\beta X} \right)^{1/2}. \quad (1.4.20)$$

Здесь c_f — коэффициент лобового сопротивления тела, β — эмпирическая константа. Координата X отсчитывается от кормовой точки тела. Формула справедлива при $X \gg d$, т.е. описывает лишь так называемый «дальний» след.

Зависимость скорости спутного течения от поперечной координаты Y характеризуется множителем $\exp\left(\frac{U_1 Y^2}{\nu_t X}\right)$. Поэтому локальная полуширина спутного следа $b(X)$ является величиной условной. Если принять за величину b значение координаты Y , при которой локальная скорость спутного потока составляет половину осевой, то

$$b(X) = (\beta c_f X d)^{1/2}. \quad (1.4.21)$$

Аналогичные соотношения для спутного течения за телом вращения имеют вид [184]

$$\frac{V_X}{U_1} = 1 - \left(\frac{c_f F}{\beta^2 X^2}\right)^{1/3}, \quad b(X) = (\beta c_f F X)^{1/3}. \quad (1.4.22)$$

Здесь F — площадь миделева сечения движущегося тела. В формулах (1.4.20) — (1.4.22) β есть эмпирическая константа, значение которой зависит от геометрии тела и режимов течения. Согласно измерениям Шлихтинга [184] по обтеканию цилиндров $\beta \approx 0,18$.

1.5. Ламинарное течение в трубах различной формы

Ламинарное установившееся течение жидкости в трубах различной формы изучалось многими авторами (см., например, [103, 178, 184]). Такие течения часто встречаются на практике (водо-, газо- и нефтепроводы, теплообменники и др.). Важно отметить, что соответствующие уравнения гидродинамики в этих случаях допускают точное аналитическое решение. Ниже будут описаны наиболее важные результаты в этой области.

Постановка задачи. Рассмотрим ламинарное стабилизированное течение жидкости в прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения. Линии тока жидкости в таких системах строго параллельны (влиянием концевых участков трубы на течение пренебрегаем). Будем использовать декартову систему координат X, Y, Z , где ось Z направлена вдоль по потоку. Учтем, что поперечные составляющие скорости жидкости равны нулю, а продольная составляющая зависит только от поперечных координат. Уравнение неразрывности (1.1.1) и первые два уравнения Навье — Стокса (1.1.2) в этом случае удовлетворяются автоматически, а из третьего уравнения (1.1.2) получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dZ}, \quad (1.5.1)$$

где для продольной компоненты скорости использовано краткое обозначение $V \equiv V_z$.

Уравнение (1.5.1) следует дополнить условием прилипания

$$V = 0 \quad (\text{на поверхности трубы}). \quad (1.5.2)$$

Градиент давления dP/dZ в стационарных условиях является постоянным вдоль образующей трубы и может быть записан в виде

$$\frac{dP}{dZ} = -\frac{\Delta P}{L}, \quad (1.5.3)$$

где $\Delta P > 0$ — полный перепад давления на участке трубы длиной L .

Основными характеристиками течения в трубе являются объемный расход жидкости

$$Q = \int_S V dS \quad (1.5.4)$$

и средняя скорость потока

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{S}, \quad (1.5.5)$$

где S — площадь поперечного сечения трубы.

Плоский канал. Рассмотрим сначала течение между двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися друг от друга на расстоянии h . Координату X будем отсчитывать от одной из плоскостей перпендикулярно ее поверхности. Учитывая, что скорость жидкости не зависит от координаты Y , из уравнения (1.5.1) получим

$$\frac{d^2V}{dX^2} = -\frac{\Delta P}{\mu L}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям прилипания на поверхностях плоскостей ($V = 0$ при $X = 0$ и $X = h$), имеет вид

$$V = \frac{\Delta P}{2\mu L} X(h - X). \quad (1.5.6)$$

Формула (1.5.6) описывает параболическое распределение скоростей жидкости в плоском течении Пуазейля, которое симметрично относительно середины канала $X = \frac{1}{2}h$.

Объемный расход на единицу ширины канала находится интегрированием (1.5.6) по сечению:

$$Q = \frac{h^3 \Delta P}{12\mu L}. \quad (1.5.7)$$

Средняя скорость определяется выражением

$$\langle V \rangle = \frac{h^2 \Delta P}{12 \mu L}. \quad (1.5.8)$$

Максимальная скорость жидкости достигается в середине канала:

$$U_{\max} = \frac{h^2 \Delta P}{8 \mu L} \quad (\text{при } X = \frac{1}{2} h).$$

Круглая труба. В случае круглой трубы уравнение (1.5.1) с учетом (1.5.3) принимает вид

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}} \left(\mathcal{R} \frac{\partial V}{\partial \mathcal{R}} \right) = -\frac{\Delta P}{\mu L}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (1.5.9)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию прилипания на поверхности трубы радиуса a ($V = 0$ при $\mathcal{R} = a$), описывает осесимметричное течение Пуазейля с параболическим профилем скорости жидкости:

$$V = \frac{\Delta P}{4 \mu L} (a^2 - \mathcal{R}^2). \quad (1.5.10)$$

Объемный расход получается интегрированием по площади поперечного сечения:

$$Q = 2\pi \int_0^a \mathcal{R} V d\mathcal{R} = \frac{\pi a^4 \Delta P}{8 \mu L}. \quad (1.5.11)$$

Используя формулу (1.5.5), находим среднюю скорость

$$\langle V \rangle = \frac{a^2 \Delta P}{8 \mu L}. \quad (1.5.12)$$

Максимальная скорость жидкости достигается в центре трубы:

$$U_{\max} = \frac{a^2 \Delta P}{4 \mu L} \quad (\text{при } \mathcal{R} = 0). \quad (1.5.13)$$

Рассмотрим теперь течение в кольцевом канале между двумя соосными круговыми цилиндрами с радиусами a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$). В этом случае остается справедливым уравнение (1.5.9). Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям прилипания на поверхностях цилиндров

$$V = 0 \quad \text{при } \mathcal{R} = a_1, \quad V = 0 \quad \text{при } \mathcal{R} = a_2,$$

имеет вид

$$V = \frac{\Delta P}{4\mu L} \left[a_2^2 - \mathcal{R}^2 + \frac{a_2^2 - a_1^2}{\ln(a_2/a_1)} \ln \frac{\mathcal{R}}{a_2} \right]. \quad (1.5.14)$$

Расход следует вычислять по формуле

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8\mu L} \left[a_2^4 - a_1^4 - \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{\ln(a_2/a_1)} \right]. \quad (1.5.15)$$

Труба эллиптического поперечного сечения. Рассмотрим теперь трубу эллиптического сечения с полуосями a и b , поверхность которой задается уравнением

$$\left(\frac{X}{a} \right)^2 + \left(\frac{Y}{b} \right)^2 = 1. \quad (1.5.16)$$

Решение уравнения (1.5.1), удовлетворяющее условию прилипания на поверхности эллипса (1.5.16), имеет вид [178]

$$V = \frac{a^2 b^2 \Delta P}{2\mu L (a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \right). \quad (1.5.17)$$

Расход жидкости для этого течения равен

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{4\mu L} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (1.5.18)$$

Используя формулу (1.5.5), находим среднюю скорость

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta P}{4\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (1.5.19)$$

Максимальная скорость достигается на оси трубы:

$$U_{\max} = \frac{a^2 b^2 \Delta P}{2\mu L (a^2 + b^2)} \quad (\text{при } X = Y = 0). \quad (1.5.20)$$

В частном случае $a = b$ формулы (1.5.17) — (1.5.20) переходят в соответствующие формулы для круглой трубы (1.5.10) — (1.5.13).

Труба прямоугольного сечения. Рассмотрим теперь трубу прямоугольного сечения со сторонами a и b . Будем считать, что область течения описывается неравенствами $0 \leq X \leq a$, $0 \leq Y \leq b$. Решение уравнения (1.5.1), удовлетворяющее условиям прилипания на поверхности трубы, имеет вид [178]

$$V = -\frac{\Delta P}{2\mu L} X(X-a) + \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m X}{a}\right) \left(A_m \operatorname{ch} \frac{\pi m Y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{\pi m Y}{a} \right),$$

$$A_m = \frac{a^2 \Delta P}{\pi^3 m^3 \mu L} [\cos(\pi m) - 1], \quad B_m = -A_m \frac{\operatorname{ch}(\pi m k) - 1}{\operatorname{sh}(\pi m k)}, \quad k = \frac{b}{a}. \quad (1.5.21)$$

Интегрируя выражение для V , получим расход жидкости

$$Q = \frac{\Delta P}{24\mu L} ab(a^2 + b^2) - \frac{8\Delta P}{\pi^5 \mu L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^5} \left[a^4 \operatorname{th}\left(\pi b \frac{2m-1}{2a}\right) + b^4 \operatorname{th}\left(\pi a \frac{2m-1}{2b}\right) \right]. \quad (1.5.22)$$

Для трубы квадратного сечения со стороной a эта формула принимает вид

$$Q = \frac{a^4 \Delta P}{12\mu L} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^5} \operatorname{th}\left(\pi \frac{2m-1}{2}\right) \right], \quad (1.5.23)$$

и после суммирования ряда

$$Q = 0,0351 \frac{a^4 \Delta P}{\mu L}.$$

Последнее выражение полезно переписать следующим образом:

$$\frac{Q}{Q_0} = 0,883,$$

где Q_0 — расход жидкости через круглую трубу с такой же площадью поперечного сечения, как и у трубы с квадратным поперечным сечением. Уменьшение расхода обусловлено наличием у сечения трубы угловых точек, в окрестности которых скорость вязкой жидкости заметно снижается.

Труба треугольного сечения. Пусть сечением трубы является равносторонний треугольник со стороной b . Начало координат выберем в центре поперечного сечения, причем координату X будем отсчитывать вдоль одной из сторон треугольника. Решение уравнения (1.5.1), удовлетворяющее граничному условию (1.5.2), в этом случае имеет вид

$$V = \frac{\sqrt{3} \Delta P}{6\mu b L} \left(Y - \frac{b}{2\sqrt{3}} \right) \left(Y + \sqrt{3} X - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \left(Y - \sqrt{3} X - \frac{b}{\sqrt{3}} \right).$$

Объемный расход этого течения определяется формулой

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{320} \frac{b^4 \Delta P}{\mu L}.$$

Этот расход полезно сравнить с расходом для круглой трубы с равной площадью поперечного сечения:

$$\frac{Q}{Q_0} = 0,726.$$

Из этого выражения видно, что расход жидкости через трубу с сечением в виде равностороннего треугольника существенно ниже расхода через каналы квадратного или круглого сечения такой же площади.

1.6. Продольное обтекание плоской пластины. Пограничный слой

Для практики весьма типичны случаи внешнего обтекания протяженных неподвижных элементов аппаратуры — пластин, направляющих элементов, труб. Проявление внешних массовых сил может быть в этом случае несущественно, а гидродинамические закономерности будут определяться соотношением давления, вязких и инерционных сил. Система безразмерных стационарных уравнений гидродинамики примет в этом случае вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Система содержит единственный параметр — число Рейнольдса, и возможность упрощения этой нелинейной, сложной для решения системы связана с предельными переходами по этому параметру при $\text{Re} \rightarrow 0$ и $\text{Re} \rightarrow \infty$. В этом разделе ищется решение задачи о продольном обтекании плоской пластины в случае $\text{Re} \rightarrow \infty$, когда моделируется «жидкость с исчезающей вязкостью». Последний термин не следует понимать буквально — как обоснование возможности пренебрежения членом $\text{Re}^{-1} \Delta \vec{v}$ и перехода к системе уравнений для идеальной жидкости. Математически проблема осложняется тем, что малый параметр Re^{-1} стоит здесь перед членом со старшими производными. Отбрасывание этого члена меняет порядок и тип уравнения. При этом решение системы при $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$ совсем не обязательно будет стремиться к решению системы при $\text{Re}^{-1} = 0$. Здесь имеет место сингулярное возмущение [38]. Кроме того, ясно из физических соображений, что идеальная жидкость не может удовлетворить условию прилипания на поверхности обтекаемого тела. В действительности тангенциальная скорость меняется от нуля на границе тела до скорости невозмущенного потока при удалении от него.

Для маловязких жидкостей такое изменение скорости происходит на протяжении тонкого, примыкающего к поверхности тела слоя жидкости. Л. Прандтль назвал этот слой пограничным слоем. Величина $\Delta \vec{v}$ в этом слое является очень значительной. Таким образом, несмотря на малость параметра Re^{-1} , величиной $\text{Re}^{-1} \Delta \vec{v}$ в пограничном слое пренебрегать нельзя. Тем не менее, неравноправность продольной и поперечной координаты в пограничном слое позволяет упростить систему уравнений. Формальная оценка членов во втором уравнении (1.6.1) для этой цели описана в монографиях [100, 103, 184].

Запишем окончательную систему уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости. Для простоты будем рассматривать стационарную задачу продольного обтекания безградиентным ($\nabla P \equiv 0$)

поток плоской полубесконечной ($0 \leq X < \infty$) пластины:

$$\begin{aligned} V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_X}{\partial Y} &= \nu \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Уравнения (1.6.2) записаны в размерной форме, что связано с некоторой трудностью введения масштаба длины l_* , поскольку задача не имеет никакого собственного характерного линейного размера.

В качестве граничных условий естественно потребовать:

$$\begin{aligned} Y = 0, \quad V_X = V_Y = 0, \\ Y \rightarrow \infty, \quad V_X \rightarrow U_i. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Следуя Блазиусу [201], выразим компоненты скорости жидкости через функцию тока Ψ по формулам (1.1.10) и подставим их в первое уравнение (1.6.2). После этого ищем функцию тока в виде

$$\Psi(X, Y) = \sqrt{\nu X U_i} f(\eta), \quad \eta = Y \sqrt{\frac{U_i}{\nu X}}, \quad (1.6.4)$$

где η — автомодельная переменная.

Для определения функции $f(\eta)$ получим краевую задачу:

$$\begin{aligned} 2f''' + ff'' &= 0; \\ \eta = 0, \quad f &= 0; \quad f' = 0; \\ \eta \rightarrow \infty, \quad f' &\rightarrow 1, \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

решение которой получено численно и подробно затабулировано, например, в [184].

Компоненты скорости жидкости вычисляются с помощью (1.1.10) по формулам

$$V_X = U_i f'(\eta), \quad V_Y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_i}{X}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]. \quad (1.6.6)$$

Полученное решение позволяет также вычислить ряд величин, представляющих практический интерес. Так, для локального напряжения трения на стенке имеем

$$\tau_w(X) = \mu \left(\frac{\partial V_X}{\partial Y} \right)_{Y=0} = \mu U_i \sqrt{\frac{U_i}{\nu X}} f''(0) = 0,332 \mu U_i \sqrt{\frac{U_i}{\nu X}}, \quad (1.6.7)$$

а для локального коэффициента трения

$$c_f(X) = \frac{\tau_w(X)}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{U_i X}}. \quad (1.6.8)$$

Интегральный коэффициент трения пластины длиной l вычисляется с помощью следующей формулы:

$$\bar{c}_f = \frac{1}{l} \int_0^l c_f(X) dX = 1,328 \operatorname{Re}_l^{-0,5}, \quad (1.6.9)$$

где $\operatorname{Re}_l = U_i l / \nu$ — число Рейнольдса для обтекаемой пластины.

Формула (1.6.8) известна как закон Блазиуса для сопротивления продольно обтекаемой пластины. Она применима в области ламинарного течения, т.е. при $\operatorname{Re}_l < 3,5 \cdot 10^5$.

Хотя в такой постановке задачи пограничный слой считается асимптотическим, т.е. простирающимся по координате Y до бесконечности, можно приближенно оценить его толщину, условно приняв, что на его границе скорость отличается от скорости невозмущенного потока не более чем на 1%*. В этом случае за условную толщину слоя принимается

$$\delta(X) \approx 5 \sqrt{\nu X / U_i}. \quad (1.6.10)$$

Решение Блазиуса свидетельствует, что профили продольной скорости для всех сечений пограничного слоя являются аффинно подобными.

Следует отметить, что тщательная экспериментальная проверка выводов теории Блазиуса, проведенная Никурадзе, подтвердила их справедливость как в отношении профилей скорости, так и в отношении коэффициентов трения [184].

В приложениях [30] иногда встречается «обращенная» постановка задачи Блазиуса, когда полубесконечная пластина движется в своей плоскости со скоростью U_i . В этом случае вместо краевой задачи (1.6.5) следует решать следующую задачу:

$$\begin{aligned} 2f''' + ff'' &= 0; \\ \eta = 0, \quad f &= 0; \quad f' = 1; \\ \eta \rightarrow \infty, \quad f' &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

* Помимо условной толщины пограничного слоя, используются также следующие определения: для толщины вытеснения $\delta_* = \int_0^\infty (1 - V_X/U_i) dY$ и толщины потери импульса $\delta_{**} = \int_0^\infty (V_X/U_i)(1 - V_X/U_i) dY$. Согласно решению Блазиуса $\delta_* = 1,7208 \sqrt{\nu X / U_i}$, $\delta_{**} = 0,664 \sqrt{\nu X / U_i}$.

Эта задача также решена численно, и функция $f(\eta)$ затабулирована в [296]. Следует отметить, что в этом случае решение отличается от соответствующего решения задачи Блазиуса. Таким образом, несмотря на кажущуюся возможность физического «обращения» течения, решение показывает, что математически такое «обращение» невозможно, что является следствием нелинейности задач (1.6.5) и (1.6.11).

Локальное напряжение трения на стенке в этом случае задается, в отличие от (1.6.7), выражением

$$\tau_w(X) = 0,444 \mu U_i \sqrt{\frac{U_i}{\nu X}}. \quad (1.6.12)$$

Турбулентный пограничный слой на пластине. Течение в пограничном слое на пластине остается ламинарным вплоть до $Re_X = U_i X / \nu \approx 10^6$. На более длинной пластине пограничный слой турбулизуется: происходит резкое увеличение его толщины и перестройка профиля продольной скорости. По данным [184], толщина турбулентного пограничного слоя меняется по закону

$$\delta(X) = 0,37 X \left(\frac{U_i X}{\nu} \right)^{-1/5}. \quad (1.6.13)$$

Распределение скоростей в пограничном слое достаточно хорошо описывается законом

$$\frac{V_X}{U_i} = \left[\frac{Y}{\delta(X)} \right]^{1/7}. \quad (1.6.14)$$

Для коэффициента сопротивления при одностороннем турбулентном обтекании пластины длиной l справедлива оценка

$$c_f = 0,072 \left(\frac{U_i l}{\nu} \right)^{-1/5}. \quad (1.6.15)$$

Нестационарные режимы обтекания пластины. Известны два точных решения уравнений нестационарного пограничного слоя на пластине [184]. Они относятся к сравнительно простым течениям, описываемым линейными уравнениями движения. Однако линейризация уравнений Навье — Стокса связана в этих случаях не с приближенным отбрасыванием нелинейных конвективных членов, а с их тождественным обращением в нуль ($V_X \partial V_X / \partial X \equiv 0$), так что уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial V_X}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} = 0. \quad (1.6.16)$$

Одна из задач, известная как первая задача Стокса, описывает течение вблизи безграничной пластины, внезапно приведенной в движение в своей плоскости со скоростью U_0 . В этом случае начальные и граничные условия для уравнения (1.6.16) записываются так:

$$V_X = 0 \text{ при } t = 0, \quad V_X = U_0 \text{ при } Y = 0, \quad V_X = 0 \text{ при } Y \rightarrow \infty. \quad (1.6.17)$$

Решение задачи (1.6.16), (1.6.17) определяется формулой

$$V_X(t, Y) = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{2\sqrt{\nu t}}\right), \quad (1.6.18)$$

где $\operatorname{erfc} z = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^z \exp(-x^2) dx$ — дополнительный интеграл вероятности.

Другая допускающая точное решение нестационарная задача, известная как вторая задача Стокса, описывает течение вблизи безграничной пластины, колеблющейся в своей плоскости. Эта задача относится к так называемым задачам без начальных данных. Граничные условия в этом случае формулируются так:

$$V_X = U_0 \cos \omega t \text{ при } Y = 0, \quad V_X = 0 \text{ при } Y \rightarrow \infty. \quad (1.6.19)$$

Решение задачи (1.6.16), (1.6.19) имеет вид

$$V_X(t, Y) = U_0 \exp\left(-Y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \cos\left(\omega t - Y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right). \quad (1.6.20)$$

Это выражение показывает, что с удалением от плоскости колебания жидкости убывают по амплитуде и все более отстают по фазе.

2. Движение частиц, капель и пузырей в жидкости

Решение задачи о взаимодействии твердой частицы, капли или пузыря с окружающей дисперсной средой лежит в основе расчета многих технологических процессов. Среди промышленных приложений такого взаимодействия отметим осветление суспензий в гидроциклонах, осаждение коллоидов, пневмотранспорт, псевдооживление, гетерогенный катализ на взвешенных частицах, растворение твердых частиц, экстракцию из капель, абсорбцию и испарение в пузыри [29, 39, 87, 153, 172].

Описание целого ряда метеорологических явлений также базируется на анализе движения совокупности капель в воздухе. Проблема все увеличивающейся загрязненности атмосферы требует понимания и описания процессов переноса атмосферой механических, химических и радиоактивных частиц.

В разреженных системах частиц (капель или пузырей) эффектами взаимодействия в первом приближении можно пренебречь и ограничиться изучением движения одиночной частицы в жидкости или газе. При этом структура линий тока в окрестности частицы будет зависеть от ее формы, типа течения (поступательного или сдвигового) и ряда других геометрических факторов.

Один из основных методов приближенного аналитического решения соответствующих гидродинамических задач заключается в линеаризации уравнений Навье — Стокса при малых числах Рейнольдса. Этот метод часто используется в данной главе для исследования движения малых частиц, капель и пузырей в жидкости.

2.1. Общее решение уравнений Стокса в осесимметричном случае

Один из основных подходов для анализа и упрощения уравнений Навье — Стокса заключается в полном или частичном пренебрежении нелинейными инерционными членами $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ по сравнению с линейными вязкими членами $\nu \Delta \vec{V}$. Этот метод оправдан при $Re = LU/\nu \ll 1$ и широко используется для исследования движения частиц, капель и пузырей в жидкости. Малые числа Рейнольдса характерны для следующих трех случаев: медленных (ползущих) течений, сильно вязких жидкостей, малых размеров частиц.

Для установившихся течений вязкой несжимаемой жидкости пренебрежение в (1.1.4) инерционными членами и учет всех консерватив-

ных массовых сил в давлении P приводит к уравнениям Стокса:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V} &= 0, \\ \mu \Delta \vec{V} &= \nabla P.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Уравнения Стокса (2.1.1) являются линейными и существенно проще нелинейных уравнений Навье — Стокса. Если два решения $\{\vec{V}_1, P_1\}$ и $\{\vec{V}_2, P_2\}$ по отдельности удовлетворяют уравнениям (2.1.1), то этим же уравнениям удовлетворяет сумма $\{\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2, \alpha P_1 + \beta P_2\}$ при любых значениях параметров α и β .

В осесимметричных задачах в сферической системе координат R, θ, φ все величины не зависят от координаты φ и третья компонента скорости жидкости равна нулю: $V_\varphi = 0$. Уравнения Стокса (2.1.1) в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 V_R) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) &= 0, \\ \mu \left(\Delta V_R - \frac{2V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R^2} \right) &= \frac{\partial P}{\partial R}, \\ \mu \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} \right) &= \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta},\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Компоненты скорости жидкости можно выразить через функцию тока Ψ :

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}.\tag{2.1.3}$$

В этом случае первое уравнение (2.1.2) (уравнение неразрывности) удовлетворяется автоматически. Подставим выражения (2.1.3) во второе и третье уравнения (2.1.2). В результате исключения членов с давлением, приходим к следующему уравнению для функции тока:

$$E^2 (E^2 \Psi) = 0, \quad E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).\tag{2.1.4}$$

Общее решение уравнения (2.1.4) имеет вид [178]

$$\begin{aligned}\Psi(R, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n R^n + B_n R^{1-n} + C_n R^{n+2} + D_n R^{3-n}) \mathcal{J}_n(\cos \theta) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (\tilde{A}_n R^n + \tilde{B}_n R^{1-n} + \tilde{C}_n R^{n+2} + \tilde{D}_n R^{3-n}) \mathcal{H}_n(\cos \theta),\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

где $A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ — произвольные постоянные; $\mathcal{J}_n(\zeta)$ и $\mathcal{H}_n(\zeta)$ — функции Гегенбауэра первого и второго рода, которые линейно связаны с функциями Лежандра $P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$:

$$\mathcal{J}_n(\zeta) = \frac{P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n-1}, \quad \mathcal{H}_n(\zeta) = \frac{Q_{n-2}(\zeta) - Q_n(\zeta)}{2n-1} \quad (n \geq 2).$$

Функции Гегенбауэра первого рода выражаются при помощи конечного степенного ряда:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(\zeta) &= -\frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^{n-2} \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^{n-1} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{1 \cdot 2 \dots n} \left[\zeta^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-3)} \zeta^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-3)(2n-5)} \zeta^{n-4} - \dots \right]. \end{aligned}$$

В частных случаях имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(\zeta) &= 1, \quad \mathcal{J}_1(\zeta) = -\zeta, \quad \mathcal{J}_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2), \quad \mathcal{J}_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(1 - \zeta^2), \\ \mathcal{J}_4(\zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \zeta^2)(5\zeta^2 - 1), \quad \mathcal{J}_5(\zeta) = \frac{1}{8}\zeta(1 - \zeta^2)(7\zeta^2 - 3). \end{aligned}$$

Функции Гегенбауэра второго рода определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\zeta) &= -\zeta, \quad \mathcal{H}_1(\zeta) = -1, \\ \mathcal{H}_n(\zeta) &= \frac{1}{2} \mathcal{J}_n(\zeta) \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \mathcal{K}_n(\zeta), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

где функция $\mathcal{K}_n(\zeta)$ выражается через функции Гегенбауэра первого рода:

$$\mathcal{K}_n(\zeta) = - \sum_k^{\frac{1}{2}n \leq k \leq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} \frac{(2n-4k+1)}{(2k-1)(n-k)} \left[1 - \frac{(2k-1)(n-k)}{n(n-1)} \right] \mathcal{J}_{n-2k+1}(\zeta),$$

причем ряды начинаются или с \mathcal{J}_0 или с \mathcal{J}_1 в зависимости от того, нечетное или четное n . В частных случаях имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta, \quad \mathcal{K}_3(\zeta) = \frac{1}{6}(3\zeta^2 - 2), \\ \mathcal{K}_4(\zeta) &= \frac{1}{24}\zeta(15\zeta^2 - 13), \quad \mathcal{K}_5(\zeta) = \frac{1}{120}(105\zeta^4 - 115\zeta^2 + 16). \end{aligned}$$

При $n \geq 2$ функции Гегенбауэра второго рода бесконечны в точках $\zeta = \pm 1$, что отвечает $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Поэтому, если в физической постановке задачи отсутствуют сингулярные особенности, то помеченные «тильдой» в формуле (2.1.5) постоянные должны равняться нулю. Кроме того, при $n = 0$ и $n = 1$ оставшиеся постоянные приводят

к бесконечным тангенциальным скоростям V_θ на оси потока. Поэтому в подавляющем большинстве задач об обтекании частиц, капель и пузырей стоксовым потоком функция тока в сферических координатах может быть представлена в форме

$$\Psi(R, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n R^n + B_n R^{1-n} + C_n R^{n+2} + D_n R^{3-n}) \mathcal{J}_n(\cos \theta). \quad (2.1.6)$$

Компоненты скорости жидкости и давление, соответствующие такому течению, определяются по формулам

$$\begin{aligned} V_R &= - \sum_{n=2}^{\infty} (A_n R^{n-2} + B_n R^{-n-1} + C_n R^n + D_n R^{1-n}) P_{n-1}(\cos \theta), \\ V_\theta &= \sum_{n=2}^{\infty} [nA_n R^{n-2} - (n-1)B_n R^{-n-1} + \\ &\quad + (n+2)C_n R^n - D_n(n-3)R^{1-n}] \frac{\mathcal{J}_n(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\ p &= -2\mu \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1} C_n R^{n-1} + \frac{2n-3}{n} D_n R^{-n} \right) P_{n-1}(\cos \theta) + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

В этом случае жидкость действует на любую сферическую границу, описываемую уравнением $R = \text{const}$, с силой

$$F_Z = 4\pi\mu D_2. \quad (2.1.8)$$

Интересно отметить, что сила определяется только одним коэффициентом ряда (2.1.6).

Формулы (2.1.6) — (2.1.8) являются основой для решения широкого класса задач химической гидродинамики.

2.2. Обтекание сферической частицы, капли и пузыря поступательным стоксовым потоком

Обтекание сферической частицы. Рассмотрим твердую сферическую частицу радиуса a , обтекаемую однородным поступательным стоксовым потоком со скоростью U_1 (рис. 2.1). Считаем, что жидкость имеет динамическую вязкость μ . Для анализа используем сферическую систему координат R, θ, φ , связанную с центром частицы. Угол θ отсчитываем от направления набегающего потока (т.е. от

Рис. 2.1. Схема обтекания сферической частицы поступательным стоксовым потоком

задней критической точки на поверхности частицы). В силу осевой симметрии задачи только две компоненты скорости жидкости V_R , V_θ отличны от нуля и все искомые величины не зависят от третьей координаты φ .

Распределение скоростей жидкости описывается уравнениями Стокса (2.1.1), граничными условиями прилипания на поверхности твердой сферы

$$V_R = V_\theta = 0 \quad \text{при} \quad R = a \quad (2.2.1)$$

и граничными условиями на бесконечности

$$V_R \rightarrow U_i \cos \theta, \quad V_\theta \rightarrow -U_i \sin \theta \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.2.2)$$

которые соответствуют однородности невозмущенного потока вдали от частицы (1.1.6).

Переходя от компонент скорости жидкости V_R , V_θ к функции тока Ψ по формулам (2.1.3), получим уравнение (2.1.4). Из граничных условий вдали от частицы (2.2.2) следует, что в общем решении (2.1.5) достаточно ограничиться первым членом, соответствующим значению $n = 2$. Условия прилипания (2.2.1) позволяют определить неизвестные постоянные A_2 , B_2 , C_2 , D_2 . В итоге для функции тока можно получить следующее выражение:

$$\Psi = \frac{1}{2} U_i R^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{R^3} \right) \sin^2 \theta. \quad (2.2.3)$$

Отсюда находим компоненты скоростей жидкости и давление

$$\begin{aligned} V_R &= U_i \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{R} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{R^3} \right) \cos \theta, \\ V_\theta &= -U_i \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{R} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{R^3} \right) \sin \theta, \\ P &= P_i - \frac{3\mu U_i a \cos \theta}{2R^2}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Рис. 2.2. Схема обтекания сферической капли поступательным стоксовым потоком

где P_i — невозмущенное давление вдали от частицы.

Динамическое взаимодействие среды и жидкости характеризуется силой сопротивления, которая определяется как проекция всех гидродинамических сил на направление потока:

$$F = \int_S (\tau_{RR} \cos \theta - \tau_{R\theta} \sin \theta) ds,$$

где S — поверхность частицы.

Напряжения на поверхности сферы задаются соотношениями

$$\tau_{RR} = \left(-P + 2\mu \frac{\partial V_R}{\partial R} \right)_{R=a}, \quad \tau_{R\theta} = \mu \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} \right)_{R=a}.$$

Используя выражения (2.2.4) и проводя интегрирование, получим силу сопротивления, действующую на сферическую частицу со стороны жидкости за счет вязкости:

$$F = 6\pi\mu a U_i, \quad (2.2.5)$$

которая называется формулой Стокса.

Обтекание сферической капли и пузыря. Рассмотрим теперь сферическую каплю радиуса a , обтекаемую поступательным стоксовым потоком другой жидкости со скоростью U_i (рис. 2.2). Считаем, что динамические вязкости жидкостей вне и внутри капли равны μ_1 и μ_2 . Все искомые величины вне и внутри капли будем пометать соответственно верхними индексами (1) и (2).

Для определения скорости жидкости и давления в каждой фазе будем использовать уравнения Стокса (2.1.1). Как и ранее, условие однородности потока вдали от капли имеет вид (2.2.2).

Ниже перечислены четыре условия, которые должны выполняться на границе сферической капли.

Условие непротекания:

$$V_R^{(1)} = V_R^{(2)} = 0 \quad \text{при } R = a. \quad (2.2.6)$$

Условие непрерывности тангенциальной компоненты скорости:

$$V_\theta^{(1)} = V_\theta^{(2)} \quad \text{при } R = a. \quad (2.2.7)$$

Условие равенства скачка нормальных напряжений избыточному давлению за счет действия сил поверхностного натяжения:

$$P^{(1)} - 2\mu_1 \frac{\partial V_R^{(1)}}{\partial R} + \frac{2\sigma}{a} = P^{(2)} - 2\mu_2 \frac{\partial V_R^{(2)}}{\partial R} \quad \text{при } R = a, \quad (2.2.8)$$

где σ — межфазное поверхностное натяжение.

Следствие условия непрерывности касательных напряжений:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial V_\theta^{(1)}}{\partial R} - \frac{V_\theta^{(1)}}{R} \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial V_\theta^{(2)}}{\partial R} - \frac{V_\theta^{(2)}}{R} \right) \quad \text{при } R = a. \quad (2.2.9)$$

Кроме того, используются также условия ограниченности решения в центре капли:

$$V_R^{(2)} < \infty, \quad V_\theta^{(2)} < \infty \quad \text{при } R = 0. \quad (2.2.10)$$

По формулам (2.1.3) введем функцию тока $\Psi^{(m)}$ в каждой фазе ($m = 1, 2$). Условия (2.2.6) — (2.2.10) позволяют определить постоянные в общих решениях (2.1.5) вне и внутри капли. В результате получим решение Адамара — Рыбчинского [178, 219]

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= \frac{1}{4} U_i R^2 \left(2 - \frac{2 + 3\beta}{1 + \beta} \frac{a}{R} + \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{a^3}{R^3} \right) \sin^2 \theta, \\ \Psi^{(2)} &= -\frac{U_i}{4(1 + \beta)} R^2 \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

где $\beta = \mu_2/\mu_1$.

Используя формулы (2.1.3), вычислим компоненты скоростей жидкости и давление вне капли:

$$\begin{aligned} V_R^{(1)} &= U_i \left[1 - \frac{2 + 3\beta}{2(1 + \beta)} \frac{a}{R} + \frac{\beta}{2(1 + \beta)} \frac{a^3}{R^3} \right] \cos \theta, \\ V_\theta^{(1)} &= -U_i \left[1 - \frac{2 + 3\beta}{4(1 + \beta)} \frac{a}{R} - \frac{\beta}{4(1 + \beta)} \frac{a^3}{R^3} \right] \sin \theta, \\ P^{(1)} &= P_0^{(1)} - \frac{\mu_1 U_i a (2 + 3\beta)}{2(1 + \beta)} \frac{\cos \theta}{R^2}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Компоненты скоростей жидкости и давление внутри капли определяются выражениями:

$$\begin{aligned} V_R^{(2)} &= -\frac{U_i}{2(1+\beta)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) \cos \theta, \\ V_\theta^{(2)} &= \frac{U_i}{2(1+\beta)} \left(1 - 2\frac{R^2}{a^2}\right) \sin \theta, \\ P^{(2)} &= P_0^{(2)} + \frac{5\mu_2 U_i R \cos \theta}{a^2(1+\beta)}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Постоянные $P_0^{(1)}$, $P_0^{(2)}$ в выражениях для полей давления (2.2.12) и (2.2.13) связаны соотношением

$$P_0^{(2)} - P_0^{(1)} = \frac{2\sigma}{a}. \quad (2.2.14)$$

Сила сопротивления, действующая на сферическую каплю со стороны жидкости:

$$F = 2\pi a U_i \frac{2\mu_1 + 3\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (2.2.15)$$

При $\beta = \mu_2/\mu_1 \rightarrow \infty$ из (2.2.15) получим формулу Стокса для твердой частицы (2.2.5). Газовому пузырю соответствует предельный переход при $\beta \rightarrow 0$.

Установившееся движение сферических частиц, капель и пузырей в жидкости. В химической технологии часто встречается задача об установившемся движении сферической частицы, капли и пузыря со скоростью U_i в неподвижной жидкости. Вследствие линейности уравнений Стокса решение этой задачи можно получить из формул (2.2.12), (2.2.13), прибавляя к ним члены $\bar{V}_R = -U_i \cos \theta$, $\bar{V}_\theta = U_i \sin \theta$, описывающие однородное течение со скоростью U_i в направлении, обратном обтекающему потоку. Хотя динамические характеристики обтекания не изменяются, картина линий тока в системе отсчета, связанной с неподвижной жидкостью, будет выглядеть иначе. В частности, линии тока внутри сферы не будут замкнутыми.

Коэффициент сопротивления капли вычисляется по формуле

$$c_f = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho_1 U_i^2 \pi a^2} = \frac{4}{\text{Re}} \left(\frac{2+3\beta}{1+\beta} \right), \quad \text{где} \quad \text{Re} = \frac{\rho_1 U_i a}{\mu_1}. \quad (2.2.16)$$

Приравнивая силу сопротивления сферы F разности гравитационной и архимедовой сил $\frac{4}{3}\pi a^3 g \Delta\rho$, можно оценить установившуюся скорость относительного движения фаз (скорость осаждения или скорость всплытия сферической капли)

$$U = \frac{2}{3} \frac{ga^2 \Delta\rho}{\mu_1} \left(\frac{1+\beta}{2+3\beta} \right), \quad (2.2.17)$$

где $\Delta\rho$ — разность плотностей внешней и внутренней жидкостей, g — ускорение свободного падения.

Соотношения (2.2.16) и (2.2.17) охватывают весь диапазон изменения отношения вязкостей фаз $0 \leq \beta < \infty$. В предельных случаях $\beta = 0$ (газовый пузырь в высоковязкой жидкости) и $\beta \rightarrow \infty$ (твердая частица в жидкости или газе) эти формулы принимают вид

$$c_f = \frac{8}{\text{Re}}, \quad U = \frac{1}{3} \frac{ga^2\Delta\rho}{\mu_1} \quad (\text{газовый пузырь}), \quad (2.2.18)$$

$$c_f = \frac{12}{\text{Re}}, \quad U = \frac{2}{9} \frac{ga^2\Delta\rho}{\mu_1} \quad (\text{твердая частица}). \quad (2.2.19)$$

Последнее выражение для c_f известно как закон Стокса для коэффициента сопротивления твердых сферических частиц. Он подтвержден экспериментально для $\text{Re} < 0,1$. Закон сопротивления для сферических пузырьков (2.2.18) выполняется лишь для очень чистых жидкостей без каких-либо примесей поверхностно-активных веществ.

Согласно данным [100], даже очень малые количества поверхностно-активных веществ, адсорбируясь на поверхности пузыря, приводят к ее «затвердеванию», подавляя внутреннюю циркуляцию жидкости, так что реальное всплытие пузырька идет по закону Стокса для твердой частицы (2.2.19).

Обтекание капель с мембранной фазой. В химической технологии нередки случаи использования составных капель, когда дисперсная среда (фаза 1) и жидкость, составляющая ядро капли (фаза 3), разделены жидкой оболочкой из буферной или мембранной фазы (фаза 2). Стационарное течение в несмешивающихся фазах 2 и 3 должно происходить по замкнутым линиям тока (рис. 2.3). Если слой мембранной фазы тонок, течение в нем будет весьма стесненным, близким к заторможенному.

Рис. 2.3. Обтекание капли с мембранной фазой

Пусть a — внешний радиус составной капли, $a\varepsilon$ — радиус ее ядра ($0 \leq \varepsilon \leq 1$). Точное решение задачи об обтекании составной капли поступательным стоксовым потоком со скоростью U_i дано в [293], где

приведены функции тока течения в фазах и вычислена сила сопротивления

$$F = 6\pi\mu a U_i \lambda, \quad \lambda = \frac{2}{3} \frac{\beta_3 + 6\beta_2^2 F(\varepsilon) + \beta_2(2 + 3\beta_3)G(\varepsilon)}{\beta_3 + 4\beta_2^2 F(\varepsilon) + 2\beta_2(1 + \beta_3)G(\varepsilon)}, \quad (2.2.20)$$

где $\beta_2 = \mu_2/\mu_1$ и $\beta_3 = \mu_3/\mu_1$ — отношения вязкостей фаз, а

$$F(\varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon^5}{(1 - \varepsilon)^3(4\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 4)}, \quad G(\varepsilon) = \frac{(1 + \varepsilon)(2\varepsilon^2 + \varepsilon + 2)}{(1 - \varepsilon)(4\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 4)}.$$

Отметим три важных предельных случая формулы (2.2.20).

1. Для малого ядра капли получим

$$\lambda \rightarrow \frac{2 + 3\beta_2}{3(1 + \beta_2)} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.2.21)$$

и формула (2.2.20) переходит в формулу (2.2.15), соответствующую решению Адамара — Рыбчинского, где $\beta = \beta_2$.

2. При уменьшении толщины мембранного слоя имеем

$$\lambda \rightarrow 1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 1. \quad (2.2.22)$$

Это означает, что движение в тонком мембранном слое сильно заторможено и капля обтекается, как твердая частица. Полученный результат можно трактовать, как чисто гидродинамическую альтернативу даваемого в [100] объяснения эффекта Дорна («затвердевание» поверхности пузырька, всплывающего в жидкости со следами поверхностно-активного вещества).

3. Увеличивая вязкость ядра приходим к силе сопротивления твердой сферической частицы радиуса $a\varepsilon$, покрытой жидкой пленкой толщиной $a(1 - \varepsilon)$:

$$F = 6\pi\mu a U_i \lambda, \quad \lambda = \frac{2}{3} \frac{1 + 3\beta_2 G(\varepsilon)}{1 + 2\beta_2 G(\varepsilon)}. \quad (2.2.23)$$

Эта формула при уменьшении радиуса частицы $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в формулу Адамара — Рыбчинского для капли (2.2.15), а при уменьшении толщины пленки $\varepsilon \rightarrow 1$ — в формулу Стокса для твердой сферы (2.2.5).

Обтекание пористой сферической частицы. Рассмотрим задачу об обтекании сферической пористой частицы радиуса a поступательным потоком жидкости со скоростью U_i . Считаем, что течение вне частицы описывается уравнениями Стокса (2.1.1) с вязкостью μ .

Предполагается также, что для фильтрационного течения несжимаемой жидкости внутри частицы справедлив закон Дарси [88, 132]:

$$\vec{V}^{(2)} = -\frac{K}{\mu} \nabla P^{(2)}, \quad \nabla \cdot \vec{V}^{(2)} = 0, \quad (2.2.24)$$

где K — коэффициент проницаемости.

Для завершения формулировки задачи помимо условия однородности потока на бесконечности (2.2.2) и ограниченности решения (2.2.10) следует добавить граничные условия на поверхности частицы. Одно из условий получается подстановкой значений $\mu_2 = 0$ и $\sigma = 0$ в (2.2.8) и означает равенство нормального напряжения внутреннему давлению. Кроме того, должны выполняться условие непрерывности нормальной составляющей скорости

$$V_R^{(1)} = V_R^{(2)} \quad \text{при} \quad R = a \quad (2.2.25)$$

и условие пропорциональности скачка тангенциальной составляющей скорости на границе жидкость–пористая среда ее нормальной производной

$$\lambda \sqrt{K} \frac{\partial V_\theta^{(1)}}{\partial R} = (V_\theta^{(1)} - V_\theta^{(2)}) \quad \text{при} \quad R = a. \quad (2.2.26)$$

Последнее условие было получено экспериментально и теоретически обосновано в работах [198, 199, 295], λ — безразмерная эмпирическая постоянная, значение которой лежит в диапазоне $0,25 \leq \lambda \leq 10$, зависящая от материала и внутренней геометрии пористой среды. Например, для алоксита $\lambda = 10$, $K = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$; для некоторых пенометаллов $\lambda = 0,25$, $K = 10^{-8} \div 10^{-7} \text{ м}^2$.

Решение сформулированной гидродинамической задачи приводит к следующим выражениям для компонент скорости вне и внутри пористой частицы [151]:

$$\begin{aligned} V_R^{(1)} &= U_i \left(1 - \frac{3}{2} B_1 \frac{a}{R} + \frac{1}{2} B_2 \frac{a^3}{R^3} \right) \cos \theta, \\ V_\theta^{(1)} &= -U_i \left(1 - \frac{3}{4} B_1 \frac{a}{R} - \frac{1}{4} B_2 \frac{a^3}{R^3} \right) \sin \theta; \\ V_R^{(2)} &= \frac{3}{2} U_i \frac{K}{a^2} B_3 \cos \theta, \quad V_\theta^{(2)} = -\frac{3}{2} U_i \frac{K}{a^2} B_3 \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

где безразмерные постоянные B_1 , B_2 , B_3 определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1 + \lambda k^{1/2}}{\Lambda}, \quad B_2 = \frac{1 - \lambda k^{1/2}}{\Lambda}, \quad B_3 = \frac{1 + 5\lambda k^{1/2}}{\Lambda}, \\ k &= \frac{K}{a^2}, \quad \Lambda = 1 + 2\lambda k^{1/2} + \frac{3}{2}k + \frac{15}{2}\lambda k^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Для сила сопротивления пористой частицы имеем

$$F = 6\pi\mu a U_1 B_1, \quad (2.2.29)$$

где выражение для параметра B_1 дано в (2.2.28).

В предельных случаях $K \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$ формула (2.2.29) переходит в (2.2.5) и соответствуют Стоксову обтеканию твердой сферы.

2.3. Сферические частицы в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса

Приближение Озеена и высшие приближения. Полностью безынерционное обтекание сферы является адекватным эксперименту лишь в предельном случае $Re \rightarrow 0$. Уже при $Re = 0,05$ по данным [219] погрешность оценки сопротивления по формуле (2.2.19) составляет $1,5 \div 2\%$, а при $Re = 0,5$ находится в пределах $10,5 \div 11\%$. По этой причине оценкой для коэффициента сопротивления $c_f = 12/Re$ можно пользоваться только при $Re < 0,2$ (максимальная погрешность в этом случае не превышает 5%). Попытка улучшить приближение Стокса простым итерационным учетом конвективных членов приводит к уравнению, для которого нельзя построить решение, удовлетворяющее условию на бесконечности. Этот факт известен как парадокс Уайтхеда, происхождение которого связано с сингулярностью решения на бесконечности.

Способ преодоления этого парадокса предложил Озеен [38], показавший, что поскольку на больших расстояниях от сферы скорость \vec{V} мало отличается от скорости набегающего потока \vec{U}_i , инерционный член следует приближенно представлять как $(\vec{U}_i \cdot \nabla)\vec{V}$. Система уравнений Озеена имеет вид

$$\begin{aligned} (\vec{U}_i \cdot \nabla)\vec{V} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V}, \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Эта система уравнений более точна (вдали от частицы), чем система уравнений Стокса, и тоже линейна.

Решение уравнений (2.3.1) с граничными условиями прилипания на поверхности твердой сферы (2.2.1) и граничными условиями вдали от нее (2.2.2) можно выразить через функцию тока (2.1.3) с помощью формул [219]

$$\Psi = \frac{U_i^2 R^2 \sin^2 \theta}{2} \left(1 + \frac{a^3}{2R^3} \right) -$$

$$-\frac{3}{2Re} U_i^2 a^2 (1 + \cos \theta) \left[1 - \exp \left(-Re \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{R}{a} \right) \right]. \quad (2.3.2)$$

В результате для коэффициента сопротивления получим выражение

$$c_f = \frac{12}{Re} \left(1 + \frac{3}{8} Re \right), \quad (2.3.3)$$

которое уточняет закон Стокса (2.2.19).

Приближение Озеена дает отклонение от экспериментальных данных при $Re \leq 0,05$ в пределах $0 \div 1,0\%$, а при $Re = 0,5$ это отклонение составляет $4 \div 6\%$.

Попытку расширить диапазон применимости аналитических решений по числу Рейнольдса предприняли Праудмен и Пирсон [282]. Они решали систему уравнений Навье — Стокса методом сращиваемых асимптотических разложений [38] в областях вблизи сферы и на удалении от нее. В итоге для коэффициента сопротивления было найдено три главных члена асимптотического разложения при $Re \rightarrow 0$:

$$c_f = \frac{12}{Re} \left[1 + \frac{3}{8} Re + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re + O(Re^2) \right]. \quad (2.3.4)$$

При $Re < 0,5$ отклонение результатов расчетов по формуле (2.3.4) от экспериментальных данных не превышает $0,5\%$.

Честер и Брич [219] нашли два последующих члена разложения коэффициента сопротивления по числу Рейнольдса

$$c_f = \frac{12}{Re} \left[1 + \frac{3}{8} Re + \frac{9}{40} Re^2 \left(\ln Re + \gamma + \frac{5}{3} \ln 2 - \frac{323}{360} \right) + \right. \\ \left. + \frac{27}{80} Re^3 \ln Re + O(Re^3) \right], \quad (2.3.5)$$

где $\gamma \approx 0,5772$ — постоянная Эйлера.

Обтекание твердой сферической частицы при $Re > 0,5$.

При $Re > 0,5$ асимптотические решения перестают адекватно описывать обтекание сферической частицы поступательным потоком вязкой жидкости.

Многочисленные результаты численных решений системы уравнений Навье — Стокса и экспериментальные данные (обзор которых приведен в [219]) позволяют детально проанализировать развитие картины течения при увеличении числа Рейнольдса. В диапазоне $0,5 < Re < 10$ обтекание сферы является безотрывным, хотя симметрия обтекания лобовой и тыльной частей сферы, характерная для

Рис. 2.4. Качественная картина обтекания сферы с устойчивой зоной отрыва ($10 < Re < 65$)

безынерционного стока обтекания, все более и более нарушается. Наконец, при $Re \approx 10$ в кормовой части происходит отрыв потока.

Диапазон чисел Рейнольдса $10 < Re < 65$ характеризуется наличием замкнутой устойчивой кормовой области с парой симметричных стационарных вихрей (рис. 2.4). По мере роста Re вихри удлиняются, а точка отрыва (значение θ_s) смещается от кормовой точки ($\theta_s = 0^\circ$ при $Re = 10$) до точки $\theta_s = 72^\circ$ при $Re = 200$ по закону [219]

$$\theta_s = 42,5 \left(\ln \frac{Re}{10} \right)^{0,483} \quad \text{при } 10 < Re < 200. \quad (2.3.6)$$

В этой и следующей формуле значения θ_s выражаются в градусах.

При $Re > 65$ спутное вихревое течение в кормовой области теряет устойчивость и становится нестационарным. В диапазоне $65 < Re < 200$ за частицей образуется протяженный пульсирующий след, который постепенно турбулизуется при $200 < Re < 1,5 \cdot 10^5$. Одновременно точка отрыва продолжает смещаться вверх по потоку по закону [219]

$$\theta_s = 102 - 213 (Re)^{-0,37} \quad \text{при } 200 < Re < 1,5 \cdot 10^5. \quad (2.3.7)$$

При $Re > 1500$ для решения соответствующих гидродинамических задач применяются методы теории пограничного слоя [184]. Однако

в результате влияния отрывного течения в кормовой области потенциальное движение жидкости имеет место лишь на части лобовой поверхности сферы (для $\theta > 150^\circ$) [219]. Это не позволяет правильно оценить продольный градиент давления на значительной части пограничного слоя.

Приведем две простые приближенные формулы для коэффициента сопротивления сферической частицы [17, 219]

$$\begin{aligned} c_f &= \frac{12}{Re} (1 + 0,241 Re^{0,687}), & 0 \leq Re \leq 400, \\ c_f &= \frac{12}{Re} (1 + 0,0811 Re^{0,879}), & 200 \leq Re \leq 2500, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где число Рейнольдса определяется по радиусу. Максимальная погрешность формул (2.3.8) в указанных диапазонах не превосходит 5%.

В широком диапазоне чисел Рейнольдса можно использовать более сложную аппроксимацию для коэффициента сопротивления [219]

$$c_f = \frac{12}{Re} (1 + 0,241 Re^{0,687}) + 0,42 (1 + 1,902 \cdot 10^4 Re^{-1,16})^{-1},$$

максимальная погрешность которой при $Re < 1,5 \cdot 10^5$ не превышает 6%.

При $Re \approx 1,5 \cdot 10^5$ наблюдается «кризис сопротивления», который характеризуется резким уменьшением коэффициента сопротивления и связан с турбулизацией пограничного слоя и скачкообразным смещением точки отрыва в кормовую область.

При $Re \geq 1,7 \cdot 10^5$ для вычисления коэффициента сопротивления можно использовать формулы

$$c_f = \begin{cases} 28,18 - 5,3 \lg Re & \text{при } 1,7 \cdot 10^5 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5, \\ 0,1 \lg Re - 0,46 & \text{при } 2 \cdot 10^5 < Re \leq 5 \cdot 10^5, \\ 0,19 - 4 \cdot 10^4 Re^{-1} & \text{при } 5 \cdot 10^5 < Re, \end{cases}$$

приведенные в [219].

2.4. Сферические капли и пузыри в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса

Пузырь в поступательном потоке. В случае сферического пузыря, обтекаемого поступательным потоком при малых числах Рейнольдса, результаты решения уравнений Озеена (2.3.1) приводят

к двучленному асимптотическому разложению для коэффициента сопротивления [310]:

$$c_f = \frac{8}{\text{Re}} + 1 \quad (\text{при } \text{Re} \rightarrow 0), \quad (2.4.1)$$

которое уточняет формулу (2.2.18).

Коэффициент сопротивления монотонно уменьшается при увеличении числа Рейнольдса. При больших числах Рейнольдса для решения задачи об обтекании пузыря может быть использовано приближение идеальной жидкости. При этом главный член асимптотического разложения коэффициента сопротивления имеет вид [261]:

$$c_f = \frac{24}{\text{Re}} \quad (\text{при } \text{Re} \rightarrow \infty). \quad (2.4.2)$$

В [72] была предложена интерполяционная формула

$$c_f = \frac{8}{\text{Re}} + \frac{16}{\text{Re} + 16}, \quad (2.4.3)$$

позволяющая вычислять коэффициент сопротивления сферического пузыря во всем диапазоне изменения чисел Рейнольдса. В предельных случаях $\text{Re} \rightarrow 0$ и $\text{Re} \rightarrow \infty$ эта формула дает правильные асимптотические результаты (2.4.1) и (2.4.2); ее максимальная погрешность при промежуточных числах Рейнольдса составляет менее 4,5%.

Капля в поступательном потоке жидкости. В работе [310] для коэффициента сопротивления сферической капли, обтекаемой поступательным потоком при малых числах Рейнольдса, было получено следующее асимптотическое разложение:

$$c_f = \frac{3\beta + 2}{\beta + 1} \left(\frac{4}{\text{Re}} + \frac{\text{Re}}{2} + \frac{1}{40} \text{Re}^2 \ln \text{Re} \right), \quad \text{Re} = \frac{aU_i}{\nu}, \quad (2.4.4)$$

которое уточняет формулу (2.2.16).

Сферичность формы капли или пузыря, обтекаемых стоксовым потоком, является следствием безынерционности течения. Однако даже в случае преобладания инерционных сил над вязкими, когда число Рейнольдса нельзя считать малым, деформации капли не происходит, если инерционные силы малы по сравнению с капиллярными. Мерой отношения инерционных и капиллярных сил служит число Вебера $We = \rho_1 U_i^2 a / \sigma$, где σ — поверхностное натяжение на границе капли. При малых значениях We способная к деформации капля (пузырь) будет сохранять сферическую форму.

В разд. 2.2 уже отмечалось, что присутствие даже небольшого количества поверхностно-активных веществ в какой-либо из контактирующих фаз может приводить к «затвердеванию» границы раздела,

приближая закономерности обтекания капли к закономерностям обтекания твердой частицы. Практически так часто и происходит. Однако, если обе контактирующие фазы тщательно очищены (не содержат примесей), то обтекание капли имеет свою специфику.

Отрыв потока в случае обтекания капли в отличие от обтекания твердой частицы весьма затянут, а вихревая зона оказывается значительно более узкой. Если в случае твердой сферы отрыв потока и образование кормовой вихревой зоны начинается с $Re \approx 10$ (число Re определяется по радиусу сферы), то в случае капли безотрывное обтекание может иметь место вплоть до значений $Re \approx 50$. В диапазоне чисел Рейнольдса $1 \leq Re \leq 50$ широко применяются численные методы. Результаты, полученные с их помощью, обсуждаются в [219]. Внутренняя циркуляция жидкости при таких числах Рейнольдса значительно интенсивнее, чем описываемая решением Адамара — Рыбчинского. Скорость на границе капли быстро увеличивается с ростом числа Рейнольдса даже для достаточно вязких капель. В предельном случае малой вязкости дисперсной фазы $\beta \rightarrow 0$ (что соответствует случаю газового пузыря) для внешнего течения при $Re \gg 1$ может быть использовано приближение идеальной жидкости.

Согласно данным [219] для оценки сопротивления сферической капли с хорошей точностью применима следующая формула, аппроксимирующая результаты численных расчетов с использованием метода Галеркина:

$$c_f = \frac{1,83 (783 \beta^2 + 2142 \beta + 1080)}{(60 + 29 \beta)(4 + 3 \beta)} Re^{-0,74} \quad \text{при } 2 < Re < 50. \quad (2.4.5)$$

где β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости.

Коэффициент сопротивления сферической капли можно определять также с помощью выражения [72]:

$$c_f(\beta, Re) = \frac{1}{\beta + 1} c_f(0, Re) + \frac{\beta}{\beta + 1} c_f(\infty, Re). \quad (2.4.6)$$

Здесь $c_f(0, Re)$ — коэффициент сопротивления сферического пузыря, который можно вычислять по формуле (2.4.3); $c_f(\infty, Re)$ — коэффициент сопротивления твердой сферической частицы, который можно вычислять по формуле (2.3.8). Приближенное выражение (2.4.6) дает три правильных члена разложения при малых числах Рейнольдса; его максимальная погрешность при $0 \leq Re \leq 50$ составляет менее 5%.

Сферичность капли может сохраняться вплоть до $Re \approx 300$ [219]. Поскольку обычно пограничный слой на капле или пузыре значительно тоньше, чем на твердой сфере, уже в диапазоне $50 < Re < 300$

применяются методы, основанные на теории пограничного слоя. С их помощью в [219] была получена следующая формула для коэффициента сопротивления при $Re \gg 1$:

$$c_f = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{2}\beta + \frac{(2 + 3\beta)^2}{Re^{1/2}}(B_1 + B_2 \ln Re) \right]. \quad (2.4.7)$$

Значения постоянных B_1 и B_2 приведены ниже ($\beta = \mu_2/\mu_1$ — отношение вязкостей внутренней и внешней фазы, $\gamma = \rho_2/\rho_1$ — соответствующее отношение плотностей фаз).

$\beta\gamma$	25	4,0	1,0	0,25	0,04	0
B_1	-0,429	-0,457	-0,460	-0,446	-0,434	-0,391
B_2	0,00202	0,00620	0,0100	0,0113	0,00842	0

Капля в поступательном потоке газа. В [127] получено приближенное решение задачи об обтекании вязкой сферической капли поступательным потоком газа (маловязкой жидкости). В качестве малого параметра использовалась величина

$$\varepsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{Re_1} \ll 1.$$

Движение жидкости вне и внутри капли характеризуется различными числами Рейнольдса (внутри капли в качестве масштаба скорости используется величина εU_i):

$$Re_1 = \frac{aU_i\rho_1}{\mu_1}, \quad Re_2 = \frac{a\varepsilon U_i\rho_2}{\mu_2},$$

причем никаких специальных ограничений на них не накладывается. Указанная ситуация типична для дождевых капель, движущихся в воздухе, когда $\mu_1/\mu_2 = 1,8 \cdot 10^{-2}$ и параметр ε мал в широком диапазоне чисел Рейнольдса $0 < Re_1 < 10^3$.

Решение задачи ищется в виде асимптотических разложений по малому параметру ε . Главный член разложения вне капли определяется решением задачи об обтекании твердой сферы. Главный член разложения внутри капли соответствует течению вязкой жидкости, которое вызывается действием касательного напряжения на межфазной поверхности (касательное напряжение зависит только от внешнего числа Рейнольдса Re_1 и берется из известных численных решений [226, 288]).

Поле течения внутри капли зависит от двух параметров Re_1 и Re_2 , причем зависимость от Re_2 оказывается малосущественной. Для максимальной безразмерной скорости жидкости внутри капли, достигаемой на ее границе $v_{\max} = v_{\max}(Re_1, Re_2)$, имеют место следующие оценки, справедливые при $Re_1 \geq 2,5$ [270]:

$$v_{\max}(Re_1, \infty) \leq v_{\max}(Re_1, Re_2) \leq v_{\max}(Re_1, 0) \quad (2.4.8)$$

где

$$\begin{aligned} v_{\max}(Re_1, \infty) &= 0,15 + 0,42 Re_1^{-0,32}, \\ v_{\max}(Re_1, 0) &= (0,15 + 0,42 Re_1^{-0,32}) \left(1 + \frac{Re_1}{50 + 2 Re_1} \right). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Приведенные оценки различаются не слишком сильно, что показывает слабую зависимость внутреннего течения от параметра Re_2 , и хорошо согласуются с имеющимися численными результатами [43, 252].

Исследование внутреннего течения показывает, что при росте Re_1 тороидальный вихрь деформируется и при $Re_1 = 150$ отрывается от границы в районе кормовой точки (при $\theta \approx 30^\circ$). При этом в зоне внутреннего отрыва образуется второй вихрь, скорость в зоне которого существенно меньше (примерно в 30 раз) максимальной скорости в зоне первого вихря.

Безразмерные компоненты скорости в сферической системе координат приближенно описываются формулами для вихря Хилла [36]

$$v_r = v_{\max}(r^2 - 1) \cos \theta, \quad v_\theta = v_{\max}(1 - 2r^2) \sin \theta, \quad r = R/a,$$

где максимальная скорость $v_{\max} = v_{\max}(Re_1, Re_2)$ характеризуется оценками (2.4.8), (2.4.9).

При $Re_2 \gg 1$ вихрь Хилла занимает всю внутреннюю область капли за исключением примыкающего к ее поверхности тонкого пограничного слоя, в котором происходит конвективно-диффузионный перенос завихренности [41].

При уменьшении числа Re_2 линии тока слегка деформируются и особая линия тока (в каждой точке которой скорость жидкости равна нулю), расположенная в меридиальной плоскости внутри капли, немного смещается в сторону лобовой поверхности.

При $Re_1 < 150$ внутреннее течение безотрывное. При $Re \geq 150$ в районе кормовой точки образуется второй вихрь, скорость которого на порядок меньше v_{\max} [127, 128].

При $Re_1 \leq 2,5$ разница между $v_{\max}(Re_1, \infty)$ и $v_{\max}(Re_1, 0)$ практически равна нулю, так что v_{\max} не зависит от Re_2 [125] и ее величину можно получить из решения для малых чисел Рейнольдса [310].

Динамика расширяющегося (сжимающегося) сферического пузыря. В химической технологии часто встречается задача о сферически симметричной деформации расширения — сжатия газового пузыря в безграничной вязкой жидкости. В приближении гомобаричности (однородности давления внутри пузыря) [115, 117] интерес представляет лишь движение внешней жидкости. Уравнения Навье — Стокса, описывающие такое движение в сферической системе координат, имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} \right) = - \frac{\partial P}{\partial R} + 2\mu \frac{\partial^2 V_R}{\partial R^2}, \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} (R^2 V_R) = 0. \quad (2.4.11)$$

При отсутствии потока массы через поверхность пузыря скорость жидкости на границе равна скорости самой границы:

$$V_R = \dot{a} \quad \text{при} \quad R = a, \quad (2.4.12)$$

где $\dot{a} = da/dt$.

Интегрирование уравнения (2.4.11) с учетом условия (2.4.12) и условия обращения в нуль скорости жидкости на бесконечности дает

$$V_R = \frac{a^2 \dot{a}}{R^2}. \quad (2.4.13)$$

Подстановка выражения (2.4.13) в уравнение (2.4.10) с последующим его интегрированием по R от a до ∞ приводит к соотношению

$$\rho(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2) = P_{R=a} - P_\infty(t), \quad (2.4.14)$$

где $P_\infty(t)$ — давление в жидкости на бесконечности, изменение которого во времени и является причиной пульсаций пузыря.

Значение давления в жидкости на границе с пузырем $P|_{R=a}$ может быть определено из условия скачка нормальных напряжений на поверхности разрыва, которой является граница пузыря [11, 165]. В условиях гомобаричности газ в пузыре неподвижен, что дает

$$P = P_b - \frac{2\sigma}{a} + 2\mu \frac{\partial V_R}{\partial R} \quad \text{при} \quad R = a, \quad (2.4.15)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости на границе с пузырем, P_b — давление внутри пузыря.

Подставляя (2.4.15) с учетом (2.4.13) в (2.4.14), получим уравнение Релея

$$\rho \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) + 4\mu \frac{\dot{a}}{a} + \frac{2\sigma}{a} = -P_\infty(t) + P_b, \quad (2.4.16)$$

которое описывает динамику изменения радиуса пузыря под действием меняющегося на бесконечности давления. Начальные условия для него обычно задаются в виде

$$a = a_0, \quad \dot{a} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.4.17)$$

Если процесс расширения и сжатия газа в пузыре является адиабатическим, то давление газа в пузыре связано с начальным давлением P_0 уравнением адиабаты

$$P_b = P_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma}, \quad (2.4.18)$$

где γ — показатель адиабаты.

При $\gamma = 1$ решение задачи (2.4.16) — (2.4.18) можно записать в параметрическом виде [78, 80]

$$a = \frac{a_0}{[H(\tau)]^2}, \quad t = \int_s^\tau \frac{d\tau}{[H(\tau)]^5},$$

где функция $H(\tau)$ и коэффициент s определяются по формулам

$$H(\tau) = \exp(-\tau^2) \left[2s \int_s^\tau \exp(\tau^2) d\tau + \exp(s^2) \right], \quad s = \frac{4\mu}{\rho a_0^2},$$

а параметр τ изменяется в области $s \leq \tau < \infty$.

В работах [78, 80] показано, что задача (2.4.16) — (2.4.18) может быть решена в квадратурах также при $\gamma = \frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ и приводится к уравнению Бесселя при $\gamma = \frac{11}{12}$, $\frac{7}{6}$.

В книгах [117, 118] подробно рассмотрены вопросы динамики и теплообмена пульсирующего газового пузыря (с учетом различных осложняющих факторов).

2.5. Обтекание сферической частицы, капли и пузыря сдвиговым потоком

Постановка задачи. Рассмотрим обтекание твердой сферической частицы радиуса a линейным сдвиговым потоком при малых числах Рейнольдса. В общем случае уравнения Стокса (2.1.1) должны быть дополнены условиями прилипания на поверхности частицы (2.2.1) и следующими граничными условиями вдали от нее (см. разд. 1.1):

$$V_k \rightarrow G_{kj} X_j \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad (2.5.1)$$

где X_1, X_2, X_3 — декартовы координаты; V_k — компоненты скорости жидкости; G_{kj} — компоненты тензора сдвига; $k, j = 1, 2, 3$; по индексу j ведется суммирование.

В задаче об обтекании сферической капли (пузыря) линейным сдвиговым потоком уравнения Стокса (2.1.1) и граничные условия на бесконечности (2.5.1) должны быть дополнены граничными условиями на межфазной поверхности и условием ограниченности решения внутри капли. В частности, в осесимметричном случае используются граничные условия (2.2.6) — (2.2.10).

Ниже рассмотрены некоторые частные случаи сдвиговых течений, описанных в разд. 1.1.

Осесимметричное деформационное сдвиговое течение.

Твердая частица. В случае осесимметричного деформационного сдвигового течения граничные условия вдали от частицы (2.5.1) записываются так:

$$V_X \rightarrow -\frac{1}{2}GX, \quad V_Y \rightarrow -\frac{1}{2}GY, \quad V_Z \rightarrow GZ \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (2.5.2)$$

Для решения соответствующей гидродинамической задачи удобно использовать сферическую систему координат и ввести функцию тока по формулам (2.1.3). В этом случае условие (2.5.2) преобразуется к виду

$$\Psi \rightarrow \frac{1}{2} \frac{G}{a} R^3 \sin^2 \theta \cos \theta \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (2.5.3)$$

Отсюда следует, что в общем решении уравнений Стокса, представленном рядом (2.1.5), следует удерживать только слагаемые при $n = 3$. Искомые постоянные A_3, B_3, C_3, D_3 определяются с помощью граничных условий прилипания (2.2.1). В итоге получим функцию тока [308, 309]:

$$\Psi = \frac{1}{2} G a^2 \left(\frac{R^3}{a^3} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \frac{a^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta. \quad (2.5.4)$$

Компоненты скорости и давление найдем, подставляя формулу (2.5.4) в выражения (2.1.3). В результате имеем

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{1}{2}Ga \left(\frac{R}{a} - \frac{5}{2} \frac{a^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{R^4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \\ V_\theta &= -\frac{3}{2}Ga \left(\frac{R}{a} - \frac{a^4}{R^4} \right) \sin \theta \cos \theta, \\ P &= P_i - \frac{5}{2}G\mu \frac{a^3}{R^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

где P_i — давление вдали от частицы.

Капля и пузырь. Обтекание капли осесимметричным сдвиговым течением исследовалось в [308, 309]. Обозначим динамические вязкости жидкостей вне и внутри капли соответственно μ_1 и μ_2 . Функция тока вдали от капли, как и в случае твердой частицы, удовлетворяет условию (2.5.3). Поэтому в общем решении (2.1.5) следует оставить только слагаемые при $n = 3$. Определяя неизвестные постоянные из граничных условий (2.2.6) — (2.2.10), находим

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= \frac{1}{2}Ga^2 \left(\frac{R^3}{a^3} - \frac{1}{2} \frac{5\beta + 2}{\beta + 1} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{a^2}{R^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta, \\ \Psi^{(2)} &= \frac{3}{4} \frac{Ga^2}{\beta + 1} \frac{R^3}{a^3} \left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) \sin^2 \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ — функция тока вне и внутри капли, $\beta = \mu_2/\mu_1$.

Компоненты скорости жидкости вне капли:

$$\begin{aligned} V_R^{(1)} &= \frac{1}{2}Ga \left(\frac{R}{a} - \frac{1}{2} \frac{5\beta + 2}{\beta + 1} \frac{a^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{a^4}{R^4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \\ V_\theta^{(1)} &= -\frac{3}{2}Ga \left(\frac{R}{a} - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{a^4}{R^4} \right) \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Компоненты скорости жидкости внутри капли:

$$\begin{aligned} V_R^{(2)} &= \frac{1}{2}Ga \left(\frac{R}{a} - \frac{1}{2} \frac{5\beta + 2}{\beta + 1} \frac{a^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{a^4}{R^4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \\ V_\theta^{(2)} &= -\frac{3}{2}Ga \left(\frac{R}{a} - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{a^4}{R^4} \right) \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Предельный случай $\beta \rightarrow 0$ соответствует газовому пузырю.

Из анализа выражений (2.5.7), (2.5.8) следует, что это течение имеет ось симметрии (ось Z) и плоскость симметрии (плоскость XY).

На поверхности сферы имеются две критические точки ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) и критическая линия ($\theta = \pi/2$).

Произвольное трехмерное деформационно-сдвиговое течение. Такое течение характеризуется граничным условием вдали от капли (2.5.1) с симметричной матрицей коэффициентов сдвига $G_{kj} = G_{jk}$. Решение задачи об обтекании капли произвольным трехмерным деформационно-сдвиговым потоком приводит к следующим выражениям для компонент скорости вне и внутри капли [36, 309]:

$$\begin{aligned} V_k^{(1)} &= G_{kj} X_j \left(1 - \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{a^5}{R^5} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2a^2} G_{jl} X_k X_j X_l \left(\frac{5\beta + 2}{\beta + 1} \frac{a^5}{R^5} - \frac{5\beta}{\beta + 1} \frac{a^7}{R^7} \right), \\ V_k^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\beta + 1} \left(5 \frac{R^2}{a^2} - 3 \right) G_{kj} X_j - \frac{1}{\beta + 1} \frac{G_{jl} X_k X_j X_l}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

В этих формулах $k, j, l = 1, 2, 3$ и по индексам j и l ведется суммирование.

Случаю газового пузыря соответствует значение $\beta = 0$, а случаю твердой частицы — предельный переход при $\beta \rightarrow \infty$.

Обтекание сферической капли плоским деформационно-сдвиговым потоком (см. разд. 1.1) описывается выражениями (2.5.9), в которых следует положить $G_{11} = -G_{22}$, $G_{33} = 0$, $G_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Заметим, что, вследствие линейности задач стокова обтекания, поля скорости и давления в поступательно-сдвиговых потоках находятся как суперпозиция решений, относящихся к поступательным потокам, рассмотренным в разд. 2.2, и к сдвиговым потокам, рассмотренным выше в данном разделе.

Некоторые другие результаты по обтеканию сферических частиц и круговых цилиндров сдвиговым потоком. В работе [221] рассматривалось движение свободно взвешенной твердой сферической частицы в простом сдвиговом потоке. В этом случае в граничных условиях (2.5.1) все коэффициенты G_{ij} за исключением G_{12} равны нулю. Наличие здесь антисимметричной составляющей у тензора сдвига (см. разд. 1.1) приводит к вращению частицы из-за условия прилипания жидкости на ее поверхности. В стоковом приближении было получено аналитическое решение соответствующей трехмерной гидродинамической задачи. Обнаружено, что к частице примыкает область с замкнутыми линиями тока, а вне этой области все линии тока разомкнуты.

В работах [271, 272] исследовалось движение свободно взвешенной сферической частицы в произвольном плоском сдвиговом потоке.

Решения задач об обтекании свободно вращающегося и закрепленного кругового цилиндра произвольным линейным сдвиговым потоком

приведены в [60, 218].

Трехмерное обтекание пористой частицы произвольным деформационно-сдвиговым потоком рассматривалась в работе [77]. Для описания течения вне частицы использовались уравнения Стокса (2.1.1) и считалось, что внутри частицы происходит фильтрация внешней жидкости закону Дарси (2.2.24). Вдали от частицы требовалось удовлетворить условиям (2.5.1), а на границе частицы выставлялись граничные условия, которые были описаны ранее в разд. 4.2. Было получено точное аналитическое решение для компонент скорости жидкости и давления снаружи и внутри пористой частицы.

2.6. Обтекание несферических твердых частиц

Обтекание эллипсоидальной частицы поступательным стоксовым потоком. Осесимметричная задача об обтекании эллипсоидальной частицы поступательным стоксовым потоком допускает точное аналитическое решение. Ограничимся здесь краткой сводкой соответствующих результатов, изложенных в [178].

Сплюснутый эллипсоид вращения. Рассмотрим обтекание сплюснутого эллипсоида вращения (изображен слева на рис. 2.5) с полюсами a, b ($a > b$) поступательным стоксовым потоком со скоростью U_i . Считаем, что вязкость жидкости равна μ .

От декартовых координат X, Y, Z перейдем к координатам сплюснутого эллипсоида вращения σ, τ, φ , которые связаны преобразованиями

$$X^2 = c^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2) \cos^2 \varphi,$$

$$Y^2 = c^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2) \sin^2 \varphi,$$

$$Z = c\sigma\tau, \quad \text{где } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$(\sigma \geq 0, \quad -1 \leq \tau \leq 1).$$

Рис. 2.5. Обтекание сплюснутого и

вращающегося эллипсоида вращения. В результате поверхность эллипсоида будет задаваться постоянным значением координаты σ :

$$\sigma = \sigma_0, \quad \text{где } \sigma_0 = [(a/b)^2 - 1]^{-1/2}. \quad (2.6.1)$$

Учитывая осесимметричность задачи, введем функцию тока по формулам

$$V_\sigma = \frac{1}{c^2 \sqrt{(1 + \sigma^2)(\sigma^2 + \tau^2)}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \quad V_\tau = -\frac{1}{c^2 \sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 + \tau^2)}} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad (2.6.2)$$

После этого уравнения Стокса (2.1.1) преобразуются к одному уравнению для Ψ , которое решается методом разделения переменных. Удовлетворяя граничному условию однородности потока вдали от частицы и условиям прилипания на ее поверхности, в итоге можно получить

$$\Psi = \frac{1}{2}c^2U_i(1 - \tau^2) \left[\sigma^2 + 1 - \frac{(\sigma_0^2 + 1)\sigma - (\sigma_0^2 - 1)(\sigma^2 + 1) \operatorname{arccctg} \sigma}{\sigma_0 - (\sigma_0^2 - 1) \operatorname{arccctg} \sigma_0} \right]. \quad (2.6.3)$$

В аналогичной задаче о движении сплюснутого эллипсоида со скоростью U_i в неподвижной жидкости имеем

$$\Psi = -\frac{1}{2}c^2U_i(1 - \tau^2) \frac{(\sigma_0^2 + 1)\sigma - (\sigma_0^2 - 1)(\sigma^2 + 1) \operatorname{arccctg} \sigma}{\sigma_0 - (\sigma_0^2 - 1) \operatorname{arccctg} \sigma_0}. \quad (2.6.4)$$

Сила, действующая на эллипсоид со стороны жидкости:

$$F = \frac{8\pi\mu U_i \sqrt{a^2 - b^2}}{\sigma_0 - (\sigma_0^2 - 1) \operatorname{arccctg} \sigma_0}. \quad (2.6.5)$$

При $\sigma_0 \rightarrow 0$ сплюснутый эллипсоид вырождается в плоский бесконечно тонкий диск радиуса a . Выражение для функции тока получим из (2.6.4) с помощью соответствующего предельного перехода:

$$\Psi = -\frac{1}{\pi}a^2U_i(1 - \tau^2) [\sigma + (\sigma^2 + 1) \operatorname{arccctg} \sigma].$$

На диск, движущийся перпендикулярно его плоскости со скоростью U_i в неподвижной жидкости, действует сила

$$F = 16\mu a U_i, \quad (2.6.6)$$

которая меньше силы, действующей на сферу такого же радиуса (для сферы $F = 6\pi\mu a U_i$). Формула (2.6.6) подтверждается экспериментальными данными.

Вытянутый эллипсоид вращения. Для решения соответствующей задачи об обтекании эллипсоидальной частицы (изображена справа на рис. 2.5) поступательным стоксовым потоком используют координаты вытянутого эллипсоида вращения σ , τ , φ , которые вводятся по формулам

$$X^2 = c^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \cos^2 \varphi, \quad Y^2 = c^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \sin^2 \varphi, \quad Z = c\sigma\tau, \\ \text{где } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\sigma \geq 1 \geq \tau \geq -1).$$

Уравнение поверхности эллипсоида в этом случае имеет вид

$$\sigma = \sigma_0, \quad \text{где } \sigma_0 = [1 - (b/a)^2]^{-1/2}. \quad (2.6.7)$$

Здесь, как и ранее, бóльшая полуось обозначена a .

Компоненты скорости жидкости определяются выражениями

$$V_\sigma = \frac{1}{c^2 \sqrt{(\sigma^2 - 1)(\sigma^2 - \tau^2)}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \quad V_\tau = -\frac{1}{c^2 \sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 - \tau^2)}} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \quad (2.6.8)$$

с помощью функции тока

$$\Psi = \frac{1}{2} c^2 U_i (1 - \tau^2) \left[\sigma^2 - 1 - \frac{(\sigma_0^2 + 1)(\sigma^2 - 1) \operatorname{arcth} \sigma - (\sigma_0^2 - 1) \sigma}{(\sigma_0^2 + 1) \operatorname{arcth} \sigma_0 - \sigma_0} \right], \quad (2.6.9)$$

где $\operatorname{arcth} \sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}$.

В задаче о движении вытянутого эллипсоида вращения со скоростью U_i в неподвижной жидкости соответствующая функция тока имеет вид

$$\Psi = -\frac{1}{2} c^2 U_i (1 - \tau^2) \frac{(\sigma_0^2 + 1)(\sigma^2 - 1) \operatorname{arcth} \sigma - (\sigma_0^2 - 1) \sigma}{(\sigma_0^2 + 1) \operatorname{arcth} \sigma_0 - \sigma_0}. \quad (2.6.10)$$

Сила сопротивления вычисляется по формуле

$$F = \frac{8\pi\mu U_i \sqrt{a^2 - b^2}}{(\sigma_0^2 + 1) \operatorname{arcth} \sigma_0 - \sigma_0}. \quad (2.6.11)$$

Если $a \gg b$, то вытянутый эллипсоид вырождается в иглообразный стержень. В этом случае выражение для силы, действующей на иглу длиной a и радиусом b , движущуюся вдоль своей оси со скоростью U_i , принимает вид

$$F = \frac{4\pi\mu a U_i}{\ln(a/b) + 0,193}. \quad (2.6.12)$$

Сравнивая выражения для сил, действующих на сплюснутый и вытянутый эллипсоиды, с аналогичным выражением для сферы с эквивалентным экваториальным радиусом, можно записать

$$F_{\text{el}} = 6\pi\mu l U_i K\left(\frac{b}{a}\right), \quad (2.6.13)$$

где $l = a$ — для сплюснутого эллипсоида и $l = b$ — для вытянутого эллипсоида. В табл. 2.1 приведены численные значения поправочного множителя K при различных отношениях полуосей b/a .

Обтекание тел вращения.

ТАБЛИЦА 2.1

Значения поправочного множителя $K\left(\frac{b}{a}\right)$ в формуле (2.6.13)

$\frac{b}{a}$	K , сплюснутый эллипсоид	K , вытянутый эллипсоид
0	0,849	∞
0,1	0,852	2,647
0,2	0,861	1,785
0,3	0,874	1,470
0,4	0,889	1,305
0,5	0,905	1,204
0,6	0,923	1,136
0,7	0,941	1,087
0,8	0,961	1,051
0,9	0,980	1,022
1,0	1,000	1,000

Рассмотрим обтекание тел вращения любой формы, произвольно ориентированных в поступательном потоке при малых числах Рейнольдса. Считаем, что ось тела вращения составляет угол ω с направлением скорости жидкости на бесконечности (рис. 2.6). Единичный вектор \vec{i} , направленный вдоль потока, может быть представлен в виде суммы $\vec{i} = \vec{\tau} \cos \omega + \vec{n} \sin \omega$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси тела, \vec{n} — единичный вектор, лежащий в плоскости вращения тела. В стоксовом приближении для силы сопротивления в общем случае можно получить [72, 178]

$$\vec{F} = \vec{\tau} F_{\parallel} \cos \omega + \vec{n} F_{\perp} \sin \omega, \quad (2.6.14)$$

где F_{\parallel} и F_{\perp} — значения силы сопротивления тела вращения в случае параллельного ($\omega = 0$) и перпендикулярного ($\omega = \pi/2$) его расположения в поступательном потоке.

Величина проекции силы сопротивления на направление набегающего потока равна скалярному произведению

$$(\vec{F} \cdot \vec{i}) = F_{\parallel} \cos^2 \omega + F_{\perp} \sin^2 \omega. \quad (2.6.15)$$

Из формул (2.6.14) и (2.6.15) следует, что для вычисления силы сопротивления тела вращения любой формы, произвольно ориентированного в поступательном стоксовом потоке, достаточно знать величину этой силы только для двух частных пространственных расположений тела. «Осевое» и «боковое» сопротивления F_{\parallel} и F_{\perp} можно определять как теоретически, так и экспериментально. Ниже приведены выражения для F_{\parallel} и F_{\perp} , указанные в [178] для некоторых тел вращения несферической формы.

Для тонкого кругового диска радиуса a :

$$F_{\parallel} = 16\mu a U_i, \quad F_{\perp} = \frac{32}{3}\mu a U_i. \quad (2.6.16)$$

Для гантелевидной частицы, состоящей из двух соприкасающихся сфер равного радиуса a :

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= 12\pi\mu a U_i \lambda_{\parallel}, & \lambda_{\parallel} &\approx 0,645, \\ F_{\perp} &= 12\pi\mu a U_i \lambda_{\perp}, & \lambda_{\perp} &\approx 0,716. \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

В этих формулах произведение $12\pi\mu a U_i$ равно сумме сопротивлений двух изолированных сфер радиуса a .

Для сплюснутых эллипсоидов вращения с полуосями a, b ($a > b$):

$$F_{\parallel} = 3,77(4a + b), \quad F_{\perp} = 3,77(3a + 2b), \quad (2.6.18)$$

где a — экваториальный радиус ($a > b$).

Для вытянутых эллипсоидов вращения с полуосями a, b :

$$F_{\parallel} = 3,77(a + 4b), \quad F_{\perp} = 3,77(2a + 3b), \quad (2.6.19)$$

где b — экваториальный радиус ($b > a$).

Формулы (2.6.18) и (2.6.19) являются приближенными. Они хорошо «работают» для слабдеформированных эллипсоидов вращения. Максимальная погрешность (2.6.18) для любых отношений между полуосями меньше 6%.

Стоксово обтекание твердой частицы произвольной формы. На частицу произвольной формы, движущуюся в безграничной, покоящейся на бесконечности жидкости, действуют гидродинамические сила и момент, связанные с ее поступательным и вращательным движением [178]:

$$\vec{F} = \mu(\mathbf{K}\vec{U} + \mathbf{S}\vec{\omega}), \quad (2.6.20)$$

$$\vec{M} = \mu(\mathbf{S}\vec{U} + \mathbf{\Omega}\vec{\omega}), \quad (2.6.21)$$

где \mathbf{K} , \mathbf{S} , $\mathbf{\Omega}$ — тензоры второго ранга, зависящие от геометрии частицы.

Симметричный тензор $\mathbf{K} = \|K_{ij}\|$ называется трансляционным. Он характеризует сопротивление тела поступательному движению и зависит только от размеров и формы тела. В главных осях трансляционный тензор приводится к диагональному виду

$$\mathbf{K} = \left\| \begin{array}{ccc} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{array} \right\|, \quad (2.6.22)$$

где K_1, K_2, K_3 — главные сопротивления, действующие на тело при его движении вдоль главных осей. Для ортотропных (имеющих три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии) тел главные оси трансляционного тензора нормальны соответствующим плоскостям симметрии. Для осесимметричных тел одна из осей симметрии (скажем, первая) является главной осью и $K_2 = K_3$. Для сферы радиуса a любые три взаимно перпендикулярные оси являются главными и $K_1 = K_2 = K_3 = 6\pi a$.

Симметричный тензор $\mathbf{\Omega}$ называется ротационным тензором. Он зависит не только от формы и размера частицы, но также от выбора начала координат. Ротационный тензор характеризует сопротивление вращательному движению тела и в главных осях (главные оси ротационного и трансляционного тензоров имеют различное пространственное расположение) принимает диагональный вид с элементами $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Для осесимметричных тел одна из главных осей (например, первая) параллельна оси симметрии, при этом $\Omega_2 = \Omega_3$. Для сферической частицы имеем: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3$.

Тензор \mathbf{S} симметричен лишь в единственной для каждого тела точке O , называемой центром гидродинамической реакции. Этот тензор называется сопряженным тензором и характеризует перекрестную реакцию тела на участие в поступательном и вращательном движении (момент сопротивления при поступательном движении и силу сопротивления — при вращательном). Для тел с ортотропной, осевой и сферической симметрией сопряженный тензор является тождественно равным нулю. Однако его необходимо учитывать, например, для тел с геликоидальной симметрией (пропеллерообразных тел).

Наиболее существенным при рассмотрении задач гравитационного осаждения частиц является учет трансляционного тензора.

Главные сопротивления некоторых тел несферической формы приведены в [178] и указаны ниже.

Для тонкого кругового диска радиуса a :

$$K_1 = 16a, \quad K_2 = \frac{32}{3}a, \quad K_3 = \frac{32}{3}a. \quad (2.6.23)$$

Для иглоподобных эллипсоидов длиной l и радиусом a :

$$K_1 = \frac{4\pi l}{2 \ln(l/a) - 1}, \quad K_2 = \frac{8\pi l}{2 \ln(l/a) + 1}, \quad K_3 = \frac{8\pi l}{2 \ln(l/a) + 1}. \quad (2.6.24)$$

Рис. 2.7. Относительный коэффициент сопротивления осесимметричных частиц при движении вдоль оси. Сплошная линия — приближенная формула (2.6.28), штриховая линия — точное решение для эллипсоида вращения. Экспериментальные данные: 1, 2 — цилиндры, 3 — параллелепипеды, 4 — двойные конусы. Численный расчет: 5 — цилиндры, 6 — конусы.

Рис. 2.8. Относительный коэффициент сопротивления осесимметричных частиц при движении перпендикулярно оси. Сплошная линия — приближенная формула (2.6.29), штриховая линия — точное решение для эллипсоида вращения. Экспериментальные данные: 1, 2 — цилиндры, 3 — параллелепипеды, 4 — двойные конусы.

Для тонких круговых цилиндров длиной l и радиусом a :

$$K_1 = \frac{4\pi l}{\ln(l/a) - 0,72}, \quad K_2 = \frac{4\pi l}{\ln(l/a) + 0,5}, \quad K_3 = \frac{4\pi l}{\ln(l/a) + 0,5}. \quad (2.6.25)$$

Для гантелевидной частицы, состоящей из двух соприкасающихся сфер равного радиуса a :

$$K_1 = 24,3 a, \quad K_2 = 27,0 a, \quad K_3 = 27,0 a. \quad (2.6.26)$$

Для произвольного эллипсоида с полуосями a, b, c :

$$K_1 = \frac{16\pi}{\chi + a^2\alpha}, \quad K_2 = \frac{16\pi}{\chi + b^2\beta}, \quad K_3 = \frac{16\pi}{\chi + c^2\gamma}. \quad (2.6.27)$$

Здесь параметры $\alpha, \beta, \gamma, \chi$ выражаются через интегралы

$$\alpha = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta}, \quad \beta = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\Delta}, \quad \gamma = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\Delta}, \quad \chi = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta},$$

где $\Delta = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$, а нижним пределом интегрирования λ является положительный корень кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

Для осесимметричного тела произвольной формы введем понятие эквивалентной по периметру сферы. Для этого спроектируем точки поверхности тела на плоскость, перпендикулярную его оси. В проекции получим круг радиуса a_{\perp} . Эквивалентная по периметру сфера имеет такой же радиус.

Для некоторых осесимметричных и ортотропных тел (цилиндры, двойные конусы, параллелепипеды) на рис. 2.7, 2.8 приведены экспериментальные данные [219] и результаты численных расчетов для главных значений трансляционного тензора. На рис. 2.7 по оси ординат отложены значения осевого сопротивления осесимметричного тела, отнесенные к сопротивлению сферы с эквивалентным периметром. По оси абсцисс отложены значения фактора формы Σ , равного отношению площади поверхности частицы к площади поверхности эквивалентной по периметру сферы. Приведенные результаты хорошо аппроксимируются следующей зависимостью для относительного коэффициента осевого сопротивления [219]:

$$\bar{c}_{\parallel} = 0,244 + 1,035 \Sigma - 0,712 \Sigma^2 + 0,441 \Sigma^3. \quad (2.6.28)$$

На рис. 2.8 приведены относительные значения бокового сопротивления в зависимости от аналогичного фактора формы. Пунктирной линией нанесены точные результаты для сфероидов. Относительный коэффициент бокового сопротивления можно вычислять по формуле [219]

$$\bar{c}_{\perp} = 0,392 + 0,621 \Sigma - 0,04 \Sigma^2, \quad (2.6.29)$$

которая хорошо согласуется с указанными экспериментальными данными.

Осаждение изотропных частиц. Важной гидродинамической характеристикой таких химико-технологических процессов, как отстой и седиментация, является установившаяся скорость U_i осаждения частиц в полях массовых сил и, прежде всего, в гравитационном поле. Любое тело, обладающее сферической изотропией и однородное по плотности, имеет одинаковое сопротивление поступательному движению при любой ориентации. Такое тело будет также изотропно по отношению к паре сил, возникающих при его вращении относительно произвольной оси, проходящей через его центр. Если такое тело в начальный момент имеет некоторую ориентацию в жидкости и может падать без начального вращения, то оно будет падать вертикально без вращения, сохраняя свою первоначальную ориентацию.

Свободное падение несферических изотропных частиц удобно описывать с помощью параметра сферичности

$$\psi = \frac{S_e}{S}, \quad (2.6.30)$$

где S — площадь поверхности частицы, S_e — площадь поверхности эквивалентной по объему сферы. При медленном движении скорость осаждения частиц можно вычислять с помощью эмпирической формулы [178]

$$\vec{U}_i = \frac{2}{9} \frac{Q \Delta \rho a_e^2}{\mu} \vec{g}, \quad (2.6.31)$$

где a_e — радиус эквивалентной по объему сферы,

$$Q = 0,843 \ln \frac{\psi}{0,065}. \quad (2.6.32)$$

Приведем значения фактора сферичности ψ для некоторых частиц: сфера — 1,000; октаэдр — 0,846; куб — 0,806; тетраэдр — 0,670.

Осаждение неизотропных частиц. Если для стоксова оседания сферической частицы направление скорости всегда совпадает с направлением силы тяжести, то даже для однородных осесимметричных частиц направление скорости будет вертикальным только в том случае, когда вертикаль совпадает с одной из главных осей трансляционного тензора \mathbf{K} . Если же ось симметрии наклонена к вертикали под углом φ , то направление скорости задается углом [219]

$$\theta = \pi + \arctg \left(\frac{K_2}{K_1} \operatorname{tg} \varphi \right), \quad (2.6.33)$$

где K_1 , K_2 — осевое и боковое главные сопротивления трансляционному движению. Величина скорости определяется с помощью выражения [219]

$$U_i = \frac{V \Delta \rho g}{\mu} (K_1^2 \cos^2 \theta + K_2^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}, \quad (2.6.34)$$

где V — объем частицы.

Отклонение направления оседания от вертикали означает, что на падающую частицу действует боковая сила, приводящая к ее горизонтальному смещению. Дело еще более осложняется, если центр гидродинамической реакции (включающей и архимедову силу) не совпадает с центром масс частицы. В этом случае помимо трансляционного движения частица получает еще и вращение под действием возникающего момента сил («кувыркание» пули со смещенным центром масс). Для осесимметричных частиц это вращение заканчивается, когда конфигурация системы центр масс — центр реакции приобретает устойчивое положение: центр масс впереди центра реакции. При этом стабилизируется и становится прямолинейной и траектория осаждения частицы.

Однако в более общем случае асимметрии частицы совместное действие боковой силы и вращения может привести к движению по пространственной, например, по спиралевидной траектории. В то же время установившаяся траектория оседания тел с геликоидальной (пропеллерообразной) симметрией остается прямолинейной, несмотря на сохраняющееся вращение тела [178].

Для оценок установившейся скорости оседания стоксовых частиц несферической формы полезны две теоремы. Одна из них доказана Хиллом и Пауэром [238] и гласит, что стоксово сопротивление произвольного тела, движущегося в вязкой жидкости, больше стоксова сопротивления любого вписанного в него тела. Таким образом, для определения верхней и нижней оценок стоксова сопротивления тела какой-либо экзотической формы можно рекомендовать разумный выбор вписанных и описанных около него тел с известными сопротивлениями. Другая теорема доказана Уэйнбергером [317] и говорит о том, что из всех частиц с различной формой, но с одним и тем же объемом и массой наибольшую стоксову скорость осаждения имеет сферическая частица.

Средняя скорость неизотропных частиц, падающих в жидкости. Средняя величина вектора скорости частицы $\langle \vec{U} \rangle$, которая наблюдается при проведении большой серии экспериментов, когда частица падает со случайной ориентацией в жидкости, для стоксова режима определяется по формуле [178]

$$\langle \vec{U} \rangle = \frac{V \Delta \rho}{\mu \bar{K}} \vec{g}, \quad (2.6.35)$$

где V — объем тела, $\Delta \rho$ — разность плотностей частицы и окружающей жидкости, \vec{g} — ускорение силы тяжести, \bar{K} — среднее сопротивление, которое следующим образом выражается через главные сопротивления:

$$\frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right). \quad (2.6.36)$$

Средняя сила сопротивления, действующая на падающую в жидкости случайно ориентированную частицу, определяется так:

$$\langle \vec{F} \rangle = -\mu \bar{K} \langle \vec{U} \rangle. \quad (2.6.37)$$

Формулы (2.6.35) — (2.6.37) важны в связи с некоторыми вопросами броуновского движения.

В частном случае сферической частицы в (2.6.35) следует положить $V = \frac{4}{3} \pi a^3$, $\bar{K} = 6\pi a$.

Вычислим среднее сопротивление для тонкого кругового диска радиуса a . Для этого подставим значения главных сопротивлений (2.6.23) в формулу (2.6.36). В результате получим

$$\bar{K} = 12a. \quad (2.6.38)$$

Подставляя коэффициенты K_1 , K_2 , K_3 из (2.6.24) — (2.6.27) в (2.6.36) можно определить с помощью (2.6.35) среднюю скорость осаждения указанных выше тел несферической формы.

Обтекание несферических твердых частиц при высоких числах Рейнольдса. При стоксовом обтекании частиц любой формы течение является безотрывным, т.е. линии тока приходят из бесконечности, огибают тело, всюду плотно прилегая к поверхности, и снова уходят в бесконечность. Однако при более высоких числах Рейнольдса происходит отрыв потока от обтекаемого тела. Это приводит к образованию вихревой кормовой области. По мере роста числа Рейнольдса размер этой вихревой области (длина следа) растет, причем для различных форм тела по-разному. На рис. 2.9 приведены экспериментальные и численные данные по относительной длине следа L_W , выраженной в диаметрах экваториального сечения d , в зависимости от числа Рейнольдса для различных осесимметричных тел. В их число входят: сфера, диск и эллипсоиды с различным отношением E осевого размера к экваториальному.

Рис. 2.9. Относительная длина кормового вихря

При дальнейшем росте числа Рейнольдса вихревой след становится нестационарным, уходит в бесконечность и окончательно турбулизуется. Силовое воздействие потока на обтекаемое тело тесно связано с размером и состоянием вихревого следа. Предельными асимптотическими режимами такого воздействия являются стоксов режим (при $Re \rightarrow 0$) и ньютоновский режим (при $Re \rightarrow \infty$). Характеристики стоксова обтекания рассмотрены ранее. Ньютоновский режим обтекания характеризуется постоянством коэффициента сопротивления тела c_f .

Коэффициенты сопротивления при осевом обтекании дисков, являющихся предельными случаями осесимметричных тел малого удлинения, приведены в работе [219] во всем диапазоне чисел Рейнольдса, рассчитанных по радиусу. Эти формулы являются аппроксимациями данных численных расчетов и экспериментальных результатов:

$$\begin{aligned}
 c_f &= 10,2 Re^{-1} (1 + 0,318 Re) && \text{при } Re \leq 0,005, \\
 c_f &= 10,2 Re^{-1} (1 + 10^s) && \text{при } 0,005 < Re \leq 0,75, \\
 c_f &= 10,2 Re^{-1} (1 + 0,239 Re^{0,792}) && \text{при } 0,75 < Re \leq 66,5 \\
 c_f &= 1,17 && \text{при } Re > 66,5,
 \end{aligned} \tag{2.6.39}$$

где $s = -0,61 + 0,906 \lg Re - 0,025 (\lg Re)^2$.

Установившуюся скорость оседания частицы произвольной формы (для ньютоновского режима движения при больших числах Рейнольдса) можно найти по формуле [219]

$$U = 0,69 \gamma^{1/36} [g a_e (\gamma - 1) (1,08 - \psi)]^{1/2} \quad \text{при} \quad 1,1 < \gamma < 8,6, \quad (2.6.40)$$

где γ — отношение плотностей частицы и жидкости, a_e — радиус эквивалентной по объему сферы, ψ — отношение площади поверхности эквивалентной по объему сферы к площади поверхности частицы.

2.7. Обтекание цилиндра (плоская задача)

В химической технологии и энергетике широко используются аппараты, которые оснащены теплообменными трубами и различными цилиндрическими вставками, погруженными в движущуюся жидкость. Гидродинамическое воздействие на указанные элементы конструкций можно оценить на основе решения плоской задачи об обтекании цилиндра.

Обтекание цилиндра поступательным потоком.

Малые числа Рейнольдса. В [247, 282] методом сращиваемых асимптотических разложений получено решение задачи об обтекании кругового цилиндра радиуса a поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U_1 при малых числах Рейнольдса. Исследование проводилось в полярной системе координат \mathcal{R}, θ на основе полных уравнений Навье — Стокса* (1.1.4), что позволило получить следующее выражение для функции тока при $\mathcal{R}/a \sim 1$:

$$\Psi = aU \left(\frac{\mathcal{R}}{a} \ln \frac{\mathcal{R}}{a} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}}{a} + \frac{1}{2} \frac{a}{\mathcal{R}} \right) \sin \theta, \quad (2.7.1)$$

где использованы обозначения:

$$U = U_1 (\Delta - 0,87 \Delta^3), \quad \Delta = \left(\ln \frac{3,703}{\text{Re}} \right)^{-1}, \quad \text{Re} = \frac{a U_1 \rho}{\mu}.$$

Компоненты скорости жидкости можно найти по формулам (1.1.12).

Функция тока (2.7.1) позволяет вычислить коэффициент сопротивления

$$c_f = \frac{F}{a U_1^2 \rho} = \frac{4\pi}{\text{Re}} (\Delta - 0,87 \Delta^3), \quad (2.7.2)$$

* Попытка решения гидродинамической задачи об обтекании цилиндра на основе линейных уравнений Стокса (2.1.1) приводит к парадоксу Стокса [38, 178].

где F — сила, приходящаяся на единицу длины цилиндра.

Сравнение с экспериментальными данными показывает, что формулу (2.7.3) можно использовать при $0 < \text{Re} < 0,4$ [38].

Безотрывное обтекание цилиндра при умеренных числах Рейнольдса. Согласно экспериментальным данным [37] безотрывное обтекание кругового цилиндра реализуется при $\text{Re} \leq 2,5$. В этой области изменения чисел Рейнольдса для расчета коэффициента сопротивления цилиндра можно использовать приближенную формулу [219]

$$c_f = 5,65 \text{Re}^{-0,78} (1 + 0,26 \text{Re}^{0,82}) \quad \text{при } 0,05 \leq \text{Re} \leq 2,5, \quad (2.7.3)$$

полученную путем обработки опытных данных и результатов численных расчетов.

Отрывное обтекание цилиндра при умеренных числах Рейнольдса. При превышении критического значения $\text{Re} \approx 2,5$ вблизи кормовой точки возникает область вихревого возвратного течения с замкнутыми линиями тока — происходит отрыв потока [37]. При увеличении числа Рейнольдса точка отрыва постепенно перемещается от оси потока вверх по поверхности цилиндра. Коэффициент сопротивления для отрывного обтекания цилиндра при умеренных числах Рейнольдса можно вычислять с помощью эмпирических формул [219]

$$\begin{aligned} c_f &= 5,65 \cdot 10^{-0,78} (1 + 0,333 \text{Re}^{0,55}) & \text{при } 2,5 < \text{Re} \leq 20, \\ c_f &= 5,65 \cdot 10^{-0,78} (1 + 0,148 \text{Re}^{0,82}) & \text{при } 20 < \text{Re} \leq 200. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Отрывное обтекание цилиндра при больших числах Рейнольдса. При дальнейшем увеличении Re кормовые вихри удлиняются, а затем начинается их поочередный отрыв (вихревая дорожка Кармана). Одновременно с этим точка отрыва перемещается ближе к экваториальному сечению. Важной характеристикой обтекания цилиндра является частота отрыва вихрей ν_f от кормовой области. Для ее определения можно использовать эмпирическую формулу [71]

$$\text{St} = \frac{0,13}{c_f} [1 - \exp(-2,38 c_f)], \quad (2.7.5)$$

где $\text{St} = a\nu_f \mu / \rho$ — число Струхала.

Приведем также другую полезную формулу для частоты отрыва вихрей: $\nu_f = 0,08 U_i / b$, где b — полуширина вихревого следа в месте его разрушения.

Начиная с $\text{Re} \approx 0,5 \cdot 10^3$ можно говорить о развитии гидродинамическом пограничном слое. В значительной своей части этот слой остается ламинарным [37]. При изменении числа Рейнольдса в диапазоне $0,5 \cdot 10^3 < \text{Re} < 0,5 \cdot 10^5$ происходит постепенное смещение точки

отрыва ламинарного пограничного слоя θ_0 от значения $71,2^\circ$ до 95° [37, 184].

При $Re > 2000$ след вдали от тела окончательно турбулизуется.

По данным [94] на кривой $c_f(Re)$ есть два плоских участка (области автомодельности), где коэффициент сопротивления практически не меняется:

$$\begin{aligned} c_f &= 1,0 & \text{при } 3 \cdot 10^2 < Re < 3 \cdot 10^3, \\ c_f &= 1,1 & \text{при } 4 \cdot 10^3 < Re < 10^5. \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

В промежуточной области между указанными плоскими участками коэффициент сопротивления монотонно увеличивается с ростом числа Рейнольдса.

Развитая турбулентность в пограничном слое цилиндра. Развитая турбулентность в пределах пограничного слоя наступает при более высоких числах Рейнольдса $Re \approx 10^5$ и сопровождается «кризисом сопротивления». При этом по данным [75] сначала сопротивление цилиндра резко падает до значения $c_f \approx 0,3$ при $Re = 3,5 \cdot 10^5$, а затем начинает расти и вновь выходит на автомодельный режим, которой характеризуется постоянным значением

$$c_f = 0,9 \quad \text{при } Re > 5 \cdot 10^5. \quad (2.7.7)$$

В книге [71] приведены некоторые данные о гидродинамических характеристиках тел другой формы, касающиеся в основном области предкризисной автомодельности. Влияние шероховатости поверхности цилиндра и уровня турбулентности набегающего потока на коэффициент сопротивления обсуждается в [75]. В [85] исследуется зависимость гидродинамических характеристик течения в турбулентных пограничных слоях от шероховатости и продольного градиента давления.

Отметим, что при исследовании некоторых задач тепло- и массопереноса и химической гидродинамики поля скорости в окрестности обтекаемых тел могут определяться закономерностями течения идеальной невязкой жидкости. Такая ситуация характерна для течений в пористой среде [32, 56, 132] и взаимодействия тел с жидкими металлами (см. разд. 4.11, где приведено решение тепловой задачи для потенциального обтекания эллиптического цилиндра поступательным потоком идеальной жидкости).

Обтекание кругового цилиндра сдвиговым потоком.

Закрепленный цилиндр. Рассмотрим обтекание закрепленного кругового цилиндра произвольным стационарным линейным сдвиговым потоком вязкой несжимаемой жидкости в плоскости, нормальной к оси цилиндра. Распределение скоростей такого течения вдали

от цилиндра в декартовой системе координат X_1, X_2 в общем случае записывается так:

$$\vec{V} \rightarrow \mathbf{G}\vec{\mathcal{R}} \quad \text{при} \quad \mathcal{R} \rightarrow \infty. \quad (2.7.8)$$

Тензор сдвига в (2.7.8) может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров $\mathbf{G} = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$, которые соответствуют деформационной и вращательной составляющим движения жидкости на бесконечности:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & -E_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{\mathcal{R}} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix},$$

$$E_1 = G_{11} = -G_{22}, \quad E_2 = \frac{1}{2}(G_{12} + G_{21}), \quad \Omega = \frac{1}{2}(G_{21} - G_{12}),$$

и определяются заданием трех независимых величин E_1, E_2, Ω .

В стоксовом приближении (при $\text{Re} \rightarrow 0$) решение соответствующей гидродинамической задачи с граничными условиями на бесконечности (2.7.8) и условиями прилипания на поверхности цилиндра ($\vec{V} = 0$ при $\mathcal{R} = a$) приводит к функции тока [60, 218]

$$\Psi = \frac{1}{2}a^2\bar{E}\left(\frac{\mathcal{R}}{a} - \frac{a}{\mathcal{R}}\right)^2 \sin 2\bar{\theta} - \frac{1}{2}a^2\Omega\left(\frac{\mathcal{R}^2}{a^2} - 1 - 2\ln\frac{\mathcal{R}}{a}\right), \quad (2.7.9)$$

где

$$\bar{E} = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2}, \quad \bar{\theta} = \theta + \Delta\theta \quad \left(\frac{E_1}{\bar{E}} = \cos(2\Delta\theta), \quad \frac{E_2}{\bar{E}} = -\sin(2\Delta\theta) \right).$$

При записи этих выражений использована система координат $\mathcal{R}, \bar{\theta}$, которая получена из исходной путем поворота на угол $\Delta\theta$ и связана с главными осями симметричного тензора \mathbf{E} (в главных осях тензор \mathbf{E} приводится к диагональному виду с элементами \bar{E} и $-\bar{E}$). Чисто деформационный сдвиг отвечает значению $\Omega = 0$, а простой сдвиг задается параметрами $E_1 = 0, \Omega = -E_2$.

Поле скоростей жидкости определяется путем подстановки выражения (2.7.9) в формулы (1.1.11).

Структура линий тока $\Psi = \text{const}$ существенным образом зависит от параметров \bar{E} и Ω . Для качественного анализа течения удобно ввести безразмерную угловую скорость вращения потока вдали от цилиндра

$$\Omega_E = \Omega/\bar{E}.$$

При $0 \leq |\Omega_E| \leq 1$ все линии тока разомкнуты и на поверхности цилиндра имеются четыре критические точки с угловыми координатами

$$\theta_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{2} \arcsin \frac{\Omega_E}{2} + \frac{\pi}{2}(k-1), \quad \text{где } k = 1, 2, 3, 4.$$

Рис. 2.10. Схема обтекания закрепленного кругового цилиндра линейным сдвиговым потоком: а) деформационное течение ($\Omega_E = 0$), б) простой сдвиг ($|\Omega_E| = 1$)

На рис. 2.10 качественно изображены линии тока для чисто деформационного (при $\Omega_E = 0$) и простого (при $\Omega_E = 1$) сдвигового течения. Увеличение безразмерной угловой скорости вращения потока на бесконечности Ω_E от нуля до единицы сдвигает критическую точку стекания на поверхности цилиндра θ_k против часовой стрелки на 15° .

При $|\Omega_E| > 1$ поверхность цилиндра окружена замкнутыми линиями тока, а вдали от цилиндра линии тока разомкнуты.

Свободно вращающийся цилиндр. Рассмотрим теперь обтекание кругового цилиндра, свободно взвешенного в произвольном линейном сдвиговом стоксовом ($\text{Re} \rightarrow 0$) потоке. Распределение скоростей жидкости такого течения вдали от цилиндра, как и ранее, задается соотношениями (2.7.8).

В силу условия прилипания жидкости на поверхности свободно взвешенного в сдвиговом потоке кругового цилиндра, он будет вращаться с постоянной угловой скоростью, равной скорости вращения потока на бесконечности. Сказанное означает, что на поверхности цилиндра должны выполняться следующие граничные условия для компонент скорости жидкости:

$$V_{\mathcal{R}} = 0, \quad V_{\theta} = \Omega \quad \text{при} \quad \mathcal{R} = a. \quad (2.7.10)$$

Решение гидродинамической задачи об обтекании свободно вращающегося цилиндра произвольным сдвиговым стоксовым потоком с граничными условиями (2.7.8), (2.7.10) имеет вид [60, 218]

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} a^2 \bar{E} \left(\frac{\mathcal{R}}{a} - \frac{a}{\mathcal{R}} \right)^2 \sin 2\bar{\theta} - \frac{1}{2} a^2 \Omega \left(\frac{\mathcal{R}^2}{a^2} - 1 \right), \\ V_{\mathcal{R}} &= \frac{a^2 \bar{E}}{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathcal{R}}{a} - \frac{a}{\mathcal{R}} \right)^2 \cos 2\bar{\theta}, \quad V_{\bar{\theta}} = \Omega \mathcal{R} - \bar{E} \mathcal{R} \left(1 - \frac{a^4}{\mathcal{R}^4} \right) \sin 2\bar{\theta}, \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

Рис. 2.11. Схема обтекания свободно вращающегося кругового цилиндра линейным сдвиговым потоком (предельные линии тока $\Psi = \Psi_c$ выделены): а) простой сдвиг ($|\Omega_E| = 1$), б) общий случай плоского сдвигового течения ($0 < |\Omega_E| < 1$)

где параметры $E_1, E_2, \bar{E}, \Omega$ введены так же, как в задаче об обтекании закрепленного цилиндра.

В данном случае на поверхности цилиндра при $\Omega_E \neq 0$ отсутствуют критические точки и существует два качественно различных типа течения, которые характеризуются величиной угловой скорости Ω . А именно, при $0 < |\Omega_E| \leq 1$ в потоке имеются как замкнутые, так и разомкнутые линии тока; при этом к поверхности цилиндра примыкает область с полностью замкнутыми линиями тока, а вдали от цилиндра линии тока разомкнуты (рис. 2.11). При $|\Omega_E| > 1$ все линии тока замкнуты.

Из формул (2.7.11) следует, что при $0 < |\Omega_E| \leq 1$ в потоке существуют две критические точки с координатами

$$\bar{\theta}_1^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad \bar{\theta}_2^\circ = \frac{5\pi}{4}, \quad \mathcal{R}_{1,2}^\circ = a \left(\frac{1}{1 - \Omega_E} \right)^{1/4}, \quad (2.7.12)$$

в которых скорость обращается в нуль: $V_{\mathcal{R}}^\circ = V_\theta^\circ = 0$. Эти особые точки являются точками самопересечения предельной линии тока, которая разграничивает области с замкнутыми и разомкнутыми линиями тока (рис. 2.11).

Предельная линия тока описывается уравнением

$$\Psi = \Psi_c, \quad \Psi_c = a^2 E \left[\frac{1}{2} \Omega_E - 1 + (1 - \Omega_E)^{1/2} \right].$$

При $\Omega_E \rightarrow 0$ из формулы (2.7.12) имеем $\mathcal{R}_{1,2}^\circ \rightarrow a$, т.е. при уменьшении угловой скорости вращения потока критические точки стремятся к поверхности цилиндра. В другом предельном случае

$\Omega_E \rightarrow 1$, что соответствует простому сдвигу, получаем $\mathcal{R}_{1,2}^{\circ} \rightarrow \infty$ (т.е. критические точки уходят на бесконечность).

Отметим, что в работе [76] решена аналогичная плоская задача об обтекании пористого цилиндра произвольным линейным сдвиговым потоком. Для описания течения вне частицы использовались уравнения Стокса и считалось, что внутри частицы происходит фильтрация внешней жидкости закону Дарси (2.2.24). Определено количество жидкости, просачивающейся внутрь цилиндра в единицу времени.

2.8. Обтекание деформированных капель и пузырей

Динамическое взаимодействие с потоком взвешенных в нем капель и пузырей может приводить к их деформации, а иногда и к дроблению. Это явление оказывается важным в химико-технологических процессах, поскольку приводит к изменению площади межфазной поверхности, относительной скорости движения фаз и нестационарным эффектам. Возмущающими воздействиями являются при этом вязкие или инерционные силы, а препятствующими — капиллярные силы.

Форма пузыря зависит от величины чисел Рейнольдса $Re = \frac{a_e U_i \mu}{\rho}$ и

Вебера $We = \frac{a_e U_i^2 \rho}{\sigma}$, где μ и ρ — динамическая вязкость и плотность сплошной фазы, σ — коэффициент поверхностного натяжения, a_e — радиус сферы, объем которой равен объему пузыря.

Слабые деформации капель и пузырей в поступательном и сдвиговом потоках при малых числах Рейнольдса.

Поступательный поток. При малых числах Рейнольдса и Вебера осесимметричная задача о медленном поступательном движении капли с установившейся скоростью U_i в покоящейся жидкости исследовалась в [310]. Считалось выполненным условие $We = O(Re^2)$. Для определения деформации поверхности капли использовалось условие равенства скачка нормальных напряжений избыточному давлению, обусловленному силами поверхностного натяжения. Было показано, что капля имеет форму сплюснутого (в направлении движения) эллипсоида вращения с отношением большой и малой полуоси, равным

$$\chi = 1 + \delta We. \quad (2.8.1)$$

Здесь безразмерный параметр δ дается выражением

$$\delta = \frac{3}{8(\beta + 1)^3} \left[\left(\frac{81}{80} \beta^3 + \frac{57}{20} \beta^2 + \frac{103}{40} \beta + \frac{3}{4} \right) - \frac{\gamma - 1}{12} (\beta + 1) \right],$$

где β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости, γ — отношение плотностей капли и окружающей жидкости. Газовому пузырю отвечают значения $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$.

Сдвиговый поток. Обтекание капли простым сдвиговым потоком рассматривалось в [308, 309]. Вдали от капли использовались граничные условия

$$V_X \rightarrow GY, \quad V_Y \rightarrow 0, \quad V_Z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty,$$

где $R = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$. Задача решалась в стоксовом приближении при малых значениях безразмерного параметра $Ga_e\mu/\sigma$. Было показано, что форма капли описывается уравнением

$$R = a_e \left(1 + \frac{Ga_e\mu}{\sigma} \frac{19\beta + 16}{16\beta + 16} XY \right) \quad (2.8.2)$$

и представляет собой вытянутый эллипсоид вращения. Экспериментальные данные [308] подтверждают справедливость уравнения (2.8.2).

Всплывание эллипсоидального пузыря при больших числах Рейнольдса. Рассмотрим движение газового пузыря при больших числах Рейнольдса. При малых We форма пузыря близка к сферической. Значения чисел Вебера порядка единицы составляют важную для практики промежуточную область изменения We , когда пузырь, будучи существенно деформированным, сохраняет симметрию относительно своего миделева сечения. Для таких значений We форма пузыря хорошо аппроксимируется сплюснутым в направлении потока эллипсоидом вращения с полуосями a и $b = \chi a$, где полуось b ориентирована поперек потока и $\chi \geq 1$.

Требование выполнения граничного условия для нормальных напряжений в передней и задней критических точках, а также вдоль границы миделева сечения пузыря приводит к следующей зависимости между числом Вебера We и отношением χ большой и малой полуоси эллипсоида [261]:

$$We = 2\chi^{-4/3}(\chi^3 + \chi - 2) [\chi^2 \operatorname{arcsec} \chi - (\chi^2 - 1)^{1/2}]^2 (\chi - 1)^{-3}. \quad (2.8.3)$$

Численные оценки [261] показывают, что максимальное отклонение истинной кривизны от соответствующего значения для аппроксимирующего эллипсоида не превышает 5% при $We \leq 1$ ($\chi \leq 1,5$) и 10% при $We \leq 1,4$ ($\chi \leq 2$).

Отметим, что при

$$Re \geq 0,55 M^{-1/5} \quad (M = g\rho^3\nu^4\sigma^{-3})$$

происходит отклонение формы пузыря от сферической более чем на 5% (ν — кинематическая вязкость жидкости, g — ускорение силы тяжести, M — безразмерное число Мортонa, зависящее только от свойств жидкости).

Для обычных жидкостей типа воды имеем $M \sim 10^{-10}$, и деформацию пузыря следует принимать во внимание, начиная с $Re \sim 10^2$. (Для нефти $M \sim 10^{-2}$ и деформация пузыря становится существенной, начиная с малых чисел Рейнольдса.)

В работах [40, 126] получена скорость всплытия эллипсоидального пузыря U_i и отношение его осей χ в зависимости от эквивалентного радиуса $a_e = (ab^2)^{1/3}$. В общем случае выражение для скорости всплытия пузыря имеет вид

$$U_i = U_0 f(M, a_e/a_0), \quad (2.8.4)$$

где безразмерное число Мортонa M и размерные величины U_0 , a_0 зависят только от свойств жидкости

$$U_0 = \left(\frac{\sigma^2 g}{\rho^2 \nu} \right)^{1/5}, \quad a_0 = \left(\frac{\sigma \nu^2}{\rho g^2} \right)^{1/5}. \quad (2.8.5)$$

При условии $M^{1/5} \ll 1$, которое обычно выполняется, отношение U_i/U_0 и деформация χ зависят только от a_e/a_0 . Эти функции универсальны и могут быть представлены в следующем виде [40, 42]:

$$a_e/a_0 = We^{1/5} E^{2/5}, \quad U_i/U_0 = We^{2/5} E^{-1/5}. \quad (2.8.6)$$

Здесь $We(\chi)$ задается формулой (2.8.3) или более точной [40, 42]

$$We(\chi) = 2\rho a_e \frac{dS}{d\chi} \left(\frac{dm}{d\chi} \right)^{-1}, \quad (2.8.7)$$

где S и m — площадь поверхности и присоединенная масса эллипсоида

$$S = 2\pi a_e^2 \frac{(1 + \alpha^2)^{1/3}}{\alpha^{2/3}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \right),$$

$$m = \frac{4\pi}{3} a_e^3 \frac{(1 + \alpha^2)(1 - \alpha \operatorname{arccctg} \alpha)}{1 - (1 + \alpha^2)(1 - \alpha \operatorname{arccctg} \alpha)}, \quad \chi = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}}.$$

Функция $E(\alpha)$ согласно [42] определяется формулой

$$E(\alpha) = \frac{3(1 + \alpha^2)^{2/3} [\alpha + (1 - \alpha^2) \operatorname{arccctg} \alpha]}{\alpha^{7/3} [(1 + \alpha^2) \operatorname{arccctg} \alpha - \alpha]^2}. \quad (2.8.8)$$

При $a_e \leq 3a_0$ для деформации и скорости всплытия можно пользоваться асимптотиками [126]

$$\chi = 1 + \frac{1}{288}(a_e/a_0)^5, \quad U_i = \frac{1}{9}U_0(a_e/a_0)^2. \quad (2.8.9)$$

Безразмерная скорость всплытия U_i/U_0 согласно (2.8.6) достигает наибольшего значения, равного 0,6, при $a_e = 3,7a_0$, $\chi = 1,9$, что находится в согласии с экспериментальными данными.

При дальнейшем росте размера пузыря $a_e > 3,7a_0$ вязкое сопротивление, вследствие увеличения χ , растет быстрее силы Архимеда и скорость пузыря падает. При $a_e/a_0 \geq 8$ модель эллипсоидального пузыря становится неприменимой.

Много эмпирических соотношений для установившейся скорости движения деформированных капель и пузырей, в том числе и для более сложных, чем эллипсоидальная, форм, приведено в [219].

Всплывание крупного пузыря в виде сферического сегмента. Всплывающие пузыри и капли по мере укрупнения их размеров принимают равновесную форму, все более отличающуюся от сферической. Если при малых и умеренных Re и малых We форма пузыря близка к сферической, то при умеренных $Re = 10^2 \div 10^3$ и We порядка нескольких единиц форма пузыря может приближенно моделироваться сплюснутым эллипсоидом, а траектория его движения может представлять собой винтовую линию. При дальнейшем увеличении We «дно» пузыря становится все более плоским. Наконец, при $We > 10$ и больших Re пузырь принимает форму «опрокинутой чашечки» или сферического сегмента и поднимается по вертикали. Подробный анализ описанных режимов дан в [219].

Рис. 2.12. Качественная картина обтекания пузыря в виде сегмента

Установившаяся скорость всплывания крупного пузыря может быть определена исходя из следующей модели, подтверждаемой визуальными наблюдениями. Пузырь представляет собой сферический сегмент (рис. 2.12) с углом полураствора $0 \leq \bar{\theta} \leq \bar{\theta}_*$, где угловая координата $\bar{\theta}$ отсчитывается от передней критической точки. Оставшуюся часть сферы занимает тороидальный кормовой вихрь, так что внешний поток обтекает полную сферу. Течение в окрестности сферической границы газового пузыря считается потенциальным [100].

В работах [36, 219] на основе этой модели была получена скорость подъема такого пузыря

$$U_i = \frac{2}{3} \sqrt{ag}, \quad (2.8.10)$$

где a — радиус кривизны сферического сегмента. Формула (2.8.10) неплохо описывает экспериментальные данные [219].

Приведем также эмпирическую формулу [40], выражающую скорость подъема пузыря в виде сферического сегмента через радиус эквивалентной по объему сферы a_e :

$$U_i = 1,01 \sqrt{a_e g}.$$

Для оценки угла полураствора $\bar{\theta}_*$ сегмента справедлива полуэмпирическая формула

$$\bar{\theta}_* = 50 + 190 \exp(-0,62 Re^{0,4}),$$

где $\bar{\theta}_*$ выражается в градусах. Заметим, что при $Re > 10^2$ можно считать $\bar{\theta}_* \approx 50^\circ$.

Всплывание (осаждение) крупных маловязких капель также может сопровождаться сильной деформацией их поверхности, которая принимает форму сферического сегмента. Скорость всплывания таких капель можно оценить по формуле [219]

$$U_i = \frac{2}{3} \sqrt{ga \frac{|\Delta\rho|}{\rho}}, \quad (2.8.11)$$

где a — радиус кривизны сферического сегмента, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости, $\Delta\rho$ — разность плотностей жидкой и газовой фазы.

Деформация капель, движущихся в газе при больших числах Рейнольдса. В [128] исследована зависимость деформации капли от числа Вебера и интенсивности вихря внутри капли. Было показано, что форма капли близка к сплюснутому эллипсоиду вращения с отношением полуосей $\chi > 1$. При отсутствии вихря внутри капли эта зависимость согласуется с функцией $We(\chi)$, приведенной в (2.8.3). При увеличении интенсивности внутреннего вихря χ уменьшается. Поэтому движущиеся в газе капли имеют деформацию значительно меньшую по сравнению с пузырями при одном и том же числе Вебера We . Величина вихря внутри эллипсоидальной капли, как и у вихря Хилла, пропорциональна расстоянию \mathcal{R} от оси симметрии

$$\omega = |\text{rot } \vec{V}_2| = A\mathcal{R} \sin \theta.$$

Параметр интенсивности вихря выражается через χ следующим образом [128]:

$$A = 3 \frac{U_i}{a_e^2} \frac{v_{\max}(4 + \chi^2)^2}{\chi^2(16 - 2\chi^2 + \chi^4)}, \quad (2.8.12)$$

где зависимость v_{\max} от Re_1 и Re_2 описывается выражениями (2.4.8), (2.4.9); a_e — радиус эквивалентной по объему сферы.

Установившуюся скорость падения капли в газе (например, дождевой капли в воздухе) можно вычислять по формуле

$$U_i = \sqrt{\frac{8a_e g \gamma}{3c_f}}, \quad (2.8.13)$$

где γ — отношение плотностей капли и газа, а коэффициент сопротивления c_f связан с параметром χ эмпирической зависимостью:

$$c_f = 0,365 \chi^{1,8}. \quad (2.8.14)$$

Формулы (2.8.12) — (2.8.14) вместе с зависимостью $\chi(We, A)$ полностью определяют движение капли в газе. В [128] получено условие разрушения капли, связанное с экспоненциальным ростом амплитуды колебаний. Для дождевой капли это условие приблизительно соответствует значениям $\chi = \frac{5}{3}$, $We = 5$, $a_e = 3,8$ мм.

При сильных деформациях капли будут распадаться на более мелкие капли, т.е. разрушаться. Процесс распада капель очень сложен и определяется соотношением сил поверхностного натяжения, вязкости, инерции и некоторыми другими факторами. Для разных характерных скоростей относительного движения фаз характер дробления может быть существенно различным. В [57, 117] был проведен сравнительный анализ большого числа экспериментальных и теоретических работ по разрушению капель. Отмечается, что существует шесть основных механизмов дробления капель, которым соответствуют разные диапазоны изменения числа Вебера.

2.9. Стесненное движение частиц

Движение частицы в окружающей ее безграничной жидкости создает определенные поля скорости и давления. Находящиеся поблизости от нее другие частицы движутся уже в возмущенных гидродинамических полях. Одновременно с этим первая частица сама испытывает гидродинамическое воздействие со стороны соседних частиц и находящихся поблизости подвижных или неподвижных поверхностей. Поскольку в подавляющем большинстве реальных дисперсных систем наличие ансамбля частиц и стенок аппарата неизбежно, учет гидродинамического взаимодействия объектов представляется весьма важным. Один из методов, дающих необходимую информацию о взаимодействии, основан на построении точных аналитических решений. Однако, даже в рамках стоксовой гидродинамики, описание движения ансамбля частиц является очень сложной задачей, допускающей точные решения в исключительных случаях.

Движение двух сфер вдоль линии, проходящей через их центры. В стоксовом приближении точное аналитическое решение осесимметричной задачи о движении двух сфер с одинаковой скоростью вдоль линии, проходящей через их центры, было получено в [300]. Это решение имеет практическое значение и может быть использовано для оценки точности приближенных методов, применяемых для решения более сложных задач о гидродинамическом взаимодействии частиц.

Сила, действующая на каждую из сфер, описывается выражением [178]:

$$F = 6\pi\mu a U \lambda, \quad (2.9.1)$$

где a — радиус данной сферы, U — скорость движения сфер, λ — поправочный коэффициент, зависящий от обоих радиусов и расстояния l между центрами сфер. Выражение для λ в случае сфер равного радиуса имеет вид

$$\lambda = \frac{4}{3} \operatorname{sh} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ 1 - \frac{4 \operatorname{sh}^2[(n + \frac{1}{2})\alpha] - (2n+1)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}{2 \operatorname{sh}[(2n+1)\alpha] + (2n+1) \operatorname{sh} 2\alpha} \right\}, \quad (2.9.2)$$

где $\alpha = \ln \left[\frac{1}{2}(l/a) + \sqrt{\frac{1}{4}(l/a)^2 - 1} \right]$.

Для численных расчетов удобнее использовать приближенную формулу:

$$\lambda = \frac{0,88 a + l}{2,5 a + l}, \quad (2.9.3)$$

максимальная погрешность которой при любых значениях a и l составляет менее 1,3%.

Поскольку $\lambda \leq 1$, из формулы (2.9.1) следует, что скорость установившегося движения каждой из сфер в ансамбле выше, чем скорость движения одиночной сферы.

При движении в гравитационном поле установившиеся скорости частиц и капель разных размеров (или массы) будут различными [178, 294]. Поэтому расстояние между центрами частиц не будет постоянным, а следовательно, вся задача о гидродинамическом взаимодействии является, строго говоря, нестационарной. В [294] было показано, что при условии $Re \ll \frac{1}{2}l/a$ эту задачу можно считать квазистационарной.

Стоксово движение двух сфер при произвольном относительном расположении. Рассмотрим две удаленные друг от друга сферические частицы равного радиуса,двигающиеся с одинаковыми скоростями \vec{U} . Сила, действующая на каждую из частиц, определяется по формуле [178]

$$\frac{\vec{F}}{6\pi a \mu} = -\vec{i}_X \frac{U_X}{1 + \frac{3}{4}(a/l)} + \vec{i}_Z \frac{U_Z}{1 + \frac{3}{2}(a/l)}, \quad (2.9.4)$$

где Z — ось, проходящая через центры сфер, X — перпендикулярная ей ось.

Из выражения (2.9.4) следует, что когда сферы падают под действием гравитационной силы, направление которой не совпадает ни с осью X , ни с осью Z , а составляет с последней угол β , имеет место не только вертикальное падение частиц со скоростью

$$U_{\parallel} = -\frac{F}{6\pi a \mu} \left[1 + \frac{3a}{4l} (1 + \cos^2 \beta) \right], \quad (2.9.5)$$

но и горизонтальный дрейф со скоростью

$$U_{\perp} = -\frac{F}{6\pi\mu a} \frac{3a}{4l} \sin\beta \cos\beta. \quad (2.9.6)$$

В книгах [178, 234] дан подробный обзор исследований, посвященных гидродинамическому взаимодействию двух частиц разной формы в поступательном и сдвиговом стоковом потоке. Приведены многочисленные формулы, таблицы и графики, позволяющие определять зависимость силы сопротивления частиц от расстояния между ними. В [234] выписаны главные члены асимптотического разложения силы сопротивления частиц по малому безразмерному расстоянию между их поверхностями.

В [57, 234] анализировались результаты многочисленных работ по гидродинамическому взаимодействию двух капель, движущихся в жидкости. Приведены результаты расчетов для силы сопротивления (варьировались радиусы и вязкости капель и расстояния между ними).

Осевое и поперечное движение двух капель вблизи друг друга рассмотрено в [81, 82]. Получено несколько главных членов асимптотического разложения силы сопротивления по малому безразмерному расстоянию между поверхностями капель. Исследован также случай взаимодействия твердой частицы и капли.

В [213–215] анализировались деформации поверхностей капель и пузырей, движущихся вблизи друг друга или вблизи плоской свободной поверхности.

Гравитационное осаждение нескольких сфер равного радиуса. В [178] получены методом отражения и осредненные по всевозможным ориентациям частиц в пространстве соотношения между силой сопротивления F и скоростью осаждения U . Считалось, что расстояние l между центрами наиболее удаленных в системе сфер значительно больше их радиуса a . Во всех рассмотренных случаях для силы сопротивления справедлива формула (2.9.1), где λ — поправочный коэффициент, зависящий от конфигурации системы частиц. Ниже приведены значения поправочного коэффициента для некоторых характерных случаев расположения частиц.

Для системы из двух сфер:

$$\lambda = \frac{2}{1 + (a/l)}. \quad (2.9.7)$$

Для системы из трех сфер, расположенных в линию:

$$\lambda = \frac{3}{1 + \frac{10}{3}(a/l) - \frac{1}{4}(a/l)^2}. \quad (2.9.8)$$

Для системы из четырех сфер, расположенных в линию:

$$\lambda = \frac{4}{1 + \frac{13}{2}(a/l) - \frac{9}{8}(a/l)^2}. \quad (2.9.9)$$

Для системы из четырех сфер, расположенных по углам квадрата:

$$\lambda = \frac{4}{1 + 2,7(a/l) - 0,04(a/l)^2}. \quad (2.9.10)$$

Для системы из восьми сфер, расположенных в вершинах куба:

$$\lambda = \frac{8}{1 + 5,7(a/l) - 0,34(a/l)^2}. \quad (2.9.11)$$

Влияние стенок на осаждение одиночной частицы. В реальных системах осаждение частиц, как правило, происходит в объемах, ограниченных стенками аппаратов. При движении частиц в безграничном объеме линии тока индуцированного течения замыкаются на бесконечности. Поэтому при согласованном движении ансамбля частиц каждая частица движется в сонаправленном спутном потоке, индуцированном движением соседних частиц. В результате сопротивление движению каждой частицы ансамбля оказывается меньше, чем в случае движения одиночной частицы, а скорость оседания соответственно больше. В пространстве, ограниченном стенками аппарата, движение частицы вследствие замещения объемов должно индуцировать встречный поток жидкости. Поэтому сила сопротивления должна быть больше, а скорость осаждения меньше, чем для одиночной частицы в безграничном пространстве.

Бреннером [205] с помощью метода отражений было выведено соотношение, позволяющее корректировать закон сопротивления Стокса, с учетом влияния поправки, которую вносят стенки:

$$F = \frac{F_a}{1 - k(F_a/F_l)}, \quad (2.9.12)$$

где l — параметр, характеризующий близость частицы к стенке, $F_a = 6\pi\mu U_1 a$ и $F_l = 6\pi\mu U_1 l$ — силы сопротивления сфер радиусом a и l , движущихся в покоящейся жидкости со скоростью U_1 .

Значение коэффициента k , вычисленное для различных случаев, приведено в табл. 2.2. Отметим, что формула (2.9.12) применима при условии $b/l \ll 1$, где b — максимальный размер частицы.

В [269] рассмотрена сферическая частица, движущаяся параллельно стенке. Считалось, что величина зазора между поверхностью частицы и стенкой h мала по сравнению с радиусом частицы a . Для

ТАБЛИЦА 2.2
Значения коэффициента k в формуле (2.9.12)

Форма внешней границы	Положение центра частицы	Направление движения	K
Одна плоская стенка	На расстоянии l от стенки	Параллельно стенке	$\frac{9}{16}$
Одна плоская стенка	На расстоянии l от стенки	Перпендикулярно стенке	$\frac{9}{8}$
Параллельные стенки на расстоянии $2l$	На расстоянии l от стенок	Параллельно стенкам	1,004
Круговой цилиндр радиуса l	На расстоянии b от оси	Вдоль оси	$2,1044 - 6577 (b/l)^2$
Сфера радиуса l	В центре сферы	Радиальное	$\frac{9}{4}$

силы сопротивления и момента, действующих на частицу, получено несколько членов асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon = h/a$:

$$\begin{aligned} F &= 6\pi\mu a U_i [-0,231 \ln \varepsilon + 0,746 + O(\varepsilon \ln \varepsilon)], \\ M &= -8\pi\mu a^2 U_i [0,0434 \ln \varepsilon + 0,232 + O(\varepsilon \ln \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (2.9.13)$$

В [82] получено аналогичное асимптотическое разложение для силы, действующей на сферический пузырь, движущийся параллельно твердой плоскости:

$$F = 4\pi\mu a U_i [-0,3 \ln \varepsilon + 0,93 + O(\varepsilon \ln \varepsilon)]. \quad (2.9.14)$$

В работе [195] была исследована численным методом важная в приложении к химической технологии задача о конечных деформациях при движении твердой сферы к свободной межфазной границе и деформируемой капли к твердой плоской стенке.

Частица на поверхности раздела фаз. Переход частицы через границу раздела двух жидких сред является важной составной частью процессов сепарации и очистки одной из фаз от взвеси. Помимо перераспределения межфазных избыточных энергий, здесь важны чисто гидродинамические эффекты сопротивления переходу.

В [284] исследовалось движение диска, плоскость которого совпадает с поверхностью раздела двух жидкостей с вязкостями μ_1 и μ_2 . Силы сопротивления при стоксовом движении диска со скоростью \bar{U}_i по касательной и по нормали к границе раздела даются выражениями

$$F_{\parallel} = \frac{16}{3} a U_i (\mu_1 + \mu_2), \quad F_{\perp} = 8a U_i (\mu_1 + \mu_2). \quad (2.9.15)$$

В частном случае $\mu_1 = \mu_2$ из (2.9.15) получаются формулы (2.5.18) (с точностью до переобозначений индексов) для диска, движущегося в однородной среде.

Обе формулы (2.9.15) можно объединить и представить в следующем виде:

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2),$$

где F_1 и F_2 — силы сопротивления, действующие на движущейся диск в однородной жидкости соответственно с вязкостью μ_1 и μ_2 (движение диска происходит вдоль и поперек его плоскости). Последнюю формулу можно использовать для определения силы сопротивления плоской фигуры произвольной формы, расположенной на границе раздела двух жидкостей, при ее движении вдоль (поперек) межфазной границы.

Оценка скорости осаждения суспензии с помощью ячеечной модели. В случае движения ансамблей с очень большим количеством частиц реализация метода отражений, а тем более построение точечных решений в многосвязной области оказываются практически невозможными. Одной из распространенных приближенных моделей двухфазных сред в этом случае является ячейечная модель. Она относит к каждой частице дисперсной фазы приходящийся на ее долю объем свободной жидкости. Таким образом вся суспензия (или эмульсия) разбивается на совокупность сферических ячеек радиуса b , в центре которых находятся частицы радиуса a . Геометрические параметры ячеек связаны с объемной концентрацией дисперсной фазы ϕ следующим соотношением:

$$b = a\phi^{-1/3}. \quad (2.9.16)$$

Задание скорости \vec{U} частицы определяет осевую симметрию задачи, которую удобно рассматривать в сферических координатах. Общее решение для такой системы приведено в разд. 2.1, где произвольные постоянные должны определяться из условий ограниченности решения, известной скорости на поверхности частицы и некоторых условий на границе ячейки (при $R = b$). Бесспорным условием на этой границе является равенство нулю нормальной составляющей скорости, соответствующее непроточности ячейки. По поводу второго условия, необходимого для полной идентификации решения, существуют различные мнения. Так, Каннингхем постулировал равенство нулю тангенциальной скорости, рассматривая фактически ячейку, как контейнер с жесткой границей. Хаппель предлагал использовать условие равенства нулю тангенциального напряжения, постулируя тем самым силовую изолированность ячейки. Наконец, Кувабара предлагал использовать условие равенства нулю потока вихревой напряженности на границе ячейки.

Выбор граничного условия существенным образом определяет модель силового взаимодействия частицы, находящейся в центре ячейки, с другими частицами. Подробный сравнительный анализ различных вариантов граничных условий выполнен в [167], где получены решения для указанных выше трех вариантов, причем частица, находящаяся в центре ячейки, считалась каплей жидкости с другой вязкостью. В работе [167] проводилось сопоставление полученных на основании ячеечных моделей установившихся скоростей гравитационного осаждения суспензий с многочисленными экспериментальными данными. Было показано, что наиболее точные результаты дает модель Кувабары, которая для силы сопротивления приводит к формуле (2.9.1), где поправочный коэффициент вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{\beta + \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5}\phi^{1/3} - \frac{2}{5}\phi^2 + \beta(1 - \frac{9}{10}\phi^{1/3} + \frac{1}{2}\phi + \frac{2}{5}\phi^2)}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (2.9.17)$$

При $\phi \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ имеем $\lambda \rightarrow 1$, что соответствует закону сопротивления Стокса.

Эффективная вязкость суспензий. Суспензии частиц в жидкости широко используются в различных процессах химической технологии. Если размеры взвешенных частиц значительно меньше размеров аппарата, суспензию можно рассматривать как некую сплошную среду со свойствами, отличными от свойств дисперсной фазы.

Очень часто эта среда по своим реологическим свойствам остается ньютоновской, но с несколько увеличенной по сравнению с дисперсионной средой вязкостью. Эта вязкость μ_{ef} называется эффективной вязкостью. На практике удобно отнести ее к вязкости дисперсионной среды μ и рассматривать безразмерную эффективную вязкость $\bar{\mu} = \mu_{\text{ef}}/\mu$.

Величина $\bar{\mu}$ зависит прежде всего от объемной концентрации дисперсной фазы ϕ . Хорошо известна формула Эйнштейна [178]

$$\bar{\mu} = 1 + 2,5\phi, \quad (2.9.18)$$

справедливая для случая сильно разреженных суспензий твердых сферических частиц. В случае более концентрированных суспензий для оценки $\bar{\mu}$ используют ячеечную модель.

Безразмерную эффективную вязкость разреженной эмульсии сферических капель и пузырей, движущихся в жидкости, можно определять с помощью формулы

$$\bar{\mu} = 1 + \frac{5\beta + 2}{2\beta + 2}\phi, \quad (2.9.19)$$

где β — отношение вязкостей капель и окружающей жидкости. Предельный переход при $\beta \rightarrow \infty$ в (2.6.19) приводит к формуле Эйнштейна (2.9.18). Значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю.

В [178] было показано, что эффективная вязкость связана с отношением скоростей свободного оседания одиночной частицы по закону Стокса и частиц в суспензии, т.е. с величиной корректирующего множителя в силе сопротивления λ . Для эффективной вязкости получены выражения вида

$$\bar{\mu} = (1 - \phi)^m \lambda. \quad (2.9.20)$$

Обычно используются два значения: $m = 1$ (формула Кинча) и $m = 2$ (формула Хоксли). В работе [34] было показано, что значение $m = 1$ отвечает односкоростной модели суспензии, а $m = 2$ — двухскоростной модели, которая рассматривается как две взаимопроникающие сплошные фазы со своими полями скорости. Поскольку вторая модель является более совершенной, предпочтительнее для оценок использовать формулу (2.9.20) при $m = 2$.

Выражения (2.9.18) — (2.9.20) позволяют оценить эффективную вязкость суспензий и эмульсий.

В работе [211] развит более совершенный, чем основанный на ячеечной модели, подход к построению механики концентрированных дисперсных систем. Подход основан на методах осреднения по ансамблю случайно расположенных частиц. Он позволил, используя единый методический прием, получить не феноменологическим, а теоретическим способом не только уравнения континуальной механики дисперсных систем, но и замыкающие реологические соотношения. В частности, для эффективной вязкости суспензий была получена простая формула $\bar{\mu} = (1 - 2,5\phi)^{-1}$, которая при малых ϕ переходит в формулу Эйнштейна (2.9.18) и может применяться вплоть до концентраций $\phi = 0,25$. Было найдено также второе приближение для эффективной вязкости.

Результаты экспериментальных и численных расчетов [211] хорошо аппроксимируются формулой

$$\bar{\mu} = 1 + 2,5\phi + 12,5\phi^2, \quad (2.9.21)$$

которая при $\phi \rightarrow 0$ переходит в формулу Эйнштейна (2.9.18) и может применяться для $\phi \leq 0,4$.

В [56] предложена струйная модель обтекания шаров в зернистом слое. Такое течение характеризуется снижением сопротивления из-за подавления отрывных течений и при достаточно плотной укладке ($\phi > 0,35$) способствует стабилизации слоя. Для коэффициента сопротивления шара в такой системе была предложена эмпирическая формула

$$c_f = 2\psi \left(1 + 211 \frac{\psi}{\text{Re}} \right), \quad \text{Re} = \frac{aU}{\nu}, \quad (2.9.22)$$

где U — расходная скорость фильтрации, ψ — относительное минимальное проходное сечение слоя, зависящее следующим образом от

объемной концентрации частиц:

$$\psi = \begin{cases} 1 - 1,16\phi^{2/3} & \text{при } \phi \leq 0,6, \\ 0,508 - 0,56\phi & \text{при } \phi > 0,6. \end{cases}$$

Формула (2.9.22) хорошо согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

В [95] приводятся оценки скорости всплытия ансамбля пузырей в барботажных аппаратах.

Другие теоретические методы исследования разреженных и концентрированных дисперсных систем, основанные на уравнениях механики многофазных систем, описаны в книгах [117, 118].

3. Массо- и теплоперенос в пленках жидкости, трубах и плоских каналах

До сих пор рассматривалось движение однородных по физико-химическому составу жидкостей. На практике чаще встречаются более сложные ситуации, когда жидкость содержит растворенные вещества (примеси, реагенты) и является раствором или смесью.

Простейшими примерами систем такого рода являются растворы поваренной соли или сахара в воде и смесь спирта с водой.

В качестве основной количественной характеристики состава растворов и смесей обычно используется массовая плотность вещества, численно равная массе растворенного вещества в единице объема раствора, или ее безразмерный аналог — массовая концентрация C , численно равная отношению массовой плотности вещества к общей плотности смеси*. В книге обычно будет использоваться величина C , которую для краткости будем называть просто концентрацией. При наличии нескольких растворенных веществ $m = 1, \dots, M$ для каждого из них вводят свою массовую плотность и, соответственно, свою массовую концентрацию C_m .

Концентрация отдельных компонент в каждой точке среды зависит от конвективного переноса вещества, молекулярной (или турбулентной) диффузии и интенсивности гетерогенных и гомогенных физико-химических превращений.

Под гетерогенными превращениями далее подразумеваются химические или физико-химические превращения, происходящие на некоторых поверхностях, например, на границах раздела фаз или на поверхностях, обладающих каталитическими свойствами. При таком широком понимании термина «гетерогенные превращения» к ним следует отнести: поверхностные каталитические реакции; адсорбцию и десорбцию на твердых и жидких поверхностях; растворение кристаллов в жидкости; электрохимические реакции, идущие на поверхности электрода, погруженного в раствор электролита; сублимацию и конденсацию; осаждение аэрозолей и коллоидов и т.п. Гомогенными пре-

* Иногда массовую плотность вещества называют парциальной плотностью, а массовую концентрацию — массовой долей. Кроме того, в специальной химической литературе используют мольную плотность, которая определяется числом молей растворенного вещества в единице объема раствора, а также ее безразмерный аналог — мольную концентрацию или мольную долю, численно равную отношению мольной плотности к общему числу молей всех ингредиентов в единице объема.

вращениями или объемными химическими реакциями будем называть химические превращения, происходящие в объеме жидкости или газа.

3.1. Уравнения и граничные условия теории конвективного тепло- и массопереноса

Сформулируем основные уравнения и граничные условия, которые используются при математической постановке задач физико-химической гидродинамики. Более детальное изложение вопросов, связанных с выводом и установлением области применимости этих уравнений и граничных условий, различные физические модели соответствующих многочисленных задач, методы решения, а также прикладные аспекты использования результатов содержатся, например, в монографиях [8, 15, 28, 44, 60, 70, 83, 93, 100, 117, 175, 181, 229].

Будем считать, что плотность и вязкость среды не зависят от концентрации и температуры и, следовательно, распределения концентрации и температуры не оказывают влияния на поле течения. Это приводит к возможности независимого анализа гидродинамической задачи о движении жидкости и диффузионно-тепловой задачи о полях концентрации и температуры. (Более сложные задачи, в которых поле течения существенным образом зависит от диффузионно-тепловых факторов, будут рассмотрены далее в главе 6). Необходимая для решения диффузионно-тепловой задачи информация о поле скоростей жидкости предполагается известной. Примем, что коэффициенты диффузии и теплопроводности не зависят от концентрации и температуры. Для простоты ограничимся случаем двухкомпонентного раствора.

В декартовой системе координат X, Y, Z перенос растворенного в жидкости вещества при отсутствии гомогенных превращений описывается уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_X \frac{\partial C}{\partial X} + V_Y \frac{\partial C}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial C}{\partial Z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right), \quad (3.1.1)$$

где C — концентрация; D — коэффициент диффузии; V_X, V_Y, V_Z — компоненты вектора скорости жидкости, которые считаются заданными.

Уравнение (3.1.1) отражает тот факт, что перенос вещества в движущейся среде обусловлен двумя различными физическими факторами. Во-первых, при наличии разности концентраций в жидкости или газе идет процесс молекулярной диффузии, способствующий выравниванию концентраций; во-вторых, растворенное вещество увлекается

движущейся средой и переносится вместе с ней. Совокупность обоих процессов обычно называют конвективной диффузией [100, 175].

Для завершения формулировки задачи уравнение (3.1.1) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. В качестве начального условия выбирается исходный профиль концентрации, существовавший в потоке в момент времени $t = 0$. Граничные условия, как правило, задаются на некоторой поверхности и вдали от нее, в толще раствора. Последнее условие соответствует заданию невозмущенного значения концентрации C_i на бесконечности:

$$\xi_* \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow C_i, \quad (3.1.2)$$

где ξ_* — расстояние, отсчитываемое по нормали от поверхности.

В задачах о растворении твердых веществ при формулировке граничного условия обычно предполагается, что концентрация в потоке равна нулю, т.е. $C_i = 0$, а концентрация на поверхности кристалла постоянна [4]

$$\xi_* = 0, \quad C = C_s, \quad (3.1.3)$$

где значение C_s — задано. Граничные условия (3.1.2) (при $C_i = 0$) и (3.1.3) используются также в задачах об испарении капель жидкости.

Граничные условия на поверхности с химической реакцией могут быть разными в зависимости от конкретной физической постановки задачи. В частном случае «бесконечно быстрой» гетерогенной химической реакции соответствующее граничное условие имеет вид

$$\xi_* = 0, \quad C = 0, \quad (3.1.4)$$

и означает, что на межфазной поверхности происходит полное превращение реагента. Такую ситуацию часто называют также диффузионным режимом реакции. Физический смысл уравнения (3.1.4) заключается в следующем: химическая реакция на поверхности протекает настолько интенсивно, что все подошедшее к поверхности вещество успевает прореагировать. Отметим, что условие (3.1.4) является частным случаем (3.1.3) при $C_s = 0$.

Условие (3.1.4) соответствует также диффузионному режиму осаждения аэрозольных и коллоидных частиц, причем при учете эффекта «зацепления» [44, 177] поверхность $\xi_* = 0$ расположена на расстоянии от поверхности осаждения, равном среднему радиусу осаждающихся частиц.

Если на межфазной поверхности протекает гетерогенная химическая реакция, скорость которой конечна, вместо (3.1.4) следует записать более сложное граничное условие

$$\xi_* = 0, \quad D \frac{\partial C}{\partial \xi_*} = K_s F_s(C), \quad (3.1.5)$$

где K_s — константа скорости поверхностной реакции, $K_s F_s(C)$ — скорость химической реакции.

Конкретный вид зависимости $F_s = F_s(C)$ определяется кинетикой поверхностной химической реакции. Функция F_s должна удовлетворять условию $F_s(0) = 0$, которое имеет очевидный физический смысл: при отсутствии реагирующего вещества реакция не идет. Для реакции порядка n в (3.1.5) следует положить [100]

$$F_s = C^n \quad (\text{где } n > 0). \quad (3.1.6)$$

Следует отметить: вид функции $F_s(C)$ в большинстве случаев не отражает реальную кинетику каталитических химических превращений, а определяет лишь эффективную скорость химической реакции.

Если поверхность $\xi_* = 0$ непроницаема для растворенного вещества, то справедливо граничное условие

$$\xi_* = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi_*} = 0,$$

которое является частным случаем (3.1.5) при $K_s = 0$.

Пусть исследуемая задача имеет характерный масштаб длины — a (например, радиус частицы или трубы) и характерный масштаб скорости — U (например, невозмущенная скорость потока вдали от частицы или скорость жидкости на оси трубы). Рассмотрим сначала граничные условия (3.1.2) и (3.1.3). Тогда уравнение конвективного массопереноса (3.1.1) удобно представить в безразмерной форме следующим образом. Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} \tau = \frac{Dt}{a^2}, \quad x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad z = \frac{Z}{a}, \quad \xi = \frac{\xi_*}{a}, \\ v_x = \frac{V_X}{U}, \quad v_y = \frac{V_Y}{U}, \quad v_z = \frac{V_Z}{U}, \quad c = \frac{C_i - C}{C_i - C_s} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

и подставим их в уравнение (3.1.1). В результате получим

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \text{Pe} \left(v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}. \quad (3.1.8)$$

Здесь число Пекле $\text{Pe} = aU/D$ является безразмерным параметром, который характеризует меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости вещества к диффузионному переносу.

В новых переменных (3.1.7) граничное условие вдали от поверхности (3.1.2) принимает вид

$$\xi \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0. \quad (3.1.9)$$

Аналогичным образом на поверхности с учетом (3.1.3), (3.1.7) имеем граничное условие

$$\xi = 0, \quad c = 1. \quad (3.1.10)$$

В случае конечной скорости гетерогенной химической реакции в (3.1.5) удобно перейти к новым переменным (3.1.7), положив $C_s = 0$. В результате уравнение (3.1.1) и граничное условие на бесконечности (3.1.2) переходят в (3.1.8) и (3.1.9), а граничное условие на реагирующей поверхности (3.1.5) преобразуется к виду

$$\xi = 0, \quad -\frac{\partial c}{\partial \xi} = k_s f_s(c). \quad (3.1.11)$$

При записи условия (3.1.11) были использованы обозначения

$$k_s = \frac{aK_s}{DC_i} F_s(C_i), \quad f_s(c) = \frac{F_s(C)}{F_s(C_i)}, \quad c = \frac{C_i - C}{C_i}. \quad (3.1.12)$$

В частном случае поверхностной химической реакции порядка n (3.1.6) с учетом выражений (3.1.12) безразмерное граничное условие на поверхности (3.1.11) формулируется так:

$$\xi = 0, \quad -\frac{\partial c}{\partial \xi} = k_s (1 - c)^n, \quad (3.1.13)$$

где $k_s = aK_s C_i^{n-1}/D$ — безразмерная константа скорости поверхностной реакции.

Поделим обе части (3.1.13) на k_s и устремим параметр k_s к бесконечности. В результате приходим к предельному граничному условию (3.1.10), соответствующему диффузионному режиму реакции. Указанный предельный переход хорошо иллюстрирует смысл термина «бесконечно быстрая реакция», который использовался ранее.

Для компактности уравнение конвективной диффузии (3.1.8), как это часто принято, будем обозначать следующим образом:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla) c = \Delta c, \quad (3.1.14)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, Δ — оператор Лапласа, явный вид которых в декартовой системе координат x, y, z определяется путем сопоставления (3.1.8) и (3.1.14).

Для решения многих конкретных задач вместо декартовых координат x, y, z часто удобнее использовать сферические r, φ, θ или цилиндрические ϱ, φ, z координаты. Дифференциальные операторы, входящие в уравнение (3.1.14), в этих системах координат имеют вид:

в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned}(\vec{v} \cdot \nabla) c &= v_\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \\ \Delta c &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2},\end{aligned}\tag{3.1.15}$$

в сферической системе координат:

$$\begin{aligned}(\vec{v} \cdot \nabla) c &= v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \\ \Delta c &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}\tag{3.1.16}$$

Массоперенос, осложненный объемной химической реакцией. При протекании в объеме движущейся среды гомогенной химической реакции уравнение конвективной диффузии может быть записано в форме

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_X \frac{\partial C}{\partial X} + V_Y \frac{\partial C}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial C}{\partial Z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right) - K_v F_v(C),\tag{3.1.17}$$

где K_v — константа скорости объемной химической реакции, $K_v F_v(C)$ — скорость химической реакции.

Вид функции $F_v = F_v(C)$ зависит от кинетики реакции, при этом $F_v(0) = 0$. В научной литературе наиболее часто встречается реакция n -го порядка, которая определяется выражением [8, 70]

$$F_v = C^n.\tag{3.1.18}$$

Для уравнения (3.1.17) выставляется следующее граничное условие в набегающем потоке:

$$\xi_* \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow 0.\tag{3.1.19}$$

Физический смысл этого условия в том, что диффундирующее от поверхности вещество должно полностью прореагировать по мере его удаления в толщу химически активной среды.

Во многих практически важных случаях на заданной поверхности выставляется условие постоянства концентрации (3.1.3).

Как и ранее, целесообразно записать уравнение (3.1.17) и граничные условия (3.1.3), (3.1.19) в безразмерном виде. Для этого введем новые переменные по формулам

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Dt}{a^2}, & x &= \frac{X}{a}, & y &= \frac{Y}{a}, & z &= \frac{Z}{a}, & \xi &= \frac{\xi_*}{a}, \\ v_x &= \frac{V_X}{U}, & v_y &= \frac{V_Y}{U}, & v_z &= \frac{V_Z}{U}, & c &= \frac{C}{C_s}, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

которые отличаются от (3.1.7) лишь способом определения безразмерной концентрации.

Подставляя (3.1.20) в (3.1.17), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \text{Pe} (\vec{v} \cdot \nabla) c = \Delta c - k_v f_v(c), \quad (3.1.21)$$

при записи которого использованы те же самые обозначения, что и в (3.1.14). Величины, стоящие в правых частях размерного (3.1.17) и безразмерного (3.1.21) уравнений, связаны так:

$$k_v = \frac{a^2 K_v F_v(C_s)}{DC_s}, \quad f_v(c) = \frac{F_v(C)}{F_v(C_s)}. \quad (3.1.22)$$

В частном случае объемной химической реакции порядка n (3.1.18) в (3.1.21) следует положить

$$k_v = a^2 K_v C_s^{n-1}/D, \quad f_v = c^n. \quad (3.1.23)$$

Граничные условия (3.1.3) и (3.1.19) в безразмерных переменных (3.1.20) принимают вид:

$$\xi = 0, \quad c = 1; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0, \quad (3.1.24)$$

где $\xi = \xi_*/a$ — безразмерное расстояние от (межфазной) поверхности.

Для удобства в табл. 3.1 указаны различные способы введения безразмерной концентрации, которые используются в этой книге для математической формулировки различных задач конвективного массопереноса.

Важно подчеркнуть, что для безразмерной концентрации здесь принято единое обозначение c . Это связано с тем, что все безразмерные концентрации, соответствующие номерам 1, 2, 4, 6 в табл. 3.1, являются частными случаями одной и той же формулы под номером 3 и получаются из нее путем подстановки соответствующих значений C_i и C_s . Оставшееся выражение для c под номером 5 также можно получить из формулы под номером 3, формально полагая в ней $C_s = 0$ (при

ТАБЛИЦА 3.1
Способы введения безразмерной концентрации c
в задачах конвективного массопереноса

N	Физико-химический процесс	Концентрация на поверхности (где происходит гетерогенное превращение)	Невозмущенная концентрация в набегающем потоке (на входе в трубу или пленку)	Безразмерная концентрация в жидкой фазе, c
1	Растворение твердых веществ в чистой жидкости	C_s	0	$\frac{C}{C_s}$
2	Абсорбция слаборастворимых газов на свободной поверхности жидкости	C_s	0	$\frac{C}{C_s}$
3	Диффузия при наличии примеси в жидкой фазе	C_s	C_i	$\frac{C_i - C}{C_i - C_s}$
4	Диффузионный режим поверхностной реакции	0	C_i	$\frac{C_i - C}{C_i}$
5	Конечная скорость поверхностной химической реакции	Определяется из решения задачи	C_i	$\frac{C_i - C}{C_i}$
6	Объемная химическая реакция	C_s	0	$\frac{C}{C_s}$

Примечание. На межфазных границах, где нет гетерогенных превращений, производная по нормали от концентрации равна нулю.

этом, однако, следует помнить, что в данном случае концентрация на поверхности C_s заранее неизвестна).

Диффузионные потоки и число Шервуда. Локальный или (дифференциальный) диффузионный поток растворенного в жидкости вещества на рассматриваемую поверхность определяется по формуле

$$j_* = D\rho \left(\frac{\partial C}{\partial \xi_*} \right)_{\xi_*=0}. \quad (3.1.25)$$

Эта величина, вообще говоря, будет различной в разных точках поверхности.

Полный (или интегральный) диффузионный поток вычисляется путем интегрирования выражения (3.1.25) по всей поверхности S :

$$I_* = \iint_S j_* ds. \quad (3.1.26)$$

Величина I_* является мерой суммарного количества вещества, реагирующего в единицу времени на всей поверхности.

В задачах массопереноса с граничными условиями (3.1.2), (3.1.3) вместо (3.1.25), (3.1.26) часто используются безразмерные диффузионные потоки, которые определяются как

$$j = \frac{aj_*}{D\rho(C_i - C_s)}, \quad I = \frac{I_*}{aD\rho(C_i - C_s)}. \quad (3.1.27)$$

Для диффузионного режима реакции, что соответствует граничным условиям (3.1.2), (3.1.4), а также для конечной скорости поверхностной химической реакции в случае граничных условий (3.1.2), (3.1.5), в соотношениях (3.1.27) следует положить $C_s = 0$.

Основная величина, представляющая практический интерес, — среднее число Шервуда — вычисляется по формуле

$$\text{Sh} = \frac{I}{S}, \quad (3.1.28)$$

где $S = S_*/a^2$ — безразмерная площадь рассматриваемой поверхности, S_* — соответствующая размерная площадь поверхности.

Расчет диффузионных потоков и среднего числа Шервуда проводится в три этапа: сначала решается задача конвективного массопереноса и определяется поле концентраций, затем вычисляется производная по нормали к поверхности $(\partial C/\partial \xi_*)_{\xi_*=0}$, а на последнем этапе используются формулы (3.1.25) — (3.1.28).

Далее по всей книге, где это не приводит к путанице, безразмерную концентрацию и безразмерный диффузионный поток часто будем называть просто концентрацией и диффузионным потоком, опуская для краткости слово безразмерный.

Уравнение и граничные условия теории теплопереноса. Уравнение переноса тепла в движущейся среде, аналогичное уравнению конвективной диффузии (3.1.1), имеет вид

$$\frac{\partial T_*}{\partial t} + V_X \frac{\partial T_*}{\partial X} + V_Y \frac{\partial T_*}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial T_*}{\partial Z} = \chi \left(\frac{\partial^2 T_*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial Z^2} \right), \quad (3.1.29)$$

где T_* — температура, χ — коэффициент теплопроводности.

При решении нестационарных задач должно быть задано распределение температуры в потоке в начальный момент времени.

Вдали от рассматриваемой поверхности обычно выставляется условие постоянства температуры в объеме движущейся среды:

$$\xi_* \rightarrow \infty, \quad T_* \rightarrow T_1. \quad (3.1.30)$$

При анализе процессов теплообмена тела со средой, когда температура поверхности тела поддерживается постоянной, второе граничное условие записывается следующим образом:

$$\xi_* = 0, \quad T_* = T_s. \quad (3.1.31)$$

Использование новых безразмерных величин

$$\begin{aligned} \bar{\tau} = \frac{\chi t}{a^2}, \quad x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad z = \frac{Z}{a}, \quad \text{Pe}_T = \frac{aU}{\chi}, \\ v_x = \frac{V_X}{U}, \quad v_y = \frac{V_Y}{U}, \quad v_z = \frac{V_Z}{U}, \quad T = \frac{T_i - T_*}{T_i - T_s} \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

позволяет представить уравнение (3.1.29) и граничные условия (3.1.30), (3.1.31) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{\tau}} + \text{Pe}_T (\vec{v} \cdot \nabla) T = \Delta T; \quad (3.1.33)$$

$$\xi \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0; \quad \xi = 0, \quad T = 1. \quad (3.1.34)$$

Видно, что задача о теплообмене тела со средой (3.1.33), (3.1.34) с математической точки зрения полностью аналогична задаче о массообмене частицы с потоком в случае диффузионного режима реакции на ее поверхности (3.1.8) — (3.1.10).

Основные безразмерные параметры. Диффузионное и тепловое числа Пекле, фигурирующие в уравнениях конвективного массо- и теплопереноса (3.1.8) и (3.1.33), связаны с числом Рейнольдса $\text{Re} = aU/\nu$ (ν — кинематическая вязкость жидкости), стоящим в правой части уравнений Навье — Стокса (1.1.4), следующими соотношениями:

$$\text{Pe} = \text{ReSc}, \quad \text{Pe}_T = \text{RePr}. \quad (3.1.35)$$

Здесь $\text{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта, $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля — безразмерные величины, которые зависят только от физических свойств рассматриваемой сплошной среды.

Для обычных газов коэффициенты диффузии и кинематической вязкости имеют одинаковый порядок величины, что соответствует значениям чисел Шмидта порядка единицы ($\text{Sc} \sim 1$).

В обычных жидкостях типа воды коэффициент кинематической вязкости на несколько порядков величины превышает коэффициент диффузии ($\text{Sc} \sim 10^3$). В очень вязких жидкостях типа глицерина число Шмидта достигает значений порядка 10^6 .

Число Прандтля изменяется в более узких пределах, чем число Шмидта. В газах типа воздуха $\text{Pr} \sim 1$, а в жидкостях типа воды — $\text{Pr} \sim 10$. В очень вязких жидкостях типа глицерина число Прандтля

имеет порядок 10^3 . Жидкие металлы (натрий, литий, ртуть и др.) характеризуются малыми числами Прандтля: $5 \cdot 10^{-3} \leq Pr \leq 5 \cdot 10^{-2}$.

Число Рейнольдса $Re = aU/\nu$ не является физической постоянной среды и зависит от геометрических и кинетических факторов. Поэтому диапазон его изменения может быть любым.

Из рассмотренных примеров с учетом соотношений (3.1.35) следует, что в задачах физико-химической гидродинамики числа Пекле, вообще говоря, могут принимать самые различные значения.

Учитывая, что диффузионные процессы в жидкостях характеризуются очень большими значениями чисел Шмидта, особо следует подчеркнуть, что в задачах конвективного массопереноса в жидких средах число Пекле также велико, начиная уже с малых чисел Рейнольдса, при которых реализуется стоксов закон течения («ползущее» течение).

Методы решения задач физико-химической гидродинамики. Уравнение конвективной диффузии (3.1.1) представляет собой линейное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами (в общем случае компоненты скорости жидкости зависят от координат и времени). Точные аналитические решения соответствующих задач удается найти лишь в исключительных случаях с простой геометрией. Сказанное еще в большей степени относится и к нелинейному уравнению (3.1.17). Точные решения играют большую роль для формирования правильных представлений о физической сущности различных явлений и процессов. Они могут использоваться в качестве «тестовых решений» для проверки корректности и оценки точности соответствующих численных, асимптотических и приближенных методов.

Для получения необходимой информации об исследуемом явлении или процессе обычно приходится прибегать к разного рода упрощениям в математической формулировке рассматриваемой задачи, к различным приближениям и аппроксимациям, численным методам или к тем и другим одновременно.

Как и в механике вязкой жидкости, приближенное решение задач конвективного массо- и теплопереноса часто основано на применении методов теории возмущений [38, 90, 114], в которых фигурирующий в уравнении (3.1.8) безразмерный параметр — число Пекле Pe считается малым (или большим) и используется как параметр разложения при отыскании решений в виде асимптотических рядов.

Важно подчеркнуть, что наличие малого или большого параметра во многих задачах физико-химической гидродинамики обусловлено существом дела. Действительно, как указывалось раньше, конвективная диффузия в жидкостях характеризуется большими числами Шмидта, что связано с характерными значениями физических констант. В соответствующих сингулярно-возмущенных задачах суще-

ствуют узкие пространственно-временные области (например, диффузионный пограничный слой и диффузионный след), в которых решение быстро меняется. Структура, протяженность и число этих областей обычно заранее неизвестны и определяются в процессе решения. Имеющийся огромный опыт применения методов возмущений дает основание считать их весьма плодотворными и наиболее общими из всех существующих аналитических методов. Эти методы служат для выяснения принципиально важных закономерностей и качественных особенностей весьма сложных линейных и нелинейных задач, для получения асимптотик и построения «тестовых решений», а в ряде случаев могут служить основой для разработки вычислительных методов.

Следует отметить, что в тех задачах, где методы возмущений весьма эффективны, численные, как правило, становятся малоприменимыми.

Получающиеся при использовании методов возмущений асимптотические ряды имеют ограниченную область применимости. Кроме того, обычно удается вычислить не более двух или трех первых членов соответствующих разложений. Указанные обстоятельства не позволяют оценить поведение решения при промежуточных (конечных) значениях параметра и накладывают существенные ограничения на использование асимптотических формул для расчетов в инженерной практике. Это — наиболее существенный недостаток методов возмущений.

До сих пор не утратили своего значения разнообразные и во многом опирающиеся на интуитивные соображения приближенные инженерные методы, к которым относятся, например, интегральные методы [70, 103, 184]; метод равнодоступной поверхности [175]; различные модификации метода линеаризации уравнений и граничных условий [132]. Использование этих простых методов во многих случаях оказывается полезным для практических целей. Приближенные методы очень удобны для получения достаточно грубых оценок на предварительном этапе любого исследования, а также тогда, когда результат должен быть получен достаточно быстро. Для приближенных методов инженерного типа характерна невысокая точность. Указанный недостаток в значительной мере можно устранить путем сочетания асимптотических и приближенных методов [72, 277].

Многие задачи физико-химической гидродинамики и теории массо- и теплопереноса успешно решаются путем применения численных методов с использованием ЭВМ [122, 131]. Эти методы обладают большой универсальностью и позволяют эффективно получать решения для промежуточных значений характерного параметра задачи, т.е. в той области, где не могут быть использованы асимптотические методы. Численные методы в настоящее время являются основным

аппаратом исследования прикладных задач, связанных с разработкой, оптимизацией и управлением различных устройств и технологических процессов.

Важно отметить, что все теоретические методы (точные, асимптотические, приближенные и численные) взаимно дополняют друг друга.

3.2. Диффузия к вращающемуся диску

Следуя [100], рассмотрим стационарный массоперенос к поверхности диска, вращающегося в жидкости вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Считаем, что вдали от диска концентрация постоянна и равна C_1 , а на поверхности происходит полное поглощение растворенного вещества. Ось z направим по нормали к поверхности диска. Решение задачи о движении жидкости, увлекаемой диском, было приведено ранее в разд. 1.2.

Учитывая сказанное и используя результаты разд. 3.1, запишем в цилиндрической системе координат уравнение диффузии и граничные условия в следующем виде:

$$v_\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \varphi} = \frac{1}{Sc} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (3.2.1)$$

$$z = 0, \quad c = 1; \quad z \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0. \quad (3.2.2)$$

Здесь безразмерные переменные и параметры связаны с исходными размерными величинами соотношениями (3.1.7) при $C_s = 0$, где характерные масштабы длины и скорости выбраны так:

$$a = (\nu/\omega)^{1/2}, \quad U = (\nu\omega)^{1/2}, \quad Re = aU/D = Sc. \quad (3.2.3)$$

Согласно результатам разд. 1.2 для безразмерных компонент скорости жидкости имеем

$$v_z = v(z), \quad v_\rho = \rho u_1(z), \quad v_\varphi = \rho u_2(z), \quad (3.2.4)$$

где v , u_1 , u_2 — известные функции z .

Отметим некоторые свойства функции v . Разложение v вблизи поверхности диска (при $z \rightarrow 0$) начинается с квадратичного члена

$$v = -\alpha z^2 + \dots, \quad \text{где } \alpha \approx 0,51. \quad (3.2.5)$$

В другом предельном случае имеем $v \rightarrow -0,89$ при $z \rightarrow \infty$.

Решение задачи (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) ищем в виде

$$c = c(z). \quad (3.2.6)$$

В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$Sc v(z) \frac{dc}{dz} = \frac{d^2c}{dz^2} \quad (3.2.7)$$

с граничными условиями (3.2.2).

Уравнение (3.2.7) легко интегрируется, так как подстановкой $W = dc/dz$ приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными.

Решение задачи (3.2.7), (3.2.2) дается формулой

$$c = \frac{\int_z^\infty \exp \left[Sc \int_0^{\bar{z}} v(\bar{z}) d\bar{z} \right] d\bar{z}}{\int_0^\infty \exp \left[Sc \int_0^{\bar{z}} v(\bar{z}) d\bar{z} \right] d\bar{z}}. \quad (3.2.8)$$

Дифференцируя это выражение по z и полагая затем $z=0$, найдем безразмерный диффузионный поток на поверхность диска

$$j = - \left(\frac{dc}{dz} \right)_{z=0} = \left\{ \int_0^\infty \exp \left[Sc \int_0^{\bar{z}} v(\bar{z}) d\bar{z} \right] d\bar{z} \right\}^{-1}. \quad (3.2.9)$$

Учтем теперь, что обычные жидкости характеризуются большими значениями чисел Шмидта Sc . Нетрудно показать, что асимптотики формул (3.2.8) и (3.2.9) при $Sc \rightarrow \infty$ можно получить, подставляя в них главный член разложения функции v при $z \rightarrow 0$. С помощью выражений (3.2.5) и (3.2.8) для безразмерной концентрации после некоторых преобразований имеем

$$c = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \Gamma \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \alpha Sc z^3 \right). \quad (3.2.10)$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$\Gamma(m, \zeta) = \int_\zeta^\infty e^{-x} x^{m-1} dx \quad \text{— неполная гамма-функция,}$$

$\Gamma(m) = \Gamma(m, 0)$ — полная гамма-функция, $\Gamma(1/3) \approx 2,679$.

Аналогичным образом, подставляя первый член разложения (3.2.5) в формулу (3.2.9), для безразмерного диффузионного потока получим

$$j = \frac{(9\alpha \text{Sc})^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \approx 0,62 \text{Sc}^{1/3}. \quad (3.2.11)$$

Для физической интерпретации результатов удобно ввести безразмерную толщину диффузионного пограничного слоя по формуле

$$\delta = 1/j. \quad (3.2.12)$$

Используя выражения (3.2.11) и (3.2.12), находим $\delta \approx 1,6 \text{Sc}^{-1/3}$.

Имеет место следующая картина массопереноса вблизи поверхности вращающегося диска. Безразмерная концентрация экспоненциально быстро падает с ростом расстояния до диска. На расстоянии $z \approx \delta$ она близка к своему невозмущенному значению и далее практически не меняется. При больших числах Шмидта основное изменение концентрации происходит в тонком слое (толщиной порядка $\text{Sc}^{-1/3}$), прилегающем к поверхности диска. Эту область называют диффузионным пограничным слоем.

3.3. Теплоперенос к плоской пластине

Рассмотрим теплоперенос к плоской пластине, продольно обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U_1 при больших числах Рейнольдса. Считаем, что температура на поверхности пластины и вдали от нее принимает постоянные значения, равные соответственно T_s и T_i . Начало прямоугольной системы координат X, Y поместим в переднюю кромку; ось X направим вдоль, а Y — поперек пластины.

Многочисленные эксперименты и численные расчеты показывают, что ламинарный гидродинамический пограничный слой реализуется при $5 \cdot 10^2 \leq \text{Re} \leq 5 \cdot 10^5 \div 10^6$ [184]. В этом диапазоне тепловое число Пекле $\text{Pe}_T = \text{Re Pr}$ велико для газов и обычных жидкостей. Для жидких металлов существует область чисел Рейнольдса $10^4 \leq \text{Re} \leq 10^6$, где числа Пекле также велики.

Учитывая сказанное, ограничимся изучением случая больших чисел Пекле, когда продольной составляющей молекулярной теплопроводности можно пренебречь. Соответствующее уравнение теплового пограничного слоя и граничные условия имеют вид

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3.3.1)$$

$$x = 0, \quad T = 0; \quad y = 0, \quad T = 1; \quad y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0.$$

Здесь безразмерные переменные введены по формулам (3.1.32), где в качестве масштаба длины выбрана величина $L = \nu/U_i$; ν — кинематическая вязкость жидкости.

Компоненты скорости жидкости в уравнении (3.3.1) даются решением Блазиуса

$$v_x = f'(\eta), \quad v_y = \frac{\eta f' - f}{2\sqrt{x}}, \quad \text{где } \eta = \frac{y}{\sqrt{x}}. \quad (3.3.2)$$

Функция $f = f(\eta)$ была описана ранее в разд. 1.6, штрих соответствует производной по η .

Решение задачи (3.3.1) с учетом зависимостей (3.3.2) ищем в автомодельном виде $T = T(\eta)$. В итоге приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \text{Pr} f(\eta) \frac{dT}{d\eta} = 0; \quad (3.3.3)$$

$$\eta = 0, \quad T = 1; \quad \eta \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0.$$

С учетом равенства $f = -f'''/f''$, которое является следствием уравнения для функции f , решение задачи (3.3.3) может быть записано в виде (Э. Польгаузен, 1921):

$$T = \frac{\int_{\eta}^{\infty} [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^{\infty} [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta}. \quad (3.3.4)$$

При $\text{Pr} = 1$ из этой формулы имеем простую связь между температурой и продольной составляющей скорости:

$$T(\eta) = 1 - f'(\eta) = 1 - v_x.$$

Дифференцируя выражение (3.3.4) и используя численное значение $f''(0) = 0,332$, получим безразмерный тепловой поток на поверхность пластины

$$j_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{B(\text{Pr})}{\sqrt{x}}, \quad \text{где } B(\text{Pr}) = \frac{(0,332)^{\text{Pr}}}{\int_0^{\infty} [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta}. \quad (3.3.5)$$

Асимптотики функции $B(\text{Pr})$ при малых и больших числах Прандтля удобнее искать исходя из уравнения (3.3.3), в котором сделано растяжение переменной по формуле $\eta = \zeta/\text{Pr}$. В результате приходим к уравнению $T''_{\zeta\zeta} + f(\zeta/\text{Pr})T'_{\zeta} = 0$. При $\text{Pr} \rightarrow 0$ аргумент функции $f(\zeta/\text{Pr})$ стремится к бесконечности, что соответствует постоянной

Рис. 3.1. Распределение скоростей и распределение температуры в пограничных слоях при очень малом и очень большом числах Прандтля

скорости внутри теплового пограничного слоя и $f(\eta) \approx \eta$. В другом предельном случае при $\text{Pr} \rightarrow \infty$ аргумент функции $f(\zeta/\text{Pr})$ стремится к нулю, что соответствует линейной аппроксимации скорости внутри пограничного слоя и $f(\eta) \approx 0,166 \eta^2$. Подставляя указанные выше главные члены асимптотических разложений функции f в уравнение (3.3.3) и решая соответствующие задачи, для теплового потока (3.3.5) получим

$$\begin{aligned} B(\text{Pr}) &\rightarrow (\text{Pr}/\pi)^{1/2} & (\text{Pr} \rightarrow 0), \\ B(\text{Pr}) &\rightarrow 0,339 \text{Pr}^{1/3} & (\text{Pr} \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Обе рассмотренные предельные ситуации встречаются во многих задачах конвективного теплопереноса и схематически изображены на рис. 3.1. Видно, что в случае $\text{Pr} \rightarrow 0$, приближенно имеющем место для жидких металлов (например, для ртути), при расчете температурного пограничного слоя можно пренебречь динамическим пограничным слоем и заменить профиль скорости $v(x, y)$ скоростью $v_\infty(x)$ невязкого внешнего течения. При $\text{Pr} \rightarrow \infty$, что соответствует случаю сильно вязких жидкостей (например, глицерин), температурный пограничный слой очень тонкий и расположен внутри динамического пограничного слоя, где скорость увеличивается линейно с расстоянием от поверхности пластины.

Во всем диапазоне изменения чисел Прандтля функция $B(\text{Pr})$ в формуле (3.3.5) хорошо аппроксимируется выражением

$$B(\text{Pr}) = 0,0817 [(1 + 72 \text{Pr})^{2/3} - 1]^{1/2}, \quad (3.3.7)$$

максимальное отличие которого от численных данных [184] составляет около 0,5%.

Запишем выражение для локального числа Нуссельта

$$\text{Nu}_x = -\frac{X}{T_s - T_i} \left(\frac{\partial T_*}{\partial Y} \right)_{Y=0} = \sqrt{\text{Re}_x} B(\text{Pr}), \quad (3.3.8)$$

где $\text{Re}_x = XU_i/\nu$ — локальное число Рейнольдса.

Не останавливаясь на пояснениях, приведем формулу для локального числа Нуссельта в случае обтекания плоской пластины турбулентным течением [184]

$$\text{Nu}_x = 0,0296 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{4/5}, \quad (3.3.9)$$

которая хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований.

3.4. Массоперенос в пленках жидкости

Массообмен между газами и жидкими пленками. Растворение газа в стекающей пленке жидкости является одним из важнейших методов растворения газов, получивших весьма широкое распространение в технике [87, 183]. Пленочные абсорберы с орошаемыми стенками применяются для получения водных растворов газа (например, абсорбция паров HCl водой), разделения газовых смесей (например, абсорбция бензола в коксохимическом производстве), очистки газов от вредных выбросов (например, коксового газа от H₂S) и др.

Рассмотрим абсорбцию слабо растворимых газов на свободной поверхности пленки жидкости, ламинарно стекающей по наклонной плоскости. Согласно результатам разд. 1.3 в случае умеренных скоростей движения стационарное распределение скорости внутри пленки имеет форму полупараболы с максимальной скоростью U_{\max} на свободной поверхности, в полтора раза превышающей среднерасходную скорость $\langle V \rangle$:

$$U_{\max} = \frac{3}{2} \langle V \rangle = \frac{gh^2}{2\nu} \sin \alpha.$$

Здесь g — ускорение свободного падения; α — угол наклона поверхности к горизонту; h — толщина пленки, которая вычисляется с помощью выражения

$$h = \left(\frac{3\nu^2}{g} \text{Re} \right)^{1/3},$$

где $\text{Re} = Q/\nu$ — число Рейнольдса, Q — плотность орошения (т.е. объемный расход жидкости, приходящийся на единицу ширины пленки).

Скорость жидкости внутри пленки имеет параболический профиль и описывается формулой

$$V = U_{\max}(1 - y^2), \quad y = Y/h,$$

где Y — ось координат, ориентированная по нормали к поверхности пленки (рис. 1.3).

Предположим, что в сечении $X = 0$ поток жидкости вступает в контакт с газом, так что на свободной поверхности ($Y = 0$) устанавливается постоянная концентрация поглощаемого компонента $C = C_s$, а поступающая на орошение жидкость не содержит растворяющегося вещества. Кроме того, будем считать, что стенка непроницаема. Ограничимся исследованием наиболее важного случая больших чисел Пекле, когда молекулярной диффузией вдоль пленки можно пренебречь.

Распределение концентрации внутри пленки с учетом сделанных допущений описывается следующим уравнением и граничными условиями [23]:

$$(1 - y^2) \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}; \quad (3.4.1)$$

$$x = 0, \quad c = 0 \quad (0 \leq y \leq 1); \quad (3.4.2)$$

$$y = 0, \quad c = 1 \quad (x > 0); \quad (3.4.3)$$

$$y = 1, \quad \partial c / \partial y = 0 \quad (x > 0), \quad (3.4.4)$$

при записи которых были использованы безразмерные величины

$$x = \frac{X}{h}, \quad y = \frac{Y}{h}, \quad c = \frac{C}{C_s}, \quad \text{Pe} = \frac{hU_{\max}}{D}. \quad (3.4.5)$$

Отметим, что вблизи входного сечения при малых значениях $x \leq O(\text{Pe}^{-1/2})$ следует рассматривать полное уравнение массопереноса, в котором вместо члена $\partial^2 c / \partial y^2$ стоит Δc .

Приближение диффузионного пограничного слоя. Основное изменение концентрации на начальном участке для $x = O(1)$ будет происходить в тонком диффузионном пограничном слое вблизи свободной поверхности пленки. В этой области сделаем растяжение поперечной координаты по правилу

$$y = w / \sqrt{\text{Pe}}. \quad (3.4.6)$$

Подставляя выражение (3.4.6) в (3.4.1) и переходя к пределу при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ (считается, что переменные x , w и соответствующие им производные имеют порядок единицы), получим уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial w^2}. \quad (3.4.7)$$

Расстояние до стенки, которое определяется координатой $y = 1$, в силу (3.4.6) соответствует $w = \sqrt{\text{Pe}}$. Поэтому при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ значению $y = 1$, фигурирующему в граничном условии (3.4.4), отвечает $w \rightarrow \infty$. Учитывая сказанное, представим граничные условия (3.4.2) — (3.4.4) в следующем виде:

$$x = 0, \quad c = 0; \quad w = 0, \quad c = 1; \quad w \rightarrow \infty, \quad \partial c / \partial w \rightarrow 0. \quad (3.4.8)$$

Решение задачи (3.4.7), (3.4.8) дается формулой

$$c = \text{erfc} \left(\frac{w}{2\sqrt{x}} \right), \quad (3.4.9)$$

где $\text{erfc } z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-t^2) dt$ — дополнительный интеграл вероятностей.

Дифференцируя выражение (3.4.9), находим диффузионный поток на поверхность пленки [100]

$$j = - \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\text{Pe}}{\pi x} \right)^{1/2}. \quad (3.4.10)$$

Безразмерный интегральный диффузионный поток на часть поверхности пленки, расположенной на интервале от 0 до x , равен

$$I = \int_0^x j dx = 2 \left(\frac{\text{Pe}}{\pi} x \right)^{1/2}. \quad (3.4.11)$$

Формулы (3.4.10), (3.4.11) становятся непригодными при достаточно больших значениях x , когда диффузионный пограничный слой «прорастает» через всю толщину пленки. Для того чтобы оценить область применимости этих формул, рассмотрим исходную задачу (3.4.1) — (3.4.4).

Точное решение. Решение задачи (3.4.1) — (3.4.4) во всей области $0 \leq x < \infty$ ищем в виде ряда [23, 223]

$$c = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp \left(- \frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}} x \right) H_m(y), \quad (3.4.12)$$

где искомые функции H_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от числа Пекле.

После подстановки разложения (3.4.12) в (3.4.1) и последующего разделения переменных приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функций H_m :

$$\frac{d^2 H_m}{dy^2} + \lambda_m^2 (1 - y^2) H_m = 0. \quad (3.4.13)$$

ТАБЛИЦА 3.2
Собственные значения λ_m и коэффициенты разложения A_m
в решении (3.4.12) для распределения концентрации
внутри пленки, на поверхности которой абсорбируется газ

m	λ_m	A_m	m	λ_m	A_m
1	2,2631	1,3382	6	22,3181	-0,1873
2	6,2977	-0,5455	7	26,3197	0,1631
3	10,3077	0,3589	8	30,3209	-0,1449
4	14,3128	-0,2721	9	34,3219	0,1306
5	18,3159	0,2211	10	38,3227	-0,1191

Граничные условия для H_m получим из (3.4.3) и (3.4.4) с учетом представления (3.4.12):

$$y = 0, \quad H_m = 0; \quad y = 1, \quad \frac{dH_m}{dy} = 0. \quad (3.4.14)$$

Задача (3.4.13) и (3.4.14) служит для определения собственных функций H_m и собственных значений λ_m .

Общее решение уравнения (3.4.13) имеет вид [223]

$$H_m(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m y^2\right) \left[B_1 \Phi\left(a_m, \frac{1}{2}; \lambda_m y^2\right) + B_2 y \Phi\left(a_m + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \lambda_m y^2\right) \right], \quad a_m = \frac{1}{4}(1 - \lambda_m), \quad (3.4.15)$$

где $\Phi(a, b, \xi) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{b(b+1)\dots(b+m-1)} \frac{\xi^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Удовлетворяя первому граничному условию (3.4.14), находим $B_1 = 0$. Подставляя это значение в формулу (3.4.15) и полагая $B_2 = 1$ (функции H_m определяются с точностью до постоянного множителя), получим

$$H_m(y) = y \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m y^2\right) \Phi\left(a_m + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \lambda_m y^2\right). \quad (3.4.16)$$

Подставляя функцию (3.4.16) во второе граничное условие (3.4.14), приходим к следующему трансцендентному уравнению для определения собственных значений λ_m :

$$\lambda_m \Phi\left(a_m + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \lambda_m\right) - \Phi\left(a_m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \lambda_m\right) = 0, \quad (3.4.17)$$

при выводе которого было использовано равенство [12]

$$\frac{d}{d\xi} \Phi(a, b; \xi) = \frac{1-b}{\xi} [\Phi(a, b; \xi) - \Phi(a, b-1; \xi)].$$

В табл. 3.2 приведены 10 первых собственных значений λ_m , вычисленных в работе [290].

Займемся теперь определением коэффициентов A_m . Подстановка ряда (3.4.12) в граничное условие (3.4.2) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m H_m(y) = 1. \quad (3.4.18)$$

Умножим уравнение (3.4.13) на собственную функцию H_k ($k \neq m$) и проинтегрируем полученное выражение по y от 0 до 1. После некоторых преобразований с учетом граничных условий (3.4.14) приходим к условиям ортогональности для H_k и H_m с весовой функцией $(1 - y^2)$:

$$\int_0^1 (1 - y^2) H_m H_k dy = 0 \quad (k \neq m). \quad (3.4.19)$$

Умножая обе части равенства (3.4.18) на функцию $(1 - y^2)H_k$ и интегрируя полученный ряд по всей толщине пленки с учетом (3.4.19), найдем коэффициенты

$$A_m = \frac{\int_0^1 (1 - y^2) H_m(y) dy}{\int_0^1 (1 - y^2) [H_m(y)]^2 dy}, \quad \text{где } m = 1, 2, \dots \quad (3.4.20)$$

В табл. 3.2 указаны 10 первых коэффициентов A_m , вычисленных в работе [290].

Безразмерный интегральный поток на часть поверхности пленки от 0 до x с учетом равенства (3.4.12) определяется по формуле

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^x \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \\ &= \text{Pe} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_m^2} \left(\frac{dH_m}{dy} \right)_{y=0} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}} x \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Подставляя сюда функцию (3.4.16), имеем

$$I = \text{Pe} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\lambda_m^2} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}} x \right) \right]. \quad (3.4.22)$$

Сопоставление этой формулы с (3.4.11) показывает, что приближением диффузионного пограничного слоя можно пользоваться в области $x \leq 0,1 \text{ Pe}$.

Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости. Рассмотрим теперь массоперенос от твердой стенки к жидкой пленке

при больших числах Пекле. Такая задача представляет значительный интерес в связи с процессами растворения, кристаллизации, коррозии, анодного растворения металлов в ряде электрохимических производств и др. Во многих случаях, встречающихся на практике, процессы растворения протекают достаточно быстро по сравнению с диффузией. Поэтому будем считать, что на поверхности пластины концентрация постоянна и равна C_s , а на входное сечение подается чистая жидкость. Как и ранее, введем безразмерные переменные по формулам (3.4.5). Конвективный массоперенос в пленке жидкости в данном случае описывается уравнением (3.4.1), граничным условием по продольной переменной x (3.4.2) и следующими граничными условиями по поперечной координате:

$$y = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad (x > 0); \quad (3.4.23)$$

$$y = 1, \quad c = 1 \quad (x > 0). \quad (3.4.24)$$

Хотя эта задача отличается от изученной ранее задачи (3.4.1) — (3.4.4) лишь перестановкой граничных условий (3.4.3) и (3.4.4), их решения будут существенно различаться.

Приближение диффузионного пограничного слоя. На начальном участке при $x = O(1)$ основное изменение концентрации происходит в области диффузионного пограничного слоя, который расположен вблизи поверхности пластины. Асимптотическое решение в этой области можно найти путем подстановки в уравнение (3.4.1) растянутой координаты

$$\xi = (1 - y) \text{Pe}^{1/3} \quad (3.4.25)$$

с последующим выделением старшего члена разложения концентрации при $\text{Pe} \rightarrow \infty$. В результате указанной процедуры приходим к уравнению диффузионного пограничного слоя

$$2\xi \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}. \quad (3.4.26)$$

Рассуждая так же, как это делалось ранее в задаче об абсорбции газов на поверхности пленки, с помощью (3.4.2), (3.4.23), (3.4.24) получим граничные условия для уравнения (3.4.26), которые с точностью до переобозначения $\xi \rightarrow w$ совпадают с (3.4.8). Решение соответствующей задачи дается формулой

$$c = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{2\xi^3}{9x}\right), \quad (3.4.27)$$

где $\Gamma(1/3, z)$ — неполная гамма-функция.

Дифференцируя выражение (3.4.27), вычислим локальный диффузионный поток [100]

$$j = \frac{6^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \frac{\text{Pe}^{1/3}}{x^{1/3}} \approx 0,678 \frac{\text{Pe}^{1/3}}{x^{1/3}}. \quad (3.4.28)$$

Соответствующий интегральный диффузионный поток на поверхность пластинки равен

$$I = \int_0^x j dx = 1,02 \text{Pe}^{1/3} x^{2/3}. \quad (3.4.29)$$

Сопоставление формул (3.4.9) — (3.4.11) и (3.4.27) — (3.4.29) показывает, что при $x \sim 1$ толщина диффузионного пограничного слоя вблизи свободной поверхности пленки $\delta_0 \sim \text{Pe}^{-1/2}$ значительно меньше толщины погранслоя вблизи твердой поверхности $\delta_T \sim \text{Pe}^{-1/3}$. Соответственно диффузионный поток на свободную поверхность больше, чем на твердую поверхность. Кроме того, диффузионный поток на свободной поверхности убывает быстрее, чем на твердой границе, по мере продвижения от входного сечения. Указанные эффекты обусловлены тем, что вблизи свободной поверхности жидкость движется существенно быстрее, чем вблизи твердой границы, на которой выполняется условие прилипания.

Сказанное для пленки жидкости будет справедливо также для подавляющего большинства задач диффузионного пограничного слоя. А именно, вблизи границы раздела газ–жидкость или жидкость–жидкость безразмерная толщина пограничного слоя пропорциональна $\text{Pe}^{-1/2}$ (диффузионный поток $j \sim \text{Pe}^{1/2}$), а вблизи границ типа жидкость–твердое тело толщина погранслоя пропорциональна $\text{Pe}^{-1/3}$ (диффузионный поток $j \sim \text{Pe}^{1/3}$).

Точное решение. Решение задачи (3.4.1), (3.4.2), (3.4.23), (3.4.24) во всей области $0 \leq x < \infty$, как и ранее, ищем в виде ряда (3.4.12), где собственные функции H_m удовлетворяют уравнению (3.4.13). (Неизвестные коэффициенты λ_m , A_m и функции H_m подлежат определению и будут иными, чем в задаче об абсорбции газов на свободную поверхность пленки). Граничные условия для H_m найдем, подставляя разложение (3.4.12) в (3.4.23) и (3.4.24). В результате получим

$$y = 0, \quad \frac{dH_m}{dy} = 0; \quad y = 1, \quad H_m = 0. \quad (3.4.30)$$

Общее решение уравнения (3.4.13) определяется формулой (3.4.15). Удовлетворяя первому граничному условию (3.4.30), имеем $B_2 = 0$.

Подставляя это значение в (3.4.15) и полагая $B_1 = 1$, приходим к выражению

$$H_m(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m y^2\right) \Phi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda_m, \frac{1}{2}; \lambda_m y^2\right). \quad (3.4.31)$$

Трансцендентное уравнение для собственных значений λ_m выводится с помощью второго граничного условия (3.4.30) и формулы (3.4.31):

$$\Phi\left(a_m, \frac{1}{2}; \lambda_m\right) = 0, \quad \text{где } a_m = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda_m. \quad (3.4.32)$$

Корни уравнения (3.4.32) положительны и монотонно возрастают, причем $\lambda_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Учитывая сказанное, найдем асимптотику собственных значений λ_m при больших порядковых номерах m .

При одновременном выполнении двух условий

$$x \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad x - 2b + 4a = \text{const} \quad (3.4.33)$$

асимптотика вырожденной гипергеометрической функции имеет вид [170]

$$\Phi(a, b; x) = \frac{2\Gamma(b)}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}(b-2a)^{2/3-b}e^{x/2} \left[\sin\left(a\pi + \frac{\pi}{6}\right) + O(x^{-2/3}) \right]. \quad (3.4.34)$$

В рассматриваемом случае $x = \lambda_m$ и $x - 2b + 4a = 0$, т.е. имеют место условия (3.4.33). Поэтому распределение собственных значений λ_m , удовлетворяющих уравнению (3.4.32), при $m \rightarrow \infty$ согласно формуле (3.4.34) определяется тригонометрическим уравнением $\sin(a_m\pi + \pi/6) = 0$. Его решения описываются формулой

$$a_m = -m - \frac{1}{6}, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4.35)$$

Подставляя сюда a_m из (3.4.32), получим асимптотику собственных значений λ_m при $m \rightarrow \infty$ [298]

$$\lambda_m = 4m + \frac{5}{3}. \quad (3.4.36)$$

Отметим замечательный факт: хотя формула (3.4.36) и была выведена для больших порядковых номеров m , ее с успехом можно использовать для всех $m = 0, 1, 2, \dots$. Сопоставление с результатами численных расчетов [209] (см. также [129]) показывает, что максимальная погрешность формулы (3.4.36) наблюдается при $m = 0$ и составляет всего 0,9%.

Вместо (3.4.36) для собственных значений можно использовать более точную зависимость

$$\lambda_m = 4m + 1,68 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.4.37)$$

погрешность которой меньше 0,2%.

Коэффициенты A_m ряда (3.4.12), как и ранее, определяются по формуле (3.4.20), где собственные функции H_m выписаны в (3.4.31).

Результаты численных [209] и асимптотических [298] методов расчета коэффициентов A_m можно аппроксимировать так:

$$A_0 = 1,2; \quad A_m = 2,27(-1)^m \lambda_m^{-7/6} \quad \text{при } m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.38)$$

где λ_m приведены в (3.4.37). Максимальная погрешность выражений (3.4.38) составляет меньше 0,1%.

Интегральный диффузионный поток на поверхности пластинки вычисляется по формуле (3.4.21), где $(dH_m/dy)_{y=0}$ следует заменить на $(dH_m/dy)_{y=1}$. Для собственных функций H_m и коэффициентов λ_m и A_m можно использовать выражения (3.4.31), (3.4.37), (3.4.38).

3.5. Тепло- и массоперенос при ламинарном течении в круглой трубе

Многие процессы конвективного массо- и теплопереноса в химической, нефтехимической, газовой, атомной и других отраслях промышленности осуществляются в трубах (водо-, газо- и нефтепроводы, теплообменники и др.).

Начиная с классических работ Гретца и Нуссельта [232, 266], задачи о распределении температуры жидкости, движущейся по трубе, при различных предположениях о типе течения, форме трубы, виде граничных условий, величинах чисел Пекле и ряде упрощений рассматривались многими авторами (см., например, [7, 93, 129, 150, 164, 197, 209, 223, 245, 255, 298]). В данном разделе будут описаны наиболее важные результаты в этой области.

Труба с постоянной температурой на стенке. Рассмотрим ламинарное стабилизированное течение жидкости в круглой трубе радиуса a с параболическим профилем скорости (см. разд. 1.5). Введем цилиндрическую систему координат \mathcal{R}, Z , где ось Z направлена по оси потока. Считаем, что на поверхности трубы при $Z > 0$ поддерживается постоянная температура T_2 . Входной участок будем моделировать областью $Z < 0$, где температура на стенке трубы тоже постоянна, но принимает другое значение, равное T_1 .

Процесс конвективного теплопереноса в трубе описывается уравнением и граничными условиями

$$\text{Pe}_T(1 - \varrho^2) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial T}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (3.5.1)$$

$$\varrho = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varrho} = 0; \quad \varrho = 1, \quad T = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0; \\ 1 & \text{при } z > 0; \end{cases} \quad (3.5.2)$$

$$z \rightarrow -\infty, \quad T \rightarrow 0; \quad z \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 1, \quad (3.5.3)$$

при записи которых были использованы безразмерные величины

$$\varrho = \frac{R}{a}, \quad z = \frac{Z}{a}, \quad T = \frac{T_* - T_1}{T_2 - T_1}, \quad \text{Re}_T = \frac{aU_{\max}}{\chi},$$

где T_* — температура жидкости, χ — коэффициент температуропроводности, $U_{\max} = a^2 \Delta P / (4\mu L)$ — максимальная скорость в центре трубы, ΔP — перепад давления на длине L , μ — динамическая вязкость жидкости.

Большие числа Пекле (начальный участок). При $\text{Re}_T \rightarrow \infty$ в области $z < 0$ температура жидкости постоянна и равна температуре на стенке $T \approx 0$. В области $z > 0$ при $z = O(1)$ вблизи поверхности трубы формируется тонкий тепловой пограничный слой. В этой области в левой части уравнения (3.5.1) можно ограничиться главным членом разложения скорости при $\varrho \rightarrow 1$ и записать $v = 1 - \varrho^2 \approx 2\xi$, где $\xi = 1 - \varrho$. Кроме того, двумя последними членами в правой части (3.5.1) можно пренебречь по сравнению с первым, т.е. $\Delta T \approx \partial^2 T / \partial \xi^2$. В итоге приходим к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (3.4.26). Учитывая граничные условия (3.5.2), для распределения температуры в пограничном слое получим

$$T = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{2\text{Re}_T(1-\varrho)^3}{9z}\right). \quad (3.5.4)$$

Соответствующие безразмерные локальный j_T и интегральный I_T тепловые потоки имеют вид [255]

$$j_T = - \left(\frac{\partial T}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=1} = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{6\text{Re}_T}{z} \right)^{1/3}, \quad (3.5.5)$$

$$I_T = \int_0^z j_T dz = \frac{3(6\text{Re}_T)^{1/3}}{2\Gamma(1/3)} z^{2/3}. \quad (3.5.6)$$

Область применения формул (3.5.4) — (3.5.6) ограничена значениями $z \ll \text{Re}_T$. Указанное ограничение согласно оценке [100] практически всегда выполняется в аналогичной задаче диффузионного пограничного слоя.

Произвольные числа Пекле. В общем случае $0 \leq \text{Re}_T < \infty$ распределение температуры жидкости ищем по отдельности по разные

стороны от входного сечения трубы в виде рядов:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \exp\left(\frac{\eta_k^2}{\text{Pe}_T} z\right) g_k(\varrho) \quad \text{при } z < 0, \quad (3.5.7)$$

$$T = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}_T} z\right) f_m(\varrho) \quad \text{при } z > 0. \quad (3.5.8)$$

Подставляя разложения (3.5.7) и (3.5.8) в уравнение (3.5.1) и граничные условия (3.5.2), (3.5.3), после разделения переменных для собственных функций g_k и f_m и собственных значений η_k и λ_m получим спектральные задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_k}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dg_k}{d\varrho} + \eta_k^2 \left(\varrho^2 - 1 + \frac{\eta_k^2}{\text{Pe}_T^2} \right) g_k &= 0; \\ \varrho = 0, \quad \frac{dg_k}{d\varrho} &= 0; \quad \varrho = 1, \quad g_k = 0; \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_m}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{df_m}{d\varrho} + \lambda_m^2 \left(-\varrho^2 + 1 + \frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}_T^2} \right) f_m &= 0; \\ \varrho = 0, \quad \frac{df_m}{d\varrho} &= 0; \quad \varrho = 1, \quad f_m = 0. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Собственные функции определяются лишь с точностью до постоянного множителя. Для того чтобы однозначно фиксировать решения спектральных задач (3.5.9), (3.5.10), выставим условия нормировки на оси потока

$$g_k = 1, \quad f_m = 1 \quad \text{при } \varrho = 0. \quad (3.5.11)$$

Температура $T = T(\varrho, z)$ и ее производная должны быть непрерывны при переходе через сечение $z = 0$:

$$T(\varrho, -0) = T(\varrho, +0); \quad \frac{\partial T}{\partial z}(\varrho, -0) = \frac{\partial T}{\partial z}(\varrho, +0). \quad (3.5.12)$$

Условия согласования (3.5.12) позволяют найти коэффициенты B_k и A_m рядов (3.5.7) и (3.5.8). В работах [7, 246] были выведены формулы

$$B_k = -\frac{2}{\eta_k \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right)_{\varrho=1, \eta=\eta_k}}, \quad A_m = -\frac{2}{\lambda_m \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{\varrho=1, \lambda=\lambda_m}}. \quad (3.5.13)$$

Здесь $g = g(\varrho, \eta)$ и $f = f(\varrho, \lambda)$ — вспомогательные функции, которые определяются путем решения задач (3.5.9) — (3.5.11), где опущены

индексы k и m и отброшены граничные условия на стенках трубы при $\varrho = 1$.

Далее ограничимся исследованием области $z > 0$.

Прямой проверкой можно убедиться, что замена $u = \lambda_m \varrho^2$, $F = \exp(u/2) f_m$ приводит (3.5.9) к вырожденному гипергеометрическому уравнению для функции $F = F(u)$ [12]. Поэтому решение спектральной задачи (3.5.10), удовлетворяющее условию нормировки (3.5.11), выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(a, b; \xi)$ в виде

$$f_m = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m \varrho^2\right) \Phi(a_m, 1; \lambda_m \varrho^2), \quad (3.5.14)$$

$$a_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda_m - \frac{\lambda_m^3}{4\text{Re}_T},$$

где собственные значения λ_m определяются путем решения трансцендентного уравнения

$$\Phi(a_m, 1; \lambda_m) = 0. \quad (3.5.15)$$

Вспомогательная функция $f = f(\varrho, \lambda)$, с помощью которой вычисляются коэффициенты A_m (3.5.13), получается из формулы (3.5.14) после опускания индексов m .

Изучим асимптотическое поведение собственных значений λ_m и коэффициентов A_m в некоторых предельных случаях.

При малых числах Пекле левой частью уравнения (3.5.1) можно пренебречь. Соответствующее асимптотическое решение не должно зависеть от числа Пекле. Поэтому из выражения (3.5.8) следует, что $\lambda_m = O(\sqrt{\text{Re}_T})$. Учитывая сказанное и используя предельное соотношение $\lim \Phi(a, 1; -\xi/a) = J_0(2\sqrt{\xi})$ [12], из формул (3.5.13) — (3.5.15) при $\text{Re}_T \rightarrow 0$ получим

$$\lambda_m = (\gamma_m \text{Re}_T)^{1/2}, \quad A_m = -[\gamma_m J_1(\gamma_m)]^{-1}, \quad f_m = J_0(\gamma_m \varrho), \quad (3.5.16)$$

где $J_0 = J_0(\xi)$ и $J_1 = J_1(\xi)$ — функции Бесселя, γ_m — корни функции Бесселя $J_0(\gamma_m) = 0$.

Приближенные значения γ_m удобно вычислять с помощью приближенного выражения

$$\gamma_m = 2,4 + 3,13 m \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.5.17)$$

максимальная погрешность которого составляет меньше 0,2% (сравнение проводилось с данными [170]).

Положим теперь $\text{Re} = \infty$ в формулах (3.5.14) и (3.5.15), что соответствует параметру $a_m = \frac{1}{4}(2 - \lambda_m)$. Рассмотрим большие значения

порядкового номера m . В исследуемом случае выполняются оба соотношения (3.4.33) при $x = \lambda_m$, $b = 1$, $4a = 2 - \lambda_m$. Поэтому для вырожденной гипергеометрической функции справедлива асимптотика (3.4.34), и корни трансцендентного уравнения (3.5.15) определяются по формуле (3.4.35). Подставляя $a_m = \frac{1}{4}(2 - \lambda_m)$ в (3.4.35), для собственных значений λ_m имеем [298]

$$\lambda_m = 4m + \frac{8}{3}. \quad (3.5.18)$$

Асимптотическое решение (3.5.18), полученное в предположении $m \gg 1$, оказывается пригодным для всех значений m . Сопоставление с численными данными [129] показывает, что максимальная погрешность выражения (3.5.18) наблюдается при $m = 0$ и составляет 1,4%.

Вместо (3.5.18) удобно использовать уточненную зависимость

$$\lambda_m = 4m + 2,7 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.5.19)$$

максимальная погрешность которой 0,3%.

Коэффициенты A_m ряда (3.5.8) можно вычислять по формуле

$$A_m = 2,85 (-1)^m \lambda_m^{-2/3}, \quad (3.5.20)$$

которая с точностью до 0,5% согласуется с асимптотическими [298] и численными [129] результатами.

При больших, но конечных числах Пекле, выражения (3.5.19), (3.5.20) применимы лишь для ограниченного числа собственных значений, удовлетворяющих условию $\lambda_m \ll \text{Pe}_T$.

Численные значения λ_0 , λ_1 , λ_2 при различных Pe_T , полученные с помощью ЭВМ, приведены в [102]. Зависимость главного собственного значения λ_0 от числа Пекле хорошо аппроксимируется формулой

$$\lambda_0 = 2,7 \sqrt{\frac{\exp(0,27 \text{Pe}_T) - 1}{\exp(0,27 \text{Pe}_T) - 0,18}}, \quad (3.5.21)$$

максимальная погрешность которой составляет около 1%.

Учитывая, что безразмерное распределение скоростей жидкости в трубе дается выражением $u(\varrho) = 1 - \varrho^2$, для средней массовой температуры в произвольном сечении имеем

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^1 T u(\varrho) 2\pi \varrho d\varrho}{\int_0^1 u(\varrho) 2\pi \varrho d\varrho} = 4 \int_0^1 T(1 - \varrho^2) \varrho d\varrho.$$

Подставляя в эту формулу ряд (3.5.8), получим

$$\langle T \rangle = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} E_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}_T} z\right), \quad \text{где} \quad E_m = 4A_m \int_0^1 f_m(1 - \varrho^2) \varrho d\varrho. \quad (3.5.22)$$

Дифференцируя (3.5.8), найдем локальный тепловой поток на поверхность трубы

$$j_T = \left(\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1} = - \sum_{m=0}^{\infty} A_m f'_m(1) \exp\left(-\frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}_T} z\right), \quad (3.5.23)$$

где производную в правой части можно вычислять с помощью выражения: $f'_m(1) = 2a_m \lambda_m \exp(-\frac{1}{2} \lambda_m) \Phi(a_m + 1, 2; \lambda_m)$.

Наиболее важной величиной, представляющей практический интерес, является число Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{2j_T}{1 - \langle T \rangle}. \quad (3.5.24)$$

Здесь $1 - \langle T \rangle$ — температурный напор, равный разности между температурой стенки и средней температурой жидкости.

Из выражений (3.5.22) — (3.5.24) следует, что вдали от входа в трубу (при $z \rightarrow +\infty$) число Нуссельта стремится к постоянному значению, равному

$$\text{Nu}_{\infty} = \frac{-f'_0(1)}{2 \int_0^1 f_0(\varrho)(1 - \varrho^2) \varrho d\varrho}. \quad (3.5.25)$$

Рассмотрим случай малых чисел Пекле. Для этого подставим в (3.5.25) выражения (3.5.16) при $m = 0$. Числитель дроби (3.5.25) вычисляем по формуле $dJ_0/dx = -J_1(x)$ [13], а знаменатель — с помощью рекуррентного соотношения

$$\int x^k J_m(x) dx = x^k J_{m+1}(x) - (k - m - 1) \int x^{k-1} J_{m+1}(x) dx,$$

которое выводится на основе использования свойств функций Бесселя: $x^{m+1} J_m(x) = \frac{d}{dx} [x^{m+1} J_{m+1}(x)]$. В итоге для предельного числа Нуссельта при $\text{Pe}_T = 0$ получим

$$\text{Nu}_{\infty} = \frac{\gamma_0^3}{4} \frac{J_1(\gamma_0)}{J_2(\gamma_0)} \approx 4,16 \quad (\text{при } \text{Pe}_T \rightarrow 0). \quad (3.5.26)$$

При больших числах Пекле расчеты по формуле (3.5.25) с применением ЭВМ приводят к значению [129]

$$\text{Nu}_\infty = \frac{1}{2} \lambda_0^2 \approx 3,66 \quad (\text{при } \text{Re}_T \rightarrow \infty). \quad (3.5.27)$$

Предельное число Нуссельта во всем диапазоне изменения числа Пекле хорошо аппроксимируется выражением

$$\text{Nu}_\infty = \frac{4,16 + 1,15 \text{Re}_T}{1 + 0,315 \text{Re}_T}, \quad (3.5.28)$$

максимальная погрешность которого составляет около 0,6% (для оценки его точности использовались численные данные [129]).

Расчеты по формуле (3.5.24) показывают, что при больших числах Пекле всю длину обогреваемой (охлаждаемой) трубы условно можно подразделить на два участка. На первом участке происходит формирование профиля температуры, где распределение температуры по радиусу, изменяется по длине от первоначального значения (при $z = 0$) до некоторого предельного — $f_0(\varrho)$. Число Nu в этой области вблизи входного сечения убывает степенным образом: $\text{Nu} \approx 2j_T$, где j_T описывается выражением (3.5.5). На втором участке распределение избыточной температуры $\delta T = 1 - T$ по радиусу не меняется по длине (хотя абсолютные значения температуры изменяются), а число Nu сохраняет постоянное значение, равное 3,66. Первый участок называется термическим начальным участком, а второй — участком стабилизированного теплообмена.

Длину термического начального участка принято определять как расстояние от входного сечения, на котором число Нуссельта на 1% отличается от своего предельного значения (3.5.27). Расчеты показывают, что размерная длина термического начального участка равна $l = 0,11a \text{Re}_T$.

Труба с постоянным тепловым потоком на стенке. Исследуем теперь случай, когда на поверхности круглой трубы при $Z > 0$ задан постоянный тепловой поток $q = \kappa(\partial T / \partial R)_{R=a} = \text{const}$, где κ — коэффициент теплопроводности жидкости. Входной участок будем моделировать областью $Z < 0$, где поверхность трубы теплоизолирована, а температура при $Z \rightarrow -\infty$ стремится к постоянному значению, равному T_1 .

В данном случае безразмерную температуру удобно ввести по формуле

$$\bar{T} = \frac{\kappa(T - T_1)}{aq}, \quad (3.5.29)$$

а остальные безразмерные величины определяются так же, как в задаче (3.5.1) — (3.5.3).

Рассматриваемый процесс теплопереноса описывается уравнением (3.5.1), где T следует заменить на \bar{T} и граничными условиями

$$\varrho = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varrho} = 0; \quad \varrho = 1, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varrho} = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0; \\ 1 & \text{при } z > 0; \end{cases} \quad (3.5.30)$$

$$z \rightarrow -\infty, \quad \bar{T} \rightarrow 0. \quad (3.5.31)$$

Отметим, что в данной задаче распределение температуры при $z \rightarrow +\infty$ заранее неизвестно.

Составим уравнение теплового баланса, которое понадобится далее. Для этого умножим уравнение (3.5.1) (при $T \rightarrow \bar{T}$) на ϱ и проинтегрируем полученное выражение сначала по радиальной координате от 0 до 1, а затем по продольной — от $-\infty$ до z , где $z > 0$. Учитывая граничные условия (3.5.30), (3.5.31) и меняя, где нужно, порядок интегрирования, в итоге получим

$$\text{Pe}_T \int_0^1 \varrho(1 - \varrho^2) \bar{T} d\varrho = z + \int_0^1 \varrho \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} d\varrho. \quad (3.5.32)$$

Иследуем поле температуры вдали от входного сечения при $z \gg 1$. Решение в этой области ищем в виде суммы

$$\bar{T} = \alpha z + \Psi(\varrho), \quad (3.5.33)$$

где постоянная α и функция Ψ подлежат определению.

Подставляя выражение (3.5.33) в уравнение (3.5.1) (при $T \rightarrow \bar{T}$) и граничные условия (3.5.30), приходим к следующей задаче:

$$\alpha \text{Pe}_T (1 - \varrho^2) = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{d\Psi}{d\varrho} \right); \quad (3.5.34)$$

$$\varrho = 0, \quad \frac{d\Psi}{d\varrho} = 0; \quad \varrho = 1, \quad \frac{d\Psi}{d\varrho} = 1. \quad (3.5.35)$$

Однократное интегрирование уравнения (3.5.34) дает

$$\alpha \text{Pe}_T \left(\frac{\varrho}{2} - \frac{\varrho^3}{4} + \frac{C_1}{\varrho} \right) = \frac{d\Psi}{d\varrho}, \quad (3.5.36)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Граничные условия (3.5.35) позволяют найти константу $C_1 = 0$ и параметр $\alpha = 4/\text{Pe}_T$. Учитывая сказанное и интегрируя (3.5.36), для функции Ψ получим

$$\Psi = \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{4} + C_2, \quad \alpha = \frac{4}{\text{Pe}_T}. \quad (3.5.37)$$

Для определения неизвестной постоянной C_2 подставим выражение (3.5.33) в уравнение материального баланса (3.5.32) и используем зависимость (3.5.37). Вычисления показывают, что $C_2 = \frac{8}{\text{Pe}_T^2} - \frac{7}{24}$. Таким образом, распределение температуры вдали от входного сечения имеет вид

$$\bar{T} = 4 \frac{z}{\text{Pe}_T} + \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{4} + \frac{8}{\text{Pe}_T^2} - \frac{7}{24}. \quad (3.5.38)$$

Средняя массовая температура жидкости и температурный напор в области тепловой стабилизации равны соответственно

$$\langle \bar{T} \rangle = \frac{4}{\text{Pe}_T} z + \frac{8}{\text{Pe}_T^2}, \quad \bar{T}_s - \langle \bar{T} \rangle = \frac{11}{24},$$

где \bar{T}_s — безразмерная температура на поверхности трубы.

Вычислим предельное число Нуссельта

$$\text{Nu}_\infty = \frac{2(d\bar{T}/d\varrho)_{\varrho=1}}{\bar{T}_s - \langle \bar{T} \rangle} = \frac{48}{11} \approx 4,36. \quad (3.5.39)$$

Видно, что Nu_∞ не зависит от числа Пекле.

Решение полной задачи (3.5.1), (3.5.30), (3.5.31) при $z < 0$ ищем в виде ряда (3.5.7) (где T следует заменить на \bar{T}). Поле температуры в области $z > 0$ строится на основе асимптотического распределения (3.5.38) следующим образом:

$$\bar{T} = 4 \frac{z}{\text{Pe}_T} + \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{4} + \frac{8}{\text{Pe}_T^2} - \frac{7}{24} - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\left(-\lambda_m^2 \frac{z}{\text{Pe}_T}\right) f_m(\varrho).$$

Подставляя эти ряды в (3.5.1), (3.5.30), (3.5.31) и разделяя переменные, для определения собственных значений η_k , λ_m и собственных функций g_k , f_m , получим те же самые уравнения (3.5.9), (3.5.10) с другими граничными условиями

$$\frac{dg_k}{d\varrho} = \frac{df_m}{d\varrho} = 0 \quad \text{при} \quad \varrho = 0 \quad \text{и} \quad \varrho = 1.$$

Решение задачи для f_m выражается формулой (3.5.14), где числа λ_m находятся путем решения трансцендентного уравнения

$$\Phi(a_m, 1; \lambda_m) = 2a_m \Phi(a_m + 1, 2; \lambda_m).$$

Коэффициенты разложений A_m и B_m определяются из условий неразрывности температуры и ее производной в сечении $z = 0$ (3.5.12).

Вычислим длину термического начального участка l , исходя из равенства $\text{Nu} = 1,01 \text{Nu}_\infty$. В результате получим $l = 0,14 \text{Pe}_a$.

3.6. Тепло- и массоперенос при ламинарном течении в плоской трубе

Труба с постоянной температурой на стенке. Исследуем теплообмен при ламинарном течении жидкости с параболическим профилем скорости в плоской трубе шириной $2h$. Введем прямоугольную систему координат X, Y , где ось X расположена на равном расстоянии от стенок трубы и направлена по потоку. Считаем, что на стенках трубы (при $Y = \pm h$) поддерживается постоянная температура, равная T_1 при $X < 0$ и T_2 при $X > 0$. Ввиду симметрии задачи относительно оси X достаточно рассмотреть половину области: $0 \leq Y \leq h$.

Распределение температуры T_* описывается уравнением и граничными условиями

$$\text{Pe}_T(1 - y^2) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3.6.1)$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = 1, \quad T = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad (3.6.2)$$

$$x \rightarrow -\infty, \quad T \rightarrow 0; \quad x \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow 1, \quad (3.6.3)$$

при записи которых были использованы безразмерные переменные

$$x = \frac{X}{h}, \quad y = \frac{Y}{h}, \quad T = \frac{T_* - T_1}{T_2 - T_1}, \quad \text{Pe}_T = \frac{hU_{\max}}{\chi}, \quad U_{\max} = \frac{3}{2}\langle V \rangle,$$

где U_{\max} — максимальное значение скорости жидкости на оси потока, $\langle V \rangle$ — средняя по сечению скорость жидкости.

Как и в случае круглой трубы, решение задачи (3.6.1) — (3.6.3) ищем методом разделения предельных переменных в виде рядов:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \exp\left(\frac{\eta_k^2}{\text{Pe}_T} x\right) g_k(y) \quad \text{при } x < 0, \quad (3.6.4)$$

$$T = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2}{\text{Pe}_T} x\right) f_m(y) \quad \text{при } x > 0. \quad (3.6.5)$$

Собственные значения η_k, λ_m и собственные функции g_k, f_m определяются путем решения уравнений (3.5.9), (3.5.10), в которых следует отбросить вторые слагаемые (пропорциональные первым производным) и заменить ρ на y ; граничные условия остаются прежними. Коэффициенты A_m, B_k находятся из условия непрерывности температуры и ее производной при $x = 0$ [225].

Далее ограничимся изложением основных результатов решения задачи в области $x > 0$.

Собственные функции f_m можно представить в виде

$$f_m(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_m y^2\right) \Phi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda_m - \frac{\lambda_m^3}{4\text{Re}_T^2}, \frac{1}{2}; \lambda_m y^2\right). \quad (3.6.6)$$

Здесь $\Phi(a, b; \xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а λ_m являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Phi\left(a_m, \frac{1}{2}; \lambda_m\right) = 0, \quad \text{где} \quad a_m = \frac{1}{4} - \frac{\lambda_m}{4} - \frac{\lambda_m^3}{4\text{Re}_T^2}. \quad (3.6.7)$$

Коэффициенты A_m вычисляются по формуле (3.5.13) (в которой ϱ следует заменить на y), где вспомогательная функция f получается из (3.6.6) после опускания индексов m .

В предельном случае $\text{Re}_T \rightarrow 0$ справедливы соотношения

$$\lambda_m = \sqrt{\text{Re}_T \left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)}, \quad A_m = \frac{4(-1)^m}{(\pi + 2\pi m)^2}, \quad f_m = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)y\right], \quad (3.6.8)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

При $\text{Re}_T \rightarrow \infty$ для расчета собственных значений λ_m и коэффициентов A_m можно использовать формулы (3.4.37) и (3.4.38).

В работе [102] приведены результаты численных расчетов первых трех собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ при различных числах Пекле.

Средняя массовая температура для плоской трубы определяется по формуле

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} \int_0^1 T(1 - y^2) dy. \quad (3.6.9)$$

Локальный тепловой поток находится с помощью выражения (3.5.23) (где z следует заменить на x), в котором производная $f'_m(1)$ вычисляется исходя из равенства (3.6.6).

Подставим формулы (3.6.5), (3.6.9), (3.5.23) в (3.5.24) и устремим x к бесконечности. В результате для предельного числа Нуссельта получим

$$\text{Nu}_\infty = \frac{-4f'_0(1)}{3 \int_0^1 f_0(y)(1 - y^2) dy}. \quad (3.6.10)$$

При малых числах Пекле согласно (3.6.8) имеем собственную функцию $f_0(y) = \cos(\pi y/2)$. Произведя расчеты по формуле (3.6.10), находим

$$\text{Nu}_\infty = \frac{\pi^4}{24} \approx 4,06 \quad (\text{при } \text{Re}_T \rightarrow 0). \quad (3.6.11)$$

При больших числах Пекле предельное число Нуссельта равно [129]

$$\text{Nu}_\infty = \frac{4}{3}\lambda_0^2 \approx 3,77 \quad (\text{при } \text{Re}_T \rightarrow \infty). \quad (3.6.12)$$

Во всем диапазоне изменения чисел Пекле величина Nu_∞ хорошо аппроксимируется формулой

$$Nu_\infty = \frac{4,06 + 3,66 Pe_T}{1 + 0,97 Pe_T}, \quad (3.6.13)$$

максимальная погрешность которой составляет около 0,5% (для сопоставления использовались данные [129]).

Труба с постоянным тепловым потоком на стенке. Рассмотрим теперь ситуацию, когда на поверхности плоской трубы при $X > 0$ задан постоянный тепловой поток q . Считаем, что при $X < 0$ стенки теплоизолированы и температура стремится к постоянному значению T_1 при $X \rightarrow -\infty$.

Введем безразмерную температуру \bar{T} по формуле (3.5.29) при $a \equiv h$. Процесс теплообмена в плоской трубе описывается уравнением (3.5.1) (при $T \rightarrow \bar{T}$) и граничными условиями (3.5.30), (3.5.31), где z и ρ следует заменить соответственно на x и y .

Асимптотическое решение в области тепловой стабилизации (при $x \gg 1$) ищется в виде суммы $\bar{T} = \alpha x + \Psi(y)$. Неизвестная постоянная α и функция Ψ определяются тем же путем, что и в случае круглой трубы. В итоге имеем

$$\bar{T} = \frac{3}{2} \frac{x}{Pe_T} + \frac{3}{4} y^2 - \frac{1}{8} y^4 + \frac{9}{4 Pe_T^2} - \frac{39}{280}. \quad (3.6.14)$$

Полученное распределение температуры вдали от входного сечения (3.6.14) позволяет найти предельное число Нуссельта

$$Nu_\infty = \frac{70}{17} \approx 4,12. \quad (3.6.15)$$

В [129] приведены формулы для расчета числа Нуссельта по длине трубы в случае больших чисел Пекле.

3.7. Предельные числа Нуссельта при ламинарном течении жидкостей по трубам различной формы

Теплообмен при полностью развитом ламинарном течении жидкостей в трубах различной формы рассматривался во многих работах (см., например, [93, 129, 164]). Ниже изложены некоторые итоговые результаты для предельных чисел Нуссельта, соответствующих области тепловой стабилизации потока, в случае больших чисел Пекле

(когда молекулярной теплопроводностью вдоль потока можно пренебречь).

Введем эквивалентный (или «гидравлический») диаметр d_e по формуле $d_e = 4S_*/\mathcal{P}$, где S_* — площадь поперечного сечения трубы, а \mathcal{P} — его периметр. Для трубы круглого сечения d_e совпадает с ее диаметром, для плоского канала величина d_e равна удвоенной высоте канала.

Рассмотрим трубу произвольной формы с контуром поперечного сечения Γ . Число Нуссельта, вообще говоря, меняется вдоль контура Γ . Среднее по периметру число Нуссельта \overline{Nu} определим следующим образом:

$$\overline{Nu} = \frac{q_s}{T_s - \langle T_* \rangle} \frac{d_e}{\varkappa}. \quad (3.7.1)$$

Здесь T_s — температура на поверхности трубы, $\langle T_* \rangle$ — средняя массовая температура жидкости, \varkappa — коэффициент теплопроводности, q_s — средний по периметру тепловой поток, который вычисляется по формуле

$$q_s = -\frac{1}{\mathcal{P}} \varkappa \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial T_*}{\partial \xi} \right)_{\Gamma} d\Gamma, \quad (3.7.2)$$

где $\partial T_*/\partial \xi$ — производная от температуры T_* по нормали к контуру поперечного сечения трубы.

Для трубы эллиптического сечения, на поверхности которой поддерживается постоянная температура, среднее по периметру число Нуссельта в области тепловой стабилизации потока (вдали от входного сечения) определяется выражением [129]

$$\overline{Nu}_{\infty} = \left[\frac{3\pi}{E(\vartheta)} \right]^2 \frac{(1 + \omega^2)(1 + 6\omega^2 + \omega^4)}{17 + 98\omega^2 + 17\omega^4}, \quad (3.7.3)$$

где $E(\vartheta)$ — полный эллиптический интеграл второго рода (функция E затабулирована в [188]); $\vartheta = \sqrt{1 - \omega^2}$; $\omega = a/b$ — отношение полуосей эллипса. В частном случае круглой трубы имеем $\omega = 1$, $E(0) = \pi/2$ и $\overline{Nu}_{\infty} = 48/11$.

В табл. 3.3 приведены значения средних по периметру чисел Нуссельта для труб с различной формой сечения (по данным [164]).

При постоянной температуре поверхности трубы прямоугольного сечения со сторонами a и b величина \overline{Nu}_{∞} при $a \geq b$ хорошо аппроксимируется формулой

$$\overline{Nu}_{\infty} = 7,5 - 17,5 \epsilon + 23 \epsilon^2 - 10 \epsilon^3, \quad \epsilon = b/a, \quad (3.7.4)$$

максимальная погрешность которой составляет 3%.

ТАБЛИЦА 3.3

Значения предельных чисел \overline{Nu}_∞ для полностью развитого течения в трубах различной формы при больших числах Пекле (индекс T соответствует случаю постоянной температуры стенки, а индекс q — постоянному тепловому потоку)

Профиль трубы		$\overline{Nu}_{\infty T}$	$\overline{Nu}_{\infty q}$	Эквивалентный диаметр d_e
Круглая труба диаметром d		3,658	4,364	d
Плоская труба шириной $2h$		7,541	8,235	$4h$
Эллиптическая труба с полуосями a и b	$b/a =$			$\frac{\pi b}{E(\sqrt{1-b^2/a^2})}$, где $E(\vartheta)$ — полный эллиптический интеграл второго рода
	1,00	3,658	4,364	
	0,80	3,669	4,387	
	0,50	3,742	4,558	
	0,25	3,792	4,880	
	0,125	3,725	5,085	
	0,0625	3,647	5,176	
Труба прямоугольного сечения со сторонами a и b	$b/a =$			$\frac{2ab}{a+b}$
	1,00	2,976	3,608	
	0,714	3,077	3,734	
	0,50	3,391	4,123	
	0,25	4,439	5,331	
	0,125	5,597	6,490	
	0,05	—	7,451	
0	7,541	8,235		
Равносторонний треугольник со стороной a		2,47	3,111	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
Правильный шестиугольник со стороной a		3,34	4,002	$a\sqrt{3}$
Полукруг с диаметром d		—	4,089	$\frac{\pi d}{\pi + 2}$

Для трубы, сечением которой является правильный N -угольник, предельное число Нуссельта в случае постоянной температуры на поверхности трубы можно вычислять с помощью приближенной зависимости

$$\overline{Nu}_\infty = 3,65 - 0,18 N^{-1} - 10 N^{-2}. \quad (3.7.5)$$

Сопоставление с данными табл. 3.3 показывает, что максимальная погрешность (3.7.5) при $N = 3, 4, 6, \infty$ составляет менее 0,5%.

Отметим, что задачи конвективного теплопереноса в трубах с более сложными профилями рассматривались в [154].

4. Массо- и теплообмен частиц, каплей и пузырей с потоком

Задача о массообмене движущейся твердой частицы, капли или пузыря с окружающей средой лежит в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, горением, химическими превращениями в дисперсной системе, осаждением коллоидов и т.п. Так, в промышленности процесс экстракции проводится из капель или пузырей, широко применяются гетерогенные превращения с использованием частиц катализатора, взвешенных в жидкости или газе. При этом скорость экстракции и интенсивность каталитического процесса в значительной мере определяются величиной полного диффузионного притока реагента к поверхности частиц дисперсной фазы, который в свою очередь зависит от характера обтекания и формы частицы, влияния соседних частиц, кинетики поверхностной химической реакции и других факторов.

Описание целого ряда метеорологических явлений также базируется на изучении броуновской диффузии аэрозолей к отдельным твердым и жидким частицам. Проблема все увеличивающейся загрязненности атмосферы требует понимания и описания процессов самоочищения атмосферы от химических, механических и радиоактивных загрязнений. Задача осаждения аэрозольных частиц на различных поглотителях возникает также при расчете эффективности фильтров.

Результаты исследования аналогичных процессов конвективного теплообмена могут быть использованы для расчета и анализа работы теплообменников.

4.1. Метод асимптотических аналогий в теории массо- и теплопереноса

При исследовании конкретных задач теории массо- и теплопереноса наиболее важным является выделение количественных закономерностей, присущих целому классу качественно аналогичных задач. Во многих случаях общие результаты такого рода удается получить с помощью метода асимптотических аналогий [72, 277, 279]. Метод основан на переходе от обычных безразмерных переменных к специальным асимптотическим координатам и служит для построения приближенных зависимостей, обладающих широким диапазоном применимости (одну и ту же формулу можно использовать для описания целого ряда качественно схожих задач, отличающихся формой поверхности и структурой течения).

Пусть имеется некоторый класс задач, отличающихся друг от друга геометрическими характеристиками и зависящих от безразмерного параметра τ ($0 \leq \tau < \infty$). Предполагается также, что для какой-либо одной конкретной (наиболее простой) геометрии известна зависимость основной искомой величины w от параметра τ :

$$w = F(\tau), \quad (4.1.1)$$

где F — монотонная функция.

В задачах массо- и теплопереноса в качестве искомой величины w обычно выступают: число Шервуда (Нуссельта), средняя по объему концентрация; в качестве параметра τ — безразмерное время, число Пекле, безразмерная константа скорости реакции.

Преобразуем формулу (4.1.1) следующим образом. Пусть главные члены асимптотических разложений величины w при малых и больших значениях параметра τ имеют вид

$$w_0 = A\tau^k \quad \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} w/w_0 = 1 \right), \quad (4.1.2)$$

$$w_\infty = B\tau^m \quad \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} w/w_\infty = 1 \right), \quad (4.1.3)$$

где A, B, k, m — некоторые постоянные; $k \neq m$.

Отметим, что исходную зависимость (4.1.1) и асимптотики (4.1.2), (4.1.3) можно определять как теоретическим, так и экспериментальным путем.

Далее считается, что для всего рассматриваемого класса задач соответствующие асимптотики определяются формулами типа (4.1.2) и (4.1.3), где постоянные k и m одинаковы, а параметры A и B меняются.

Используя формулы (4.1.1) — (4.1.3), запишем два соотношения

$$\frac{w}{w_0} = \frac{F(\tau)}{A\tau^k}, \quad \frac{w_\infty}{w_0} = \frac{B\tau^m}{A\tau^k}. \quad (4.1.4)$$

Величины типа w/w_0 и w_∞/w_0 будем называть асимптотическими координатами.

Выражая из второго уравнения (4.1.4) параметр τ и подставляя его в первое равенство, находим искомую зависимость

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{A} \left(\frac{A}{B} \frac{w_\infty}{w_0} \right)^{\frac{k}{k-m}} F \left[\left(\frac{A}{B} \frac{w_\infty}{w_0} \right)^{\frac{1}{m-k}} \right]. \quad (4.1.5)$$

Формулу (4.1.5) можно представить в эквивалентном виде

$$\frac{w}{w_\infty} = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{B} \frac{w_\infty}{w_0} \right)^{\frac{m}{k-m}} F \left[\left(\frac{A}{B} \frac{w_\infty}{w_0} \right)^{\frac{1}{m-k}} \right]. \quad (4.1.6)$$

Метод асимптотических аналогий заключается в том, что полученное выражение (4.1.5) (или (4.1.6)) используется далее для приближенного расчета аналогичных характеристик уже для достаточно широкого класса задач, описывающих качественно сходные явления или процессы. Для этого после построения с помощью (4.1.1) зависимости (4.1.5) для какого-либо одного конкретного (например, наиболее простого) случая процедура вычисления величины w для другой задачи этого же класса сводится к определению ее асимптотик w_0 (при $\tau \rightarrow 0$) и w_∞ (при $\tau \rightarrow \infty$) с последующей подстановкой их в формулу (4.1.5). Выведенные указанным способом приближенные зависимости будут давать точный асимптотический результат в обоих предельных случаях при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$.

Проведенное в работах [72, 142, 143, 277, 279] сопоставление полученных с помощью метода асимптотических аналогий формул с целым рядом конкретных случаев, для которых уже имеются необходимые для проверки точные, численные и приближенные результаты, показывает хорошую точность и широкие возможности предложенного способа расчета. Это обстоятельство говорит о том, что конечная функциональная связь (4.1.5) интересующей нас величины w с ее асимптотиками для достаточно широкого класса однотипных задач остается одной и той же (точнее, слабо меняется), и конкретные модификации и геометрические различия (форма поверхности и структура течения) этих задач в достаточно полной мере учитываются соответствующими асимптотическими параметрами типа w_0 и w_∞ . Другими словами, область применимости конечной формулы (4.1.5) оказывается существенно шире области применимости исходной зависимости (4.1.1). В этом смысле можно говорить, что формулы типа (4.1.6) (в отличие от исходной формулы (4.1.1)) обладают *повышенной информативностью*.

4.2. Внутренние задачи о теплообмене тел различной формы

Рассмотрим класс задач о нестационарном теплообмене выпуклых тел различной формы с окружающей средой. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ температура тела была одинакова и равна T_i , а при $t > 0$ на поверхности тела Γ температура поддерживается постоянной и равна T_s . Распределение температуры внутри тела описывается следующим уравнением, начальным и граничным условиями:

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = \Delta T; \quad (4.2.1)$$

$$T = 0 \quad \text{в начальный момент времени } \bar{\tau} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$T = 1 \quad \text{на поверхности тела } \Gamma, \quad (4.2.3)$$

где безразмерные величины введены по формулам (3.1.32).

Аналогичным образом формулируется задача о нестационарной диффузии внутри полости, заполненной неподвижной средой.

Основное внимание в этом разделе будет уделено изучению средней температуры тела $\langle T \rangle$, которая определяется так:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{V} \int_v T dv, \quad (4.2.4)$$

где $V = \int_v dv$ — безразмерный объем тела.

Для построения приближенной зависимости средней температуры тела от времени воспользуемся методом асимптотических аналогий. В качестве исходной простейшей задачи удобно взять одномерную (по пространственным координатам) задачу о теплообмене сферы радиуса a . Решение этой задачи хорошо известно [104] и приводит к следующему выражению для средней температуры:

$$\langle T \rangle = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp(-\pi^2 k^2 \bar{\tau}). \quad (4.2.5)$$

Асимптотики формулы (4.2.5) при малых и больших временах имеют вид

$$\langle T \rangle_0 = 6\pi^{-1/2} \sqrt{\bar{\tau}} \quad (\bar{\tau} \rightarrow 0); \quad \langle T \rangle_{\infty} = 1 \quad (\bar{\tau} \rightarrow \infty) \quad (4.2.6)$$

и являются частным случаем (4.1.2), (4.1.3) при $w_0 = \langle T \rangle_0$ и $w_{\infty} = \langle T \rangle_{\infty}$, где $A = 6\pi^{-1/2}$, $B = 1$, $k = \frac{1}{2}$, $m = 0$. Подставляя эти значения в (4.1.6), где $F = \langle T \rangle$, перепишем зависимость (4.2.5) следующим образом:

$$\frac{\langle T \rangle}{\langle T \rangle_{\infty}} = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp \left[-\frac{\pi^3}{36} k^2 \left(\frac{\langle T \rangle_0}{\langle T \rangle_{\infty}} \right)^2 \right]. \quad (4.2.7)$$

Формулу (4.2.7) в соответствии с методом асимптотических аналогий будем использовать для расчета средней температуры тел несферической формы. Для этого для тела заданной формы сначала следует вычислить асимптотики средней температуры при малых и больших временах, а затем подставить их в выражение (4.2.7).

Для ограниченного тела произвольной формы решение задачи (4.2.1) — (4.2.3) при $\bar{\tau} \rightarrow \infty$ стремится к предельному значению (равному единице), которое определяется граничным условием на поверхности тела. Полагая $T = 1$ в формуле (4.2.4), находим асимптотику для средней температуры при больших $\bar{\tau}$:

$$\langle T \rangle_{\infty} = 1. \quad (4.2.8)$$

Рассмотрим теперь начальную стадию процесса, соответствующую малым значениям безразмерного времени. Проинтегрируем уравнение (4.2.1) по объему, занятому телом v . Учитывая тождество $\Delta T = \text{div}(\text{grad } T)$, с помощью формулы Остроградского — Гаусса перейдем в правой части полученного выражения от объемного интеграла к поверхностному. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \int_v T dv = - \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial \xi} d\Gamma, \quad (4.2.9)$$

где координата ξ направлена внутрь по нормали к поверхности тела.

При малых временах основное изменение температуры происходит в тонкой зоне, прилегающей к поверхности тела. В этой области производными вдоль поверхности тела можно пренебречь по сравнению с производными по нормали. Поэтому распределение температуры при $\bar{\tau} \rightarrow 0$ описывается следующим уравнением с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \bar{\tau}} &= \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}; \\ \bar{\tau} = 0, \quad T &= 0; \quad \xi = 0, \quad T = 1, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

где значение $\xi = 0$ соответствует поверхности тела.

Решение задачи (4.2.10) выражается через дополнительный интеграл вероятности

$$T = \text{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right). \quad (4.2.11)$$

Дифференцируя эту формулу по ξ и полагая $\xi = 0$, находим локальный тепловой поток на поверхность тела при $\bar{\tau} \rightarrow 0$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{\Gamma} = - \frac{1}{\sqrt{\pi \bar{\tau}}}. \quad (4.2.12)$$

Подставим (4.2.12) в равенство (4.2.9). После интегрирования имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \int_v T dv = \frac{1}{\sqrt{\pi \bar{\tau}}} S, \quad (4.2.13)$$

где S — безразмерная площадь поверхности тела.

Проинтегрируем обе части формулы (4.2.13) по $\bar{\tau}$ от 0 до $\bar{\tau}$. Учитывая начальное условие (4.2.2), приходим к искомому асимптотическому выражению для средней температуры при $\bar{\tau} \rightarrow 0$:

$$\langle T \rangle_0 = 2 \frac{S}{V} \sqrt{\frac{\bar{\tau}}{\pi}}. \quad (4.2.14)$$

Подставляя (4.2.8) и (4.2.14) в формулу (4.2.7), получим приближенную зависимость средней температуры для тела произвольной формы от времени

$$\langle T \rangle = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 S^2}{9V^2} \bar{\tau}\right).$$

Это выражение можно переписать следующим образом [144]:

$$\langle T \rangle = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{9} k^2 \frac{S_*^2 \chi t}{V_*^2}\right), \quad (4.2.15)$$

где S_* и V_* — размерные площадь поверхности и объем тела.

Для практических расчетов вместо бесконечного ряда целесообразно использовать более простую формулу

$$\langle T \rangle = \sqrt{1 - e^{-1,27\omega}} + 0,6 (e^{-1,5\omega} - e^{-1,1\omega}), \quad \omega = \frac{S_*^2 \chi t}{V_*^2}, \quad (4.2.16)$$

максимальное отличие которой от (4.2.15) составляет около 1,7% (см. табл. 4.1).

Проведем сопоставление приближенной зависимости (4.2.15) с известными точными результатами по теплообмену тел несферической формы.

Рассмотрим сначала параллелепипед, стороны которого равны L_1 , L_2 , L_3 . Решение соответствующей трехмерной задачи (4.2.1) — (4.2.3) строится методом разделения переменных и приводит к следующей формуле для средней температуры [104]:

$$\langle T \rangle = 1 - \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 (2m-1)^2 (2l-1)^2} \times \\ \times \exp\left\{-\pi^2 \left[\frac{(2k-1)^2}{L_1^2} + \frac{(2m-1)^2}{L_2^2} + \frac{(2l-1)^2}{L_3^2}\right] \chi t\right\}. \quad (4.2.17)$$

Учитывая, что площадь поверхности и объем параллелепипеда определяются формулами $S_* = 2(L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3)$ и $V_* = L_1L_2L_3$, представим выражение (4.2.17) в виде

$$\langle T \rangle = 1 - \left(\frac{8}{\pi^2} \right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2(2l-1)^2} \times \\ \times \exp \left[- \frac{\pi^2}{4} \frac{\left(\frac{2k-1}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{2m-1}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{2l-1}{L_3} \right)^2}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right)^2} \frac{S_*^2 \chi t}{V_*^2} \right]. \quad (4.2.18)$$

В табл. 4.1 приведены результаты сопоставления приближенной (4.2.15) и точной (4.2.18) зависимостей средней температуры параллелепипеда при шести различных значениях L_1, L_2, L_3 . Видно, что максимальная погрешность формул (4.2.15) и (4.2.16) при $0,25 \leq L_3/L_1 \leq 4,0, L_2/L_1 = 1$ составляет около 5%.

Рассмотрим теперь теплообмен цилиндра конечной длины. Пусть радиус цилиндра будет a , а длина — L . Решение задачи (4.2.1) — (4.2.3) в этом случае приводит к следующему выражению для средней температуры [104]:

$$\langle T \rangle = 1 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_k^2(2m-1)^2} \times \\ \times \exp \left\{ - \left[\frac{\vartheta_k^2}{a^2} + \frac{\pi^2(2m-1)^2}{L^2} \right] \chi t \right\}, \quad (4.2.19)$$

где ϑ_k — корни функции Бесселя нулевого рода: $J_0(\vartheta_k) = 0$ (значения первых шестидесяти корней ϑ_k приведены в книге [188]).

Формулу (4.2.19) можно переписать так:

$$\langle T \rangle = 1 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_k^2(2m-1)^2} \times \\ \times \exp \left[- \frac{L^2 \vartheta_k^2 + \pi^2 a^2 (2m-1)^2}{4(a+L)^2} \frac{S_*^2 \chi t}{V_*^2} \right], \quad (4.2.20)$$

где $S_* = 2\pi a(a+L)$ — площадь поверхности, а $V_* = \pi a^2 L$ — объем цилиндра.

Результаты расчета с помощью точной (4.2.20) и приближенной (4.2.15) зависимостей при различных значениях характерных размеров цилиндров приведены в табл. 4.1. Видно, что максимальная погрешность формулы (4.2.15) при $0,25 \leq 2a/L \leq 4,0$ составляет около 3,5%.

ТАБЛИЦА 4.1
Сопоставление точных и приближенных значений
средней температуры $\langle T \rangle$ тел различной формы

Безразмерное время $\frac{S_*^2 \chi t}{V_*^2}$		0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0
Сфера, формула (4.2.15)		0,236	0,323	0,438	0,518	0,631	0,795	0,882	0,932
Приближенная формула (4.2.16)		0,237	0,324	0,437	0,514	0,623	0,782	0,870	0,923
Параллелепипед, формула (4.2.18); $E_i = L_i/L_1$	$E_2 = 1, E_3 = 0,25$	0,237	0,326	0,443	0,527	0,647	0,821	0,907	0,951
	$E_2 = 1, E_3 = 0,5$	0,233	0,318	0,429	0,506	0,615	0,774	0,862	0,915
	$E_2 = 1, E_3 = 1$	0,232	0,316	0,425	0,499	0,604	0,757	0,843	0,897
	$E_2 = 1, E_3 = 2$	0,232	0,318	0,427	0,503	0,610	0,767	0,854	0,920
	$E_2 = 1, E_3 = 4$	0,234	0,320	0,432	0,510	0,620	0,782	0,871	0,952
	$E_2 = 2, E_3 = 4$	0,234	0,321	0,435	0,514	0,628	0,794	0,882	0,932
Цилиндр, формула (4.2.20); $E = 2a/L$	$E = 0,25$	0,236	0,325	0,440	0,522	0,638	0,807	0,894	0,942
	$E = 0,5$	0,234	0,321	0,434	0,513	0,624	0,787	0,875	0,926
	$E = 1$	0,233	0,319	0,429	0,506	0,613	0,770	0,857	0,910
	$E = 2$	0,234	0,320	0,431	0,509	0,619	0,780	0,868	0,920
	$E = 4$	0,237	0,326	0,444	0,528	0,649	0,823	0,909	0,952

4.3. Массо- и теплообмен частиц различной формы с неподвижной средой

Стационарный массообмен частицы с неподвижной средой. Рассмотрим, следуя [142, 143], стационарную диффузию к частице конечных размеров в покоящейся среде, что соответствует случаю $Pe = 0$. Считаем, что на поверхности частицы и вдали от нее концентрация принимает постоянные значения, равные соответственно C_s и C_i . Поле концентрации вне частицы описывается уравнением Лапласа и граничными условиями

$$\Delta c = 0, \quad (4.3.1)$$

$$c = 1 \quad \text{на поверхности частицы } \Gamma, \quad (4.3.2)$$

$$c = 0 \quad \text{вдали от частицы,} \quad (4.3.3)$$

где безразмерная концентрация c введена в (3.1.7).

Искомая величина, представляющая наибольший практический интерес в этих задачах, — среднее число Шервуда — определяется по формуле (3.1.28) и связана с коэффициентом массоотдачи α_c следующим образом:

$$Sh = \frac{a\alpha_c}{D}, \quad (4.3.4)$$

где a — характерный размер, выбранный за масштаб длины.

Диффузионная задача (4.3.1) — (4.3.3) математически эквивалентна задаче о электростатическом поле заряженного проводящего тела, расположенного в однородной свободной от зарядов диэлектрической среде. Поэтому среднее число Шервуда в неподвижной жидкости совпадает с безразмерной электрической емкостью тела и может быть вычислено или измерено методами электростатики.

Для дальнейшего удобно ввести фактор формы Π , имеющий размерность длины, по формуле

$$\Pi = \frac{\alpha_c S_*}{D} = \text{Sh} \frac{S_*}{a}, \quad (4.3.5)$$

где S_* — размерная площадь поверхности частицы. Отметим, что величину Π также иногда называют «проводимостью».

В табл. 4.2 приведены значения фактора Π для частиц различной формы. Среднее число Шервуда согласно выражению (4.3.5) определяется с помощью этой таблицы путем деления фактора формы на площадь поверхности частицы и умножения на характерный размер.

Для интерпретации табличных данных поступим следующим образом. Спроектируем точки поверхности тел вращения на плоскость, перпендикулярную оси. В проекции получим круг радиуса a_p . Сферу с радиусом a_p назовем сферой, эквивалентной по периметру. Введем фактор эквивалентного периметра [219]

$$\Sigma = \frac{S_*}{4\pi a_p^2} = \frac{\text{поверхность частицы}}{\text{поверхность сферы, эквивалентной по периметру}} \quad (4.3.6)$$

и рассмотрим соответствующую относительную величину фактора формы

$$\tilde{\Pi} = \frac{\Pi}{4\pi a_p} = \frac{\text{фактор формы частицы}}{\text{фактор формы эквивалентной сферы}}. \quad (4.3.7)$$

Безразмерные величины (4.3.6) и (4.3.7) инвариантны относительно выбора характерного масштаба длины. График зависимости $\tilde{\Pi}$ как функция Σ изображен на рис. 4.1. Видно, что частицы с различной геометрической формой хорошо «укладываются» на одну универсальную кривую, которую можно аппроксимировать выражением

$$\tilde{\Pi} = 0,637 + 0,327 (2\Sigma - 1)^{0,76} \quad (0,5 \leq \Sigma \leq 8,5). \quad (4.3.8)$$

Эту приближенную формулу целесообразно использовать для расчета интенсивности массообмена частиц сложной формы в неподвижной среде, когда неизвестно решение задачи (4.3.1) — (4.3.3).

ТАБЛИЦА 4.2

Фактор формы частиц в неподвижной среде (по данным [60, 219])

№	Форма частицы	Фактор формы $\Pi = \text{Sh} \frac{S_*}{a}$
1	Сфера радиуса a	$4\pi a$
2	Сплюснутый эллипсоид вращения с полуосями a и b , $\chi = b/a < 1$	$\frac{4\pi a \sqrt{1 - \chi^2}}{\arccos \chi}$
3	Вытянутый эллипсоид вращения с полуосями a и b , $\chi = b/a > 1$	$\frac{4\pi a \sqrt{\chi^2 - 1}}{\ln(\chi + \sqrt{\chi^2 - 1})}$
4	Круговой цилиндр радиуса a длины L ($0 \leq L/a \leq 16$)	$[8 + 4,1 (L/a)^{0,76}] a$
5	Тонкая прямоугольная пластина со сторонами L_1 и L_2 , ($L_1 \geq L_2$)	$\frac{2\pi L_1}{\ln(4L_1/L_2)}$
6	Куб с ребром a	$0,654 (4\pi a)$
7	Соприкасающиеся сферы равного радиуса a	$2 \ln 2 (4\pi a)$
8	Соприкасающиеся сферы с радиусами a_1 и a_2	$-\frac{4\pi a_1 a_2}{a_1 + a_2} \left[\psi\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) + \psi\left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) + 2 \ln \gamma \right],$ где $\psi(x) = \frac{d}{dx} \Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\ln \gamma = -\psi(1) = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера
9	Пересекающиеся ортогонально сферы с радиусами a_1 и a_2	$4\pi \left(a_1 + a_2 - \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)$

Приведем также некоторые оценки для нижней и верхней границы величины фактора формы [219]. Нижняя граница для произвольной частицы определяется фактором формы сферы равного объема V_* :

$$\Pi \geq (48\pi^2 V_*)^{1/3}. \quad (4.3.9)$$

Другая оценка снизу имеет вид

$$\Pi \geq 8(S_{\max}/\pi)^{1/2}, \quad (4.3.10)$$

где S_{\max} — максимум площади ортогональной проекции тела на плоскость. Равенство в формуле (4.3.10) соответствует диску. Верхняя граница определяется фактором формы любой поверхности (например, сферы или эллипсоида вращения), окружающей частицу.

Рис. 4.1. Зависимость относительной величины фактора формы от фактора эквивалентного периметра в неподвижной среде для частиц различной формы: 1 — круговой цилиндр, 2 — сплюснутый эллипсоид вращения, 3 — вытянутый эллипсоид вращения, 4 — куб, 5 — полусфера, 6 — пересекающиеся сферы.

Нестационарный массообмен частицы с неподвижной средой. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ концентрация в сплошной фазе постоянна и равна C_i , а на поверхности частицы поддерживается постоянная концентрация C_s . Нестационарный массообмен частицы с неподвижной средой описывается уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \Delta c \quad (4.3.11)$$

с граничными условиями (4.3.2), (4.3.3) и начальным условием

$$\tau = 0, \quad c = 0, \quad (4.3.12)$$

где $\tau = tD/a^2$ — безразмерное время.

Для частицы сферической формы решение задачи (4.3.11), (4.3.12), (4.3.2), (4.3.3) выражается через дополнительный интеграл вероятностей и имеет вид

$$c = \frac{1}{r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r-1}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (4.3.13)$$

где r — отнесенная к радиусу частицы безразмерная радиальная координата.

Среднее число Шервуда для сферы равно

$$\operatorname{Sh} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}. \quad (4.3.14)$$

Для частиц несферической формы среднее число Шервуда приближенно можно вычислить по формуле

$$\operatorname{Sh} = \operatorname{Sh}_{\text{st}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, \quad (4.3.15)$$

где Sh_{st} — число Шервуда, соответствующее решению стационарной задачи (4.3.1) — (4.3.3). Все величины Sh , Sh_{st} , τ в (4.3.15) безразмерны с помощью одного и того же масштаба длины.

В случае частиц несферической формы для определения Sh_{st} можно использовать данные табл. 4.2 и выражение (4.3.8).

4.4. Массоперенос в поступательном потоке при малых числах Пекле

Рассмотрим, следуя [142, 143] стационарную диффузию к частице, обтекаемой ламинарным потоком. Предполагаем, что на поверхности частицы и вдали от нее концентрация принимает постоянные значения, равные C_s и C_i . В безразмерных переменных (3.1.7) процесс массопереноса в сплошной фазе описывается уравнением

$$Pe(\vec{v} \cdot \nabla)c = \Delta c \quad (4.4.1)$$

с граничными условиями (4.3.2), (4.3.3). Распределение скоростей жидкости \vec{v} зависит от формы частицы и структуры невозмущенного течения на бесконечности и будет конкретизироваться далее по мере необходимости.

В данном разделе будет исследоваться однородный поступательный поток со скоростью U_i вдали от частицы.

Сферическая частица. Рассмотрим массообмен сферической частицы радиуса a с поступательным потоком. При стоксовом режиме течения ($Re \rightarrow 0$) безразмерные (отнесенные к U_i) компоненты скорости жидкости можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, & v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \psi &= \frac{1}{4}(r-1)^2 \left(2 + \frac{1}{r}\right) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Здесь r — безразмерная (отнесенная к a) радиальная координата, θ — угловая координата (отсчитывается от направления набегающего потока), ψ — безразмерная (отнесенная к $a^2 U_i$) функция тока.

Использование функции тока (4.4.2) позволяет записать уравнение конвективной диффузии (4.4.1) следующим образом:

$$\Delta c = \frac{Pe}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right), \quad (4.4.3)$$

где $Pe = aU_i/D$.

Граничные условия имеют вид

$$r = 1, \quad c = 1 \quad (\text{на поверхности сферы}) \quad (4.4.4)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0 \quad (\text{на бесконечности}). \quad (4.4.5)$$

Приближенное аналитическое решение задачи (4.4.3) — (4.4.5) при малых числах Пекле ищем методом сращиваемых асимптотических разложений [38, 90, 114]. Для этого разобьем поле течения на две области: внутреннюю $\Omega = \{1 \leq r \leq O(\text{Pe}^{-1})\}$ и внешнюю $\bar{\Omega} = \{O(\text{Pe}^{-1}) \leq r\}$. Во внутренней области сохраним прежние переменные r, θ , а во внешней введем вместо r сжатую радиальную координату $\bar{r} = \text{Pe} r$.

Решение в каждой из областей ищем по отдельности в виде внутреннего и внешнего разложений:

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(\text{Pe}) c_k(r, \theta) \quad \text{в } \Omega, \quad (4.4.6)$$

$$\bar{c} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\varepsilon}_k(\text{Pe}) \bar{c}_k(\bar{r}, \theta) \quad \text{в } \bar{\Omega}. \quad (4.4.7)$$

Зависимости коэффициентов ряда $\varepsilon_k, \bar{\varepsilon}_k$ от числа Пекле заранее не известны и находятся в процессе решения задачи. Предполагается лишь, что выполняются условия

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \rightarrow 0, \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{k+1}}{\bar{\varepsilon}_k} \rightarrow 0 \quad \text{при } \text{Pe} \rightarrow 0.$$

Члены внутреннего разложения (4.4.6) определяются путем решения уравнения (4.4.3) с граничным условием на поверхности частицы (4.4.4). Члены внешнего разложения (4.4.7) стремятся к нулю при $\bar{r} \rightarrow \infty$ и описываются уравнением (4.4.3), где сделана замена $r = \bar{r}/\text{Pe}$ и учтена зависимость (4.4.2). Возникающие при решении этих задач произвольные константы находятся из условия сращивания, которое записывается так:

$$c(r \rightarrow \infty) = \bar{c}(\bar{r} \rightarrow 0). \quad (4.4.8)$$

Главный член внутреннего разложения (4.4.6) соответствует массообмену сферы с неподвижной средой и определяется решением задачи (4.4.3) — (4.4.5) при $\text{Pe} = 0$. Поэтому имеем

$$c_0 = \frac{1}{r}, \quad \varepsilon_0(\text{Pe}) = 1. \quad (4.4.9)$$

Найдем явный вид коэффициента $\bar{\varepsilon}_0(\text{Pe})$ во внешнем разложении. Для этого в формуле (4.4.9) перейдем к внешней переменной:

$c_0 = Re/\bar{r}$. Из условия сращивания (4.4.8) следует, что $\bar{\varepsilon}_0 = Re$. Подставим $r = \bar{r}/Re$ и $c = Re\bar{c}_0 + \dots$ в (4.4.2), (4.4.3), (4.4.5) и отбросим слагаемые порядка $o(Re)$. В результате получим задачу для главного члена внешнего разложения

$$\bar{\Delta}\bar{c}_0 = \cos\theta \frac{\partial\bar{c}_0}{\partial\bar{r}} + \frac{\sin\theta}{\bar{r}} \frac{\partial\bar{c}_0}{\partial\theta}; \quad \bar{r} \rightarrow \infty, \quad \bar{c} \rightarrow 0. \quad (4.4.10)$$

Здесь $\bar{\Delta}$ — осесимметричный оператор Лапласа, где в качестве радиальной координаты выступает \bar{r} .

Общее решение задачи (4.4.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{c}_0 &= \left(\frac{\pi}{\bar{r}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\bar{r}\cos\theta}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} A_m K_{m+1/2}\left(\frac{\bar{r}}{2}\right) P_m(\cos\theta), \\ K_{m+1/2}\left(\frac{\bar{r}}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{\bar{r}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\bar{r}}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{(m-k)! k! \bar{r}^k}, \\ P_m(x) &= \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m, \end{aligned}$$

где $K_{m+1/2}(x)$ — функции Макдональда, $P_m(x)$ — полиномы Лежандра. Константы A_m должны быть определены в результате сращивания, которое заключается в сравнении поведения функции $\bar{c} = Re\bar{c}_0 + \dots$ при $\bar{r} \rightarrow 0$ и функции (4.4.9) при $r \rightarrow \infty$. Нетрудно установить, что $A_0 = 1/\pi$, $A_m = 0$ ($m = 1, 2, \dots$). Поэтому

$$\bar{c}_0 = \frac{1}{\bar{r}} \exp\left[\frac{1}{2}\bar{r}(\cos\theta - 1)\right], \quad \bar{\varepsilon}_0 = Re. \quad (4.4.11)$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Для этого подставим формулы (4.4.11) в (4.4.7) и перейдем к внутренней переменной r . Разлагая полученное выражение в ряд по Re , из условия сращивания (4.4.8) найдем, что $\varepsilon_1(Re) = Re$. Следовательно, первое приближение для внутреннего разложения с учетом равенств (4.4.9) следует искать в виде

$$c = \frac{1}{r} + Re c_1(r, \theta) + o(Re). \quad (4.4.12)$$

Подставим (4.4.12) в (4.4.3), (4.4.4) и используем зависимость (4.4.2) для функции тока. Выделяя члены порядка Re , получим уравнение и граничное условие для c_1 :

$$\Delta c_1 = -\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right) \cos\theta; \quad (4.4.13)$$

$$r = 1, \quad c_1 = 0. \quad (4.4.14)$$

Запишем общее решение уравнения (4.4.13)

$$c_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} - \frac{1}{8r^3} \right) \cos \theta + \sum_{m=0}^{\infty} (a_m r^m + b_m r^{-m-1}) P_m(\cos \theta). \quad (4.4.15)$$

Граничное условие (4.4.14) позволяет установить линейные соотношения между постоянными a_m и b_m :

$$a_1 = \frac{3}{8} - b_1; \quad a_m = -b_m \quad \text{при} \quad m = 0, 2, 3, 4, \dots \quad (4.4.16)$$

Для определения коэффициентов в (4.4.15) произведем сращивание выражений (4.4.12), (4.4.15) при $r \rightarrow \infty$ и (4.4.6), (4.4.11) при $\bar{r} \rightarrow 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2}, & b_0 &= \frac{1}{2}, & a_1 &= 0, & b_1 &= \frac{3}{8}; \\ a_m &= b_m = 0 & \text{при} & & m &= 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2r} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3}{8r^2} - \frac{1}{8r^3} \right) \cos \theta. \quad (4.4.17)$$

Для твердых частиц, капель и пузырей сферической формы среднее число Шервуда вычисляется по формуле

$$\text{Sh} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=1} d\theta. \quad (4.4.18)$$

Подставляя сюда двучленное разложение (4.4.12) с учетом (4.4.17), имеем

$$\text{Sh} = 1 + \frac{1}{2} \text{Pe} + o(\text{Pe}). \quad (4.4.19)$$

В работе [191] были получены последующие три члена разложения числа Шервуда, соответствующие асимптотическому решению задачи (4.4.2) — (4.4.5) при $\text{Pe} \rightarrow 0$. Эти результаты были обобщены в [287], где для поля скоростей жидкости вокруг сферы использовалось решение [282]. Приведем здесь итоговое выражение для числа Шервуда [287]:

$$\begin{aligned} \text{Sh} &= 1 + \frac{1}{2} \text{Pe} + \frac{1}{2} \text{Pe}^2 \ln \text{Pe} + \frac{1}{2} Q(\text{Sc}) \text{Pe}^2 + \frac{1}{4} \text{Pe}^3 \ln \text{Pe} + O(\text{Pe}^3), \\ Q(\text{Sc}) &= -\frac{173}{160} + \ln \gamma + \frac{\text{Sc}^2}{2} - \frac{\text{Sc}}{4} - (\text{Sc} + 1)^2 \left(\frac{\text{Sc}}{2} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{1}{\text{Sc}} \right), \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

где $\ln \gamma = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

Формулу (4.4.20) можно использовать при $0,4 \leq Sc \leq \infty$. Предельный переход в (4.4.20) при $Sc \rightarrow \infty$ приводит к результату [191].

Частица произвольной формы конечных размеров. При малых числах Пекле задача о массообмене частицы произвольной формы с однородным поступательным потоком исследовалась методом сращиваемых асимптотических разложений в [206]. Для среднего числа Шервуда с точностью до членов первого порядка малости по Re было получено выражение

$$\frac{Sh}{Sh_0} = 1 + \frac{1}{8\pi} Re_M, \quad Re_M = \frac{\Pi U_i}{D}, \quad (4.4.21)$$

где Sh_0 — число Шервуда, соответствующее случаю неподвижной среды. Влияние движения жидкости характеризуется величиной модифицированного числа Пекле, в котором в качестве масштаба длины выступает фактор формы частицы Π .

Формула (4.4.21) обладает большой общностью и справедлива для твердых частиц, капель и пузырей произвольной формы, находящихся в однородном поступательном потоке при любых Re и $Re \rightarrow 0$. Она дает хорошую аппроксимацию для отношения чисел Шервуда при $Re_M < 5$. В частном случае сферической частицы формула (4.4.21) переходит в (4.4.19). Для частиц несферической формы в (4.4.21) следует подставлять значения фактора Π из табл. 4.2.

Первые три члена асимптотического разложения безразмерного интегрального диффузионного потока по малому числу Пекле для частицы любой формы в поступательном потоке имеют вид [206]

$$I = I_0 + \frac{1}{8\pi} Re I_0^2 + \frac{1}{8\pi} Pe^2 \ln Pe I_0^2 (\vec{f} \cdot \vec{e}) + O(Pe^2). \quad (4.4.22)$$

Здесь $I_0 = \Pi/a$ — интегральный поток на частицу в неподвижной жидкости; \vec{f} — безразмерный вектор, равный отношению силы сопротивления частицы к стоксовой силе сопротивления твердой сферы радиуса a (a — единый масштаб длины, с помощью которого введены безразмерные величины Re , I , I_0); \vec{e} — единичный направляющий вектор скорости жидкости на бесконечности. Переход к числу Шервуда осуществляется по формуле $Sh = I/S$, где S — безразмерная площадь поверхности частицы.

Для вычисления величины $I_0 = \Pi/a$ можно использовать результаты разд. 4.3.

В случае сферической капли радиуса a в выражении (4.4.22) следует положить

$$(\vec{f} \cdot \vec{e}) = \frac{2 + 3\beta}{3 + 3\beta}, \quad I_0 = 4\pi, \quad (4.4.23)$$

где β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю, а $\beta = \infty$ — твердой сфере).

Для сферической частицы, покрытой жидкой пленкой, имеем [60]

$$(\vec{f} \cdot \vec{e}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{\beta} \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\delta}{2 + \delta + 2\delta^2} \right) \right]^{-1}, \quad I_0 = 4\pi,$$

где δ — отношение радиусов частицы и пленки; значение $\delta = 1$ соответствует твердой частице, а $\delta = 0$ — капле.

Для эллипсоида вращения с полуосями a и b (a — экваториальный радиус), ось которого направлена вдоль потока, сила сопротивления определяется по формуле [178]

$$(\vec{f} \cdot \vec{e}) = \begin{cases} \frac{4}{3}(\chi^2 + 1)^{-1/2} [\chi - (\chi^2 - 1) \operatorname{arccctg} \chi]^{-1}, & a \geq b, \\ \frac{8}{3}(\chi^2 - 1)^{-1/2} [(\chi^2 + 1) \ln \frac{\chi+1}{\chi-1} - 2\chi]^{-1}, & a \leq b, \end{cases}$$

где $\chi = |(a/b)^2 - 1|^{-1/2}$.

Для тела вращения, ось которого составляет угол ω с направлением набегающего потока, в стоксовом приближении ($\operatorname{Re} \rightarrow 0$) справедлива зависимость [60]

$$(\vec{f} \cdot \vec{e}) = f_{\parallel} \cos^2 \omega + f_{\perp} \sin^2 \omega, \quad (4.4.24)$$

где f_{\parallel} и f_{\perp} — значения безразмерной силы сопротивления тела вращения в случае параллельного ($\omega = 0$) и перпендикулярного ($\omega = \pi/2$) расположения его оси в поступательном потоке.

В частности, для тонкого кругового диска в формуле (4.4.24) следует положить $f_{\parallel} = 8/(3\pi)$, $f_{\perp} = 16/(9\pi)$; для гантелевидной частицы, состоящей из соприкасающихся сфер равного радиуса, — $f_{\parallel} \approx 0,645$, $f_{\perp} \approx 0,716$ [178].

Наличие логарифмического члена резко ограничивает практическую ценность разложения (4.4.22); двухчленное выражение (4.4.21) обладает более широким диапазоном применимости по числу Пекле (хотя оно и менее точно при очень малых Re).

Цилиндрические тела. Массообмен кругового цилиндра радиуса a с однородным поступательным потоком, направленным перпендикулярно образующей цилиндра, при малых числах Пекле $\operatorname{Pe} = \operatorname{Sc} \operatorname{Re}$ и Рейнольдса $\operatorname{Re} = aU_i/\nu$ рассматривался в работах [237, 248]. Для среднего числа Шервуда (приходящегося на единицу длины цилиндра и определенного по его радиусу) были получены двухчленные разложения:

при $Re \rightarrow 0$, Sc — фиксировано:

$$\begin{aligned} Sh = \epsilon - \epsilon^3 q(Sc), \quad \epsilon = \frac{1}{2 \ln 2 - \ln(\gamma Sc Re)}, \\ q(0,72) = 1,38, \quad q(1) = 1,63, \quad q(6,82) = 3,42; \end{aligned} \quad (4.4.25a)$$

при $Re \rightarrow 0$, $Sc = Re^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} Sh = \delta - \delta^3 p(\alpha); \\ \delta = \frac{1}{2 \ln 2 - \ln[\gamma(1 - \alpha) Sc Re]}, \\ p(\alpha) = \frac{3 - \alpha}{2} + \ln(1 - \alpha) + \alpha \ln \frac{\gamma}{4}, \end{aligned} \quad (4.4.25b)$$

где $\ln \gamma$ — постоянная Эйлера. Погрешность обоих выражений (4.4.25) при $Re \rightarrow 0$ имеет порядок $(\ln Re)^{-4}$.

Отличие экспериментальных данных по теплообмену цилиндра с воздушным потоком ($Sc = 0,72$) и результатов расчета по первой формуле (4.4.25a) составляет менее 3% при $Re < 0,2$ [237].

Исследуем массообмен цилиндрических тел произвольной формы, поперечно обтекаемых однородным поступательным потоком вязкой жидкости при малых числах Пекле. Для получения главного члена разложения при $Re \rightarrow 0$ поступим следующим образом. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$Re(\vec{w} \cdot \nabla)c = \Delta c \quad (4.4.26)$$

с граничными условиями (4.3.2), (4.3.3). Векторное поле \vec{w} в (4.4.26) не зависит от числа Пекле и связано с истинным распределением скоростей жидкости \vec{v} только одним предельным соотношением

$$\vec{e} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \vec{v} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \vec{w}. \quad (4.4.27)$$

Запишем уравнение (4.4.26) в приближении Озеена:

$$Re(\vec{e} \cdot \nabla)c = \Delta c. \quad (4.4.28)$$

Для любого \vec{w} , удовлетворяющего условию (4.4.27), главные члены асимптотических разложений во внутренней и внешней области для уравнений (4.4.26) и (4.4.28) с одинаковыми граничными условиями совпадают. Поэтому в уравнении диффузии при $Re \rightarrow 0$ истинное поле скоростей жидкости \vec{v} можно заменить на \vec{w} . Указанное обстоятельство позволяет воспользоваться результатами, изложенными далее в разд. 4.11. А именно, в качестве \vec{w} возьмем поле скоростей для потенциального обтекания цилиндра идеальной жидкостью.

Такая аппроксимация приводит к погрешности во внутреннем разложении порядка Pe . Оставляя главные члены в формуле (4.11.15), для безразмерного интегрального диффузионного потока при малых числах Пекле получим

$$I = -4\pi \left[\ln \left(\frac{\gamma \overline{Pe}}{8} \right) \right]^{-1}, \quad \overline{Pe} = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2D}, \quad (4.4.29)$$

где φ_{\max} и φ_{\min} — максимальное и минимальное значения потенциала на поверхности цилиндра (эти значения для некоторых цилиндрических тел различной формы можно найти, например, в [36, 97, 166]; $\ln \gamma$ — постоянная Эйлера.

Для эллиптического цилиндра с полуосями a и b ($a \geq b$) независимо от его ориентации в потоке имеем (см. разд. 4.11)

$$I \approx 4\pi \left[-\ln Pe + \ln \frac{8a}{\gamma(a+b)} \right]^{-1}, \quad Pe = \frac{aU_i}{D}. \quad (4.4.30)$$

Для кругового цилиндра в формуле (4.4.30) следует положить $a = b$.

4.5. Массоперенос в линейном сдвиговом потоке при малых числах Пекле

Массоперенос к частице в поступательном потоке, рассмотренный в разд. 4.4, хорошо моделирует многие реальные процессы в дисперсных системах, когда основную роль в конвективном переносе играет скорость поступательного движения частиц относительно жидкости, а градиенты невозмущенного поля скоростей несущественны.

В разд. 1.1 дано краткое описание полей скоростей для некоторых случаев градиентных течений с неоднородной структурой. Для частиц, размеры которых много меньше пространственного масштаба неоднородности поля течения, распределение скоростей (1.1.7) при решении задач о массопереносе к частице в линейном сдвиговом потоке может рассматриваться как распределение скоростей вдали от частицы.

Массообмен сферической частицы с линейным сдвиговым потоком. На практике встречаются ситуации, когда частицы полностью увлекаются потоком и определяющим становится конвективный перенос, обусловленный сдвиговым течением жидкости. При исследовании соответствующих диффузионных процессов удобно связать систему координат с центром тяжести частицы таким образом, чтобы эта система двигалась со скоростью частицы поступательно, а сама

ТАБЛИЦА 4.3

Численные значения коэффициента α и величины G для некоторых сдвиговых течений (по данным [196, 230])

№	Название течения	Коэффициенты G_{km}	α	G
1	Простой сдвиг	$G_{12} \neq 0,$ остальные $G_{km} = 0$	0,257	$ G_{12} $
2	Осесимметричный сдвиг	$G_{11} = G_{22} = -\frac{1}{2}G_{33},$ $G_{km} = 0$ при $i \neq j$	0,399	$ G_{33} $
3	Плоский сдвиг	$G_{11} = -G_{22},$ остальные $G_{km} = 0$	0,428	$ G_{11} $
4	Произвольное линейное деформационное течение	$G_{km} = G_{mk}$	0,36	$(G_{km}G_{km})^{1/2},$ по обоим индексам ведется суммирование

частица могла свободно вращаться вокруг начала координат. Для линейного сдвигового потока компоненты скорости жидкости вдали от сферы имеют вид:

$$R \rightarrow \infty, \quad V_k \rightarrow G_{km} X_m, \quad (4.5.1)$$

где G_{km} — компоненты матрицы сдвига.

Для сферической частицы, обтекаемой произвольным линейным сдвиговым потоком (4.5.1), первые четыре члена асимптотического разложения среднего числа Шервуда по малому числу Пекле имеют вид [189]

$$Sh = 1 + \alpha Pe^{1/2} + \alpha^2 Pe + \alpha^3 Pe^{3/2} + O(Pe^2), \quad Pe = \frac{a^2 G}{D}. \quad (4.5.2)$$

Здесь параметр $\alpha = \alpha(G_{km})$ зависит от типа сдвигового течения и вычисляется с помощью несобственного интеграла [60, 196].

Отметим, что первые два члена разложения (4.5.2) первоначально были получены в [196].

Величина параметра α не меняется при одновременном изменении знаков всех элементов матрицы сдвига на обратные, т.е. $\alpha(G_{km}) = \alpha(-G_{km})$.

Для некоторых типов сдвиговых течений, представляющих практический интерес, численные значения коэффициента α и величины G в формуле (4.5.2) указаны в табл. 4.3. Сумму в третьем столбце последней строки таблицы можно вычислить по формуле $G_{km}G_{km} = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$, где E_1, E_2, E_3 — диагональные элементы приведенного к главным осям симметричного тензора $\|G_{km}\|$.

В [60, 210] приведены результаты расчета коэффициента α для плоского сдвигового течения вида

$$G_{12} = G, \quad G_{21} = \omega G; \quad \text{остальные } G_{km} = 0 \quad (4.5.3)$$

для $-1 \leq \omega \leq 1$. Коэффициент $\alpha = \alpha(\omega)$ монотонно возрастает от $\alpha = 0$ при $\omega = -1$ (чисто вращательное движение) до максимального значения $\alpha = 0,428$ при $\omega = 1$ (чисто деформационное течение). При слабых деформациях потока, что соответствует $\omega \rightarrow -1$, имеем $\alpha \approx \frac{1}{15}(1 + \omega)^2$.

Массообмен частицы произвольной формы с линейным сдвиговым потоком. В работе [189] исследовался массообмен частицы произвольной формы, свободно взвешенной в линейном сдвиговом потоке (4.5.1). Для безразмерного интегрального диффузионного потока на поверхность частицы было получено трехчленное разложение по малому числу Пекле:

$$I = I_0 + \frac{\alpha}{4\pi} I_0^2 \text{Pe}^{1/2} + \frac{\alpha^2}{(4\pi)^2} I_0^3 \text{Pe} + O(\text{Pe}^{3/2}). \quad (4.5.4)$$

Здесь I_0 — интегральный поток на частицу в неподвижной жидкости; $\text{Pe} = a^2 G/D$, a — величина, выбранная за единый масштаб длины (с помощью a обезразмерены также I и I_0); значения параметров G и $\alpha = \alpha(G_{ij})$ для некоторых типов сдвиговых течений указаны в табл. 4.3.

Для сферической частицы радиуса a справедливо равенство $I = 4\pi \text{Sh}$, и разложение (4.5.4) с точностью до членов порядка Pe включительно переходит в (4.5.2). В случае частиц несферической формы для вычисления $I_0 = \Pi/a$ можно воспользоваться результатами разд. 4.3 (см., например, табл. 4.2).

Диффузия к цилиндру в простом сдвиговом потоке. Массообмен кругового цилиндра радиуса a в простом сдвиговом потоке ($G_{12} = \pm 1$, остальные $G_{km} = 0$) исследовался в работе [230]. Для безразмерного интегрального диффузионного потока, приходящегося на единицу длины цилиндра, при $\text{Pe} \rightarrow 0$ было получено выражение:

$$I \approx \frac{4\pi}{2,744 - \ln \text{Pe}}, \quad \text{Pe} = \frac{a^2 |G_{12}|}{D}. \quad (4.5.5)$$

Переход к числу Шервуда (определенному по радиусу) осуществляется по формуле $I = 2\pi \text{Sh}$.

4.6. Массообмен частиц и капель с потоком при больших числах Пекле (теория диффузионного пограничного слоя)

Сферическая частица в поступательном потоке. Следуя [100], рассмотрим сначала стационарную диффузию к поверхности твердой сферической частицы, обтекаемой поступательным стоксовым потоком ($Re \rightarrow 0$) при больших числах Пекле. В безразмерных переменных математическая формулировка соответствующей задачи для распределения концентрации описывается уравнением (4.4.3) с граничными условиями (4.4.4), (4.4.5), где функция тока определяется формулой (4.4.2).

По мере увеличения числа Re вблизи поверхности сферы формируется диффузионный пограничный слой, относительная (отнесенная к радиусу частицы) толщина которого имеет порядок $Re^{-1/3}$. В этой области существенную роль играет радиальная составляющая молекулярной диффузии вещества к поверхности частицы, в то время как тангенциальной диффузией можно пренебречь. Необходимо учитывать также конвективный массоперенос, обусловленный движением жидкости.

Считая $\varepsilon = Re^{-1/3}$ малым параметром, введем в области диффузионного пограничного слоя растянутую координату y по формуле $r = 1 + \varepsilon y$. Подставляя ее в (4.2.2) и (4.4.3), после выделения главных членов разложения по ε получим

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right), \quad (4.6.1)$$

где $\Psi = \frac{3}{4} y^2 \sin^2 \theta$.

Переходя далее от θ , y к переменным Мизеса θ , Ψ , имеем

$$-\frac{\partial c}{\partial \theta} = \sqrt{3} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \Psi} \sqrt{\Psi} \frac{\partial c}{\partial \Psi}. \quad (4.6.2)$$

Преобразование

$$\begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\Psi} = \frac{\sqrt{3}}{2} Pe^{1/3} (r-1) \sin \theta, \\ \tau &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\theta}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{3}}{8} (\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

приводит уравнение (4.6.2) к следующему виду:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \zeta^{-1} \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2}. \quad (4.6.4)$$

Граничные условия (4.4.3), (4.4.4) в переменных (4.6.3) записываются так:

$$\tau = 0, \quad c = 0; \quad \zeta = 0, \quad c = 1; \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0. \quad (4.6.5)$$

Решение задачи (4.6.4), (4.6.5) выражается через неполную гамма-функцию:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\Gamma(1/3)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\zeta^3}{9\tau}\right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/3)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\text{Pe}}{3} \frac{(r-1)^3 \sin^3 \theta}{\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta}\right). \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Дифференцируя это выражение, получим локальный диффузионный поток на поверхность сферы:

$$j = -\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=1} = 0,766 \sin \theta \left(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^{-1/3} \text{Pe}^{1/3}. \quad (4.6.7)$$

Видно, что локальный диффузионный поток принимает максимальное значение в передней критической точке поверхности сферы (при $\theta = \pi$) и монотонно уменьшается при уменьшении угловой координаты, принимая минимальное значение, равное нулю, при $\theta = 0$.

Соответствующее среднее число Шервуда равно [100]

$$\text{Sh} = 0,625 \text{Pe}^{1/3}. \quad (4.6.8)$$

Эта зависимость была уточнена в работе [190], где для числа Шервуда было найдено двухчленное разложение

$$\text{Sh} = 0,625 \text{Pe}^{1/3} + 0,461. \quad (4.6.9)$$

Формулу (4.6.9) можно использовать для практических расчетов при $\text{Pe} \geq 10$.

Капля (пузырь). Рассмотрим теперь внешнюю задачу о массообмене сферической капли (пузыря) радиуса a в поступательном стоксовом потоке при лимитирующем сопротивлении сплошной фазы.

Процесс конвективной диффузии к границе раздела жидкость-жидкость (жидкость-газ) существенно отличается от диффузии к границе раздела жидкость-твердое тело. Это связано с различием гидродинамических условий на поверхностях раздела фаз. Непосредственно на поверхности твердого тела в силу условия прилипания скорость движения жидкости всегда равна нулю. Напротив, граница раздела двух жидких сред сохраняет свою подвижность, и касательная

составляющая скорости жидкости на межфазной поверхности отличается от нуля.

Конвективный перенос вещества движущейся жидкостью к границе раздела жидкость–твердое тело происходит в условиях некоторой заторможенности потока, так что скорость переноса вещества у поверхности значительно ниже, чем в объеме раствора. Напротив, диффузия к границе жидкость–жидкость (жидкость–газ) происходит в более благоприятных условиях незаторможенного потока. По этой причине конвективная диффузия вещества к границе раздела двух жидкостей происходит значительно интенсивнее, чем к границе жидкость–твердое тело.

Математическая формулировка задачи о распределении концентрации вне капли описывается уравнением (4.4.3) и граничными условиями (4.4.4), (4.4.5), где безразмерная функция тока задается решением Адамара — Рыбчинского (см. разд. 2.2)

$$\psi = \frac{1}{2} (r - 1) \left[r - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta + 1} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right] \sin^2 \theta, \quad (4.6.10)$$

где β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости. Соответствующая размерная функция тока получается с помощью умножения (4.6.10) на величину $a^2 U_i$. В задаче о диффузии к капле, падающей в неподвижной жидкости, в качестве характерной скорости выбирается

$$U_i = \frac{2(\rho - \rho_i)ga^2}{3\mu_i} \frac{\beta + 1}{3\beta + 1},$$

где ρ_i и ρ — плотность жидкости вне и внутри капли, g — ускорение силы тяжести, μ_i — динамическая вязкость жидкости вне капли.

Считая $\varepsilon = Re^{-1/2}$ малым параметром, перейдем в уравнении (4.4.3) и формуле (4.6.10) от радиальной координаты r к растянутой переменной $\xi = \varepsilon^{-1}(r - 1)$. После выделения главных членов разложения по параметру ε получим уравнение (4.6.1), где

$$\Psi = \frac{1}{2(\beta + 1)} \xi \sin^2 \theta. \quad (4.6.11)$$

Выражая в (4.6.1) ξ через Ψ с помощью (4.6.11), имеем

$$-\frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{\sin^3 \theta}{2(\beta + 1)} \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2}. \quad (4.6.12)$$

Делая замену

$$\tau = \frac{1}{2(\beta + 1)} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{2(\beta + 1)} \left(\frac{2}{3} + \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right), \quad (4.6.13)$$

сводим (4.6.12) к стандартному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2}. \quad (4.6.14)$$

Граничные условия (4.4.4), (4.4.5) в переменных (4.6.11), (4.6.13) записываются в виде (4.6.5), где ζ следует заменить на Ψ . Соответствующее решение уравнения (4.6.14) выражается через дополнительный интеграл вероятностей

$$c = \operatorname{erfc} \left(\frac{\Psi}{2\sqrt{\tau}} \right) = \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6\operatorname{Pe}}{\beta+1}} (r-1) \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}} \right). \quad (4.6.15)$$

Вычислим локальный диффузионный поток на поверхность капли

$$j = - \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=1} = \sqrt{\frac{3\operatorname{Pe}}{\pi(\beta+1)}} \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}}. \quad (4.6.16)$$

Среднее число Шервуда определяется формулой [100]

$$\operatorname{Sh} = \sqrt{\frac{2\operatorname{Pe}}{3\pi(\beta+1)}} = 0,461 \left(\frac{\operatorname{Pe}}{\beta+1} \right)^{1/2}. \quad (4.6.17)$$

В [60] было получено двухчленное разложение числа Шервуда по параметру $\varepsilon = \operatorname{Pe}^{-1/2}$:

$$\operatorname{Sh} = 0,461 \left(\frac{\operatorname{Pe}}{\beta+1} \right)^{1/2} + 0,41 \left(\frac{3}{4} \beta + 1 \right), \quad (4.6.18)$$

которое уточняет зависимость (4.6.17).

Формулу (4.6.18) можно использовать для практических расчетов при $\operatorname{Pe} \geq 100$ для $0 \leq \beta \leq 0,82 \operatorname{Pe}^{1/3} - 1$ (это следует из сопоставления с результатами численного решения [72]). Значение $\beta = 0$ в (4.6.17), (4.6.18) соответствует газовому пузырю.

Общие формулы для расчета интегральных диффузионных потоков в теории диффузионного пограничного слоя. Аналогично случаю сферических капель и твердых частиц в поступательном потоке можно рассмотреть более общую задачу о стационарном массообмене капель (пузырей) и частиц несферической формы, обтекаемых произвольным заданным ламинарным течением несжимаемой жидкости. Не вдаваясь в детали, приведем здесь некоторые итоговые формулы для расчета безразмерных интегральных диффузионных потоков, соответствующих асимптотическим решениям плоских и осесимметричных задач конвективного массопереноса (4.4.1), (4.3.2) при больших числах Пекле.

Используем локальную ортогональную криволинейную систему безразмерных координат ξ, η, φ , где η направлена вдоль, а ξ — по нормали к поверхности частицы. В осесимметричном случае азимутальная координата φ меняется в пределах от 0 до 2π ; в плоском случае принимается, что $0 \leq \varphi \leq 1$. Считаем, что в потоке отсутствуют замкнутые линии тока, а поверхность частицы задается постоянным значением $\xi = \xi_s$. Безразмерные компоненты скорости жидкости можно выразить следующим образом через безразмерную функцию тока ψ :

$$v_y = - \left(\frac{g_{\xi\xi}}{g} \right)^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = \left(\frac{g_{\eta\eta}}{g} \right)^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (4.6.19)$$

где $g_{\xi\xi}, g_{\eta\eta}, g_{\varphi\varphi}$ — компоненты метрического тензора, $g = g_{\xi\xi}g_{\eta\eta}g_{\varphi\varphi}$; в плоском случае $g_{\varphi\varphi} = 1$.

При вязком обтекании на поверхности твердой (жидкой) частицы должно выполняться условие прилипания (непротекания), поэтому функцию тока вблизи межфазной поверхности можно представить в виде

$$\psi \rightarrow (\xi - \xi_s)^m f(\eta) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \xi_s. \quad (4.6.20)$$

При обтекании капель (пузырей) вязкой жидкостью и частиц идеальной жидкостью $m = 1$. При ламинарном вязком обтекании гладких твердых частиц параметр m обычно равен двум; существует также несколько примеров обтекания, когда $m = 3$ [60]. Сказанное означает, что тангенциальная компонента скорости v_η (4.6.19) в диффузионном пограничном слое у поверхности капли в главном приближении имеет постоянное значение, равное скорости жидкости на межфазной поверхности, в то время как в диффузионном пограничном слое у поверхности твердой частицы тангенциальная скорость в главном приближении зависит линейно (а иногда квадратично) от расстояния до поверхности, обращаясь в нуль на поверхности частицы.

Рассмотрим подробнее геометрию течения вблизи капли или твердой частицы. Координаты критических точек и линий на межфазной поверхности η_k определяются путем решения уравнения

$$f(\eta_k) = 0. \quad (4.6.21)$$

В случае критических линий координатные поверхности $\eta = \eta_k$ разделяют области, в которых главный член разложения функции тока (4.6.20) сохраняет знак. Критические точки и линии играют важную роль в теории диффузионного пограничного слоя. Они могут быть двух типов: в их малой окрестности нормальная компонента скорости жидкости направлена либо к межфазной поверхности (это точки и линии «натекания»), либо от нее (это точки и линии «стекания»). На

Рис. 4.2. а) Схема течения вблизи поверхности частицы в окрестности критических точек или линий натекания (с координатой η_k) и стекания (с координатой η_{k+1}); стрелки показывают направление вектора скорости жидкости. б) Распределение тангенциальной компоненты скорости жидкости вблизи критических точек или линий на поверхности тела

рис. 4.2 линии натекания определяются значением η_k , а линии стекания — значением η_{k+1} . В силу закона сохранения массы тангенциальная компонента скорости жидкости вблизи межфазной поверхности в окрестности точки или линии натекания (стекания) направлена от этой точки или линии (соответственно к ней), а сами точки или линии натекания и стекания должны чередоваться. В окрестности точки (линии) натекания происходит зарождение диффузионного пограничного слоя, толщина которого здесь минимальна. В окрестности точки (линии) стекания толщина диффузионного пограничного слоя резко возрастает.

Отметим, что в осесимметричных задачах на межфазной поверхности всегда имеются две изолированные критические точки (на оси симметрии).

Безразмерный интегральный диффузионный поток на часть поверхности частицы (капли, пузыря) между соседними критическими линиями (точками) η_k и η_{k+1} вычисляется по формуле [145]

$$I(k, k+1) = \frac{\Lambda(m+1) \frac{2m}{m+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right)} [F(k, k+1)]^{\frac{m}{m+1}} \text{Re} \frac{1}{m+1}, \quad (4.6.22)$$

где

$$F(k, k+1) = \frac{1}{m} \left| \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \frac{\sqrt{g^s}}{g_{\xi\xi}^s} |f(\eta)| \frac{1}{m} d\eta \right|, \quad (4.6.23)$$

$$\Lambda = \begin{cases} 2\pi & \text{в осесимметричном случае,} \\ 1 & \text{в плоском случае.} \end{cases}$$

В выражении (4.6.23) верхний индекс «s» отвечает величинам, взятым на межфазной поверхности при $\xi = \xi_s$. При записи постоянной Λ было учтено, что в плоском случае интегральный диффузионный поток принято определять на единицу длины цилиндра ($0 \leq \varphi \leq 1$). Значение $m = 1$ соответствует каплям и пузырям, а $m = 2$ — твердым частицам в вязкой жидкости.

При исследовании конкретных осесимметричных и плоских задач полезно иметь выражения для функции $F(k, k+1)$ в сферической и цилиндрической системах координат.

Пусть в сферической (или цилиндрической) системе координат форма поверхности частицы (капли, пузыря) описывается уравнением $r = R(\theta)$, где r — безразмерная (отнесенная к характерному масштабу длины) радиальная координата, а θ — угловая координата. Тогда поле скоростей вблизи межфазной поверхности определяется безразмерной функцией тока $\psi = [r - R(\theta)]^m f(\theta)$, а переменная $F(k, k+1)$ в (4.6.22) вычисляется по формулам [60]:

в осесимметричном случае $0 \leq \theta \leq \pi$ и

$$F(k, k+1) = \frac{1}{m} \left| \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \sin \theta \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right] |f(\theta)| \frac{1}{m} d\theta \right|; \quad (4.6.24)$$

в плоском случае $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и

$$F(k, k+1) = \frac{1}{m} \left| \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} R \left[1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right] |f(\theta)| \frac{1}{m} d\theta \right|. \quad (4.6.25)$$

Здесь θ_k и θ_{k+1} — угловые координаты критических линий (точек) на межфазной поверхности; считается, что в промежуточной области $\theta_k < \theta < \theta_{k+1}$ отсутствуют критические линии и точки.

Отметим, что для осесимметричного линейного сдвигового потока на поверхности сферической частицы (капли, пузыря) имеются две изолированные критические точки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а также критическая линия $\theta = \pi/2$.

Для определения полного безразмерного диффузионного потока I_Σ сначала следует найти координаты всех критических линий и точек на поверхности частицы (капли, пузыря) $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_k < \eta_{k+1} < \dots < \eta_M$; затем по любой из формул (4.6.23) — (4.6.25) рас-

считать потоки (4.6.22) на части поверхности между соседними критическими линиями (точками), а затем вычислить сумму

$$I_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{M-1} I(k, k+1). \quad (4.6.26)$$

Среднее число Шервуда получается путем деления выражения (4.6.26) на безразмерную площадь поверхности частицы (капли, пузыря).

В работах [137, 138] был предложен метод решения трехмерных задач диффузионного пограничного слоя, основанный на использовании трехмерного аналога функции тока. Этот метод применялся в [60, 141, 196] для исследования массообмена сферических частиц, капель и пузырей с трехмерным сдвиговым потоком.

4.7. Диффузия к сферической частице, капле и пузырю в поступательном потоке при различных числах Пекле и Рейнольдса

В этом разделе приводятся интерполяционные формулы (см. [142, 143]) для расчета средних чисел Шервуда в случае сферических частиц, капель и пузырей радиуса a , обтекаемых однородным поступательным потоком со скоростью U_i при различных числах $Pe = aU_i/D$ и Рейнольдса $Re = aU_i/\nu$. Для среднего числа Шервуда в случае газового пузыря будем использовать обозначение Sh_b , а в случае твердой сферы Sh_p .

Сферическая частица при $Re \rightarrow 0$, $0 \leq Pe \leq \infty$. Задача о массообмене твердой сферической частицы с поступательным стоксовым потоком ($Re \rightarrow 0$) во всем диапазоне чисел Пекле исследовалась с помощью конечно-разностных численных методов в работах [1, 204, 257]. Для определения среднего числа Шервуда на сферическую частицу удобно использовать приближенную зависимость [219]

$$Sh_p = 0,5 + (0,125 + 0,243 Pe)^{1/3}. \quad (4.7.1)$$

Интерполяционная формула (4.7.1) приводит к точным асимптотическим результатам в обоих предельных случаях при $Pe \rightarrow 0$ и $Pe \rightarrow \infty$. Максимальное отличие (4.7.1) от данных [1, 204, 257] во всем диапазоне изменения числа Пекле составляет около 2%.

Сферический пузырь при $Re \rightarrow 0$, $0 \leq Pe \leq \infty$. Задача о массообмене сферического пузыря с поступательным потоком при

$Re \rightarrow 0$ исследовалась численно в [267]. Полученные результаты для среднего числа Шервуда хорошо аппроксимируются выражением

$$Sh_b = 0,6 + (0,16 + 0,213 Re)^{1/2}, \quad (4.7.2)$$

максимальная погрешность которого составляет 3%.

Сферическая капля при $Re \rightarrow 0$, $0 \leq Re \leq \infty$. На интервале $0 \leq Re \leq 200$ результаты численных расчетов среднего числа Шервуда для сферической капли в поступательном потоке при лимитирующем сопротивлении дисперсной фазы хорошо описываются приближенной зависимостью [28]

$$Sh = \frac{1}{\beta + 1} Sh_b + \frac{\beta}{\beta + 1} Sh_p, \quad (4.7.3)$$

где β — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю, а $\beta = \infty$ — твердой сфере); Sh_b и Sh_p — числа Шервуда для пузыря и твердой частицы, которые можно вычислять по формулам (4.7.2) и (4.7.1) соответственно.

Важно отметить, что выражение (4.7.3) для любых β дает правильные три члена асимптотического разложения Sh при $Re \rightarrow 0$ [72].

На интервале $200 \leq Re < \infty$ среднее число Шервуда для капли при любых значениях вязкостей фаз можно вычислять путем решения кубического уравнения

$$Sh^3 - 0,212 \frac{Pe}{\beta + 1} Sh - (0,624)^3 Pe = 0. \quad (4.7.4)$$

Сферическая частица при различных числах Рейнольдса. Имеющиеся численные результаты (см., например, [227, 257]) по среднему числу Шервуда в случае сферической частицы в поступательном потоке при $0,5 \leq Re \leq 200$, $0,125 \leq Sc \leq 50$ согласно [219] могут быть описаны приближенной зависимостью

$$Sh_p = 0,5 + 0,527 Re^{0,077} (1 + 2 Re Sc)^{1/3}, \quad (4.7.5)$$

погрешность которой составляет около 3%.

Обработка имеющихся экспериментальных данных по тепло- и массообмену твердых сфер с поступательным потоком приводит к следующим корреляциям [219]:

теплообмен с воздухом при $Pr = 0,7$:

$$\begin{aligned} Nu_p &= 0,5 + 0,47 Re^{0,47} && \text{при } 50 \leq Re \leq 2 \cdot 10^3, \\ Nu_p &= 0,5 + 0,2 Re^{0,58} && \text{при } 2 \cdot 10^3 \leq Re \leq 5 \cdot 10^4; \end{aligned}$$

массообмен с жидкостями при больших числах Шмидта ($Sc > 100$):

$$\begin{aligned} Sh_p &= 0,5 + 0,5 Re^{0,48} Sc^{1/3} && \text{при } 50 \leq Re \leq 10^3, \\ Sh_p &= 0,5 + 0,31 Re^{0,55} Sc^{1/3} && \text{при } 10^3 \leq Re \leq 5 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Экспериментальные данные при $0,5 < Re < 50$ хорошо описываются выражением (4.7.5).

Сферический пузырь при любых числах Пекле и $Re \geq 35$.

Для сферического пузыря в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса и больших числах Пекле среднее число Шервуда можно вычислять по формуле [219]

$$Sh_b = \left(\frac{2}{\pi} Pe \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{Re}} \right)^{1/2}, \quad (4.7.6)$$

погрешность которой составляет менее 7% при $Re \geq 35$.

При $0 \leq Pe < \infty$, $Re \geq 35$ для расчета среднего числа Шервуда на сферический пузырь можно использовать приближенную зависимость

$$Sh_b = 0,6 + \left[0,16 + 0,637 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{Re}} \right) Pe \right]^{1/2}, \quad (4.7.7)$$

которая обеспечивает точный результат при $Pe = 0$ и переходит в (4.7.6) при $Pe \rightarrow \infty$. При $Re = \infty$ погрешность формулы (4.7.7) составляет около 3% [280].

Сферическая капля при больших числах Пекле и $Re \geq 35$.

При больших числах Re распределение скоростей жидкости в пограничном слое вблизи поверхности капли было получено в работе [235]. Эти результаты были использованы в [316], где исследовался массообмен сферической капли в поступательном потоке при больших числах Пекле. Полученные данные для среднего числа Шервуда хорошо аппроксимируются зависимостью [219]

$$Sh = \left(\frac{2}{\pi} Pe \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2 + 1,49 \beta^{0,64}}{\sqrt{Re}} \right)^{1/2}, \quad (4.7.8)$$

которая переходит в (4.7.6) при $\beta = 0$. Формулу (4.7.8) можно применять при $0 \leq \beta \leq 2$ и $Re \geq 35$.

Общие корреляции для числа Шервуда при ламинарном обтекании сферических частиц, капель и пузырей течениями различного типа. Используя метод асимптотических аналогий, выведем формулу для расчета числа Шервуда в случае ламинарного

обтекания сферической частицы при произвольной структуре невозмущенного течения на бесконечности. Считаем, что в потоке отсутствуют замкнутые линии тока.

В качестве исходной формулы будем использовать приближенную зависимость (4.7.1). Преобразуем (4.7.1) следуя процедуре, описанной в разд. 4.1. Для этого учтем, что асимптотики Sh_p при малых и больших Re имеют вид

$$Sh_{p0} = 1 \quad (Re \rightarrow 0); \quad Sh_{p\infty} = 0,624 Re^{1/3} \quad (Re \rightarrow \infty).$$

Эти формулы с точностью до очевидных переобозначений ($w \Rightarrow Sh_p$, $\tau \Rightarrow Re$) совпадают с (4.1.2), (4.1.3) при $A = 1$, $B = 0,624$, $k = 0$, $m = \frac{1}{3}$. Подставим эти значения в выражение (4.1.5), где функция F определяется из (4.7.1). Учитывая, что для частиц сферической формы выполняется равенство $Sh_{p0} = 1$, в итоге получим [72]:

$$Sh_p = 0,5 + (0,125 + Sh_{p\infty}^3)^{1/3} \quad (\text{твердая частица}). \quad (4.7.9)$$

Формулу (4.7.9) можно использовать для расчета среднего числа Шервуда в случае ламинарного обтекания твердой сферической частицы течениями различного типа, в которых нет замкнутых линий тока. При этом в качестве вспомогательной величины $Sh_{p\infty}$ следует выбирать главный член асимптотического разложения числа Шервуда при больших числах Пекле.

Аналогичным образом для произвольного обтекания сферического пузыря можно вывести приближенную зависимость

$$Sh_b = 0,6 + (0,16 + Sh_{b\infty}^2)^{1/2} \quad (\text{пузырь}), \quad (4.7.10)$$

где $Sh_{b\infty}$ — асимптотика среднего числа Шервуда при $Re \rightarrow \infty$, которая вычисляется путем решения уравнения диффузионного пограничного слоя при заданном поле течения.

Формулы (4.7.9) и (4.7.10) после подстановки в них величин $Sh_{p\infty}$ и $Sh_{b\infty}$ можно использовать для расчета чисел Шервуда во всем диапазоне изменения числа Пекле. Отметим, что зависимость (4.7.7) была выведена с помощью (4.7.10), куда в качестве асимптотики $Sh_{b\infty}$ была подставлена правая часть выражения (4.7.6). Другие конкретные примеры применения формул (4.7.9) и (4.7.10) будут приведены в разд. 4.8.

При малых и умеренных числах Пекле в случае произвольного ламинарного обтекания сферической капли при лимитирующем сопротивлении сплошной фазы для расчета среднего числа Шервуда целесообразно использовать зависимость (4.7.3), где Sh_p и Sh_b — числа Шервуда для предельных случаев твердой частицы и пузыря, которые можно вычислять по формулам (4.7.9) и (4.7.10).

При больших числах Пекле среднее число Шервуда для сферической капли во всем диапазоне изменения вязкостей фаз можно вычислять путем решения кубического уравнения [72]

$$\text{Sh}^3 - \text{Sh}_\beta^2 \text{Sh} - \text{Sh}_{p\infty}^3 = 0 \quad (\text{капля}), \quad (4.7.11)$$

где Sh_β — асимптотическое значение среднего числа Шервуда, полученное в приближении диффузионного пограничного слоя для капли умеренной вязкости $\beta = O(1)$ при $\text{Pe} \rightarrow \infty$, $\text{Sh}_{p\infty}$ — соответствующая асимптотика для твердой частицы ($\beta = \infty$) при $\text{Pe} \rightarrow \infty$.

В стоксовом потоке ($\text{Re} \rightarrow 0$) для расчета Sh_β можно использовать приближенную формулу

$$\text{Sh}_\beta = \frac{\text{Sh}_{b\infty}}{\sqrt{\beta + 1}}, \quad (4.7.12)$$

где $\text{Sh}_{b\infty}$ — асимптотика числа Шервуда для газового пузыря ($\beta = 0$) при $\text{Pe} \rightarrow \infty$. Для поступательного и произвольного деформационного обтекания сферической капли стоксовым потоком зависимость (4.7.12) является точной.

В частном случае сферической капли, обтекаемой поступательным стоксовым потоком, уравнение (4.7.11) переходит в (4.7.4).

4.8. Диффузия к сферической частице, капле и пузырю в линейном сдвиговом потоке при малых числах Рейнольдса и любых числах Пекле

Считаем, что распределение скоростей жидкости вдали от межфазной поверхности определяется формулой (4.5.1). Среднее число Шервуда для частицы, капли и пузыря сферической формы не меняется, если одновременно изменить знаки всех коэффициентов сдвига $\text{Sh}(G_{km}) = \text{Sh}(-G_{km})$.

Линейный деформационный сдвиговый поток. Приближение диффузионного пограничного слоя. Решение гидродинамических задач об обтекании твердой частицы, капли и пузыря произвольным деформационным линейным сдвиговым потоком ($G_{km} = G_{mk}$) в стоксовом приближении (при $\text{Re} \rightarrow 0$) приведены в разд. 2.4. Соответствующие задачи конвективного массопереноса при больших числах Пекле в приближении диффузионного пограничного

ТАБЛИЦА 4.4

Среднее число Шервуда для сферических твердых частиц, капель и пузырей в линейном деформационном сдвиговом потоке ($G_{km} = 0$ при $k \neq m$) при малых числах Рейнольдса и больших числах Пекле

Тип частицы	Название течения	Коэффициенты G_{kk}	Число Шервуда Sh	Число Пекле Pe	Литература
Твердая частица	Осесимметричный сдвиг	$G_{11} = G_{22},$ $G_{33} = -2G_{11}$	$0,968 Pe^{1/3}$	$\frac{a^2 G_{33} }{D}$	[58]
Капля, пузырь	Осесимметричный сдвиг	$G_{11} = G_{22},$ $G_{33} = -2G_{11}$	$\left(\frac{3}{2\pi} \frac{Pe}{\beta + 1} \right)^{1/2}$	$\frac{a^2 G_{33} }{D}$	[58]
Твердая частица	Плоский сдвиг	$G_{11} = -G_{22},$ $G_{33} = 0$	$1,01 Pe^{1/3}$	$\frac{a^2 G_{11} }{D}$	[196]
Капля, пузырь	Плоский сдвиг	$G_{11} = -G_{22},$ $G_{33} = 0$	$0,731 \left(\frac{Pe}{\beta + 1} \right)^{1/2}$	$\frac{a^2 G_{11} }{D}$	[141]

слюя рассматривались в [58, 141, 196]. В табл. 4.4 указаны полученные в этих работах результаты расчета средних чисел Шервуда.

В случае твердой сферической частицы, обтекаемой произвольным линейным деформационным сдвиговым потоком, была предложена интерполяционная формула для среднего числа Шервуда [196]

$$Sh = 0,9 Pe_M^{1/3}, \quad (4.8.1)$$

где модифицированное число Пекле Pe_M определено с помощью второго инварианта тензора сдвига J_2 следующим образом:

$$Pe_M = \frac{a^2 J_2}{D}, \quad \text{где } J_2 = (G_{km} G_{km})^{1/2}. \quad (4.8.2)$$

Здесь по обоим индексам k, m ведется суммирование. Если $G_{km} = 0$ при $k \neq m$, то $J_2 = \sqrt{(G_{11})^2 + (G_{22})^2 + (G_{33})^2}$.

Для осесимметричного и плоского сдвигового течения (см. табл. 4.4) погрешность формулы (4.8.1) составляет менее 1%.

В случае сферической капли в произвольном деформационном линейном сдвиговом потоке при лимитирующем сопротивлении сплошной фазы для расчета среднего числа Шервуда можно использовать интерполяционную зависимость [141]

$$Sh = 0,62 \left(\frac{Pe_M}{\beta + 1} \right)^{1/2}, \quad (4.8.3)$$

где Re_M определено в (4.8.2); значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю.

Для осесимметричного и плоского сдвигового течения (см. табл. 4.4) погрешность выражения (4.8.3) составляет менее 1%.

Сферическая частица в деформационном сдвиговом потоке при $0 \leq Re < \infty$. Рассмотрим сначала осесимметричный сдвиговый поток, когда размерные компоненты вектора скорости жидкости вдали от частицы в декартовой системе координат X_1, X_2, X_3 имеют вид

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) = \left(-\frac{1}{2}GX_1, -\frac{1}{2}GX_2, GX_3\right),$$

где обозначено $G = G_{33}$.

Результаты численных расчетов среднего числа Шервуда для сферической частицы, обтекаемой осесимметричным сдвиговым стоковым (при $Re \rightarrow 0$) потоком, во всем диапазоне изменения числа Пекле хорошо аппроксимируются выражением (4.7.9), в которое следует подставить асимптотическое значение $Sh_{p\infty}$ из верхней строки табл. 4.4. В итоге получим зависимость

$$Sh_p = 0,5 + (0,125 + 0,745 Pe)^{1/3}, \quad (4.8.4)$$

максимальная погрешность которой составляет 3%.

Для произвольного деформационного сдвигового течения ($G_{km} = G_{mk}$) среднее число Шервуда для твердой сферы можно вычислять по аналогичной формуле:

$$Sh_p = 0,5 + (0,125 + 0,729 Pe_M)^{1/3}, \quad (4.8.5)$$

где модифицированное число Пекле Pe_M вводится согласно (4.8.2). Для осесимметричного сдвига выражение (4.8.5) переходит в (4.8.4).

Сферический пузырь в деформационном сдвиговом потоке при $0 \leq Re < \infty$. Задача о массообмене сферического пузыря в осесимметричном сдвиговом потоке при малых числах Рейнольдса во всем диапазоне изменения чисел Пекле решалась численно в работе [92]. Результаты для среднего числа Шервуда можно аппроксимировать зависимостью (4.7.10), в правую часть которой следует подставить соответствующее значение из второй строки табл. 4.4 при $\beta = 0$. В итоге получим формулу

$$Sh_b = 0,6 + (0,16 + 0,48 Pe)^{1/2}, \quad (4.8.6)$$

максимальная погрешность которой равна 3%.

Обобщая это выражение на случай произвольного деформационного течения ($G_{km} = G_{mk}$), для сферического пузыря имеем

$$Sh_b = 0,6 + (0,16 + 0,384 Pe_M)^{1/2}, \quad (4.8.7)$$

где параметр Re_M определен в (4.8.2).

Сферическая капля в деформационном сдвиговом потоке при $0 \leq Re < \infty$. При умеренных числах Пекле среднее число Шервуда для капли в осесимметричном сдвиговом потоке при $Re \rightarrow 0$ во всем диапазоне изменения вязкостей фаз согласно [92] можно определять по формуле (4.7.3), где Sh_b и Sh_p — числа Шервуда для пузыря и твердой частицы, которые вычисляются с помощью выражений (4.8.6) и (4.8.4) соответственно. При $0 \leq Re \leq 100$ ($0 \leq \beta \leq \infty$) максимальная погрешность указанной формулы наблюдается при $Re = 100$ и составляет около 1%. В более широком диапазоне $0 \leq Re \leq 500$ такой метод расчета среднего числа Шервуда дает максимальную погрешность около 5%.

В случае обтекания сферической капли произвольным деформационным сдвиговым потоком при $0 \leq Re_M \leq 200$ в формулу (4.7.3) для числа Шервуда следует подставить выражения (4.8.5) и (4.8.7).

При больших числах Пекле ($Re \geq 100$) значения средних чисел Шервуда для капли в осесимметричном сдвиговом потоке хорошо аппроксимируются положительным корнем кубического уравнения

$$Sh^3 - 0,478 \frac{Pe}{\beta + 1} Sh - 0,745 Pe = 0, \quad (4.8.8)$$

максимальная погрешность которого при $Re \geq 100$ и во всем диапазоне изменения вязкостей фаз ($0 \leq \beta \leq \infty$) составляет 7% [92].

Обобщение этого уравнения на случай произвольного деформационного сдвигового потока имеет вид

$$Sh^3 - 0,384 \frac{Pe_M}{\beta + 1} Sh - 0,729 Pe_M = 0. \quad (4.8.9)$$

Оба уравнения (4.8.8) и (4.8.9) были выведены с помощью (4.7.10), где была учтена связь (4.7.12).

Течения с замкнутыми линиями тока. Диффузия к сфере, свободно взвешенной в простом и произвольном плоском сдвиговых потоках. Исследуем конвективный массоперенос к поверхности твердой сферы, свободно взвешенной в произвольном плоском сдвиговом стоковом потоке. В этом случае распределение скоростей жидкости вдали от частицы задается формулами (4.5.1) при $G_{k3} = G_{3k} = 0$ ($k = 1, 2, 3$). Учитывая несжимаемость жидкости, представим тензор сдвига в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, которые соответствуют чисто деформационной и чисто вращательной составляющим движения жидкости на бесконечности:

$$\left\| \begin{array}{ccc} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & 0 \\ E_2 & -E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (4.8.10)$$

где

$$E_1 = G_{11} = -G_{22}, \quad E_2 = \frac{1}{2}(G_{12} + G_{21}), \quad \Omega = (G_{21} - G_{12}).$$

В общем случае плоского сдвига тензор $\|G_{ij}\|$ определяется заданием трех независимых величин E_1 , E_2 , Ω . Простой сдвиговый поток (течение Куэтта) характеризуется значениями $E_1 = 0$, $E_2 = -\Omega = \frac{1}{2}G_{12}$.

Сфера, свободно взвешенная в плоском сдвиговом потоке, за счет условия прилипания жидкости на поверхности будет вращаться с постоянной угловой скоростью Ω , равной скорости вращения потока на бесконечности. Решение соответствующей трехмерной гидродинамической задачи об обтекании частицы в стоксовом приближении приведено в работе [272].

Для описания результатов решения задачи о массообмене сферы в произвольном плоском сдвиговом потоке при больших числах Пекле введем безразмерные величины по формулам

$$\Omega_E = \frac{\Omega}{E}, \quad \text{Pe} = \frac{a^2 \bar{E}}{D}, \quad \bar{E} = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2}. \quad (4.8.11)$$

При $0 < |\Omega_E| \leq 1$ в потоке имеются как замкнутые, так и разомкнутые линии тока; при этом существует примыкающая к поверхности частицы область с замкнутыми линиями тока, а вдали от сферы линии тока разомкнуты. Необходимо отметить следующее важное обстоятельство: внутри примыкающей к сфере области с замкнутыми линиями тока не происходит формирования диффузионного пограничного слоя при больших числах Пекле (диффузионный пограничный слой всегда «порождается» критическими линиями тока, которые приходят из бесконечности на поверхность тела).

В случае $0 < |\Omega_E| \leq 1$ при $\text{Pe} \rightarrow \infty$ в области с разомкнутыми линиями тока концентрация постоянна и равна своему значению на бесконечности, а распределение концентрации в области с замкнутыми линиями тока представляется в виде регулярного разложения по обратным степеням числа Пекле:

$$c = c_0 + \text{Pe}^{-1} c_1 + \dots \quad (\text{Pe} \rightarrow \infty). \quad (4.8.12)$$

Подстановка этого ряда в уравнение конвективной диффузии (4.4.1) с последующим выделением членов при одинаковых степенях малого параметра Pe^{-1} показывает, что главный член разложения удовлетворяет уравнению $(\vec{v} \cdot \nabla) c_0 = 0$. Поэтому концентрация c_0 принимает постоянные значения на линиях тока. Однако этой информации оказывается недостаточно для определения c_0 . Выписывая уравнение для следующего члена разложения c_1 и интегрируя его далее по замкнутым линиям тока [272], можно вывести уравнение эллиптического типа для функции c_0 . С учетом структуры разложения концентрации с

и отмеченных свойств функции c_0 можно сделать очень важный общий качественный вывод: в тех случаях, когда частица (капля) окружена областью течения с замкнутыми линиями тока, среднее число Шервуда при $Re \rightarrow \infty$ стремится к некоторому конечному постоянному значению, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} Sh = \text{const} \neq \infty. \quad (4.8.13)$$

Это предельное свойство среднего числа Шервуда коренным образом отличается от соответствующего поведения величины Sh при наличии особых гидродинамических точек, когда среднее число Шервуда неограниченно возрастает при $Re \rightarrow \infty$ (см., например, формулы (4.8.4) и (4.8.6)).

Результаты анализа задачи о массообмене сферы, свободно взвешенной в произвольном плоском сдвиговом потоке при больших числах Пекле, приводит к следующей двухчленной асимптотике для среднего числа Шервуда при малых значениях угловой скорости вращения [272]

$$Sh = 10,35 |\Omega_E|^{-1} - 3,5 + O(\Omega_E) \quad \text{при} \quad |\Omega_E| \rightarrow 0. \quad (4.8.14)$$

Численные расчеты [272], проведенные в диапазоне $0 < |\Omega_E| \leq 1$ при $Re \rightarrow \infty$, хорошо аппроксимируются зависимостью

$$Sh = 10,35 |\Omega_E|^{-1} - 3,5 + |\Omega_E| - 3,4 \Omega_E^2, \quad (4.8.15)$$

максимальная погрешность которой составляет менее 3%.

Для простого сдвига $|\Omega_E| = 1$ вычисление по формуле (4.8.15) приводит к значению $Sh = 4,45$, что совпадает с данными [272].

4.9. Диффузия к сфере в поступательно-сдвиговом потоке и потоке с параболическим профилем

Поступательно-сдвиговое течение. Рассмотрим массообмен твердой сферической частицы, обтекаемой поступательно-сдвиговым потоком, когда поле течения на больших расстояниях от частицы представляет собой суперпозицию поступательного потока со скоростью U_1 и осесимметричного деформационного сдвигового течения, причем поступательный поток направлен вдоль оси деформационного течения. В этом случае в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром частицы, размерные компоненты вектора скорости жидкости вдали от частицы имеют вид

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) = \left(-\frac{1}{2}GX_1, -\frac{1}{2}GX_2, U_1 + GX_3\right). \quad (4.9.1)$$

В стоксовом приближении функция тока для течения (4.9.1) равна сумме функций тока, соответствующих обтеканию каждым из составляющих течений в отдельности.

Массообмен твердой сферической частицы с поступательно-сдвиговым потоком (4.9.1) при больших числах Пекле исследовался в работе [67]. Для среднего числа Шервуда, которое зависит от параметров

$$\text{Pe} = aU_i/D, \quad \omega = 5a|G|/U_i, \quad (4.9.2)$$

были получены следующие выражения:

при $0 \leq \omega \leq 1$:

$$\text{Sh} = 0,206 (\omega + 1)^{1/3} f \left(\sqrt{\frac{2\omega}{\omega + 1}} \right) \text{Pe}^{1/3}, \quad (4.9.3)$$

при $1 \leq \omega$:

$$\text{Sh} = \frac{0,103}{\omega} \left[(\omega - 1)^{4/3} f \left(\sqrt{\frac{\omega - 1}{2\omega}} \right) + (\omega + 1)^{4/3} f \left(\sqrt{\frac{\omega + 1}{2\omega}} \right) \right] \text{Pe}^{1/3}. \quad (4.9.4)$$

Здесь

$$f(k) = \left[\frac{8}{15} \frac{(1 - k^2)(2 - k^2)}{k^4} K(k) - \frac{16}{15} \frac{k^4 - k^2 + 1}{k^4} E(k) \right]^{2/3},$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Среднее число Шервуда для сферической капли, обтекаемой поступательно-сдвиговым течением (4.9.1) при лимитирующем сопротивлении сплошной фазы и больших числах Пекле, вычисляется по формулам [58]:

при $0 \leq \omega \leq 5/3$:

$$\text{Sh} = \left[\frac{2 \text{Pe}}{3\pi(\beta + 1)} \right]^{1/2}, \quad (4.9.5)$$

при $5/3 \leq \omega$:

$$\text{Sh} = \left[\frac{\text{Pe}}{8\pi(\beta + 1)} \right]^{1/2} \left[\left(1 + \frac{5}{3\omega} \right)^{3/2} \left(\frac{3\omega}{5} - \frac{1}{3} \right)^{1/2} + \left(1 - \frac{5}{3\omega} \right)^{3/2} \left(\frac{3\omega}{5} + \frac{1}{3} \right)^{1/2} \right], \quad (4.9.6)$$

где параметры Re и ω выписаны в (4.9.2).

Видно, что при изменении величины ω число Шервуда при $0 \leq \omega \leq 5/3$ остается постоянным, сохраняя значение, равное числу Шервуда в случае однородного поступательного потока, и растет с ростом ω при $\omega > 5/3$.

При построении приближенных зависимостей для числа Шервуда в случае поступательно-сдвигового обтекания частиц и пузырей во всем диапазоне чисел Пекле можно воспользоваться формулами (4.7.9) и (4.7.10), где в качестве $Sh_{p\infty}$ и $Sh_{b\infty}$ следует взять правые части равенств (4.9.3), (4.9.4) и (4.9.5), (4.9.6) при $\beta = 0$.

Сфера в потоке с параболическим профилем скорости. Рассмотрим диффузию к поверхности твердой сферической частицы радиуса a , увлекаемой течением Пуазейля вдоль оси круглой трубы радиуса L . Считаем, что скорость частицы совпадает со скоростью жидкости на оси потока и выполнено неравенство $a \ll L$. В этом случае распределение скоростей жидкости вдали от сферы имеет параболический профиль

$$\vec{V} \rightarrow \vec{e}_3 H (X_1^2 + X_2^2), \quad (4.9.7)$$

где X_1, X_2, X_3 — декартова система координат, связанная с центром частицы; ось X_3 направлена по оси трубы; \vec{e}_3 — орт оси X_3 ; параметр H характеризует кривизну профиля скорости на оси симметрии и зависит от расхода жидкости.

Среднее число Шервуда, соответствующее стоксову (при $Re \rightarrow 0$) обтеканию сферы параболическим течением (4.9.7), при больших числах Пекле определяется формулой [60]

$$Sh = 0,957 Pe^{1/3}, \quad (4.9.8)$$

где $Pe = a^3 H / D$.

4.10. Массообмен несферических частиц и пузырей с поступательным потоком

Эллипсоидальная частица. Рассмотрим диффузию к поверхности твердой эллипсоидальной частицы в однородном поступательном стоксовом потоке ($Re \rightarrow 0$). Частица представляет собой эллипсоид вращения с полуосями a и b , ориентированными вдоль и поперек потока соответственно (b — экваториальный радиус). Введем следующие обозначения:

$$\chi = b/a, \quad a_e = a\chi^{2/3}, \quad Pe_e = a_e U_i / D, \quad (4.10.1)$$

где a_e — радиус эквивалентной по объему сферы, которая выбиралась здесь в качестве характерного масштаба длины.

Безразмерный интегральный диффузионный поток на поверхность эллипсоидальной частицы при больших числах Пекле определяется по формуле [297]

$$I = 7,85 K(\chi) \text{Pe}_e^{1/3}, \quad (4.10.2)$$

где коэффициент формы K вычисляется так:

$$K(\chi) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \chi^{-2/9} (\chi^2 - 1)^{1/3} \left(1 + \frac{\chi^2 - 2}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \arctg \sqrt{\chi^2 - 1}\right)^{-1/3} \quad \text{при } \chi \geq 1,$$

$$K(\chi) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \chi^{-2/9} (1 - \chi^2)^{1/3} \left(\frac{2 - \chi^2}{2\sqrt{1 - \chi^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \chi^2}}{1 - \sqrt{1 - \chi^2}} - 1\right)^{-1/3} \quad \text{при } \chi \leq 1. \quad (4.10.3)$$

При $\chi = 1$ имеем $K = 1$, и формула (4.10.2) после деления на 4π переходит в результат для числа Шервуда в случае твердой сферы (4.6.8).

В интервале $0,5 \leq \chi \leq 3,0$ коэффициент формы хорошо аппроксимируется выражением [60]

$$K(\chi) = 1 + \frac{2}{45}(\chi - 1), \quad (4.10.4)$$

максимальная погрешность которого составляет 0,8%.

Среднее число Шервуда вычисляется по формуле $\text{Sh} = I/S$, где S — безразмерная площадь поверхности эллипсоида вращения:

$$S = \frac{2\pi}{\chi^{1/3}} \left(\chi + \frac{1}{2\sqrt{\chi^2 - 1}} \ln \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 - 1}}{\chi - \sqrt{\chi^2 - 1}} \right) \quad \text{при } \chi \geq 1,$$

$$S = \frac{2\pi}{\chi^{1/3}} \left(\chi + \frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2}} \arcsin \sqrt{1 - \chi^2} \right) \quad \text{при } \chi \leq 1. \quad (4.10.5)$$

Безразмерная величина S выражается через размерную площадь поверхности эллипсоида S_* следующим образом: $S = S_*/a_e^2$.

При обтекании эллипсоидальной частицы поступательным стоксовым потоком при любых числах Пекле среднее число Шервуда (определенное по a_e) можно вычислять с помощью приближенной зависимости [219]

$$\text{Sh} = 0,5 \frac{1}{S} \left(\frac{\Pi}{a_e}\right) + \frac{1}{S} \left\{ 0,125 \left(\frac{\Pi}{a_e}\right)^3 + [7,85 K(\chi)]^3 \text{Pe}_e \right\}^{1/3}, \quad (4.10.6)$$

где фактор формы Π приведен во второй и третьей строках табл. 4.2, а величины Re_e , K , S выписаны соответственно в (4.10.1), (4.10.3) и (4.10.4).

В работе [257] с помощью конечно-разностных численных методов исследовалась осесимметричная задача о массообмене эллипсоидальной частицы с поступательным стоковым потоком. Рассматривались два случая, когда длина ориентированной вдоль потока полуоси частицы была в пять раз больше и в пять раз меньше длины полуоси, направленной поперек течения. Из результатов численного решения [257] согласно данным [219] следует, что максимальная погрешность формулы (4.10.6) для эллипсоидальной частицы в указанных случаях не превосходит 10%.

Формулы (4.10.2) и (4.10.4) становятся непригодными для сильно сплюснутого ($\chi \gg 1$) и сильно вытянутого ($\chi \ll 1$) эллипсоида вращения.

Круговой тонкий диск при больших числах Пекле. Случай $\chi \rightarrow \infty$ (т.е. $a \rightarrow 0$, $b = \text{const}$) соответствует диффузии к поверхности тонкого кругового диска радиуса b , расположенного поперек однородно-поступательного стокова потока.

Отметим два существенных отличия распределения диффузионного потока по поверхности диска по сравнению с распределением диффузионного потока для сферы при больших числах Пекле. Во-первых, при удалении от передней критической точки (точки натекания) вдоль поверхности диска локальный диффузионный поток монотонно возрастает, а не уменьшается, как это имело место в случае сферы. Во-вторых, диффузионный поток на диск оказывается пропорциональным числу Пекле в степени $1/4$, а не $1/3$, как было получено ранее для твердой сферы. Такое снижение диффузионного потока обусловлено существенно более интенсивным торможением потока жидкости вблизи диска.

Безразмерный интегральный диффузионный поток на переднюю часть диска при $Re \rightarrow \infty$ равен [60, 145]

$$I = 3,66 Re_b^{1/4}, \quad Re_b = bU_i/D. \quad (4.10.7)$$

В [257] приведены результаты численных расчетов среднего числа Шервуда для диска при различных числах Пекле и Рейнольдса.

Деформированный газовый пузырь при больших числах Рейнольдса. Рассмотрим диффузию к пузырю, всплывающему в жидкости при больших числах Рейнольдса. Форма пузыря существенно зависит от величины числа Вебера We , которое определяется следующим образом:

$$We = a_e \rho U_i^2 / \sigma, \quad (4.10.8)$$

где a_e — радиус сферы, объем которой равен объему пузыря, U_i — установившаяся скорость пузыря, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

При малых We форма пузыря близка к сферической; при больших We пузырь принимает вид сферического сегмента, что связано также с явлениями отрыва в кормовой части.

Значения чисел Вебера порядка единицы составляют важную для практики промежуточную область изменения We , когда пузырь, будучи существенно деформированным, сохраняет симметрию относительно своего миделева сечения. Для таких значений We форма пузыря хорошо аппроксимируется сплюснутым в направлении потока эллипсоидом вращения с полуосями a и $b = \chi a$, где полуось b ориентирована поперек потока и $\chi \geq 1$.

Требование выполнения граничного условия для нормальных напряжений в передней и задней критических точках, а также вдоль границы миделева сечения пузыря приводит к следующей зависимости между числом Вебера We и отношением χ большой и малой полуоси эллипсоида [261]:

$$We = 2\chi^{-4/3}(\chi^3 + \chi - 2)[\chi^2 \operatorname{arcsec} \chi - (\chi^2 - 1)^{1/2}]^2(\chi - 1)^{-3}.$$

Численные оценки [261] показывают, что максимальное отклонение истинной кривизны от соответствующего значения для аппроксимирующего эллипсоида не превышает 5% при $We \leq 1$ ($\chi \leq 1,5$) и 10% при $We \leq 1,4$ ($\chi \leq 2$).

Для обычных жидкостей типа воды деформацию пузыря следует принимать во внимание, начиная с $Re \sim 10^2$, где $Re = a_e U_i / \nu$ — число Рейнольдса, ν — кинематическая вязкость.

Безразмерный интегральный диффузионный поток, соответствующий потенциальному обтеканию эллипсоидального пузыря ($Re = \infty$), при больших числах Пекле вычисляется по формуле [66]

$$I = 4(2\pi)^{1/2} \Omega(\chi) \chi^{-1/3} Pe^{1/2}, \quad Pe = a_e U_i / D, \quad (4.10.9)$$

где

$$\Omega(\chi) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{(\chi^2 - 1)^{3/4}}{\chi^{2/3}} \left[\operatorname{arctg}(\chi^2 - 1)^{1/2} - \frac{(\chi^2 - 1)^{1/2}}{\chi^2} \right]^{-1/2}.$$

Для сферического пузыря в (4.10.9) следует положить $\chi = 1$ и $\Omega(1) = 1$. При $1 \leq \chi \leq 2$ функцию $\Omega(\chi)$ можно аппроксимировать простым выражением $\Omega = 0,5(\chi + 1)$, погрешность которого не превышает 3%.

Двухчленное разложение безразмерного интегрального потока I , полученное в приближении диффузионного пограничного слоя с учетом поправок (по числу Рейнольдса) к потенциальному полю обтекания пузыря, имеет вид

$$I = 4(2\pi)^{1/2} \Omega(\chi) \chi^{-1/3} [1 - \text{Re}^{-1/2} \Omega_1(\chi) \chi^{1/3}]^{1/2} \text{Re}^{1/2}. \quad (4.10.10)$$

Здесь Ω_1 — функция отношения полюсов пузыря, которая рассчитывалась численно в [66]. При $\text{Re} \rightarrow \infty$ формула (4.10.10) переходит в (4.10.9). Для сферического пузыря $\chi = 1$ в выражении (4.10.10) следует положить $\Omega_1(1) = 2,05$ [318]. В области $1 \leq \chi \leq 2$ ($\text{We} \leq 1,4$) для Ω_1 можно использовать приближенное выражение

$$\Omega_1(\chi) = 0,2 (\chi^2 + 3\chi + 6), \quad (4.10.11)$$

максимальное отклонение от точных значений при этом не превышает 3%.

Среднее число Шервуда для эллипсоидального пузыря вычисляется с помощью (4.10.10) по формуле $\text{Sh} = I/S$, где безразмерная площадь поверхности S рассчитывается путем использования верхнего выражения (4.10.5).

Общие формулы для расчета среднего числа Шервуда в случае гладких частиц произвольной формы. В работе [207] было доказано следующее общее утверждение для случая обтекания частицы произвольной формы однородным поступательным стоксовым ($\text{Re} \rightarrow 0$) потоком или потенциальным течением: среднее число Шервуда не меняется, если изменить направление движения жидкости на обратное.

Пусть ось тела вращения составляет угол ω с направлением скорости поступательного потока на бесконечности. В [278] для среднего числа Шервуда была выведена приближенная формула

$$\text{Sh} = \text{Sh}_{\parallel} \cos^2 \omega + \text{Sh}_{\perp} \sin^2 \omega, \quad (4.10.12)$$

где Sh_{\parallel} и Sh_{\perp} — средние числа Шервуда, соответствующие параллельному ($\omega = 0$) и перпендикулярному ($\omega = \pi/2$) расположению тела вращения в потоке.

При малых числах Пекле для поступательного стоксова обтекания тела вращения произвольной формы выражение (4.10.12) совпадает с точным асимптотическим результатом до трех первых членов разложения включительно [278]. Так как для частицы сферической формы равенство (4.10.12) выполняется тождественно для любых чисел Пекле, то следует ожидать, что для частиц, форма которых близка к сферической, приближенная формула (4.10.12) будет давать хорошие

результаты не только для малых, но и для промежуточных и больших чисел Пекле.

При обтекании гладких частиц любой формы произвольным стационарным вязким течением (при отсутствии замкнутых линий тока) среднее число Шервуда во всем диапазоне чисел Пекле можно вычислить по приближенной формуле [72]

$$\text{Sh} = 0,5 \text{Sh}_0 + (0,125 \text{Sh}_0^3 + \text{Sh}_\infty^3)^{1/3}, \quad (4.10.13)$$

которая выводится методом асимптотических аналогий из (4.7.1). В качестве вспомогательных величин Sh_0 и Sh_∞ в (4.10.13) следует подставлять главные члены асимптотических разложений среднего числа Шервуда при малых и больших числах Пекле, соответственно. (Все величины Sh , Sh_0 и Sh_∞ в (4.10.13) определены с помощью одного и того же характерного масштаба длины.)

Для частиц сферической формы имеем $\text{Sh}_0 = 1$ (за масштаб длины выбран радиус), и выражение (4.10.13) переходит в (4.7.9). Подстановка в (4.10.13) соответствующих значений Sh_0 и Sh_∞ для частиц эллипсоидальной формы в поступательном стоксовом потоке приводит к формуле (4.10.6).

При продольном обтекании выпуклых тел вращения достаточно гладкой формы поступательным стоксовым потоком погрешность \mathcal{E} (в процентах, %) зависимости для среднего числа Шервуда (4.10.13) приближенно можно оценить так:

$$\mathcal{E} < 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right),$$

где a и b — максимальные продольный и поперечный масштаб частицы. Указанная оценка согласуется с описанными ранее результатами для эллипсоидальной частицы.

Для частицы заданной формы вспомогательные величины Sh_0 и Sh_∞ , входящие в выражение (4.10.13), можно определить как теоретически (см. разд. 4.3), так и экспериментально. В последнем случае параметр Sh_0 находится из опыта по диффузии к частице в неподвижной жидкости. (Напомним, что значение Sh_0 соответствует безразмерной емкости тела, электростатический способ измерения которой широко используется в электротехнике.) Асимптотика среднего числа Шервуда при $\text{Re} \rightarrow \infty$ для твердой частицы имеет вид $\text{Sh}_\infty = B \text{Re}^{1/3}$, где B — некоторая постоянная [60]. Поэтому для определения параметра B , а следовательно и величины Sh_∞ , достаточно поставить один-единственный эксперимент при больших числах Пекле (большие числа Пекле при низких числах Рейнольдса $\text{Re} < 0,5$ легко достигаются в водных растворах глицерина). Таким образом, двух достаточно

простых экспериментов вполне хватает для отыскания величин Sh_0 и Sh_∞ .

Для гладких частиц произвольной формы, обтекаемых идеальной жидкостью (модель теплообмена частиц с жидкими металлами при $Pr \ll 1$ и $Re \gg 1$), среднее число Нуссельта при отсутствии области с замкнутыми линиями тока можно вычислять по формуле

$$Nu = 0,6 Nu_0 + (0,16 Nu_0^2 + Nu_\infty^2)^{1/2}, \quad (4.10.14)$$

где Nu_0 и Nu_∞ — асимптотики числа Нуссельта при $Re_T \rightarrow 0$ и $Re_T \rightarrow \infty$.

При обтекании сферы безвихревым поступательным потоком идеальной жидкости максимальная погрешность выражения (4.10.14) составляет около 3%.

Формулу (4.10.14) можно использовать при расчете среднего числа Шервуда (заменив Nu на Sh) для пузырей несферической формы, движущихся в вязкой жидкости.

4.11. Массо- и теплообмен цилиндров с поступательным и сдвиговым потоком (плоская задача)

Диффузия к круговому цилиндру в поступательном потоке. Рассмотрим диффузию к поверхности кругового цилиндра радиуса a , обтекаемого нормальным к его оси поступательным потоком со скоростью U_i . Эта задача является модельной в химической технологии для расчета массопереноса к частицам удлиненной формы, но особенно широко она используется в механике аэрозолей при анализе процесса диффузионного осаждения аэрозолей на волокнистых фильтрах [171, 177].

При малых числах Рейнольдса $Re = aU_i/\nu$ результаты аналитического решения указанной задачи приводят к следующему двухчленному разложению среднего числа Шервуда (определенного по радиусу цилиндра) по большому числу Пекле $Pe = aU_i/D$ [171]:

$$Sh = \frac{0,580}{(2,00 - \ln 2 Re)^{1/3}} Pe^{1/3} + 0,0993. \quad (4.11.1)$$

Главный член в формуле (4.11.1) был вычислен в работах [116, 231].

Диффузия к эллиптическому цилиндру в поступательном потоке при больших числах Пекле рассматривалась в [60, 145].

Для $Sc > 0,5$ среднее число Шервуда при поперечном обтекании цилиндров различной формы в широком диапазоне изменения чисел

ТАБЛИЦА 4.5

Значения коэффициентов A и m в формуле (4.11.2) для поперечно обтекаемых стержней различной формы

Форма сечения стержня (обтекание слева направо)	Re	A	m
	0,05 ÷ 2	0,640	0,305
	2 ÷ 4	0,556	0,41
	4 ÷ 500	0,381	0,47
	500 ÷ 2,5 · 10 ³	0,430	0,47
	2,5 · 10 ³ ÷ 2,5 · 10 ⁴	0,142	0,60
	2,5 · 10 ⁴ ÷ 10 ⁵	0,0168	0,80
	2,5 · 10 ³ ÷ 5 · 10 ⁴	0,162	0,588
	1,25 · 10 ³ ÷ 2,5 · 10 ³	0,116	0,699
	2,5 · 10 ³ ÷ 5 · 10 ⁴	0,0672	0,675
	2,5 · 10 ³ ÷ 5 · 10 ⁴	0,101	0,638
	2,5 · 10 ³ ÷ 9,8 · 10 ³	0,105	0,638
	9,8 · 10 ³ ÷ 5 · 10 ⁴	0,0255	0,782

Рейнольдса можно определять с помощью формулы, полученной на основе обработки экспериментальных данных [93]

$$\text{Sh} = A \text{Sc}^{0,37} \text{Re}^m, \quad (4.11.2)$$

где значения коэффициентов A , m указаны в табл. 4.5.

Диффузия к круговому цилиндру в сдвиговом потоке.

Закрепленный цилиндр. Рассмотрим диффузию к поверхности закрепленного кругового цилиндра, обтекаемого стационарным линейным сдвиговым стоксовым ($\text{Re} \rightarrow 0$) потоком в плоскости, нормальной к оси цилиндра. Распределение скоростей такого течения вдали от цилиндра в общем случае может быть представлено формулой (2.7.8) и определяется заданием трех величин E_1 , E_2 , Ω . Параметр $\bar{E} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$ характеризуют интенсивность чисто деформационной составляющей движения, а Ω отвечает за вращение жидкости. Качественная картина обтекания цилиндра сдвиговым потоком зависит от величины отношения параметра $\Omega_E = \bar{E}/\Omega$.

Обтекание закрепленного цилиндра произвольным сдвиговым стоксовым потоком описывается функций тока (2.7.9). Ограничимся

анализом случая $0 \leq |\Omega_E| \leq 1$, когда на поверхности цилиндра имеются четыре критические точки. На рис. 2.10 качественно изображены линии тока для чисто деформационного (при $\Omega_E = 0$) и простого сдвигового (при $\Omega_E = 1$) течений.

В работе [141] в приближении диффузионного пограничного слоя ($Re \gg 1$) было получено решение соответствующей задачи о массообмене кругового цилиндра с произвольным сдвиговым потоком. Было показано, что рост абсолютной величины угловой скорости вращения сдвигового потока Ω приводит к небольшому снижению интенсивности массо- и теплообмена цилиндра с окружающей жидкостью. Результаты решения для среднего числа Шервуда хорошо аппроксимируются следующей зависимостью:

$$Sh = (0,92 - 0,012 |\Omega_E|) Pe^{1/3}, \quad Pe = a^2 \bar{E}/D, \quad (4.11.3)$$

максимальная погрешность которой при $0 \leq |\Omega_E| \leq 1$ составляет около 0,5%.

Из выражения (4.11.3) следует, что среднее число Шервуда очень слабо меняется в рассматриваемом диапазоне $-1 \leq \Omega_E \leq +1$ (относительное приращение среднего числа Шервуда при увеличении $|\Omega_E|$ от нуля до единицы составляет всего 1,3%). В частных случаях чисто деформационного ($\Omega_E = 0$) и простого ($|\Omega_E| = 1$) линейного сдвигового обтекания кругового цилиндра формула (4.11.3) переходит в результаты работ [271, 272].

Свободно вращающийся цилиндр. Рассмотрим теперь конвективный массоперенос к поверхности кругового цилиндра, свободно взвешенного в произвольном линейном сдвиговом стоксовом ($Re \rightarrow 0$) потоке. В силу условия прилипания цилиндр будет вращаться с постоянной угловой скоростью, равной скорости вращения потока на бесконечности. Распределение скоростей жидкости описывается выражениями (2.6.12). Структура линий тока такого течения качественно отличается структуры линий тока для случая закрепленного цилиндра. На поверхности цилиндра при $\Omega \neq 0$ отсутствуют критические точки и существует два качественно различных типа течения. При $0 < |\Omega_E| < 1$ в потоке имеются как замкнутые, так и разомкнутые линии тока; при этом к поверхности цилиндра примыкает область с полностью замкнутыми линиями тока, а вдали от цилиндра линии тока разомкнуты (рис. 2.11). При $|\Omega_E| > 1$ все линии тока замкнуты.

В задаче о массообмене кругового цилиндра, свободно взвешенного в линейном сдвиговом потоке, не происходит формирования диффузионного пограничного слоя вблизи его поверхности при $Re \rightarrow \infty$. Распределение концентрации ищется в виде регулярного асимптотического разложения по обратным степеням числа Пекле (4.8.12). Среднее число Шервуда остается конечным при $Re \rightarrow \infty$. Это обу-

словлено тем, что область замкнутой циркуляции блокирует конвективный массо- и теплоперенос к цилиндру, в результате перенос вещества и тепла к вращающейся поверхности определяется в основном молекулярной диффузией, направленной ортогонально к линиям тока. При этом концентрация постоянна на каждой линии тока (на разных линиях тока будет различная концентрация).

Для простого сдвига асимптотическое значение среднего числа Шервуда при больших числах Пекле было вычислено в работе [230]:

$$\text{Sh} = 2,87 \quad (|\Omega_E| = 1). \quad (4.11.4)$$

При малых угловых скоростях вращения потока с точностью до членов порядка Ω_E было получено следующее двухчленное разложение [272]:

$$\text{Sh} = 7,79 |\Omega_E|^{-1} - 2,97 \quad (|\Omega_E| \rightarrow 0). \quad (4.11.5)$$

Асимптотические выражения (4.11.4), (4.11.5) соответствуют случаю бесконечно больших чисел Пекле, причем разложение (4.11.5) имеет особенность при $\Omega_E = 0$. Вместе с тем случай $\Omega_E = 0$ соответствует чисто деформационному течению, когда цилиндр остается неподвижным, независимо от того, закреплен он или нет. Поэтому при $\Omega_E = 0$ можно использовать формулу (4.11.3), которая и дает в этом случае асимптотическое выражение для среднего числа Шервуда при $\text{Pe} \gg 1$. Сопоставление этой формулы с выражением (4.11.5) показывает, что результат (4.11.5) применим при значениях угловой скорости вращения потока, удовлетворяющих условию $O(\text{Pe}^{-1/3}) < |\Omega_E| \leq 1$.

Указанным выше асимптотическим решениям (4.11.3) (при $\Omega_E = 0$), (4.11.4), (4.11.5) удовлетворяет следующая зависимость среднего числа Шервуда от числа Пекле и параметра Ω_E :

$$\text{Sh} = \frac{7,78}{8,46 \text{Pe}^{-1/3} + |\Omega_E|} - 2,97 - 1,94 |\Omega_E|^3. \quad (4.11.6)$$

Эту зависимость можно рассматривать как приближенную формулу для определения Sh при больших числах Пекле и всех значениях $|\Omega_E| \leq 1$.

Как показывает сравнение с численными результатами [272], максимальная погрешность зависимости (4.11.6) при $\text{Pe} = \infty$ не превышает 5%.

Отметим, что увеличение угловой скорости потока, как и в случае закрепленного цилиндра, приводит к снижению интенсивности массообмена.

Экспериментальная проверка [289] независимости от числа Пекле главного члена асимптотического разложения среднего числа Шервуда при $\text{Pe} \gg 1$ для свободно вращающегося кругового цилиндра в

Рис. 4.3. Теплообмен цилиндра произвольной формы с поступательным потоком: а) исходная прямоугольная система координат, б) плоскость новых переменных φ, ψ

поле простого сдвига ($|\Omega_E| = 1$) дала хорошее качественное и количественное подтверждение теоретических результатов [230]. Измеренное значение среднего числа Шервуда составило 2,65, что близко к соответствующему асимптотическому значению (4.11.4).

Из выражений для функции тока следует, что при $|\Omega_E| > 1$ все линии тока замкнуты и окружают цилиндр. Указанный случай рассматривался в [272] и характеризуется малыми значениями числа Шервуда. Этот результат означает, что наличие в потоке только замкнутых линий тока практически полностью тормозит массоперенос к поверхности цилиндра.

Конвективный теплообмен цилиндрических тел произвольной формы с жидкими металлами (модель идеальной жидкости). В теории теплообмена жидких металлов ($Pr \ll 1$) поле течения обычно рассматривается на основе модели идеальной жидкости [19], поскольку динамический пограничный слой глубоко «утоплен» в тепловом. Числа Пекле в этом случае, вообще говоря, могут быть недостаточно велики для использования приближения теплового пограничного слоя.

Рассмотрим плоскую задачу о теплообмене цилиндра с контуром поперечного сечения Γ , обтекаемого в поперечном направлении плоскопараллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью U_i . Температура цилиндра считается постоянной и равной T_s , а температура жидкости на бесконечности — равной T_i . Используем прямоугольную систему координат X, Y , где ось X направлена вдоль потока (рис. 4.3).

При анализе этой задачи будем следовать работе [18].

Пусть Φ и Ψ — потенциал и функция тока потенциального течения жидкости. Так как Φ и Ψ определяются с точностью до аддитивных постоянных, можно считать, что на контуре Γ будет $\Psi = 0$ и $-\varphi_0 < \Phi < \varphi_0$. Обозначим $\varphi = \Phi/\varphi_0$, $\psi = \Psi/\varphi_0$, а остальные безразмерные величины введем по формулам (3.1.32), где $a = \varphi_0/U_i$ — характерный масштаб длины.

Безразмерные компоненты скорости жидкости выражаются через

φ и ψ следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.11.7)$$

Функция φ определяется путем решения уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на контуре } \Gamma; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow 1 \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (4.11.8)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности цилиндра.

Для заданного контура Γ величины φ и ψ как некоторые функции x и y можно найти с помощью методов теории функций комплексного переменного [36, 96, 166]; далее будем считать эти функции известными.

В безразмерных переменных уравнение и граничные условия для температуры с учетом равенств (4.11.7) имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}_T} \Delta T, \quad \text{Pe}_T = \frac{\varphi_0}{\chi}, \quad (4.11.9)$$

$$T = 1 \quad \text{на контуре } \Gamma; \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

В задаче (4.11.9) перейдем от координат x, y к новым переменным φ, ψ . Используя дифференциальные соотношения между функциями φ и ψ (4.11.7), после некоторых преобразований получим [203]

$$\text{Pe}_T \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2}; \quad (4.11.10)$$

$$\psi = 0, \quad T = 1 \quad (|\varphi| < 1); \quad \varphi^2 + \psi^2 \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0.$$

Таким образом, в плоскости переменных φ, ψ приходим к задаче о конвективном переносе тепла от нагретой пластины длины 2, обтекаемой продольным потоком теплопроводной идеальной жидкости со скоростью потока $v_i = 1$ (рис. 4.3).

Сделаем подстановку

$$u = T \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Pe}_T \varphi\right). \quad (4.11.11)$$

В результате задача (4.11.10) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = \frac{1}{4} \text{Pe}_T^2 u; \quad (4.11.12)$$

$$\psi = 0, \quad u = \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Pe}_T \varphi\right) \quad (|\varphi| < 1);$$

$$\varphi^2 + \psi^2 \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0.$$

В эллиптических координатах ζ, η , которые вводятся по формулам

$$\varphi = \operatorname{ch} \zeta \cos \eta, \quad \psi = \operatorname{sh} \zeta \sin \eta, \quad (4.11.13)$$

общее решение уравнения (4.11.12), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности, записывается в виде суммы

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \operatorname{se}_m(\eta, -q) \operatorname{Fek}_m(\zeta, -q). \quad (4.11.14)$$

Здесь $\operatorname{se}_m(\eta, -q)$ — функции Матье [14, 105], которым соответствуют собственные значения $h = h_m(q)$, $\operatorname{Fek}_m(\zeta, -q)$ — модифицированные функции Матье. Справедливы следующие равенства: $\operatorname{se}_m(\eta, 0) = \cos(2m\eta)$. Численные значения функций Матье можно найти с помощью таблиц [105, 306]. Модифицированные функции Матье подробно описаны в [14, 105].

Переписывая граничное условие при $\psi = 0$ в (4.11.12) в переменных ζ, η (4.11.13) и разлагая его в ряд по функциям $\operatorname{se}_m(\eta, -q)$ с учетом представления (4.11.14), можно найти коэффициенты α_m .

Соответствующие выражения для температуры и безразмерного интегрального теплового потока на поверхность цилиндра были получены в [18] и здесь не выписываются ввиду их громоздкости. Приведем наиболее важные итоговые результаты [18], которые можно использовать на практике.

Безразмерный интегральный тепловой поток при малых числах Пекле с точностью до членов порядка Pe_T^2 включительно равен

$$I_T = -4\pi \left(1 + \frac{9}{64} \operatorname{Pe}_T^2 \right) \left[\ln \left(\frac{\gamma \operatorname{Pe}_T}{8} \right) \right]^{-1} - \frac{\pi}{2} \operatorname{Pe}_T^2, \quad (4.11.15)$$

где $\ln \gamma = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера, $\operatorname{Pe}_T = \varphi_0/\chi$.

При больших числах Пекле имеем асимптотику

$$I_T = 4(2 \operatorname{Pe}_T/\pi)^{1/2}, \quad (4.11.16)$$

которая соответствует приближению теплового пограничного слоя.

Результаты расчета теплового потока во всем диапазоне чисел Пекле можно аппроксимировать выражением

$$I_T = - \oint \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = 4\pi \frac{|F|^{-1,3} + 20 G^{1,02}}{|F|^{-2,3} + 20 G^{0,02}}, \quad (4.11.17)$$

где вспомогательные функции F и G определяются формулами

$$F = \left(1 + \frac{9}{64} \operatorname{Pe}_T^2 \right) \left[\ln \left(\frac{1}{8} \gamma \operatorname{Pe}_T \right) \right]^{-1} + \frac{1}{8} \operatorname{Pe}_T^2, \quad G = (2 \operatorname{Pe}_T/\pi^3)^{1/2}.$$

Рис. 4.4. Схема обтекания эллиптического цилиндра безвихревым потоком идеальной жидкости

Функция (4.11.17) при $Re_T \ll 1$ и $Re_T \gg 1$ ведет себя, как точные асимптотические решения (4.11.15) и (4.11.16) соответственно. Максимальная погрешность формулы (4.11.17) во всем диапазоне изменения числа Пекле не превышает 2%.

В качестве конкретного примера рассмотрим теплообмен эллиптического цилиндра с полуосями a и b , поверхность которого задается уравнением $(X/a)^2 + (Y/b)^2 = 1$ при $a \geq b$. Считаем, что направление скорости на бесконечности составляет угол ω с направлением большей полуоси (рис. 4.4). Введем систему координат σ, ν по формулам:

$$X = \sigma \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{4\sigma^2} \right) \cos \nu, \quad Y = \sigma \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{4\sigma^2} \right) \sin \nu. \quad (4.11.18)$$

Потенциал скорости и функция тока для безвихревого обтекания эллиптического цилиндра идеальной жидкостью имеют вид [36]

$$\begin{aligned} \Phi &= -U_i \left[\sigma + \frac{(a+b)^2}{4\sigma} \right] \cos(\nu + \omega), \\ \Psi &= -U_i \left[\sigma - \frac{(a+b)^2}{4\sigma} \right] \sin(\nu + \omega). \end{aligned} \quad (4.11.19)$$

Потенциал на поверхности цилиндра Γ , соответствующий значению $\sigma = (a+b)/2$, равен $\Phi = -U_i(a+b) \cos \nu$. На контуре Γ в плоскости Φ, Ψ выполняются соотношения $\Psi = 0, -\varphi_0 < \Phi < \varphi_0$, где $\varphi_0 = U_i(a+b)$. Поэтому для расчета безразмерного интегрального теплового потока на поверхность эллиптического цилиндра можно использовать формулы (4.11.16) — (4.11.18), где $Re_T = U_i(a+b)/\chi$. Видно, что результат для I_T не зависит от ориентации цилиндра в потоке.

В табл. 4.6 приведены выражения для теплового числа Пекле, которое входит в формулы (4.11.16) — (4.11.18), в случае безвихревого обтекания тел различной формы идеальной жидкостью.

ТАБЛИЦА 4.6

Тепловое число Пекле для безвихревого обтекания тел различной формы

№	Форма тела	Число Пекле
1	Плоская пластина длины $2a$	$Pe_T = aU_i/\chi$
2	Круговой цилиндр радиуса a	$Pe_T = 2aU_i/\chi$
3	Эллиптический цилиндр с полуосями a и b	$Pe_T = (a + b)U_i/\chi$

4.12. Нестационарный массообмен частиц, капель и пузырей с установившимся поступательным и сдвиговым потоком

Большие числа Пекле. Исследуем нестационарный массоперенос к поверхности твердой сферической частицы (капли, пузыря) радиуса a , обтекаемой ламинарным установившимся потоком. Полагаем при этом, что в начальный момент времени $t = 0$ концентрация в сплошной фазе одинакова и равна C_i , а при $t > 0$ на поверхности частицы поддерживается постоянная концентрация, равная C_s .

В сферической системе координат R, θ, φ , связанной с центром частицы, соответствующая нестационарная задача о распределении концентрации C описывается уравнением конвективной диффузии с начальными и граничными условиями, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla)c = \Delta c; \quad (4.12.1)$$

$$\tau = 0, \quad c = 0; \quad r = 1, \quad c = 1; \quad r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0, \quad (4.12.2)$$

где $c = (C_i - C)/(C_i - C_s)$, $\tau = Dt/a^2$, $r = R/a$, $\text{Pe} = aU/D$, U — характерная скорость потока. Считается, что поле скоростей жидкости \vec{v} задано и стационарно.

Ниже ограничимся рассмотрением случая больших чисел Пекле, когда в потоке нет замкнутых линий тока.

В задачах (4.12.1), (4.12.2) сначала диффузионный пограничный слой примыкает к поверхности частицы, а потом начинается быстрое его распространение в область течения с последующим экспоненциальным выходом на стационарный режим. Согласно оценкам [60] характерное время установления диффузионного пограничного слоя τ_p для твердых частиц имеет порядок $\text{Pe}^{-2/3}$, а для пузырей и капель умеренной вязкости — порядок Pe^{-1} .

В работе [277] методом асимптотических аналогий была выведена следующая приближенная формула для расчета зависимости среднего числа Шервуда от времени для сферических частиц, капель и пузырей, обтекаемых произвольным установившимся потоком:

$$\frac{\text{Sh}}{\text{Sh}_{\text{st}}} = \sqrt{\text{cth}(\pi \text{Sh}_{\text{st}}^2 \tau)}, \quad (4.12.3)$$

где $\text{Sh}_{\text{st}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{Sh}$ — число Шервуда для установившегося режима диффузии; величина Sh_{st} зависит от числа Пекле и определяется путем решения соответствующей стационарной задачи (4.4.1), (4.3.2), (4.3.3); $\tau = Dt/a^2$.

Формула (4.12.3) для любого поля течения дает правильный асимптотический результат в обоих предельных случаях $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$.

Для пузыря, обтекаемого линейным сдвиговым потоком, из табл. 4.4 имеем $\text{Sh}_{\text{st}} = \sqrt{\frac{3 \text{Pe}}{2\pi}}$. Подставляя это значение в (4.12.3), приходим к точному выражению

$$\text{Sh} = \sqrt{\frac{3 \text{Pe}}{2\pi} \text{cth} \left(\frac{3}{2} \text{Pe} \tau \right)}, \quad (4.12.4)$$

полученному в приближении диффузионного пограничного слоя в работе [68]. Отметим, что формула (4.12.4) послужила основой для вывода общей зависимости (4.12.3) в [275, 277].

В табл. 4.7 приведены значения Sh_{st} для различных случаев обтекания сферических частиц, капель и пузырей радиуса a ; параметр β равен отношению динамических вязкостей капли и окружающей жидкости и изменяется в диапазоне $0 \leq \beta \leq 2$ (значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю).

В случае нестационарного массообмена сферической капли с установившимся поступательным стоксовым потоком при лимитирующем сопротивлении сплошной фазы стационарное значение Sh_{st} приведено в верхней строке табл. 4.7. Подставляя эту величину в (4.12.3), получим зависимость

$$\text{Sh} = \left[\frac{2 \text{Pe}}{3\pi(\beta + 1)} \text{cth} \left(\frac{2}{3} \frac{\text{Pe} \tau}{\beta + 1} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.12.5)$$

Проведенное в [72] сопоставление с результатами работ [101, 212, 292] показывает, что максимальная погрешность формулы (4.12.5) составляет менее 0,7%. Важно отметить, что результаты [101, 212, 292] представляются в виде сложного интеграла, который не может быть записан в простой аналитической форме типа (4.12.5).

ТАБЛИЦА 4.7

Значения Sh_{st} в формуле (4.12.3) для различных случаев обтекания сферических частиц, капель и пузырей

№	Дисперсная фаза	Вид течения	Величина Sh_{st}	Обозначения, $Re = aU/D$
1	Капля, пузырь	Поступательный стоксов поток	$\left[\frac{2 Re}{3\pi(\beta + 1)} \right]^{1/2}$	$U = U_i$ — скорость жидкости на бесконечности
2	Капля, пузырь	Произвольный деформационный линейный сдвиговый поток ($G_{km} = G_{mk}$)	$0,62 \left(\frac{Re}{\beta + 1} \right)^{1/2}$	$U = a \left(\sum_{k,m=1}^3 G_{km} G_{km} \right)^{1/2}$, G_{km} — коэффициенты матрицы сдвига
3	Пузырь	Ламинарный поступательный поток при больших числах Рейнольдса	$\left(\frac{2 Re}{\pi} \right)^{1/2}$	$U = U_i$ — скорость жидкости на бесконечности
4	Твердая частица	Поступательный стоксов поток	$0,624 Re^{1/3}$	$U = U_i$ — скорость жидкости на бесконечности
5	Твердая частица	Произвольный деформационный линейный сдвиговый поток ($G_{km} = G_{mk}$)	$0,9 Re^{1/3}$	$U = a \left(\sum_{k,m=1}^3 G_{km} G_{km} \right)^{1/2}$, G_{km} — коэффициенты матрицы сдвига

Аналогичным образом можно получить приближенные формулы для других нестационарных задач.

В табл. 4.8 приведены итоги сопоставления результатов расчетов среднего числа Шервуда по формуле (4.12.3) с имеющимися данными для различных случаев обтекания сферических капель, пузырей и твердых частиц при больших числах Пекле (для сокращения записи в таблице «приближение диффузионного пограничного слоя» обозначено ПДПС).

Зависимость (4.12.3) можно использовать также для оценки интенсивности нестационарного массообмена частиц, капель и пузырей несферической формы при $Re \gg 1$. В этом случае все безразмерные величины τ , Sh , Sh_{st} , Re должны определяться с помощью одного и того же характерного масштаба длины a . При выполнении последнего условия выражение (4.12.3) будет давать правильный асимптотический результат при малых и больших временах.

Формулу (4.12.3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{Sh}{Sh_{st}} = \sqrt{\text{cth} \left(\frac{Sh_{st}^2}{Sh_{in}^2} \right)}, \quad (4.12.6)$$

ТАБЛИЦА 4.8

Максимальная погрешность формулы (4.12.3) для различных случаев обтекания сферических капель, пузырей и твердых частиц

№	Дисперсная фаза	Вид течения	Метод решения	Погрешность, %	Литература
1	Капля, пузырь	Осесимметричный сдвиговый стоксов поток	Аналитический, ПДПС	0	[68]
2	Капля, пузырь	Поступательный стоксов поток	Аналитический, ПДПС	0,7	[101, 212, 292]
3	Капля, пузырь	Плоский сдвиговый стоксов поток	Аналитический, ПДПС	1,8	[147]
4	Пузырь	Ламинарный поступательный поток при больших числах Рейнольдса	Аналитический, ПДПС	0,7	[212, 292]
5	Пузырь	Осесимметричный сдвиговый поток при больших числах Рейнольдса	Аналитический, ПДПС	0	[142, 143]
6	Капля, пузырь	Течение обусловлено электрическим полем	Аналитический, ПДПС	0	[262]
7	Частица	Поступательный поток идеальной (невязкой) жидкости	Аналитический, ПДПС	0,7	[212, 292]
8	Твердая частица	Поступательный стоксов поток	Интерполяция численных и аналитических результатов	1,4	[219]
9	Твердая частица	Поступательный стоксов поток	Конечно-разностный численный метод (при $Re = 500$)	4	[28]

где Sh_{in} и Sh_{st} — главные члены асимптотических разложений среднего числа Шервуда при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (Sh / Sh_{in}) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} (Sh / Sh_{st}) = 1.$$

Далее в разд. 4.14 будет показано, что выражение (4.12.6) пригодно также для описания широкого класса более сложных нелинейных задач нестационарного диффузионного пограничного слоя.

Произвольные числа Пекле. Для расчета среднего числа Шервуда при произвольном ламинарном обтекании сферических частиц, капель и пузырей во всем диапазоне изменения чисел Пекле можно использовать интерполяционную формулу

$$\text{Sh} = (\text{Sh}_{\text{st}} - 1) \sqrt{\text{cth}[\pi(\text{Sh}_{\text{st}} - 1)^2 \tau]} + 1. \quad (4.12.7)$$

Рассмотрим поведение этой функции в различных предельных случаях. Учитывая, что $\text{Sh}_{\text{st}} \rightarrow 1$ при $\text{Re} \rightarrow 0$, из формулы (4.12.7) получаем точный результат для неподвижной среды (4.3.14). При $\text{Re} \rightarrow \infty$ имеем $\text{Sh}_{\text{st}} \rightarrow \infty$, и выражение (4.12.7) переходит в (4.12.3). При малых τ формула (4.12.7) дает точный ответ $\text{Sh} \approx (\pi\tau)^{-1/2}$. При $\tau \rightarrow \infty$ из (4.12.7) имеем $\text{Sh} \rightarrow \text{Sh}_{\text{st}}$.

4.13. Качественные особенности массопереноса внутри капли при больших числах Пекле

Массоперенос при лимитирующем сопротивлении дисперсной фазы. Рассмотрим нестационарный конвективный массо- и теплообмен между сферической каплей радиуса a и поступательным стоксовым потоком, когда сопротивление переносу сосредоточено в дисперсной фазе. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ концентрация внутри капли одинакова и равна C_0 , а при $t > 0$ на межфазной поверхности поддерживается постоянная концентрация C_s .

Процесс массопереноса внутри капли описывается уравнением (4.12.1) и первыми двумя условиями (4.12.2). Распределение скоростей жидкости $\vec{v} = (v_r, v_\theta)$ при малых числах Рейнольдса определяется функцией тока Адамара — Рыбчинского, которая в безразмерных переменных имеет вид

$$\psi = -\frac{1}{4(\beta + 1)} r^2 (1 - r^2) \sin^2 \theta;$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Для анализа результатов асимптотического решения рассматриваемой задачи удобно ввести вспомогательное число Пекле по формуле

$$\text{Pe}_\beta = \frac{\text{Pe}}{\beta + 1}, \quad \text{где} \quad \text{Pe} = \frac{aU_i}{D}, \quad U_i \text{ — скорость потока.}$$

Далее будем считать, что выполнено условие $\text{Pe}_\beta \gg 1$. В целях большей наглядности для физической интерпретации процесса будем

использовать терминологию, соответствующую случаю полного поглощения вещества на поверхности капли при $C_s = 0$.

Внутренняя задача конвективного массо- и теплообмена существенно отличается от аналогичной внешней задачи прежде всего структурой линий тока, что в конечном итоге определяет соответственные качественные отличия динамики процессов нестационарного массопереноса вне и внутри капли. Во внешней задаче, которая рассматривалась в разд. 4.12, все линии тока разомкнуты. При этом линии тока, расположенные вблизи оси потока, приносят необходимую концентрацию из бесконечности, проходят далее вблизи поверхности капли (здесь происходит существенное обеднение раствора за счет полного поглощения реагента на поверхности капли) и снова уходят на бесконечность. За счет того, что концентрации на бесконечности и на поверхности капли поддерживаются постоянными, решение внешней задачи экспоненциально быстро выходит на стационарный профиль (4.6.16), соответствующий стационарному диффузионному пограничному слою.

Во внутренней задаче (см. рис. 4.5) все линии тока замкнуты, поэтому растворенное в жидкости вещество, проходя вблизи поверхности капли, частично поглощается, а оставшаяся часть идет далее внутрь капли по линиям тока, расположенным вблизи оси потока. (Здесь происходит некоторое обогащение раствора за счет его «перемешивания» с жидкостью внутри капли; однако полного обновления раствора здесь не происходит, так как концентрация в объеме капли уменьшается ввиду отсутствия притока реагента извне.) Линии тока, выходя из приосевой области, начинают снова проходить вблизи поверхности капли, где раствор еще более обедняется, чем раньше (так как он не был полностью восстановлен и т.д.). В конечном счете все растворенное в начальный момент времени в капле вещество при $\tau \rightarrow \infty$ полностью прореагирует на ее поверхности.

Более детальный анализ [134] показывает, что массоперенос внутри капли при больших числах Пекле характеризуется тремя последовательно протекающими стадиями. Каждая из стадий имеет свои качественные особенности и различную продолжительность.

На начальной (быстродействующей) стадии процесса происходит формирование нестационарного диффузионного пограничного слоя вблизи поверхности капли, толщина которого пропорциональна $Re^{-1/2}$. На этой стадии внутренний пограничный слой качественно аналогичен автомодельному нестационарному пограничному слою соответствующей внешней задачи. Среднее число Шервуда здесь можно вычислять по формуле (4.12.5), а для поля концентрации справедливы результаты [101, 212, 292]. Нестационарный пограничный слой быстро выходит на промежуточный стационарный режим, которому соответствует характерный плоский участок для среднего

Рис. 4.5. Схема течения внутри капли и структура поля концентрации; d_1 и d_2 — области диффузионного пограничного слоя, W_1 и W_2 — области диффузионного следа, e_1 и e_2 — ядра потока (при лимитирующем сопротивлении дисперсной фазы рассматриваются лишь области внутри капли)

числа Шервуда, начиная с $\tau \approx 2/Pe_\beta$. Начальная стадия процесса определяется интервалом времени, когда справедливо приближение диффузионного пограничного слоя (сначала нестационарного, а затем стационарного) с необедненной концентрацией на «входе». На этой стадии концентрация в ядре капли равна невозмущенной концентрации в начальный момент времени.

Внутренний диффузионный пограничный слой порождает внутренний диффузионный след, расположенный вблизи оси потока, толщина которого пропорциональна $Pe^{-1/4}$. В диффузионном следе поступающее из «конца» пограничного слоя растворенное вещество переносится жидкостью без изменения вдоль линии тока. Так как скорость течения жидкости конечна, то сначала при небольших временах $\tau < \tau_*$ в область передней критической точки пограничного слоя поступает необедненная концентрация, приходящая из толщи жидкости. Это происходит до тех пор, пока попавший из «конца» пограничного слоя в диффузионный след обедненный раствор, пройдя весь путь вблизи оси потока, не дойдет до «начала» диффузионного пограничного слоя. Согласно результатам [208] характерное время переноса реагента в диффузионном следе капли τ_* имеет порядок $(\ln Pe_\beta)/Pe_\beta$ и определяет область применимости автомодельного решения [101, 212, 292], которое при $\tau > \tau_*$ перестает правильно описывать распределение концентрации в диффузионном пограничном слое (ввиду изменения условия «натекания»).

Более точные численные оценки [55] показывают, что начальная стадия процесса происходит на временах $0 \leq \tau \leq 0,5 (\ln Pe_\beta)/Pe_\beta$.

Промежуточная стадия процесса. На этой стадии по-прежнему существует диффузионный пограничный слой вблизи межфазной поверхности, а концентрация в ядре капли постоянна и равна своему первоначальному значению. Однако, согласно сказанному

Рис. 4.6. Среднее число Шервуда для внутренней задачи в зависимости от безразмерного времени

выше, концентрация на входе в пограничный слой уже будет неоднородной и находится из условия сращивания с полем концентрации во внутреннем диффузионном следе. Задача осложняется тем, что концентрация в последнем, в свою очередь, зависит от распределения концентрации в диффузионном пограничном слое. Учитывая указанные обстоятельства, в работах [55, 135] для $Re_\beta \geq 10^4$ было выведено интегральное уравнение для определения условия «натекания» на входе в пограничный слой, которое приводит к неавтомоделному решению.

На рис. 4.6 приведены результаты расчета среднего числа Шервуда, полученные в [55] путем численного решения соответствующего интегрального уравнения, при различных значениях безразмерного времени и числа Пекле. Видно, что после завершения формирования внутреннего диффузионного следа полный поток вещества на внутреннюю поверхность капли начинает быстро уменьшаться.

На промежуточной стадии процесса развитый диффузионный след взаимодействует с пограничным слоем и сильно «размывает» его, в результате чего толщина пограничного слоя будет увеличиваться (здесь пограничные слои, соответствующие внутренней и внешней задачам, значительно отличаются друг от друга). Постепенно, за счет поглощения растворенного в жидкости вещества на межфазной поверхности, диффузионный пограничный слой, распространяясь на весь объем капли, начнет разрушаться.

Отметим, что при $Re_\beta = 10^2 \div 10^3$ промежуточная стадия процесса

проявляется недостаточно четко.

Заключительная (медленнопротекающая) стадия процесса. На этой стадии процесса за счет многократной циркуляции жидкости вдоль замкнутых траекторий концентрация уже выравнялась и стала одинаковой на линиях тока (на каждой линии тока своя концентрация, которая зависит от τ). К этому времени диффузионный пограничный слой и диффузионный след фактически полностью размылись и прекратили свое существование.

Решение здесь ищется в виде регулярного асимптотического разложения (4.8.12) по обратным степеням малого параметра Re^{-1} . Для главного члена этого ряда справедливо уравнение, выведенное в работе [251]. Численное решение соответствующей задачи приводит к следующей зависимости для средней (по объему) безразмерной концентрации внутри капли:

$$\langle c \rangle = 1 - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\lambda_k \tau); \quad (4.13.1)$$

$$A_1 = 0,4554; \quad A_2 = 0,0654; \quad A_3 = 0,0542; \quad A_4 = 0,0412; \quad A_5 = 0,0038;$$

$$\lambda_1 = 26,844; \quad \lambda_2 = 137,91; \quad \lambda_3 = 315,66; \quad \lambda_4 = 724,98; \quad \lambda_5 = 1205,2.$$

Здесь коэффициенты A_k и λ_k приведены по данным [28]; при $k = 1, 2$ близкие к выписанным значения этих коэффициентов были вычислены ранее в [251].

Выражение для средней концентрации (4.13.1) можно использовать при $Re_\beta \geq 10^2$, начиная с $\tau \geq 5 \cdot 10^{-4}$.

Важно отметить, что хотя формула (4.13.1) была выведена для стоксова режима течения ($Re \rightarrow 0$), ее с успехом можно применять и для больших чисел Рейнольдса ($Re \leq 10^2$), когда форма капель близка к сферической. Обзор экспериментальных данных по массопереносу при лимитирующем сопротивлении дисперсной фазы в системах жидкость-жидкость при $10^2 \leq Re \leq 4 \cdot 10^2$ приведен в [28]. Сопоставление показывает, что экспериментальные данные в диапазоне $4 \cdot 10^{-4} \leq \tau \leq 10^{-1}$ (соответствующие степени извлечения от 10% до 70%) находятся в хорошем согласии с результатами расчета по формуле (4.13.1).

Результаты численного решения рассматриваемой задачи [27] находятся в хорошем соответствии с формулой (4.13.1).

Массоперенос при соизмеримых фазовых сопротивлениях. Рассмотрим неустановившееся поле концентрации растворенного в жидкости вещества вне и внутри сферической капли радиуса a , движущейся с постоянной скоростью U_i в неограниченной жидкой среде. Считаем, что поле скоростей жидкости в сплошной и дисперсной фазах определяется решением Адамара — Рыбчинского [233, 291], полученным для малых чисел Рейнольдса. Вдали от капли концентрация

поддерживается постоянной и равной C_1 . В начальный момент времени $t = 0$ концентрация вне капли всюду однородна и равна C_1 , внутри капли концентрация также однородна и равна C_0 .

На поверхности капли выполняются граничные условия:

$$C_2 = F(C_1), \quad D_1 \frac{\partial C_1}{\partial R} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial R} \quad \text{при} \quad R = a, \quad (4.13.2)$$

где индекс 1 соответствует непрерывной фазе, 2 — дисперсной фазе. Первое условие (4.13.2) представляет собой условие фазового равновесия на поверхности капли. Обычно считается [101, 212, 292], что функция F линейным образом зависит от концентрации (закон Генри): $F(C_1) = \alpha C_1$, где коэффициент распределения α зависит от физических свойств жидкостей вне и внутри капли. Предельные случаи лимитирующего сопротивления дисперсной и сплошной фазы соответствуют значениям $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$. При соизмеримых фазовых сопротивлениях имеем $\alpha \sim 1$. В [28] было показано, что в ряде случаев следует использовать степенную зависимость $F(C_1) = \alpha C_1^m$, где m лежит в пределах от 0,5 до 2,0. Второе условие (4.13.2) отражает непрерывность диффузионных потоков на поверхности капли.

Распределение концентрации описывается уравнением (3.1.1), где величины C , \vec{V} , D в сплошной фазе (при $R > a$) помечаются индексом 1, а в дисперсной фазе (при $R < a$) — индексом 2.

В работах [135, 208] было показано, что в случае больших чисел Пекле диффузионный процесс при соизмеримых фазовых сопротивлениях характеризуется тремя стадиями с различным механизмом массопереноса. Длительность этих стадий такая же, как и для случая лимитирующего сопротивления дисперсной фазы. На начальной стадии процесса происходит формирование нестационарных диффузионных пограничных слоев по обе стороны от поверхности капли (которые качественно аналогичны друг другу), при этом внутренний пограничный слой порождает диффузионный след, расположенный вблизи оси потока (см. рис. 4.5). На промежуточной стадии процесса развитый внутренний диффузионный след начинает взаимодействовать с пограничным слоем и сильно «размывает» его (здесь уже погранслои, расположенные вне и внутри капли, существенно различаются, в результате чего толщина внутреннего погранслоя постепенно значительно увеличивается). На заключительной стадии процесса происходит дальнейшая перестройка поля концентрации, так что погранслои практически уже прекращают свое существование; при этом вне капли концентрация становится постоянной и равной невозмущенной концентрации на бесконечности C_1 , а внутри капли протекает существенно нестационарный процесс, когда на каждой фиксированной линии тока концентрация практически выравнялась (за

счет многократной циркуляции жидкости по замкнутым линиям тока), а массопередача осуществляется путем молекулярной диффузии в направлении, перпендикулярном линиям тока.

Учитывая сказанное, получим, что на заключительной стадии процесса концентрация на межфазной поверхности в силу первого граничного условия (4.13.2) постоянна и равна

$$C = C_s, \quad \text{где } C_s = F(C_i). \quad (4.13.3)$$

При этом среднюю концентрацию внутри капли можно вычислять по формуле (4.13.2), где безразмерная концентрация определяется так: $c = (C_0 - C)/(C_0 - C_s)$, а значение C_s указано в (4.13.3).

4.14. Массообмен частиц и капель с потоком при произвольной зависимости коэффициента диффузии от концентрации

Некоторые замечания. Формулировка задачи. Обычно считается, что коэффициент диффузии не зависит от концентрации. Однако экспериментальные данные [26, 99, 159, 182, 228, 285, 311] показывают, что коэффициенты диффузии в жидкостях часто существенным образом изменяются с изменением концентрации. При этом для разбавленных растворов увеличение концентрации всегда приводит к уменьшению коэффициента диффузии. Например, растворение в одном литре воды двух граммов поваренной соли уменьшает коэффициент диффузии на 10%. Во многих случаях коэффициент диффузии линейным образом уменьшается при увеличении концентрации диффундирующего вещества (сахароза, рафиноза и др.) в водном растворе [26]. При растворении в воде ряда одновалентных солей (NaCl, KCl, KI, LiCl и др.) зависимость коэффициента диффузии от концентрации (при $C \leq 0,1$ моль/л) хорошо описывается выражением [124, 159]

$$D/D_0 = 1 - \gamma\sqrt{C},$$

где D_0 — коэффициент диффузии при бесконечном разбавлении, C — мольная концентрация, $\gamma \simeq 0,5 \div 0,6$ — численный коэффициент.

Для гемоглобина и серого альбумина, диффундирующих в растворах солей, имеем [159, 194]

$$D/D_0 = (1 - \bar{c})^{6,5},$$

где \bar{c} — мольная доля растворенного вещества.

Растворение в воде KMnO_4 в количестве от 0 до $2 \cdot 10^{-4}$ моль/л снижает коэффициент диффузии на 25%. Очень сильное изменение коэффициента диффузии наблюдается в водных растворах метиленового голубого (молекулярная масса $m = 317$), введение которого в количестве $6 \cdot 10^{-4}$ моль/л при комнатной температуре в два раза снижает коэффициент диффузии.

Отметим также, что в некоторых системах (например, при растворении в воде ацетона, этанола или метанола) с увеличением концентрации коэффициент диффузии сначала уменьшается, а затем возрастает [26, 182, 285]. Например, корреляцией $D/D_0 = \exp(\alpha \bar{c})$ при $\alpha = 3,83$, $D_0 = 0,109 \cdot 10^{-5}$ см²/сек можно описать коэффициент взаимной диффузии для системы ацетон — вода при 25° С в диапазоне концентраций $0,45 \div 1,0$ мольной доли ацетона [182].

Рассмотренные примеры наглядно показывают, что при растворении ряда веществ даже в очень малых количествах (десятые доли процента) необходимо учитывать изменение коэффициента диффузии. При этом изменением вязкости и плотности смеси от концентрации диффундирующего вещества, как правило, можно пренебречь. Например, из данных [26] следует, что для разбавленных растворов одновалентных солей относительное изменение коэффициента диффузии на два порядка превышает относительное изменение вязкости раствора.

Учитывая сказанное, рассмотрим стационарный конвективный массообмен твердой частицы или капли с жидкостью при произвольной зависимости коэффициента диффузии от концентрации $D = D(C)$. Считаем, что концентрация у поверхности частицы и вдали от нее принимает постоянные значения, равные C_s и C_i соответственно ($C_s \neq C_i$). Предполагаем также, что неоднородность концентрации не влияет на параметры потока. В безразмерных переменных исследуемая нелинейная задача описывается уравнением и граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla)c &= \text{div}(\bar{D}\nabla c); \\ c &= 1 \quad (\text{на поверхности частицы } \Gamma), \\ c &\rightarrow 0 \quad (\text{вдали от частицы}), \end{aligned} \quad (4.14.1)$$

где $c = \frac{C_i - C}{C_i - C_s}$, $\bar{D}(c) = \frac{D(C)}{D(C_i)}$, $\text{Pe} = \frac{aU}{D(C_i)}$; a и U — характерные масштабы длины и скорости.

Определим среднее число Шервуда, соответствующее решению задачи (4.14.1), следующим образом:

$$\text{Sh} = \text{Sh}(\bar{D}, \text{Pe}) = -\frac{1}{S} \int_{\Gamma} \bar{D}(c) \frac{\partial c}{\partial \xi} d\Gamma, \quad (4.14.2)$$

где S — безразмерная площадь поверхности частицы, $\partial/\partial\xi$ — производная по нормали к поверхности частицы Γ .

Малые числа Пекле. В работах [133, 273] было доказано, что для произвольной зависимости коэффициента диффузии от концентрации при любой форме частиц и капель для среднего числа Шервуда и малых чисел Пекле справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\text{Sh}(\bar{D}, \text{Pe}) = \langle \bar{D} \rangle \text{Sh}(1, \text{Pe}), \quad \text{где} \quad \langle \bar{D} \rangle = \int_0^1 \bar{D}(c) dc. \quad (4.14.3)$$

Здесь $\text{Sh}(1, \text{Pe})$ — вспомогательное число Шервуда, соответствующее решению линейной задачи (4.14.1) при $\bar{D} = 1$.

Для поступательного стоксова течения выражение (4.14.3) дает три главных члена разложения (до членов порядка $\text{Pe}^2 \ln \text{Pe}$ включительно). В этом случае величина $\text{Sh}(1, \text{Pe})$ определяется отношением правой части формулы (4.4.22) к безразмерной площади поверхности частицы.

Для произвольного линейного сдвигового потока выражение (4.14.3) дает два главных члена разложения (до члена порядка $\sqrt{\text{Pe}}$ включительно). В данном случае величина $\text{Sh}(1, \text{Pe})$ определяется отношением правой части формулы (4.5.8) к безразмерной площади поверхности частицы, при этом слагаемые порядка Pe не учитываются.

Формулу (4.14.3) можно использовать и для других более сложных течений при $\text{Pe} \rightarrow 0$ [273].

Массообмен частицы, свободно взвешенной в простом сдвиговом потоке при больших числах Пекле. Пусть частица окружена областью с замкнутыми линиями тока. В этом случае для главного члена асимптотического разложения среднего числа Шервуда при больших числах Пекле справедлива зависимость (4.14.3), которая была выведена в [72].

В частном случае сферической частицы, свободно взвешенной в простом сдвиговом потоке, в формуле (4.14.3) следует положить $\text{Sh}(1, \text{Pe}) = 4,45$. При вычислении $\text{Sh}(1, \text{Pe})$ для сферических частиц в плоском сдвиговом потоке можно воспользоваться выражением (4.8.15).

По-видимому, формулу (4.14.3) с успехом можно использовать для приближенного определения среднего числа Шервуда в случае сферической частицы, свободно взвешенной в простом сдвиговом потоке, во всем диапазоне чисел Пекле $0 \leq \text{Pe} \leq \infty$ (напомним, что здесь формула (4.14.3) дает правильный асимптотический результат в обоих предельных случаях при $\text{Pe} \rightarrow 0$ и $\text{Pe} \rightarrow \infty$).

Большие числа Пекле. Приближение диффузионного пограничного слоя. Задача (4.14.1) при больших числах Пекле иссле-

довалась в работе [149]. Решение было получено методом диффузионного пограничного слоя. Для среднего числа Шервуда была выведена следующая зависимость:

$$\text{Sh}(\bar{D}, \text{Pe}) = \alpha_m(\bar{D}) \text{Sh}(1, \text{Pe}). \quad (4.14.4)$$

Здесь α_m — коэффициент нелинейности, который вычисляется по формуле

$$\alpha_m = (m+1) \frac{m-1}{m+1} \Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right) \left[-\bar{D}(c) \frac{dc}{dz} \right]_{z=0}, \quad (4.14.5)$$

где функция $c = c(z)$ является решением вспомогательной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz} \left[\bar{D}(c) \frac{dc}{dz} \right] + \frac{z^m}{m+1} \frac{dc}{dz} = 0; \quad (4.14.6)$$

$$z = 0, \quad c = 1; \quad z \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0.$$

Значение $m = 2$ соответствует твердым частицам, а $m = 1$ — пузырькам и каплям умеренной вязкости ($0 \leq \beta \leq 2$). Для постоянного коэффициента диффузии имеем $\alpha_m(1) = 1$.

Формула (4.14.4) справедлива для произвольного ламинарного течения без замкнутых линий тока для частиц и капель любой формы. Величина $\text{Sh}(1, \text{Pe})$ соответствует асимптотическому решению линейной задачи (4.14.1) при $\text{Pe} \gg 1$. Для сферических частиц, капель и пузырей в поступательном и линейном деформационном сдвиговом потоке значения $\text{Sh}(1, \text{Pe})$ приведены в четвертой колонке табл. 4.7.

В [250] для любого значения m было получено точное аналитическое решение задачи (4.14.6) в случае гиперболической зависимости коэффициента диффузии от концентрации $\bar{D}(c) = (\alpha c + \beta)^{-1}$, где α и β — постоянные. В [104] указано решение при $m = 1$ для $\bar{D}(c) = (\alpha c^2 + \beta c + \gamma)^{-1}$.

Для расчета коэффициента α_m в (4.14.4) при произвольной зависимости коэффициента диффузии от концентрации целесообразно использовать приближенную формулу [149, 281]

$$\alpha_m = \left[\frac{m+1}{m} \int_0^1 c^{\frac{1}{m}} \bar{D}(c) dc \right]^{\frac{m}{m+1}}. \quad (4.14.7)$$

В табл. 4.9 приведены результаты сопоставления коэффициента нелинейности, полученного путем численного решения задачи (4.14.6) по формуле (4.14.5) и с помощью приближенного выражения (4.14.7), для семи характерных зависимостей $\bar{D} = \bar{D}(c)$ (погрешности указаны

ТАБЛИЦА 4.9

Максимальная погрешность (в процентах) формулы (4.14.7) для разных зависимостей коэффициента диффузии от концентрации

Зависимость $\bar{D} = \bar{D}(c)$	Диапазон изменения параметра b	Капли, пузыри $m = 1$	Твердые частицы $m = 2$	$m = 3$
$\bar{D} = 1 - bc$	$-3 \leq b \leq 0,8$	1,9	0,8	1,6
$\bar{D} = 1 - b\sqrt{c}$	$-3 \leq b \leq 0,8$	2,0	0,7	1,2
$\bar{D} = (1 + bc)^{-1}$	$-0,8 \leq b \leq 3$	2,4	0,7	2,0
$\bar{D} = (1 + bc)^{-2}$	$-0,8 \leq b \leq 3$	4,8	1,3	3,2
$\bar{D} = (1 + b\sqrt{c})^{-1}$	$-0,8 \leq b \leq 3$	1,9	0,3	1,8
$\bar{D} = \exp(-bc)$	$-2 \leq b \leq 3$	3,4	1,4	2,3
$\bar{D} = (1 + bc)^{-1/2}$	$-0,8 \leq b \leq 3$	1,2	0,3	1,1

в трех последних столбцах таблицы). Видно, что формула (4.14.7) обладает высокой точностью.

В случае твердых частиц ($m = 2$) для приближенного определения коэффициента нелинейности α_m можно использовать более простую, чем (4.14.7), но менее точную зависимость [149]

$$\alpha_2 = \left[2 \int_0^1 c \bar{D}(c) dc \right]^{2/3}. \quad (4.14.8)$$

Обозначим $\bar{D}_{\max} = \max_{0 \leq c \leq 1} \bar{D}(c)$, $\bar{D}_{\min} = \min_{0 \leq c \leq 1} \bar{D}(c)$. Для различных функций $\bar{D} = \bar{D}(c)$, указанных в первом столбце табл. 4.9, максимальная погрешность формулы (4.14.8) при условии $1 \leq \bar{D}_{\max}/\bar{D}_{\min} \leq 2$ (эти неравенства фиксируют диапазон изменения параметра b) составляет менее 3,5%.

Нестационарные задачи диффузионного пограничного слоя. Рассмотрим теперь внешнюю задачу о нестационарном массообмене капли (пузыря) с ламинарным установившимся потоком. Считаем, что концентрация в жидкости в начальный момент времени одинакова и равна C_1 , а на поверхности капли концентрация постоянна и равна C_s . Уравнение нестационарного массопереноса в сплошной фазе с учетом зависимости коэффициента диффузии от концентрации можно записать в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla)c = \text{div}[\bar{D}(c)\nabla c], \quad (4.14.9)$$

где $\tau = tD(C_i)/a^2$, а остальные безразмерные величины введены, как в уравнении (4.14.1). Решение ищется при начальном условии $\tau = 0$, $c = 0$ и тех же граничных условиях, что и в (4.14.1).

В работах [136, 274] было показано, что при больших числах Пекле (в приближении диффузионного пограничного слоя) решение соответствующей нелинейной задачи о нестационарном массообмене капель и пузырей с потоком приводит к следующей зависимости для среднего числа Шервуда:

$$\text{Sh}(\bar{D}, \text{Pe}, \tau) = \alpha_1(\bar{D}) \text{Sh}(1, \text{Pe}, \tau), \quad (4.14.10)$$

где коэффициент нелинейности α_1 , как и ранее, определяется по формуле (4.14.5) путем решения уравнения (4.14.6) при $m = 1$. Величина $\text{Sh}(1, \text{Pe}, \tau)$ находится из уравнения (4.14.9) при $\bar{D} = 1$.

Заменяя оба сомножителя в правой части выражения (4.14.10) приближенными формулами (4.12.3) и (4.14.7), для среднего числа Шервуда имеем

$$\text{Sh}(\bar{D}, \text{Pe}, \tau) = \text{Sh}_{\text{st}} [\text{cth}(\pi \text{Sh}_{\text{st}}^2 \tau)]^{1/2} \left[2 \int_0^1 c \bar{D}(c) dc \right]^{1/2}, \quad (4.14.11)$$

где $\text{Sh}_{\text{st}} = \text{Sh}(1, \text{Pe}, \infty)$ — число Шервуда, соответствующее решению линейной стационарной задачи при постоянном коэффициенте диффузии. Для сферических капель и пузырей в поступательном и деформационном сдвиговых потоках значения Sh_{st} приведены в табл. 4.7, где в качестве коэффициента диффузии используется величина $D(C_i)$.

4.15. Диффузионный след. Массообмен цепочек капель и частиц с жидкостью

Диффузионный след (большие числа Пекле). В работах [64, 140, 299] методом сращиваемых асимптотических разложений (по большому числу Пекле) исследовались задачи о стационарной конвективной диффузии к твердой сфере [299] и капле [64] в поступательном стоксовом потоке при диффузионном режиме реакции на межфазной поверхности. В потоке было выделено шесть областей с различной структурой асимптотических решений, соответствующих различным механизмам массопереноса (рис. 4.7). Дадим краткое качественное описание этих областей, используя безразмерную сферическую систему координат r, θ , связанную с центром частицы (капли).

Во внешней области c концентрация постоянна и равна своему невозмущенному значению на бесконечности.

Рис. 4.7. Схема разбиения поля концентрации вне капли на области с различной структурой асимптотических решений

В диффузионном пограничном слое d в уравнении массопереноса при сохранении конвективных членов (которые несколько упрощаются в результате линеаризации вблизи межфазной поверхности) можно пренебречь молекулярным тангенциальным диффузионным переносом по сравнению с диффузией в радиальном направлении. Распределение концентрации в этой области было получено ранее в разд. 4.6.

Четыре подобласти $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), расположенные за каплей и частицей вблизи оси потока, составляют область диффузионного следа (рис. 4.7).

В конвективно-погранслошной области диффузионного следа $W^{(1)}$ молекулярной диффузией можно пренебречь. Концентрация здесь зависит только от функции тока и вдоль линий тока сохраняет постоянные значения, равные значениям на выходе из диффузионного пограничного слоя.

Во внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$ можно пренебречь молекулярным массопереносом в радиальном направлении.

В области задней критической точки $W^{(3)}$ уравнение массопереноса можно несколько упростить. При этом необходимо учитывать как конвективные члены, так и радиальную и тангенциальную составляющие молекулярной диффузии.

В области смешения $W^{(4)}$ определяющую роль в массопереносе играют конвективные члены и тангенциальный перенос вещества путем молекулярной диффузии (молекулярной диффузией вдоль радиальной координаты можно пренебречь).

Важно отметить, что во всех областях диффузионного следа $W^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) необходимо учитывать конвективный перенос вещества, обусловленный движением жидкости. В областях $W^{(i)}$ ($i = 2, 3, 4$) важную роль играет составляющая молекулярной диффузии, направленная перпендикулярно линиям тока.

В случае капли (пузыря) в явном аналитическом виде получено распределение концентрации во всех областях диффузионного следа $W^{(i)}$ [60, 64], а в случае твердой сферы — во всех областях, за исключением области задней критической точки [60, 140, 299]. Поле концентрации в $W^{(3)}$ в случае твердой сферы и кругового цилиндра анализировалось в [265] численными методами.

ТАБЛИЦА 4.10

Порядок величин безразмерных (отнесенных к радиусу капли или частицы) характерных размеров областей диффузионного следа в поступательном стоксовом потоке при больших числах Пекле

Области диффузионного следа	Безразмерное расстояние от межфазной поверхности, $y = r - 1$	Безразмерное расстояние от оси потока, h
<i>Пузыри, капли умеренной вязкости $0 \leq \beta \leq 1$</i>		
Конвективно-погранслоиная область $W^{(1)}$	$O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq y \leq O(\text{Pe}^{1/2})$	$O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/4})$
Внутренняя область $W^{(2)}$	$O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq y \leq O(\text{Pe}^{1/2})$	$0 \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/2})$
Область задней критической точки $W^{(3)}$	$0 \leq y \leq O(\text{Pe}^{-1/2})$	$0 \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/2})$
Область смещения $W^{(4)}$	$y \geq O(\text{Pe}^{1/2})$	$0 \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/4})$
<i>Твердые частицы</i>		
Конвективно-погранслоиная область $W^{(1)}$	$O(\text{Pe}^{-1/3}) \leq y \leq O(\text{Pe}^{1/3})$	$O(\text{Pe}^{-1/2}) \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/3})$
Внутренняя область $W^{(2)}$	$O(\text{Pe}^{-1/3}) \leq y \leq O(\text{Pe}^{1/3})$	$0 \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/2})$
Область задней критической точки $W^{(3)}$	$0 \leq y \leq O(\text{Pe}^{-1/3})$	$0 \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/3})$
Область смещения $W^{(4)}$	$y \geq O(\text{Pe}^{1/3})$	$0 \leq h \leq O(\text{Pe}^{-1/3})$

Порядок величин характерных размеров областей диффузионного следа за сферической каплей и твердой частицей в поступательном потоке указан в табл. 4.10. Эти оценки сохраняют силу и при умеренных числах Рейнольдса, когда за каплей и частицей нет застойных зон.

Для одиночной капли и твердой частицы область диффузионного следа вносит вклад в среднее число Шервуда, начиная лишь с третьего члена асимптотического разложения по большому числу Пекле.

В работе [139] было показано, что в плоской задаче о массообмене цилиндрических тел с вязким течением диффузионный слой состоит только из двух подобластей $W^{(3)}$ и $W^{(4)}$ общей протяженностью $L \sim a \text{Pe}^{-1/9}$ (при $\text{Pe} \rightarrow \infty$); при этом области $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ отсутствуют. Аналогичную структуру имеет диффузионный след вблизи критических линий на поверхности частицы.

Диффузия к двум твердым частицам или каплям, рас-

Рис. 4.8. Схема обтекания двух одинаковых частиц поступательным стоксовым потоком

положенным на оси поступательного стоксова потока. Рассмотрим стационарную диффузию к двум осесимметричным частицам, расположенным одна за другой на оси поступательного стоксова потока. Считаем, что частицы симметричны относительно некоторой плоскости (рис. 4.8) и имеют на поверхности лишь по две критические точки, которые находятся на оси течения (замкнутые линии тока отсутствуют). Поверхности частиц полностью поглощают растворенное в жидкости вещество.

При больших числах Пекле диффузионный поток на поверхность первой частицы находится путем решения обычного уравнения диффузионного пограничного слоя, при этом наличие второй частицы оказывает влияние только за счет изменения поля скоростей жидкости вблизи поверхности первой (массообмен второй частицы не сказывается на массообмене первой).

Более сложно происходит массообмен второй частицы, где главную роль играет взаимодействие диффузионного пограничного слоя с диффузионным следом первой частицы.

В работе [61] было выведено следующее предельное соотношение для интегральных диффузионных потоков на поверхности двух одинаковых частиц, расположенных на оси поступательного стоксова потока (рис. 4.8):

$$\lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} \frac{I_2}{I_1} = \lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} \frac{\text{Sh}_2}{\text{Sh}_1} = 4^{1/3} - 1 \approx 0,587. \quad (4.15.1)$$

Предельный переход в этой формуле осуществляется при постоянном расстоянии между частицами, а число Пекле определено по характерному размеру частиц.

Соотношение (4.15.1), в частности, выполняется для сфер равного радиуса, расположенных на оси поступательного стоксова потока (распределение скоростей для этого случая указано в [178, 300]). Оно справедливо также для трехмерного стоксова обтекания двух одинаковых эллипсоидов вращения, оси которых расположены параллельно

друг другу и перпендикулярно невозмущенному течению, а направление линии, проходящей через их центры, совпадает с направлением поступательного потока.

Из формулы (4.15.1) видно, что имеет место существенное торможение процесса массообмена второй частицы по сравнению с первой.

Для двух сферических капель (пузырей) равного радиуса, расположенных одна за другой на оси поступательного стоксова потока, выполняется предельное равенство [61]

$$\lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} \frac{I_2}{I_1} = \lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} \frac{\text{Sh}_2}{\text{Sh}_1} = 2^{1/2} - 1 \approx 0,414. \quad (4.15.2)$$

Видно, что взаимодействие диффузионного следа первой капли с пограничным слоем второй капли происходит более интенсивно, чем в случае твердых частиц. При этом интегральный массообмен второй капли с жидкостью более чем в два раза снижен по сравнению с массообменом первой.

Формула (4.15.2) будет справедлива в случае безвихревого обтекания двух одинаковых частиц, расположенных на оси поступательного потока идеальной жидкости (см. рис. 4.8).

Массообмен цепочек капель и частиц с жидкостью при больших числах Пекле. Рассмотрим диффузию к поверхностям капель (пузырей), расположенных друг за другом на оси поступательного стоксова потока вязкой несжимаемой жидкости. В таких системах, называемых далее цепочками, поле течения устроено так, что особая линия тока, выходящая из изолированной критической точки на поверхности первой капли, попадает далее на поверхность второй капли; особая линия тока, выходящая с поверхности второй капли, попадает на поверхность третьей и т.д. (т.е. капли «нанизаны» на особую линию тока). Такая ситуация встречается на практике при осуществлении, например, процессов экстракции вещества из капель и растворения газов из пузырьков. В частности, она имеет место при экстракции, когда в экстракционной колонне ввод капель осуществляется в одних и тех же точках через равные промежутки времени, а при барботаже — в случае постоянного расхода барботирующего газа.

Далее считаем, что основное сопротивление массопереносу сосредоточено в сплошной фазе.

В цепочках диффузионный пограничный слой любой фиксированной капли взаимодействует с диффузионным следом расположенной выше по потоку предыдущей капли, поле концентрации в котором существенно неоднородно и обеднено за счет поглощения растворенного в жидкости вещества на поверхности всех впереди идущих капель. В силу такого взаимодействия, внутренний массообмен в цепочках будет существенно заторможен (явление «экранирования») по сравнению с изолированными каплями.

В работах [62, 137] получено распределение концентрации в диффузионном пограничном слое каждой капли цепочки. Здесь в зависимости от расстояния между каплями приходится различать две ситуации: 1) когда диффузионный пограничный слой фиксированной капли взаимодействует с конвективно-погранслоевой областью диффузионного следа предыдущей капли (близкое взаимодействие), 2) когда взаимодействие происходит с областью смешения. В частности, в случае близкого взаимодействия сферических капель (пузырей) равного радиуса, расположенных на безразмерном расстоянии l : $\{O(1) < l < O(\sqrt{Pe})\}$; за характерный масштаб длины принимается радиус капли) друг за другом на оси однородного стокова потока, полный диффузионный поток на поверхность k -й капли цепочки (нумерация ведется от впереди идущей капли) определяется формулой [62, 137]

$$I_k = I_1(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}). \quad (4.15.3)$$

Из этого выражения следует, что полный диффузионный поток на вторую каплю более чем в два раза меньше потока на первую, а при $k \rightarrow \infty$, $I_k/I_1 \rightarrow 0$. Суммарный интегральный диффузионный поток на все капли цепочки равен

$$I_\Sigma = \sum_{i=1}^k I_i = I_1 \sqrt{k} \quad (4.15.4)$$

и существенно меньше аналогичного суммарного диффузионного потока для системы хаотически расположенных капель равного радиуса, между которыми нет диффузионного взаимодействия (в этом случае потоки просто складываются, что дает $I_\Sigma = I_1 k$).

В [63, 138] рассматривалась задача о конвективной диффузии к цепочке твердых реагирующих частиц. Механизм торможения (экранирования) массообмена в цепочках твердых частиц, а также качественное поведение такой системы являются теми же, что и в цепочке капель.

Здесь также получены формулы для диффузионных потоков и среднего числа Шервуда на поверхности реагирующих частиц цепочки. В случае близкого взаимодействия реагирующих твердых сферических частиц равного радиуса, расположенных на безразмерном расстоянии l : $\{O(1) < l < O(Pe^{1/3})\}$ друг за другом на оси однородного стокова потока, полный диффузионный поток на поверхность k -й сферы цепочки задается формулой [63, 138]

$$I_k = I_1 [k^{2/3} - (k-1)^{2/3}]. \quad (4.15.5)$$

Расположенные впереди по потоку частицы как бы экранируют

последующие, в результате чего интегральный поток на их поверхности монотонно убывает:

$$I_1 > I_2 > \dots > I_k > I_{k+1} > \dots,$$

а отношение I_k/I_1 стремится к нулю с ростом порядкового номера k . Из формулы (4.15.5) следует, что полный диффузионный поток на вторую сферу почти в два раза меньше полного диффузионного потока на первую, а на седьмую — уже более чем в три раза меньше, чем на первую.

Суммарный диффузионный поток на все частицы цепочки вычисляется с помощью (4.15.5):

$$I_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k I_i = I_1 k^{2/3}, \quad (4.15.6)$$

что значительно меньше суммарного потока, вычисляемого без учета взаимодействия диффузионных следов и погранслоев частиц.

4.16. Массо- и теплообмен при стесненном обтекании систем частиц, капель и пузырей

Ранее в разд. 2.8 были рассмотрены различные аспекты гидродинамики стесненного обтекания системы частиц, основанные на модели точечных сил и ячеечной модели. Ниже будет кратко описан массо- и теплообмен в таких системах при больших числах Пекле. Будем исследовать либо достаточно разреженные системы частиц, либо системы с нерегулярной структурой, когда диффузионным взаимодействием отдельных частиц можно пренебречь. (Регулярные дисперсные системы, в которых необходимо учитывать взаимодействие диффузионных следов и погранслоев отдельных частиц, исследовались в работе [69] на основе результатов, изложенных в разд. 4.15.)

При седиментации разреженных монодисперсных систем сферических частиц, капель и пузырей среднее число Шервуда можно вычислять с помощью формул (4.6.8), (4.6.17), где число Пекле определяется по скорости стесненного обтекания.

Монодисперсная система сферических частиц. Для определения коэффициентов массо- и теплопереноса при больших числах Пекле, как и в случае одиночной частицы, достаточно знать распределение вихря по поверхности твердых сфер. Поэтому при расчетах можно воспользоваться результатами разд. 4.6.

Рассмотрим массо- и теплообмен монодисперсной системы сферических частиц радиуса a с объемной плотностью твердой фазы ϕ . Используя поле скорости жидкости, полученное при малых числах Рейнольдса с помощью ячеечной модели Хаппеля (см. разд. 2.8), можно найти среднее число Шервуда [31, 33]

$$\text{Sh} = 0,625 \left[\frac{2(1 - \phi^{5/3})}{2 - 3\phi^{1/3} + 3\phi^{5/3} - 2\phi^2} \right]^{1/3} \text{Re}_\phi^{1/3}. \quad (4.16.1)$$

Здесь $\text{Re}_\phi = aU_\phi/D$ — число Пекле, определенное по скорости стесненного потока, которое в данном случае вычисляется по формуле

$$U_\phi = \frac{3}{2} \left(\frac{2 - 3\phi^{1/3} + 3\phi^{5/3} - 2\phi^2}{3 + 2\phi^{5/3}} \right) U_i, \quad (4.16.2)$$

где U_i — скорость одиночной сферы, падающей в безграничной жидкости.

Расчет коэффициентов массо- и теплообмена при умеренных и больших числах Рейнольдса связан с трудностями, возникающими при описании стесненных течений с учетом сил инерции при $\text{Re} \gg 1$. Важно отметить, однако, что поле течения в концентрированных дисперсных системах более слабо зависит от числа Рейнольдса, чем в случае одиночных частиц. Например, процесс возникновения за частицами областей с замкнутой циркуляцией жидкости, которые влияют на массо- и теплоперенос, весьма затягивается и завершается при значениях Re в несколько десятков или даже сотен. Указанное сглаживание возмущений в потоке при достаточно больших концентрациях дисперсной фазы позволяет по соответствующим данным в стоковом режиме приближенно оценивать процесс массо- и теплопереноса в области более высоких значений Re .

Экспериментальные данные по массо- и теплообмену в стесненном потоке часто обрабатывают в виде зависимости фактора Кольборна $\text{Ko} = \text{Sh}/(\text{Sc} \text{Re}_\phi)$ от числа Рейнольдса. Проведенное в работе [33] сравнение опытных данных по фактору Кольборна для твердых сфер при $0,5 \leq \phi \leq 0,7$ с теоретическими значениями при $\text{Re} < 1$ показало, что результаты расчетов для малых Re оказываются пригодными вплоть до $\text{Re} \leq 50$.

Для расчета среднего числа Шервуда (Нуссельта) в случае свободно насыпного слоя частиц различной формы в широком диапазоне чисел Рейнольдса можно использовать эмпирические формулы [94]

$$\begin{aligned} \text{Sh} &= 0,46 \text{Sc}^{0,33} \text{Re}_{\text{ef}}^{0,85} && \text{при } 0,1 \leq \text{Re}_{\text{ef}} \leq 1, \\ \text{Sh} &= 0,50 \text{Sc}^{0,33} \text{Re}_{\text{ef}}^{0,47} && \text{при } 1 \leq \text{Re}_{\text{ef}} \leq 15, \\ \text{Sh} &= 0,30 \text{Sc}^{0,33} \text{Re}_{\text{ef}}^{0,64} && \text{при } 15 \leq \text{Re}_{\text{ef}} \leq 4 \cdot 10^4, \end{aligned} \quad (4.16.3)$$

где эффективное число Рейнольдса определяется следующим образом:

$$\text{Re}_{\text{ef}} = \frac{a_e \langle U \rangle}{\nu}, \quad a_e = \frac{2(1 - \phi)}{s\phi}, \quad \langle U \rangle = \frac{U_i}{1 - \phi}. \quad (4.16.4)$$

Здесь a_e — эквивалентный радиус частиц, $\langle U \rangle$ — средняя скорость потока, $s = S_*/V_*$ — удельная площадь поверхности частиц, U_i — скорость набегающего потока (при $\phi = 0$).

Для монодисперсного слоя сферических частиц радиуса a в формулах (4.16.3), (4.16.4) следует положить $s = 3/a$.

Полидисперсная система сферических частиц. При анализе процессов массо- и теплообмена в полидисперсных системах вводят функцию распределения частиц по размерам $f(a)$, удовлетворяющую условию нормировки

$$\int_0^\infty f(a) da = 1. \quad (4.16.5)$$

Общее число частиц N в рассматриваемой системе вычисляется с помощью формул

$$N = \frac{3\phi V_*}{32\pi \bar{a}^3}, \quad \bar{a} = \left[\int_0^\infty a^3 f(a) da \right]^{1/3}, \quad (4.16.6)$$

где V_* — полный объем системы, \bar{a} — средний радиус частиц.

Размерная величина полного потока массы определяется так:

$$I_* = - \int_0^\pi \int_0^\infty ND \left(\frac{\partial C}{\partial R} \right)_{R=a} 2\pi a^2 \sin \theta f(a) da d\theta. \quad (4.16.7)$$

Используя результаты [307], полученные для поля течения с помощью модели точечных сил, можно найти среднее число Шервуда для полидисперсной системы частиц [31]

$$\text{Sh} = 0,625 (A \text{Pe}_\phi)^{1/3}, \quad \text{Pe}_\phi = aU_\phi/D, \quad (4.16.8)$$

где

$$A = 1 + \frac{a}{2 - 3\phi} \left\{ \left[9\phi(2 - 3\phi) \frac{b_1}{b_3} + \frac{81}{4} \phi^2 \left(\frac{b_2}{b_3} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{9}{2} \phi \frac{b_2}{b_3} \right\},$$

$$b_m = \int_0^\infty a^m f(a) da \quad (m = 1, 2, 3).$$

Если функция распределения известна, то вычисление моментов b_m не составляет труда. Обычно $f(a)$ задают формулами экспоненциального или максвелловского вида. Методы экспериментального определения $f(a)$ описаны в [169].

Монодисперсная система сферических капель и пузырей.

Для стоксова режима движения системы сферических капель и пузырей использование ячеечной модели Хаппеля (см. разд. 2.8) приводит к следующему выражению для среднего числа Шервуда [314]:

$$\text{Sh} = 0,461 \left\{ \frac{2(1 - \phi^{5/3}) \text{Re}_\phi}{(1 - \phi^{1/3})[3\beta + 2 + 2(\beta - 1)\phi^{5/3}] - \beta(1 - \phi^{5/3})} \right\}^{1/2}, \quad (4.16.9)$$

где $\text{Re}_\phi = aU_\phi/D$ — число Пекле, определяемое по скорости стесненного потока U_ϕ , β — отношение динамических вязкостей дисперсной и сплошной фазы (значение $\beta = 0$ соответствует газовому пузырю).

При больших числах Рейнольдса $\text{Re}_\phi = aU_\phi/\nu \geq 500$ скорость массопереноса в стесненном потоке газовых пузырьков можно вычислять с помощью формулы [253]

$$\text{Sh} = 0,8 \frac{\sqrt{\text{Pe}_\phi}}{\sqrt{1 - \phi}}. \quad (4.16.10)$$

Отметим, что в работе [161] на основе ячеечной модели течения исследовался массо- и теплообмен монодисперсных систем сферических капель, пузырей и твердых частиц при $\text{Re}_\phi < 250$ и $0 < \phi < 0,5$.

Массо- и теплоперенос при поперечном обтекании пакетов цилиндров. Рассмотрим массо- и теплообмен пакетов круговых цилиндров с коридорным и шахматным расположением. В первом ряду пакета трубы при достаточно больших числах Рейнольдса находятся в условиях, близких к условиям массообмена одиночного цилиндра (если межтрубный зазор порядка радиуса цилиндра), а в последующих рядах массоотдача возрастает. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что первые ряды действуют, как турбулизаторы потока. Стабилизация массо- и теплообмена происходит в пределах 10% после 4-го ряда и практически полностью после 14-го ряда. Далее при расчетах за характерный масштаб длины принимается радиус труб a , а за характерную скорость течения $U = U_i/\psi$, где U_i — скорость течения вдали от пакета цилиндров, ψ — коэффициент наибольшего сужения проходного сечения пакета по ходу потока.

Среднее число Шервуда в глубинном ряду (при $k \geq 14$, где k — номер ряда) для коридорных пакетов вычисляется по формулам [94]

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{\max} &= 0,59 \text{Sc}^{0,36} \text{Re}^{0,4} & \text{при } 1 < \text{Re} < 50, \\ \text{Sh}_{\max} &= 0,37 \text{Sc}^{0,36} \text{Re}^{0,5} & \text{при } 50 < \text{Re} < 200, \\ \text{Sh}_{\max} &= 0,21 \text{Sc}^{0,36} \text{Re}^{0,63} & \text{при } 200 < \text{Re} < 10^5. \end{aligned} \quad (4.16.11)$$

Для шахматного расположения труб в пакете среднее число Шервуда определяется с помощью выражений [94]

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{\max} &= 0,69 \text{Sc}^{0,36} \text{Re}^{0,4} && \text{при } 1 < \text{Re} < 20, \\ \text{Sh}_{\max} &= 0,50 \text{Sc}^{0,36} \text{Re}^{0,5} && \text{при } 20 < \text{Re} < 150, \\ \text{Sh}_{\max} &= 0,28 \text{Sc}^{0,36} \text{Re}^{0,6} && \text{при } 150 < \text{Re} < 10^5. \end{aligned} \quad (4.16.12)$$

Массо- и теплопередача в передних рядах пакета определяется с помощью приближенной формулы

$$\text{Sh}_k = \frac{k}{k + \alpha} \text{Sh}_{\max} \quad (k \geq 2), \quad (4.16.13)$$

в которой для коридорного расположения труб следует положить $\alpha = 0,3$, а для шахматного расположения — $\alpha = 0,5$.

5. Массообмен, осложненный поверхностной или объемной химической реакцией

В предыдущих главах рассматривались процессы переноса вещества к поверхностям частиц и капель в случае бесконечной скорости химической реакции (адсорбция, растворение). Кроме того, не рассматривались химические реакции, протекающие в объеме сплошной фазы. Наряду с этими случаями в приложениях важную роль играют массообменные процессы, в которых скорости изменения концентрации реагента при химическом превращении и диффузионного подвода реагента к поверхности оказываются сравнимыми по величине. Большое значение имеют также процессы с объемными химическими реакциями, протекающими с конечной скоростью.

В данной главе рассматриваются задачи о конвективном массообмене частицы с поступательным и сдвиговым потоком при протекании на межфазной поверхности химической реакции, скорость которой произвольным образом зависит от концентрации диффундирующего вещества. Получены простые приближенные формулы для определения среднего числа Шервуда при любой кинетике поверхностной химической реакции во всем диапазоне значений константы скорости реакции и чисел Пекле.

Исследовано влияние гомогенных химических реакций на интенсивность конвективного массообмена капель и частиц с потоком. Приведены простые приближенные формулы для расчета числа Шервуда при произвольной зависимости скорости объемной химической реакции от концентрации для поступательного и сдвигового течений.

5.1. Массоперенос, осложненный поверхностной химической реакцией

Наряду с рассмотренными в предшествующих главах случаями в приложениях важную роль играют поверхностные химические реакции, скорость которых конечна (см. разд. 3.1), концентрация на границах раздела здесь заранее неизвестна и устанавливается в ходе решения задачи. Допустим, что сферическая частица (капля, пузырь) радиуса a обтекается ламинарным потоком жидкости с характерной скоростью U , а R — радиальная координата, связанная с центром частицы. Считаем, что концентрация вдали от частицы постоянна и равна C_1 , а на межфазной поверхности протекает химическая реакция со скоростью $W_s = K_s F_s(C)$, где K_s — константа скорости поверхностной

реакции; функция F_s определяется кинетикой реакции и удовлетворяет условию $F_s(0) = 0$.

Соответствующая задача о распределении концентрации в сплошной фазе формулируется так:

$$\text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla)c = \Delta c; \quad (5.1.1)$$

$$r = 1, \quad \frac{\partial c}{\partial r} = -k_s f_s(c); \quad (5.1.2)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0. \quad (5.1.3)$$

Здесь безразмерные функции и параметры связаны с исходными размерными величинами соотношениями

$$c = \frac{C_i - C}{C_i}, \quad r = \frac{R}{a}, \quad \text{Pe} = \frac{aU}{D}, \quad k_s = \frac{aK_s F_s(C_i)}{DC_i}, \quad f_s(c) = \frac{F_s(C)}{F_s(C_i)}.$$

В частности, для реакции порядка n имеем $F_s = C^n$ и $f_s = (1 - c)^n$.

В общем случае функция f_s обладает свойствами

$$f_s(1) = 0, \quad f_s(0) = 1. \quad (5.1.4)$$

В работах [60, 279] для среднего числа Шервуда было предложено следующее приближенное уравнение:

$$\text{Sh} = k_s f_s \left(\frac{\text{Sh}}{\text{Sh}_\infty} \right), \quad (5.1.5)$$

которое с успехом можно использовать для определения Sh при произвольном обтекании сферических частиц, капель и пузырей для любой зависимости скорости поверхностной реакции от концентрации во всем диапазоне изменения числа Пекле: $0 \leq \text{Pe} < \infty$.

В формуле (5.1.5) величина $\text{Sh}_\infty = \text{Sh}_\infty(\text{Pe})$ соответствует диффузионному режиму реакции (т.е. предельному случаю $k_s \rightarrow \infty$) и должна определяться с помощью решения вспомогательной задачи (5.1.1), (5.1.3) с простейшим граничным условием на межфазной поверхности: $r = 1, \quad c = 1$. Соответствующие формулы для $\text{Sh}_\infty(\text{Pe})$ в случае различных течений были приведены ранее в разд. 4.7 и 4.8.

Для поверхностной реакции порядка n уравнение (5.1.5) принимает вид

$$\text{Sh} = k_s \left(1 - \frac{\text{Sh}}{\text{Sh}_\infty} \right)^n, \quad k_s = \frac{aK_s C_i^{n-1}}{D}.$$

Разрешая его относительно Sh , в частных случаях $n = 1/2, 1, 2$ можно получить соответственно

$$Sh = k_s \left[\left(\frac{k_s^2}{4 Sh_\infty^2} + 1 \right)^{1/2} - \frac{k_s}{2 Sh_\infty} \right] \quad \text{при } n = \frac{1}{2},$$

$$Sh = \left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{Sh_\infty} \right)^{-1} \quad \text{при } n = 1,$$

$$Sh = \frac{Sh_\infty^2}{4k_s} \left[\left(\frac{4k_s}{Sh_\infty} + 1 \right)^{1/2} - 1 \right]^2 \quad \text{при } n = 2.$$

В [60] показано, что уравнение (5.1.5) позволяет правильно найти в случае поступательного стока потока три, а в случае произвольного сдвигового — четыре первых члена асимптотического разложения числа Шервуда по малым числам Пекле для любой кинетики поверхностной химической реакции.

Пригодность приближенного выражения (5.1.5) при промежуточных числах Пекле $Pe = 10, 20, 50$ (этим значениям соответствовали числа Рейнольдса $Re = 10, 20, 0,5$) в случае поступательного обтекания твердой сферы проверялась путем сравнения с результатами численного решения соответствующей задачи для поверхностной химической реакции первого порядка. По данным [2, 28] следует, что погрешность уравнения (5.1.5) в этих случаях не превосходит 1,5%.

При больших числах Пекле для поверхностной реакции порядка $n = 1/2, 1, 2$ проверка пригодности уравнения (5.1.5) проводилась во всем диапазоне изменения параметра k_s путем сравнения его корня с результатами численного решения соответствующих интегральных уравнений для поверхностной концентрации (выведенных в приближении диффузионного пограничного слоя) в случае поступательного стока обтекания сферы, кругового цилиндра, капли и пузыря [60]. Результаты сопоставления для реакции второго порядка ($n = 2$) представлены на рис. 5.1 (для $n = 1/2$ и $n = 1$ точность уравнения (5.1.5) выше, чем для $n = 2$). Кривая 1, изображенная сплошной линией, соответствует реакции второго порядка $n = 2$. Видно, что максимальная погрешность наблюдается при $0,5 \leq k_s/Sh_\infty \leq 5,0$ и не превышает 6% — для твердой сферы (кривая 2), 8% — для кругового цилиндра (кривая 3) и 12% — для сферической капли (кривая 4).

В работе [249] проводилась проверка пригодности уравнения (5.1.5) при $n = 1/2, 1, 2$ во всем диапазоне изменения параметров k_s и Pe для сдвигового стока обтекания сферы. Во всех рассмотренных случаях максимальная погрешность не превышала 5%.

Отметим, что в случае частиц неправильной формы для расчета среднего числа Шервуда следует использовать более общее уравнение

$$\frac{Sh}{Sh_0} = f_s \left(\frac{Sh}{Sh_\infty} \right), \quad (5.1.6)$$

Рис. 5.1. Зависимость числа Шервуда от константы скорости для поверхностной химической реакции второго порядка: 1 — по формуле (5.1.5), 2 — для твердой сферы, 3 — для кругового цилиндра, 4 — для сферической капли и пузыря

где Sh_0 — асимптотика величины Sh при $k_s \rightarrow 0$.

5.2. Диффузия к вращающемуся диску и плоской пластине при протекании объемной реакции

Массоперенос к поверхности диска, вращающегося в жидкости. Рассмотрим диффузию к поверхности диска, вращающегося в жидкости с постоянной угловой скоростью ω . Считаем, что процесс осложнен необратимой объемной химической реакцией, скорость которой равна $W_v = K_v F_v(C)$.

При больших числах Пекле распределение концентрации в жидкости описывается следующим уравнением и граничными условиями:

$$\frac{d^2 c}{dy^2} + \text{Pe} y^2 \frac{dc}{dy} = k_v f_v(c); \quad (5.2.1)$$

$$y = 0, \quad c = 1; \quad y \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0. \quad (5.2.2)$$

Здесь безразмерные величины и параметры введены по формулам

$$c = \frac{C}{C_s}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad \text{Pe} = 0,51 \frac{\nu}{D}, \quad a = \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^{1/2},$$

$$k_v = \frac{a^2 K_v F_v(C_s)}{D C_s}, \quad f_v(c) = \frac{F_v(C)}{F_v(C_s)},$$

где Y — расстояние от поверхности диска, a — характерный масштаб длины, C_s — концентрация у поверхности диска, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Считаем, что $W_v \geq 0$ и $F_v(0) = 0$. Поэтому функция $f_v(c)$ обладает свойствами $f_v(0) = 0$ и $f_v(1) = 1$.

Для приближенного определения безразмерного диффузионного потока на поверхность диска $j = -(dc/dy)_{y=0}$ удобно использовать кубическое уравнение

$$j^3 - 2k_v \langle f_v \rangle j - 6[\Gamma(1/3)]^{-3} \text{Pe} = 0, \quad (5.2.3)$$

где угловые скобки означают среднюю интегральную величину кинетической функции f_v :

$$\langle f_v \rangle = \int_0^1 f_v(c) dc. \quad (5.2.4)$$

При отсутствии объемной реакции $k_v = 0$ уравнение (5.2.3) дает точный ответ (3.2.11). При больших значениях $k_v \rightarrow \infty$ и фиксированном Pe приближенное уравнение (5.2.3) обеспечивает правильный асимптотический результат для любой кинетической зависимости $f_v = f_v(c)$.

Для степенных реакций имеем $f_v(c) = c^n$. В этом случае в уравнении (5.2.3) следует положить

$$\langle f_v \rangle = \frac{1}{n+1}. \quad (5.2.5)$$

Из формулы (5.2.5) видно, что диффузионный поток уменьшается с ростом показателя n и увеличивается при уменьшении безразмерной константы скорости реакции k_v .

Для реакций порядка $n = 1/2, 1, 2$ численное решение задачи (5.2.1), (5.2.2) получено в [277]. Максимальная погрешность кубического уравнения для диффузионного потока (5.2.3) в указанных случаях во всем диапазоне изменения безразмерной константы скорости реакции k_v составляет менее 3%.

Массоперенос к плоской пластинке, обтекаемой поступательным потоком. Исследуем стационарную конвективную диффузию к поверхности плоской пластинки, продольно обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса (течение Блазиуса). Предполагается, что массоперенос осложнен объемной реакцией. В приближении диффузионного пограничного слоя соответствующая задача о распределении концентрации описывается уравнением и граничными условиями

$$\frac{1,33}{4} \frac{y}{x^{1/2}} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1,33}{16} \frac{y^2}{x^{3/2}} \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - k_v f_v(c); \quad (5.2.6)$$

$$x = 0, \quad c = 0; \quad y = 0, \quad c = 1; \quad y \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0. \quad (5.2.7)$$

Здесь безразмерные величины введены по формулам

$$c = \frac{C}{C_s}, \quad x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad a = \frac{\nu^{1/3} D^{2/3}}{U_i},$$

$$k_v = \frac{a^2 K_v F_v(C_s)}{DC_s}, \quad f_v(c) = \frac{F_v(C)}{F_v(C_s)},$$

где U_i — невозмущенная скорость жидкости вдали от пластины; X — расстояние, отсчитываемое от передней кромки вдоль по пластине; Y — расстояние от поверхности пластины.

Распределение безразмерного локального диффузионного потока $j = -(\partial c / \partial y)_{y=0}$ вдоль поверхности пластинки приближенно можно определить путем решения кубического уравнения

$$j^3 - 2k_v \langle f_v \rangle j - (0,399)^3 x^{-3/2} = 0, \quad (5.2.8)$$

которое дает правильный асимптотический результат в обоих предельных случаях при $k_v \rightarrow 0$ и $k_v \rightarrow \infty$ для любой кинетики объемной химической реакции. Для степенных реакций в уравнение (5.2.8) следует подставить величину (5.2.5).

5.3. Внешние задачи массообмена частиц, капель и пузырей с потоком при различных числах Пекле и наличии объемной химической реакции

Рассмотрим стационарный массообмен между сферической частицей (каплей, пузырем) радиуса a и ламинарным потоком жидкости. Считаем, что в сплошной фазе происходит объемная химическая реакция $W_v = K_v F_v(C)$. В безразмерных переменных процесс переноса реагента в сплошной фазе описывается следующим уравнением и граничными условиями:

$$\text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla)c = \Delta c - k_v f_v(c); \quad (5.3.1)$$

$$r = 1, \quad c = 1; \quad r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0, \quad (5.3.2)$$

где $r = R/a$, $\text{Pe} = aU/D$, $k_v = a^2 K_v F_v(C_s)/(DC_s)$, R — радиальная координата, связанная с центром частицы, U — характерная скорость потока; безразмерная концентрация c и кинетическая функция f_v введены так же, как и в уравнении (5.2.1).

Массообмен частицы с неподвижной средой ($\text{Pe} = 0$). При $\text{Pe} = 0$ задача (5.3.1), (5.3.2) допускает точное аналитическое

решение для объемной химической реакции первого порядка, что соответствует линейной зависимости $f_v = c$. В этом случае имеем

$$c = \frac{1}{r} \exp[k_v^{1/2}(1-r)]. \quad (5.3.3)$$

Среднее число Шервуда, соответствующее решению (5.3.3), определяется формулой

$$\text{Sh} = 1 + \sqrt{k_v}. \quad (5.3.4)$$

Для произвольной зависимости кинетической функции от концентрации среднее число Шервуда для сферической частицы в неподвижной жидкости можно вычислять с помощью выражения [280]

$$\text{Sh} = 1 + \left[2k_v \int_0^1 f_v(c) dc \right]^{1/2}. \quad (5.3.5)$$

Формула (5.3.5) обеспечивает точный асимптотический результат в обоих предельных случаях при $k_v \rightarrow 0$ и $k_v \rightarrow \infty$ для любой функции $f_v(c)$. Для реакции первого порядка $f_v = c$ приближенная зависимость (5.3.5) дает точный ответ (5.3.4). Максимальная погрешность формулы (5.3.5) для химической реакции порядка $n = 1/2$ ($f_v = \sqrt{c}$) во всем диапазоне изменения безразмерной константы скорости реакции k_v составляет 5%; для реакции второго порядка ($f_v = c^2$) погрешность формулы (5.3.5) равна 7% [280]. Среднее число Шервуда уменьшается при увеличении порядка реакции n и увеличивается с ростом параметра k_v .

Для частиц несферической формы, окруженных неподвижной средой, в объеме которой происходит химическая реакция первого порядка, среднее число Шервуда можно вычислять с помощью приближенного выражения

$$\text{Sh} = \text{Sh}_0 + \sqrt{k_v}. \quad (5.3.6)$$

Здесь Sh_0 — число Шервуда, соответствующее массообмену частицы с неподвижной средой без реакции. Каждое слагаемое в (5.3.6) должно быть обезразмерено с помощью одного и того же характерного масштаба длины. Значение Sh_0 можно определять по формуле $\text{Sh}_0 = a\Pi/S_*$, где a — величина, выбранная за масштаб длины, S_* — площадь поверхности частицы; фактор Π для некоторых частиц несферической формы указан в табл. 4.2.

Для частиц несферической формы в случае более сложной кинетической функции $f_v(c)$ для расчета числа Шервуда можно использовать приближенную формулу (5.3.5), в правой части которой первое слагаемое (равное единице) следует заменить на Sh_0 .

Умеренные и большие числа Пекле. Объемная реакция первого порядка. Для сферических частиц, капель и пузырей (при

лимитирующем сопротивлении сплошной фазы) в случае объемной реакции первого порядка среднее число Шервуда можно вычислять по формуле [278]

$$\text{Sh} = 1 + [(\text{Sh}_0 - 1)^2 + k_v]^{1/2}. \quad (5.3.7)$$

Здесь $\text{Sh}_0 = \text{Sh}_0(\text{Pe})$ — число Шервуда при отсутствии химической реакции, когда $k_v = 0$.

Выражение (5.3.7) дает точные асимптотики во всех четырех предельных случаях: $k_v \rightarrow 0$ и $k_v \rightarrow \infty$; $\text{Pe} \rightarrow 0$ и $\text{Pe} \rightarrow \infty$ (считается, что на межфазной поверхности есть критические точки).

При обтекании сферической капли поступательным стоксовым потоком максимальная погрешность формулы (5.3.7) составляет около 7%. Для стокова обтекания твердой сферы поступательным и линейным деформационным сдвиговым потоком в (5.3.7) следует положить $\text{Sh}_0 = \text{Sh}_p$, где величина Sh_p вычисляется соответственно с помощью выражений (4.7.9) и (4.8.5).

При больших числах Пекле для приближенных расчетов среднего числа Шервуда можно использовать формулу [146]

$$\text{Sh} = \sqrt{k_v} \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt{k_v}}{\text{Sh}_0} \right), \quad (5.3.8)$$

где $\text{Sh}_0 = \lim_{k_v \rightarrow 0} \text{Sh}$.

Зависимости вспомогательного числа Шервуда Sh_0 от числа Пекле Pe для поступательного стокова обтекания сферической частицы и капли определяются правой частью формул (4.6.8) и (4.6.17). В случае линейного сдвигового стокова течения значения Sh_0 приведены в четвертой колонке табл. 4.4.

Вместо формулы (5.3.8) для расчета среднего числа Шервуда можно использовать кубическое уравнение [72]

$$\text{Sh}^3 - k_v \text{Sh} - \text{Sh}_0^3 = 0, \quad (5.3.9)$$

которое приводит к более точным результатам.

В табл. 5.1 указана максимальная погрешность формулы (5.3.8) и уравнения (5.3.9) во всем диапазоне изменения параметра k_v для шести различных случаев сферических частиц, капель и пузырей. Все оценки найдены путем сравнения с результатами аналитического решения задачи (5.3.1), (5.3.2), полученными в приближении диффузионного пограничного слоя [146].

Формулу (5.3.8) и уравнение (5.3.9) можно использовать для расчета среднего числа Шервуда в случае частиц, капель и пузырей несферической формы, при больших числах Пекле.

ТАБЛИЦА 5.1

Максимальная погрешность формулы (5.3.8) и кубического уравнения (5.3.9) для различных случаев обтекания сферических капель, пузырей и твердых частиц при больших числах Пекле в случае объемной химической реакции первого порядка

№	Дисперсная фаза	Вид течения	Погрешность формулы (5.3.8), в %	Погрешность уравнения (5.3.9), в %
1	Капля, пузырь	Осесимметричный сдвиговый стоксов поток	2	1
2	Капля, пузырь	Поступательный стоксов поток	2,6	1,6
3	Капля, пузырь	Плоский сдвиговый стоксов поток	3,8	2,8
4	Пузырь	Ламинарный поступательный поток при больших числах Рейнольдса	2,6	1,6
5	Пузырь	Осесимметричный сдвиговый поток при больших числах Рейнольдса	2	1
6	Твердая частица	Поступательный стоксов поток	3,4	2,4

Большие числа Пекле. Произвольная скорость объемной реакции. Для произвольной скорости объемной химической реакции среднее число Шервуда при больших числах Пекле можно определять с помощью приближенной зависимости

$$\text{Sh} = (2k_v \langle f_v \rangle)^{1/2} \text{cth} \left[\frac{(2k_v \langle f_v \rangle)^{1/2}}{\text{Sh}_0} \right] \quad (5.3.10)$$

или путем решения кубического уравнения [276]

$$\text{Sh}^3 - 2k_v \langle f_v \rangle \text{Sh} - \text{Sh}_0^3 = 0. \quad (5.3.11)$$

В общем случае величина $\langle f_v \rangle$ вычисляется по формуле (5.2.4). Для реакции порядка n следует использовать выражение (5.2.5).

5.4. Внутренние задачи массопереноса при наличии объемной химической реакции

Исследуем теперь внутренние задачи массопереноса, осложненные объемной химической реакцией. Считаем, что рассматриваемый диффузионный процесс квазистационарен и происходит внутри твердой

сферической полости или капли радиуса a , которая заполнена неподвижной или движущейся средой.

В безразмерных переменных распределение концентрации в области $0 \leq r \leq 1$ описывается уравнением (5.3.1) и первым граничным условием (5.3.2).

Диффузия в сферической полости, заполненной неподвижной средой ($Pe = 0$). Для объемной реакции первого порядка при $Pe = 0$ точное аналитическое решение сформулированной задачи имеет вид

$$c = \frac{1}{r} \frac{\text{sh}(r\sqrt{k_v})}{\text{sh}(\sqrt{k_v})}, \quad (5.4.1)$$

а соответствующее среднее число Шервуда на внутреннюю поверхность полости определяется формулой

$$\text{Sh} = -1 + k_v^{1/2} \text{cth} k_v^{1/2}. \quad (5.4.2)$$

Для степенной реакции n -го порядка среднее число Шервуда можно вычислять с помощью приближенной зависимости [280]

$$\text{Sh} = -\frac{2}{n+1} + \left(\frac{2k_v}{n+1}\right)^{1/2} \text{cth} \left(\frac{n+1}{2} k_v\right)^{1/2}, \quad (5.4.3)$$

которая обеспечивает правильный асимптотический результат при малых и больших значениях параметра k_v .

При $n = 1$ формула (5.4.3) дает точный ответ (5.4.2). Сопоставление приближенного выражения (5.4.3) с результатами численного решения соответствующей внутренней задачи (5.3.1), (5.3.2) для реакций порядка $n = 1/2$ и $n = 2$ во всем диапазоне изменения параметра k_v составляет 5%.

Для произвольной зависимости скорости объемной химической реакции от концентрации целесообразно использовать приближенную формулу

$$\text{Sh} = -2\langle f_v \rangle + (2k_v \langle f_v \rangle)^{1/2} \text{cth} \left(\frac{k_v}{2\langle f_v \rangle}\right)^{1/2}, \quad (5.4.4)$$

где среднее значение $\langle f_v \rangle$ определяется интегралом (5.2.4).

Для степенной реакции любого порядка зависимость (5.4.4) переходит в (5.4.3).

Диффузия в полости произвольной формы, заполненной неподвижной средой ($Pe = 0$). Метод асимптотических аналогий (см. разд. 4.1) позволяет обобщить формулы (5.4.2) — (5.4.4) на случай полости произвольной формы. В частности, для объемной реакции первого порядка получаем зависимость

$$\text{Sh} = -\frac{S}{3V} + \sqrt{k_v} \text{cth} \left(\frac{3V}{S} \sqrt{k_v}\right), \quad (5.4.5)$$

где S и V — безразмерные площадь поверхности и объем полости (все безразмерные величины в этой формуле вводятся с помощью одного и того же характерного масштаба длины).

Для сферической полости, подставляя в (5.4.5) значения $S = 4\pi$, $V = 4\pi/3$, приходим к точному выражению (5.4.2).

При произвольной скорости объемной химической реакции для среднего числа Шервуда можно использовать формулу

$$\text{Sh} = -\frac{2S}{3V} \langle f_v \rangle + (2k_v \langle f_v \rangle)^{1/2} \text{cth} \left(\frac{9V^2 k_v}{2S^2 \langle f_v \rangle} \right)^{1/2},$$

которая обобщает приближенную зависимость (5.4.4) на случай полости несферической формы.

Для реакции первого порядка средняя по объему концентрация внутри полости вычисляется так:

$$\bar{c} = \frac{\text{Sh}}{k_v} \frac{S}{V}, \quad \text{где} \quad \bar{c} = \frac{1}{V} \int_v c \, dv. \quad (5.4.6)$$

Отметим, что связь (5.4.6) между величинами \bar{c} и Sh является точной. Подставляя в (5.4.6) выражение (5.4.5), можно получить формулу для расчета средней концентрации.

Массоперенос внутри капли (полости) при различных числах Пекле. Рассмотрим массоперенос внутри полости (или капли) произвольной формы, в которой происходит циркуляция жидкости.

Интегрируя уравнение (5.3.1) по объему полости v , после некоторых преобразований получим [60]

$$\text{Sh} = \frac{k_v}{S} \int_v f_v(c) \, dv. \quad (5.4.7)$$

Для монотонных кинетических зависимостей $f_v = f_v(c)$ с учетом неравенства $f_v(c) \leq f_v(1) = 1$ при $0 \leq c \leq 1$ из формулы (5.4.7) получаем грубую оценку для среднего числа Шервуда:

$$\text{Sh} \leq k_v V / S. \quad (5.4.8)$$

В случае реакции нулевого порядка знак равенства в выражении (5.4.8) соответствует точному результату. Важно отметить, что оценка (5.4.8) не зависит от числа Пекле.

В предельном случае $\text{Pe} \rightarrow \infty$ при $k_v = O(1)$ во внутренних задачах конвективного массопереноса концентрация выравнивается вдоль

каждой линии тока. При этом в силу оценки (5.4.8) среднее число Шервуда равномерно по числу Пекле ограничено сверху: $Sh \leq \text{const } k_v$. Последнее означает, что одним увеличением интенсивности циркуляции (т.е. увеличением скорости жидкости, что соответствует $Pe \rightarrow \infty$) при умеренных значениях k_v не может быть сформирован внутренний диффузионный пограничный слой. Указанное свойство среднего числа Шервуда типично для всех внутренних задач, что коренным образом отличается от поведения этой величины для соответствующих внешних задач массопереноса, где при $Pe \rightarrow \infty$ вблизи межфазной поверхности, как правило, возникает тонкий пограничный слой и выполняется свойство $\lim_{Pe \rightarrow \infty} Sh = \infty$.

Для реакции первого порядка в случае стоксова обтекания сферической капли поступательным потоком асимптотическое решение внутренней задачи (5.3.1), (5.3.2) при $Pe \rightarrow \infty$ приводит к следующему выражению для среднего числа Шервуда [222]:

$$Sh = \frac{1}{3}k_v \left(1 - \frac{3}{2}k_v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{k_v + \lambda_m} \right), \quad (5.4.9)$$

где первые пять значений коэффициентов A_m и λ_m указаны в формуле (4.13.1).

На рис. 5.2 приведена зависимость среднего числа Шервуда от безразмерного параметра k_v для объемной химической реакции первого порядка в задаче о квазистационарном массопереносе внутри капли в случае предельных значений чисел Пекле: $Pe = 0$ (формула (5.4.2)) и $Pe = \infty$ (формула (5.4.9)). Штриховая линия соответствует грубой оценке сверху, которая задается равенством (5.4.8). При промежуточных числах Пекле $0 < Pe < \infty$ среднее число Шервуда попадает в заштрихованную область, ограниченную предельными кривыми при $Pe = 0$ и $Pe = \infty$. Видно, что изменение параметра Pe (при $k_v = O(1)$) слабо влияет на средний приток реагента к поверхности капли, т.е. никаким увеличением числа Пекле нельзя добиться единственного увеличения числа Шервуда. В частности, при $k_v = 10$ максимальное относительное приращение среднего числа Шервуда за счет увеличения числа Пекле от нуля до бесконечности составляет всего около 25%. Последнее означает, что главным механизмом, влияющим на поведение основных характеристик интенсивности массопереноса внутри капли, является химическая реакция, в то время как скорость цирку-

ляции жидкости и геометрия потока слабо влияют на поведение этих характеристик.

Штриховая линия на рис. 5.2 соответствует реакции нулевого порядка. Среднее число Шервуда монотонно уменьшается с ростом порядка реакции n . Поэтому при $0 < n < 1$ кривые, отвечающие предельному числу Шервуда при $Pe = \infty$, расположены между штриховой линией и верхней сплошной кривой. При уменьшении порядка реакции n кривые, соответствующие среднему числу Шервуда при $Pe = 0$ и $Pe = \infty$, постепенно сближаются и поднимаются вверх к штриховой линии. В предельном случае $n = 0$ все три кривые сливаются в одну, т.е. для реакции нулевого порядка среднее число Шервуда вообще не зависит от числа Пекле.

При больших значениях константы скорости объемной химической реакции k_v вблизи поверхности капли возникает тонкий пограничный слой, толщина которого при малых и умеренных числах Пекле имеет порядок $k_v^{-1/2}$ и внутри которого растворенное в жидкости вещество успевает полностью прореагировать. При дальнейшем увеличении числа Пекле за счет интенсивности циркуляции жидкости внутри капли вещество уже не успевает полностью прореагировать в пограничном слое и начинает, выходя из погранслоя, проникать в глубь капли, переносясь вдоль линий тока, расположенных вблизи оси потока. При достаточно развитой циркуляции внутри капли возникает полностью сформировавшийся диффузионный след с существенно неоднородным распределением концентрации, который «пронизывает» всю каплю и соединяет конец и начало диффузионного пограничного слоя. В случае объемной химической реакции первого порядка соответствующий анализ конвективного массопереноса внутри капли при $Pe \gg 1$ и $k_v \gg 1$ был проведен в работах [54, 55]. Следует отметить, что в этом случае, ввиду равномерной по числу Пекле оценки (5.4.8), интенсивность массопереноса внутри капли лимитируется скоростью объемной химической реакции.

Рис. 5.2. Зависимость среднего числа Шервуда от безразмерной константы скорости объемной химической реакции первого порядка (сплошные линии: нижняя соответствует $Pe = 0$, а верхняя — $Pe = \infty$) для внутренней задачи; штриховая линия соответствует реакции нулевого порядка

5.5. Нестационарный массообмен с объемной реакцией

Необратимые реакции. Рассмотрим нестационарный массообмен газа с неподвижной средой, в объеме которой происходит необратимая химическая реакция со скоростью $W_v = K_v F_v(C)$. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ концентрация растворенного в жидкости вещества равна нулю, а при $t > 0$ концентрация на межфазной поверхности одинакова и равна C_s .

В безразмерных переменных исследуемый процесс описывается следующими уравнением, начальным и граничными условиями:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - k_v f_v(c); \quad (5.5.1)$$

$$\tau = 0, \quad c = 0; \quad x = 0, \quad c = 1; \quad x \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0, \quad (5.5.2)$$

при записи которых были использованы обозначения $x = X/a$, $\tau = Dt/a^2$, где X — координата, отсчитываемая от межфазной поверхности в глубь жидкости; a — размерная величина, выбранная за масштаб длины; остальные безразмерные функции и параметры в (5.5.1), введены как в уравнении (5.2.1).

Для реакции первого порядка, что соответствует $f_v = c$, точное аналитическое решение задачи (5.5.1), (5.5.2) имеет вид

$$c = \frac{1}{2} \left[\exp(x\sqrt{\tau}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+2\tau\sqrt{k_v}}{2\sqrt{\tau}} \right) + \exp(-x\sqrt{\tau}) \operatorname{erfc} \left(\frac{x-2\tau\sqrt{k_v}}{2\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad (5.5.3)$$

где $\operatorname{erfc} z$ — дополнительный интеграл вероятностей:

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z, \quad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz.$$

Дифференцируя (5.5.3) по x и полагая $x = 0$, найдем выражение для безразмерного диффузионного потока вещества через межфазную поверхность

$$j = (\pi\tau)^{-1/2} \exp(-k_v\tau) + k_v^{1/2} \operatorname{erf}(k_v\tau)^{1/2}. \quad (5.5.4)$$

Для произвольной кинетики объемной химической реакции диффузионный поток можно вычислять с помощью приближенной формулы [148]

$$j = (\pi\tau)^{-1/2} \exp(-2k_v\langle f_v \rangle\tau) + (2k_v\langle f_v \rangle)^{1/2} \operatorname{erf}(2k_v\langle f_v \rangle\tau), \quad (5.5.5)$$

где среднее значение $\langle f_v \rangle$ определяется согласно (5.2.4).

Зависимость (5.5.5) для любой функции $f_v = f_v(c)$ обеспечивает правильный асимптотический результат в четырех предельных случаях: $k_v \rightarrow 0$, $k_v \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$ и приводит к точному решению (5.5.4) для реакции первого порядка.

Конкретные значения $\langle f_v \rangle$ для некоторых типичных реакций [123] приведены ниже.

Название реакции	n -го порядка	Ферментативная	Автокаталитическая
Кинетическая функция $f_v(c)$	c^n	$\frac{c}{1+Mc}$	$\frac{c}{(1+Mc)^2}$
$\langle f_v \rangle$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{2}{M^2} [M - \ln(1+M)]$	$\frac{2}{M^2} [\ln(1+M) - \frac{M}{1+M}]$

Максимальная погрешность формулы (5.5.5) в указанных случаях при $n = 0,5$, $n = 2$; $M = 0,5$, $M = 2$ во всем диапазоне изменения безразмерной константы скорости объемной химической реакции составляет около трех процентов.

Обратимая реакция первого порядка. Рассмотрим теперь реакцию, которая описывается уравнением $A \rightleftharpoons B$. Пусть K_1 и K_{-1} — константы скоростей прямой и обратной реакции. В данном случае 1 моль растворяемого газа A , реагируя, дает 1 моль продукта B . Концентрацию газа будем обозначать буквой C_A , а концентрацию продукта — буквой C_B .

Процесс массопереноса в жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial X^2} = \frac{\partial C_A}{\partial t} + K_1 \left(C_A - \frac{1}{q} C_B \right), \quad (5.5.6)$$

$$D_B \frac{\partial^2 C_B}{\partial X^2} = \frac{\partial C_B}{\partial t} - K_1 \left(C_A - \frac{1}{q} C_B \right) \quad (5.5.7)$$

с начальными и граничными условиями

$$C_A = C_A^{(i)}, \quad C_B = qC_A^{(i)} \quad \text{при } t = 0, \quad (5.5.8)$$

$$C_A = C_A^{(s)}, \quad \partial C_B / \partial X = 0 \quad \text{при } X = 0, \quad (5.5.9)$$

$$C_A = C_A^{(i)}, \quad C_B = qC_A^{(i)} \quad \text{при } X \rightarrow \infty. \quad (5.5.10)$$

При формулировке задачи (5.5.6) — (5.5.10) было принято, что первоначальная концентрация растворенного газа в любой точке жидкости равна $C_A^{(i)}$, а соответствующая ей равновесная концентрация

продукта B составляет $C_B^{(i)} = qC_A^{(i)}$, где $q = K_1/K_{-1}$ — константа равновесия. Второе граничное условие (5.5.9) означает, что продукт не пересекает поверхность жидкости.

Введем коэффициент ускорения по формуле $\mathcal{E} = j_A(K_1)/j_A(0)$, где j_A — диффузионный поток газа через межфазную поверхность $X = 0$. Результаты решения задачи (5.5.6) — (5.5.10) приводят к следующей зависимости [70]:

при $q > 1$:

$$\mathcal{E} = 1 + \frac{q^2}{q^2 - 1} \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \exp(\alpha^2) [\operatorname{erf}(\alpha q) - \operatorname{erf}(\alpha)] - \frac{q}{2\alpha} \left(\frac{\pi}{q^2 - 1} \right)^{1/2} \operatorname{erf}(\alpha \sqrt{q^2 - 1}), \quad \text{где} \quad \alpha = \left[\frac{K_1 t}{q(q-1)} \right]^{1/2}; \quad (5.5.11)$$

при $q < 1$:

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{q^2}{\gamma(1 - q^2)} \exp(-\gamma^2) \left[\int_{\gamma}^{q\gamma} \exp(z^2) dz \right] + \frac{q}{2\gamma} \left(\frac{\pi}{1 - q^2} \right)^{1/2} \operatorname{erf}(\gamma \sqrt{1 - q^2}), \quad \text{где} \quad \gamma = \left[\frac{K_1 t}{q(1 - q)} \right]^{1/2}. \quad (5.5.12)$$

На практике обратимые реакции, имеющие истинно первый порядок в обоих направлениях, обычно не встречаются. Однако часто приходится иметь дело с реакциями первого порядка по отношению к концентрации растворенного газа, в которых концентрация реагента фактически неизменна в объеме, поэтому прямая реакция имеет псевдопервый порядок. В то же время концентрация продуктов может быть также фактически неизменной во всем объеме жидкости, и, следовательно, скорость обратной реакции одна и та же во всех точках. Тогда в уравнение (5.5.6) вместо соотношения C_B/q можно подставить постоянную величину $C_A^{(e)}$, характеризующую равновесную концентрацию растворенного газа A в массе жидкости. В итоге получим задачу для относительной концентрации $c = \frac{C_A - C_A^{(e)}}{C_A^{(s)} - C_A^{(e)}}$, которая после перехода к безразмерным величинам совпадает с линейной задачей (5.5.1), (5.5.2) при $f_v = c$.

6. Термогидродинамические явления

В предыдущих главах считалось, что поле течения жидкости не зависит от распределения температуры или концентрации. Однако существует целый ряд явлений, в которых влияние этих факторов на гидродинамику является определяющим. В основе такого влияния лежит зависимость различных физических параметров жидкостей, например, плотности, поверхностного натяжения, вязкости от температуры или концентрации.

Так к примеру, возникновение конвективного движения жидкости в сосуде, противоположные боковые стенки которого поддерживаются при различных температурах, объясняется тем, что при нормальных условиях плотность жидкости обычно уменьшается с ростом температуры. Более легкая жидкость у нагретой стенки стремится подняться вверх, а более тяжелая жидкость у противоположной стенки — опуститься. Это один из примеров проявления так называемой гравитационной (в данном случае термогравитационной) конвекции.

Непостоянство коэффициента поверхностного натяжения вдоль границы раздела двух несмешивающихся жидкостей проявляется в том, что на поверхности возникают дополнительные касательные напряжения, называемые капиллярными, которые могут существенно влиять на движение жидкостей, а в случае отсутствия гравитации и других сил полностью определяют ее движение. Явления, обусловленные возникновением сил, связанных с градиентами поверхностного натяжения, носят общее название эффекта Марангони. В частности, если существенна температурная зависимость поверхностного натяжения, то говорят о термокапиллярном эффекте, если концентрационная — о концентрационно-капиллярном эффекте.

Непостоянство вязкости жидкости при наличии неоднородного поля температуры может приводить не только к количественному изменению поля течения, но и качественно новым эффектам.

Интенсивное изучение многочисленных задач, связанных с влиянием температуры или вязкости на движение жидкости, помимо чисто научного интереса вызвано возможностью их широкого приложения во многих современных технологиях, и прежде всего в химической и космической.

В дальнейшем упомянутые выше термогидродинамические явления рассматриваются на примере эффекта Марангони в плоских жидких слоях и каплях.

6.1. Термогравитационная и термокапиллярная конвекция в слое жидкости

Термогравитационная конвекция. Рассмотрим движение вязкой жидкости в бесконечно протяженном слое постоянной толщины $2h$. Сила тяжести направлена перпендикулярно слою. На нижней плоской твердой поверхности поддерживается постоянный градиент температуры. Неоднородность поля температуры приводит к двум эффектам, способным вызвать движение жидкости: термогравитационному, связанному с тепловым расширением жидкости и появлением архимедовых сил, и термокапиллярному (если вторая поверхность является свободной), связанному с появлением касательных напряжений на межфазной границе вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры.

При формулировке двумерной задачи используем прямоугольную систему координат X, Y , где ось X направлена противоположно поддерживаемому на нижней поверхности градиенту температуры, а ось Y — вертикально вверх. Начало координат выбирается посередине слоя, поэтому $-h \leq Y \leq h$. Поля скорости и температуры описываются следующими уравнениями [48, 49]:

$$V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_X}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} \right), \quad (6.1.1)$$

$$V_X \frac{\partial V_Y}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_Y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_Y}{\partial Y^2} \right) + \gamma g T_*, \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} = 0, \quad (6.1.3)$$

$$V_X \frac{\partial T_*}{\partial X} + V_Y \frac{\partial T_*}{\partial Y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T_*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial Y^2} \right). \quad (6.1.4)$$

Здесь P — давление (в котором уже учтен потенциал поля тяжести), χ — температуропроводность, g — ускорение силы тяжести, γ — коэффициент теплового расширения.

Термогравитационное движение описывается в приближении Бусинеска, согласно которому в уравнениях движения (6.1.1) — (6.1.3) и теплопроводности (6.1.4) непостоянство плотности учитывается лишь в члене, отвечающем за архимедову силу (последнее слагаемое в уравнении (6.1.2)) и пропорциональному отклонению T_* температуры от среднего значения. Термокапиллярное движение создается поверхностными силами, которые учитываются в граничном условии на свободной поверхности (см. ниже).

Для одномерного течения жидкости вдоль оси X исходные уравнения (6.1.1) — (6.1.4) принимают вид [16]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} &= \nu \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2}, & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} &= \gamma g T_*, \\ V_X \frac{\partial T_*}{\partial X} &= \chi \left(\frac{\partial^2 T_*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial Y^2} \right). \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Рассмотрим первоначально случай только термогравитационной конвекции. Он соответствует ситуации, когда обе границы слоя $Y = h$ и $Y = -h$ являются теплоподводящими стенками, на которых поддерживается постоянный градиент температуры. Граничные условия в этом случае записываются в виде

$$T_* = -AX, \quad V_X = 0 \quad \text{при} \quad Y = \pm h. \quad (6.1.6)$$

Здесь A — величина градиента температуры (при $A < 0$ градиент направлен в ту же сторону, что и ось X). В (6.1.6) принято, что температура отсчитывается от своего значения при $X = 0$.

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{h}, & y &= \frac{Y}{h}, & v &= \frac{h}{\nu} V_X, & p &= \frac{P}{Ah^2 \rho \gamma g}, & T &= \frac{T_*}{Ah}, \\ \text{Pr} &= \frac{\nu}{\chi}, & \text{Gr} &= \frac{Ah^4 \gamma g}{\nu^2}, \end{aligned}$$

где Pr — число Прандтля, а Gr — число Грассгофа. Подставляя их в уравнения (6.1.5) и граничные условия (6.1.6), имеем

$$\text{Gr} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = T, \quad (6.1.7)$$

$$\text{Pr} v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

$$\begin{aligned} v = 0, \quad T = -x & \quad \text{при} \quad y = -1, \\ v = 0, \quad T = -x & \quad \text{при} \quad y = 1. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Решение задачи (6.1.7), (6.1.8) ищем в виде

$$v = v(y), \quad p = -(b+y)x + p_1(y), \quad T = -x + T_1(y). \quad (6.1.9)$$

В результате для распределения скорости $v(y)$ получим

$$v(y) = \frac{1}{6} \text{Gr} (y - y^3) + \frac{1}{2} b \text{Gr} (1 - y^2). \quad (6.1.10)$$

В решение (6.1.10) входит неизвестная постоянная b . Вычисляя расход жидкости в слое

$$q \equiv \int_{-1}^1 v(y) dy = \frac{2}{3} b Gr \quad (6.1.11)$$

и задав его равным нулю, имеем $b = 0$. Отметим, что далее в этом разделе, как и в [16], рассматривается случай $q = 0$. Однако не лишена физического смысла задача о потоке с ненулевым расходом, тогда постоянная $b \neq 0$ и связана с величиной расхода формулой (6.1.11).

Используя уравнения (6.1.7), формулы (6.1.9) и граничные условия (6.1.8), для функций $T_1(y)$ и $p_1(y)$ получено

$$\begin{aligned} T_1(y) &= \frac{1}{360} Pr Gr (3y^5 - 10y^3 + 7y), \\ p_1(y) &= \frac{1}{720} Pr Gr (y^6 - 5y^4 + 7y^2) + \text{const}. \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Видно, что давление определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Отметим, что использованное условие нулевого расхода основано на предположении о «повороте» потока, который осуществляется при $x \rightarrow \pm\infty$. Рассматриваемая модель может служить асимптотическим описанием движения вдали от концов закрытого с обеих сторон плоского зазора.

Совместное проявление термокапиллярной и термогравитационной конвекции. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, когда одна из границ канала (верхняя) свободна и поверхностное натяжение σ на ней зависит от температуры по линейному закону. В балансе касательных напряжений на свободной поверхности помимо вязких будут участвовать и термокапиллярные напряжения. Соответствующее граничное условие запишется в виде:

$$\rho\nu \frac{\partial V_X}{\partial Y} = \sigma' \frac{\partial T_*}{\partial X} \quad \text{при } Y = h, \quad (6.1.13)$$

где $\sigma' = \frac{d\sigma}{dT_*} = \text{const}$. Здесь в левой части стоит вязкое напряжение, а в правой — термокапиллярное.

Безразмерные уравнения и граничные условия для этой задачи по-прежнему будут иметь вид (6.1.7), (6.1.8), кроме второго граничного условия (6.1.8), вместо которого будем использовать

$$\frac{\partial v}{\partial y} = Ma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad T = -x \quad \text{при } y = 1, \quad (6.1.14)$$

где $\text{Ma} = \frac{Ah^2\sigma'}{\rho\nu^2}$ — число Марангони, которое при таком определении может иметь разный знак* в зависимости от знаков сомножителей A и σ' . Общее решение задачи (6.1.7), (6.1.14) можно по-прежнему искать в виде (6.1.9). При этом решение может быть представлено в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых имеет достаточно простую физическую интерпретацию: движение типа Пуазейля, возникшее под действием постоянного безразмерного градиента давления b вдоль слоя, термогравитационное и термокапиллярное движение. Распределение скорости при таком движении имеет вид

$$v(y) = \frac{1}{2}b \text{Gr}(-y^2 + 2y + 3) + \frac{1}{6} \text{Gr}(-y^3 + 3y + 2) - \text{Ma}(y + 1). \quad (6.1.15)$$

Постоянная b может быть определена, как и прежде, из условия нулевого расхода. Для нее получено значение

$$b = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \text{Ma} \text{Gr}^{-1}. \quad (6.1.16)$$

Из формулы (6.1.15) видно, что в отсутствие термогравитационных сил и продольного градиента давления, т.е. когда $b = \text{Gr} = 0$, профиль скорости в слое линейный. При этом расход потока оказывается ненулевым. В то же время выражения (6.1.15) и (6.1.16) показывают, что безрасходный поток под действием сил Марангони может возникнуть только при наличии продольного градиента давления.

Распределение скорости при нулевом расходе принимает вид

$$v(y) = \frac{1}{24}\text{Gr}(-4y^3 + 3y^2 + 6y - 1) - \frac{1}{8} \text{Ma}(3y^2 + 2y - 1). \quad (6.1.17)$$

С учетом (6.1.17) для T_1 можно найти

$$T_1 = \frac{1}{480} \text{Pr} \text{Gr}(4y^5 - 5y^4 - 20y^3 + 10y^2 + 16y - 5) + \frac{1}{96} \text{Pr} \text{Ma}(3y^4 + 4y^3 - 6y^2 - 4y + 3). \quad (6.1.18)$$

Отметим, что поле скорости (6.1.17) не изменится, если считать, что линейное распределение температуры поддерживается лишь на нижней твердой поверхности, в то время как свободная поверхность теплоизолирована. В этом случае вместо второго граничного условия (6.1.14) записывается условие: $\partial T/\partial y = 0$ при $y = 1$, а решение по-прежнему представляется в виде (6.1.9).

* Важно отметить, что для подавляющего большинства жидкостей поверхностное натяжение уменьшается при увеличении температуры и, следовательно, справедливо неравенство $\sigma' < 0$ (далее в этом разделе будут описаны жидкости, у которых в определенном интервале изменения температуры наблюдается $\sigma' > 0$).

В заключение заметим, что для обоснования рассмотренной постановки задачи следует дополнить исходные предположения допущением о плоской форме свободной поверхности. Действительно, в рассматриваемых случаях нормальные напряжения на поверхности жидкости не сохраняют постоянного значения, и это должно приводить к ее искривлению. Однако этого не происходит при большой величине g , когда любое внутреннее давление уравнивается за счет бесконечно малого изменения формы поверхности.

Термокапиллярное движение в слое жидкости при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры.

Ранее зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры считалась линейной. Однако для ряда жидкостей, таких как водные растворы высокомолекулярных спиртов и некоторые бинарные металлические сплавы, экспериментально установлено, что зависимость $\sigma = \sigma(T)$ отличается от линейной и имеет немонотонный характер [254, 312, 313]. На рис. 6.1 представлены экспериментальные данные [254] согласно которым $\sigma = \sigma(T)$ может иметь четко выраженный минимум (цифры соответствуют числу атомов углерода в молекуле спирта; опыты проводились при низких концентрациях раствора, поскольку высокомолекулярные спирты плохо растворимы в воде). Эту зависимость можно приближенно аппроксимировать следующим соотношением:

Рис. 6.1. Результаты экспериментального исследования нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{2}\alpha(T_* - T_0)^2, \quad (6.1.19)$$

где T_0 — значение температуры, соответствующее экстремальной величине коэффициента поверхностного натяжения.

Рассмотрим задачу об установившемся термокапиллярном движении в слое жидкости толщиной h . Движение считается двумерным. Зависимость поверхностного натяжения от температуры принимается квадратичной в соответствии с выражением (6.1.19). Термогравитационный эффект не учитывается. Предполагается, что на твердой нижней поверхности поддерживается линейное распределение температуры, а плоская поверхность слоя теплоизолирована. Начало декартовой системы координат X, Y помещается на твердой поверхности,

где достигается значение температуры T_0 . Поля скорости и температуры будут описываться уравнениями (6.1.1) — (6.1.4) при $\gamma g \equiv 0$.

Граничные условия, с учетом квадратичной зависимости поверхностного натяжения от температуры (6.1.19), запишутся в виде

$$V_X = 0, \quad V_Y = 0, \quad T_* = T_0 - AX \quad \text{при} \quad Y = 0, \quad (6.1.20)$$

$$V_Y = 0, \quad \frac{\partial T_*}{\partial Y} = 0, \quad \rho\nu \frac{\partial V_X}{\partial Y} = \frac{\partial \sigma}{\partial X} \quad \text{при} \quad Y = h. \quad (6.1.21)$$

Согласно (6.1.20), на твердой поверхности выполнены условия прилипания и непротекания и поддерживается линейное распределение температуры. В соответствии с (6.1.21) на свободной поверхности выполнены условия непротекания, отсутствия потока тепла через свободную поверхность и баланса касательных термокапиллярных и вязких напряжений. Правую часть в последнем условии (6.1.21), с учетом квадратичной зависимости поверхностного натяжения от температуры (6.1.19), следует переписать с помощью равенства:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = \alpha(T_* - T_0) \frac{\partial T_*}{\partial X}.$$

Решение ищется в виде [59]

$$\begin{aligned} V_X &= Ux\psi'(y), \quad V_Y = -U\psi(y), \\ T_* &= T_0 - Ahx\Theta(y), \quad P = P_0 - \frac{1}{2}\rho U^2[\lambda x^2 + f(y)], \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

где $x = X/h$, $y = Y/h$ — безразмерные координаты, $U = \nu/h$ — характерная скорость, $P_0 = \text{const}$ — давление в критической точке на твердой поверхности (там, где $T_* = T_0$), $\psi' = d\psi/dy$.

Для определения неизвестных функций $\psi(y)$, $\Theta(y)$, $f(y)$ и постоянной λ , которая является собственным значением, получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \psi''' + \psi\psi'' - (\psi')^2 + \lambda &= 0, \quad f = \psi^2 + 2\psi', \\ \Theta'' - \text{Pr}(\psi'\Theta - \psi\Theta') &= 0; \\ \psi = 0, \quad \psi' = 0, \quad \Theta = 1 &\quad \text{при} \quad y = 0; \\ \psi = 0, \quad \psi'' = \text{Ma}\Theta^2, \quad \Theta' = 0 &\quad \text{при} \quad y = 1, \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

где $\text{Ma} = \frac{\alpha A^2 h^3}{\rho\nu^2}$ — модифицированное для рассматриваемого случая число Марангони.

Для выяснения особенностей термокапиллярного течения рассмотрим приближенное аналитическое решение задачи при малых

Рис. 6.2. Линии тока и профиль продольной составляющей скорости для термокапиллярного течения в слое жидкости

значениях числа Марангони, полагая в дальнейшем, что число Прандтля порядка единицы.

При $Ma = 0$ задача имеет решение $\psi = 0$, $f = 0$, $\lambda = 0$, $\Theta = 1$, которое соответствует покоящейся жидкости при однородном распределении температуры поперек слоя.

При $|Ma| \ll 1$ решение получено методом малых возмущений. Для поля скорости, давления и температуры с точностью до членов порядка $O(Ma^2)$ имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} V_X &= \frac{1}{4}UMa xy(3y - 2), & V_Y &= \frac{1}{4}UMa(1 - y)y^2, \\ T_* &= T_0 - Ahx \left[1 - \frac{1}{48}Ma \operatorname{Pr}(4 - 3y)y^3\right], & U &= \nu/h, \\ P &= P_0 - \frac{1}{4}\rho U^2 Ma [3(y^2 - x^2) - 2y]. \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

На рис. 6.2 показаны линии тока термокапиллярного течения (6.1.24), а также профиль продольной безразмерной составляющей скорости потока $u = V_X/U$. Направления, показанные стрелками, соответствуют случаю $Ma > 0$.

Полученные результаты показывают, что термокапиллярные силы порождают сложное циркуляционное движение жидкости в слое, причем поток меняет направление на глубине, равной $1/3$ толщины слоя. Как и следовало ожидать, поток симметричен относительно плоскости $X = 0$ с температурой T_0 ; вдоль этой плоскости происходит истечение жидкости из придонного слоя.

6.2. Термокапиллярный дрейф капли

Термокапиллярное движение капли во внешнем градиенте температуры. Рассмотрим задачу о термокапиллярном эффекте для капли, помещенной в неоднородную по температуре жидкую среду [319]. При наличии внешнего градиента температура не будет постоянной вдоль поверхности капли, поэтому следует ожидать появления термокапиллярных напряжений, которые направлены от горячего полюса капли к холодному, если ко-

эффицент поверхностного натяжения убывает с ростом температуры (рис. 6.3). Когда гравитация и другие силы отсутствуют, то индуцируемое течение вынуждает каплю дрейфовать в направлении возрастания температуры. Это так называемый термокапиллярный дрейф капли. Здесь эффект Марангони проявляется в чистом виде. При наличии других сил, например, силы тяжести, эффект Марангони для такой капли будет состоять в изменении скорости ее движения.

Оценим действующую на каплю термокапиллярную силу и скорость термокапиллярного дрейфа капли в отсутствие гравитации. Считаем внешнюю жидкость бесконечно протяженной, а неоднородное поле температуры вдали от капли — линейным по X :

$$T_*^{(1)} \rightarrow AX + T_0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty. \quad (6.2.1)$$

Указанные предположения оправданы, когда размер капли много меньше как характерного размера внешней жидкости, так и пространственного масштаба изменения градиента температуры.

Рассмотрим установившееся движение капли со скоростью U_i . Как и ранее, предполагаем, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры, а остальные физические параметры жидкостей постоянны. Считаем также, что капля сохраняет сферическую форму вследствие большого капиллярного давления, препятствующего ее изменению.

Воспользуемся сферической системой координат, связанной с центром движущейся капли, в которой радиальная координата R отсчитывается от центра капли, а угол θ — от положительного направления оси X . Все параметры и искомые величины вне и внутри капли будем помечать соответственно индексами «1» и «2».

Ограничимся изучением случая медленных движений (малые числа Рейнольдса), которые описываются уравнениями Стокса (2.1.2), а в уравнении теплопроводности пренебрегаем конвективным членом (предположение о малости числа Пекле).

Сначала получим решение более простой тепловой части задачи, которая при $Pe = 0$ может рассматриваться независимо. Температура

Рис. 6.3. Приведение капли в движение путем приложения градиента температуры. Тонкие стрелки указывают направление термокапиллярных напряжений на поверхности капли и индуцируемого ими течения, а толстая стрелка — направление движения капли (считается, что поверхностное натяжение убывает с ростом температуры)

вне и внутри капли удовлетворяет стационарному уравнению теплопроводности

$$\Delta T_*^{(1)} = 0, \quad \Delta T_*^{(2)} = 0. \quad (6.2.2)$$

Вдали от капли используется граничное условие (6.2.1), а на ее поверхности должны выполняться условия непрерывности температуры и теплового потока:

$$T_*^{(1)} = T_*^{(2)}, \quad \kappa_1 \frac{\partial T_*^{(1)}}{\partial R} = \kappa_2 \frac{\partial T_*^{(2)}}{\partial R} \quad \text{при } R = a, \quad (6.2.3)$$

где κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности капли и окружающей жидкости.

Решение задачи (6.2.1) — (6.2.3) находится методом разделения переменных и имеет вид:

$$T_*^{(1)} = Aa \left(\frac{R}{a} + \frac{1 - \delta}{2 + \delta} \frac{a^2}{R^2} \right) \cos \theta + T_0, \quad T_*^{(2)} = \frac{3A}{2 + \delta} R \cos \theta + T_0, \quad (6.2.4)$$

где $\delta = \kappa_2 / \kappa_1$.

Рассмотрим теперь гидродинамическую часть задачи, которая описывается уравнениями Стокса (2.1.2). Компоненты скорости жидкости вдали от капли удовлетворяют условию (2.2.2), внутри капли решение ограничено. На межфазной поверхности выполняется условие непротекания (2.2.6) и условие непрерывности касательной компоненты скорости (2.2.7). Кроме того, используется граничное условие баланса тангенциальных напряжений:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial V_\theta^{(1)}}{\partial R} - \frac{V_\theta^{(1)}}{R} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial V_\theta^{(2)}}{\partial R} - \frac{V_\theta^{(2)}}{R} \right) = -\sigma' \frac{1}{R} \frac{\partial T_*^{(1)}}{\partial \theta} \quad \text{при } R = a, \quad (6.2.5)$$

где в левой части стоят вязкие напряжения, а в правой — термокапиллярные. Здесь $\sigma' = d\sigma/dT_*^{(1)} < 0$.

По формулам (2.1.3) введем функции тока $\Psi^{(m)}$ в каждой фазе ($m = 1, 2$). Воспользуемся далее общим решением (2.1.6), в котором сохраним только члены при $n = 2$. Определяя неизвестные постоянные из граничных условий (2.2.2), (2.2.6), (2.2.7), получим

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= \frac{1}{2} a^2 U_i \left[\frac{R^2}{a^2} + B \frac{R}{a} - (B + 1) \frac{a}{R} \right] \sin^2 \theta, \\ \Psi^{(2)} &= \frac{1}{4} a^2 U_i (2B + 3) \left(\frac{R^4}{a^4} - \frac{R^2}{a^2} \right) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Постоянная B определяется из условия (6.2.5) после подстановки туда (6.2.4) и (6.2.6):

$$B = -\frac{1}{1 + \beta} \left(1 + \frac{3}{2} \beta - \frac{\text{Ma}}{2 + \delta} \right), \quad \text{Ma} = \frac{Aa\sigma'}{\mu_1 U_i}, \quad (6.2.7)$$

где Ma — число Марангони.

Формулы (6.2.6), (6.2.7) позволяют вычислить силу, действующую на каплю: $F = 4\pi\mu_1 a B U_i$. Силу удобно представить в виде суммы:

$$F = F_V + F_T, \quad (6.2.8)$$

$$F_V = -2\pi\mu_1 a U_i \frac{2 + 3\beta}{1 + \beta}, \quad F_T = -\frac{4\pi a^2 A \sigma'}{(2 + \delta)(1 + \beta)}.$$

Первое слагаемое F_V в (6.2.8) представляет собой результат Адамара — Рыбчинского для силы сопротивления капли в поступательном потоке (2.2.15). Второе слагаемое F_T есть термокапиллярная сила, действующая на каплю во внешнем градиенте температуры за счет эффекта Марангони.

Скорость движения капли при наличии термокапиллярной силы и в отсутствие гравитации можно найти, если положить силу F в (6.2.8) равной нулю. В результате получим

$$U_T = -\frac{2aA\sigma'}{\mu_1(2 + \delta)(2 + 3\beta)}. \quad (6.2.9)$$

Из этой формулы при $\sigma' = d\sigma/dT_*^{(1)} < 0$ следует, что знаки U_T и A совпадают, поэтому капля будет дрейфовать в сторону возрастания температуры.

Заметим, что результат (6.2.9) для скорости термокапиллярного дрейфа капли в отсутствие гравитации справедлив для произвольных, а не только для малых чисел Рейнольдса. При $B = 0$ течение (6.2.6) удовлетворяет полным уравнениям движения без отбрасывания инерционного члена (уравнениям Навье — Стокса). Однако при этом требование малости числа Пекле сохраняется.

Результаты для газового пузыря получаются из соответствующих результатов для капли, если в них положить $\delta = \beta = 0$.

В работах [24, 25, 301, 303] приведены результаты, уточненные с учетом приближений более высокого порядка по малым числам Рейнольдса и Пекле. Так для скорости термокапиллярного дрейфа пузыря получено [301]:

$$U_T = U_0 \left(1 - \frac{301}{7200} \text{Pe}^2 \right),$$

где $U_0 = -\frac{Aa\sigma'}{2\mu_1}$, $\text{Pe} = \frac{a^2|A\sigma'|}{\mu_1\chi}$. Здесь U_0 — скорость дрейфа пузыря в нулевом приближении по числу Пекле. Число Пекле Pe определено по скорости U_0 . Число Рейнольдса по-прежнему считается нулевым (стоксово приближение). Видно, что учет конвективного массопереноса приводит к уменьшению скорости дрейфа пузыря.

В [130] рассмотрен термокапиллярный дрейф пузыря во внешнем градиенте температуры при больших числах Пекле. Для скорости дрейфа получено:

$$U_T = -\frac{Aa\sigma'}{3\mu_1}.$$

Анализ задачи при произвольных числах Рейнольдса и Пекле возможен лишь численными методами (см., например, [158, 305]).

Нестационарная задача о разгоне капли внешним градиентом температуры рассмотрена в [6, 130].

Результаты (6.2.8) для термокапиллярной силы F_T и (6.2.9) для скорости термокапиллярного дрейфа, полученные в предположении постоянства градиента температуры вдали от капли, оказываются справедливыми и в случае, когда этот градиент не является постоянным. При этом их удобно переписать в векторном виде [302]:

$$\vec{F}_T = -\frac{4\pi a^2 \sigma' \vec{A}}{(2 + \delta)(1 + \beta)}, \quad \vec{U}_T = -\frac{2a\sigma' \vec{A}}{\mu_1(2 + \delta)(2 + 3\beta)}.$$

Однако здесь под величиной \vec{A} теперь надо понимать градиент поля температуры во внешней жидкости в случае отсутствия капли, но вычисленный в том месте, где в данный момент находится центр капли.

При исследовании термокапиллярного движения капель и пузырей во внешнем градиенте температуры рассматривались некоторые осложняющие обстоятельства: взаимодействие капли с плоской стенкой [258] или взаимодействие капель и пузырей друг с другом [193]. Так, в частности, в [193] показано, что если при движении в поле тяжести взаимодействие капель радиуса a убывает с расстоянием l между ними как a/l , то при термокапиллярном дрейфе — как $(a/l)^3$.

Термокапиллярное движение капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры. В работе [65] рассмотрена капля, находящаяся в постоянном внешнем градиенте температуры, с нелинейной зависимостью поверхностного натяжения от температуры. В тех случаях, когда эта зависимость немонотонна, в отсутствие гравитации возможно появление плоскостей равновесия капль — устойчивых и неустойчивых. Наличие таких плоскостей может помешать, например, технологическому процессу удаления пузырьков из расплава в условиях микрогравитации при помощи приложения температурного градиента.

Анализ показывает, что в случае, когда зависимость (6.1.19) имеет минимум, т.е. при $\alpha > 0$, плоскость равновесия будет плоскостью притяжения, а равновесие — устойчивым (скорость дрейфа вне плоскости равновесия всегда направлена к плоскости). При $\alpha < 0$ плоскость равновесия будет плоскостью отталкивания, а равновесие — неустойчивым (скорость дрейфа направлена от плоскости). Движение двух

капель, находящихся в плоскости равновесия, происходит навстречу друг другу, если $\alpha > 0$; при $\alpha < 0$ капли расходятся.

Термокапиллярное движение капли под действием излучения. Создание градиента температуры во внешней жидкости является одним из простейших, но не единственным способом приведения капли в состояние термокапиллярного дрейфа. Так, в случае непрозрачной капли и прозрачной внешней жидкости на каплю, находящуюся в равномерно нагретой жидкости, можно направить световой луч. При этом излучение, поглощаясь в капле, будет неравномерно нагревать ее, приводя к появлению термокапиллярных напряжений. При $d\sigma/dT_* < 0$ капля будет дрейфовать в сторону своей более нагретой части, т.е. навстречу лучу.

Соответствующая задача рассмотрена в работах [155, 268]. Излучение в [155] считалось имеющим форму плоскопараллельного луча, поглощающегося на поверхности капли, как на черном теле, но свободно проходящего через внешнюю жидкость, причем температура вдали от капли принималась постоянной. Для термокапиллярной силы и скорости термокапиллярного дрейфа капли под действием излучения в отсутствие гравитации были получены выражения (J — мощность потока излучения):

$$F_T = \frac{2\pi a^2 J \sigma'}{3\kappa_1(2 + \delta)(1 + \beta)}, \quad U_T = \frac{aJ\sigma'}{3\mu_1\kappa_1(2 + \delta)(2 + 3\beta)}. \quad (6.2.10)$$

Здесь величины F_T и U_T — положительны, если соответствующие векторы направлены в сторону распространения излучения, и отрицательны в противоположном случае. Как следует из второй формулы (6.2.10), при $\sigma' < 0$ капля дрейфует навстречу лучу.

Общее выражение для капиллярной силы в стоковом приближении. Во всех рассмотренных ранее случаях дело обстоит так, что распределение поверхностного натяжения вдоль поверхности, как следствие пренебрежения конвективной теплопроводностью, получалось независимо от движения жидкости. Формализуя данное обстоятельство, можно рассмотреть эффект Марангони для капли, когда коэффициент поверхностного натяжения считается заданной функцией координат на поверхности капли без конкретизации причины, вызвавшей эту неоднородность. В этом случае выражение для действующей на каплю капиллярной силы имеет вид [302]

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2(1 + \beta)} \int_S \nabla_s \sigma dS, \quad (6.2.11)$$

где ∇_s — градиент вдоль поверхности, а интегрирование производится по всей площади поверхности капли.

Приравнивая сумму силы сопротивления F_V в (6.2.8) и капиллярной силы (6.2.11) нулю, можно найти скорость капиллярного дрейфа капли:

$$\vec{U}_T = -\frac{1}{4\pi\mu_1 a(2+3\beta)} \int_S \nabla_s \sigma dS. \quad (6.2.12)$$

Полученные таким образом результаты обладают достаточной общностью. Они охватывают все случаи, когда капиллярные напряжения на поверхности капли стационарны и не зависят от движения жидкости. При соответствующей конкретизации функции σ формулы (6.2.8) и (6.2.9), выведенные для случая $Re = 0$, могут быть получены из (6.2.11), (6.2.12).

Более подробно с последними достижениями в этой области можно познакомиться в работах [162, 286].

6.3. Хемокапиллярный эффект при движении капли

Все рассмотренные выше случаи проявления эффекта Марангони для капли имеют одну общую черту, а именно наличие некоторой внешней несимметрии, которая не связана с движением. Существенно иные ситуации, когда градиент поверхностного натяжения возникает лишь в процессе движения жидкостей вне и внутри капли, в свою очередь обратно влияя на движение, исследованы в [100, 163].

Так, в [100] анализируется влияние поверхностно-активных веществ (ПАВ) на движение капли. В состоянии покоя поверхностная пленка однородна, и градиент поверхностного натяжения не возникает. Однако, если капля перемещается, то поверхностно-активные вещества перераспределяются вдоль поверхности, создавая такой градиент. Поскольку поверхностное натяжение обычно убывает с ростом концентрации, капиллярный эффект в этом случае будет состоять в торможении поверхности и увеличении сопротивления капли. Если капиллярный эффект велик, то он приводит к полному прекращению движения на поверхности капли или пузыря, поэтому закон сопротивления для них становится таким же, как и для твердой сферической частицы. Этот вывод имеет многочисленные экспериментальные подтверждения [100].

Далее, следуя [163], более подробно остановимся на другом механизме возникновения непостоянства поверхностного натяжения в процессе движения. Рассмотрим каплю, движущуюся с постоянной скоростью, на поверхности которой протекает экзо- или эндотермическая химическая реакция. Считается, что в реакции участвует

поверхностно-активное вещество, растворенное в окружающей каплю жидкости. Предполагаем, что температура жидкости и концентрация ПАВ вдали от капли постоянны, в то время как концентрация поверхностно-активного вещества (реагента) на межфазной поверхности обращается в нуль (диффузионный режим реакции). В такой симметричной ситуации непостоянство температуры, а следовательно, и термокапиллярные напряжения могут возникнуть лишь при движении жидкостей.

Для того чтобы подчеркнуть роль химической реакции, описываемые далее термокапиллярные эффекты принято называть хемотермокапиллярными.

Задачу о стационарном обтекании капли с поверхностной химической реакцией однородным поступательным стоксовым потоком условно можно разделить на три части.

Для гидродинамической части задачи сохраняются все основные предположения, уравнения и граничные условия, используемые ранее в разд. 6.2.

Концентрационная часть задачи описывается уравнением конвективной диффузии (4.4.3), где у функции тока необходимо поставить индекс единица, и граничными условиями постоянства концентрации на межфазной поверхности и вдали от капли (4.4.4), (4.4.5). Диффузионное число Пекле Pe считается малым.

Что касается тепловой части задачи, то в рассматриваемом случае для описания термокапиллярного эффекта недостаточно ограничиться нулевым приближением поля температуры по малому числу Пекле, поскольку в этом случае температура оставалась бы постоянной вдоль поверхности капли. Поэтому вместо уравнений (6.2.2) здесь используются более общие уравнения конвективной теплопроводности:

$$\Delta T_*^{(1)} = \chi_1 (\vec{V}^{(1)} \cdot \nabla) T_*^{(1)}, \quad \Delta T_*^{(2)} = \chi_2 (\vec{V}^{(2)} \cdot \nabla) T_*^{(2)}, \quad (6.3.1)$$

Вдали от капли используется граничное условие (6.2.1) при $A = 0$, а на межфазной поверхности должны выполняться условие непрерывности температуры (см. первое граничное условие в (6.2.3)) и условие баланса теплового потока с учетом тепловыделения за счет поверхностной реакции:

$$\kappa_1 \frac{\partial T_*^{(1)}}{\partial R} - \kappa_2 \frac{\partial T_*^{(2)}}{\partial R} = QD \frac{\partial C}{\partial R} \quad \text{при } R = a, \quad (6.3.2)$$

где Q — тепловой эффект химической реакции ($Q > 0$ — экзотермическая, $Q < 0$ — эндотермическая реакция).

Отметим, что связь между гидродинамической, диффузионной и тепловой задачей осуществляется с помощью конвективных членов в

уравнениях диффузии и теплопроводности и двух граничных условий (6.2.5) и (6.3.2). Для получения главных членов разложения по малым диффузионным и тепловым числам Пекле конвективными членами можно пренебречь и связь между указанными выше задачами реализуется только за счет граничных условий.

Решение гидродинамической части задачи, как и ранее можно записать в виде формул для функций тока (6.2.6), где постоянная B остается пока неопределенной.

Находя приближенное решение тепловой и диффузионной задач методом сращиваемых асимптотических разложений (см. разд. 4.4) с функцией тока (6.2.6) и ограничиваясь нулевыми и первыми членами разложений по малым числам Пекле с помощью граничных условий (6.2.5) и (6.3.2) можно вычислить значение постоянной B и силу действующую на каплю:

$$F = 4\pi\mu_1 a U_i B, \quad B = -\frac{1 + \frac{3}{2}\beta + 3m}{1 + \beta + m}, \quad m = -\frac{\text{Ma Pe}_T(1 - L)}{12(2 + \delta)}. \quad (6.3.3)$$

Здесь $\text{Ma} = \frac{QC_i D \sigma'}{\varkappa_1 \mu_1 U_i}$ — число Марангони, $L = \frac{\chi_1}{D}$ — число Льюиса. При выводе формулы (6.3.3) считались выполненными условия: $\text{Pe} \approx \text{Pe}_T$ и $\text{Ma Pe} \approx 1$.

Скорость движения капли в поле тяжести находится из условия обращения суммы силы (6.3.3), силы тяжести и выталкивающей силы в нуль

$$U_i = \frac{(\rho_1 - \rho_2)a^2}{3\mu_1 B} g. \quad (6.3.4)$$

При $B < 0$ сила (6.3.3), как обычно, является силой сопротивления. При $B > 0$ сила (6.3.3) превращается в силу тяги будучи сонаправленной скорости движения капли.

При $B > -\frac{3}{2}$ картина обтекания капли аналогична обтеканию по Адамару — Рыбчинскому (рис. 2.2). С уменьшением величины B интенсивность циркуляции жидкости внутри капли уменьшается и при $B = -\frac{3}{2}$ обращается в нуль. При дальнейшем уменьшении ($B < -\frac{3}{2}$) возникает циркуляционная зона вокруг капли. Направление внутренней циркуляции становится противоположным по отношению к соответствующему направлению в случае Адамара — Рыбчинского. При этом, как следует из (6.3.3), действующая на каплю сила сопротивления превышает силу Стокса, действующую на твердую сферу.

В предельном случае $\beta \rightarrow \infty$ (большая вязкость вещества капли) термокапиллярный эффект не влияет на движение, $B \rightarrow -\frac{3}{2}$, капля будет обтекаться как твердая сфера и из (6.3.3) получается закон Стокса (2.2.5). При $m = 0$ (отсутствие тепловыделения или незави-

симось поверхностного натяжения от температуры) термокапиллярный эффект отсутствует, а из (6.3.3) получается обычная сила сопротивления при обтекании капли поступательным потоком (2.2.15).

Отметим, что может осуществляться режим так называемого автономного движения, когда капля самопроизвольно, в отсутствие каких-либо внешних вынуждающих обстоятельств, дрейфует с постоянной ненулевой скоростью [51, 52]. При этом другой возможный режим движения — покой — оказывается неустойчивым. Эффекты, аналогичные рассмотренным в данном разделе, могут вызываться хемоконцентрационно-капиллярным механизмом [53], а также другими, отличными от поверхностной химической реакции факторами, например, тепловыделением внутри капли [156].

Замечание. Задача о массопереносе к капле для диффузионного режима реакции на ее поверхности в условиях термокапиллярного движения формулируется так же, как в его отсутствие (см. разд. 4.4), с учетом соответствующих изменений в поле скоростей жидкости. В [50] рассмотрена более сложная задача для хемокапиллярного эффекта с тепловыделением, описанного в [51–53, 163]. Считалось, что на поверхности капли протекает химическая реакция с конечной скоростью.

7. Гидродинамика, массо- и теплообмен в неньютоновских жидкостях

До сих пор рассматривались вопросы движения и тепломассообмена ньютоновских сред, которые характеризуются линейной связью между касательными напряжениями и соответствующими скоростями деформации сдвига (причем при нулевой скорости деформации касательные напряжения отсутствуют). Указанному закону хорошо подчиняются газы и однофазные низкомолекулярные, т.е. простые, жидкости. На практике, однако, нередко встречаются более сложные по структуре жидкости, например, растворы и расплавы полимеров, дисперсные текучие системы (суспензии, эмульсии, пасты), которые имеют нелинейную зависимость между касательными напряжениями и скоростями сдвиговой деформации. Такие жидкости называют неньютоновскими.

В этой главе описаны наиболее распространенные (полуэмпирические и эмпирические) реологические модели неньютоновских жидкостей. Даны постановки и приведены итоговые результаты решения типичных задач гидродинамики и тепломассообмена степенных жидкостей.

7.1. Реологические модели неньютоновских несжимаемых жидкостей

Ньютоновская жидкость. В основу классической гидромеханики вязкой несжимаемой изотропной жидкости положен обобщенный закон Ньютона

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -P\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

где τ_{ij} — компоненты тензора напряжений; P — давление; δ_{ij} — символ Кронекера; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации, которые в декартовой системе координат X_1, X_2, X_3 выражаются через компоненты скорости жидкости V_1, V_2, V_3 по формуле

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i} \right). \quad (7.1.2)$$

В уравнение (7.1.1) входит лишь один реологический параметр μ , который не зависит от кинематических (скорости, ускорения, смещения) и динамических (силы, напряжения) характеристик движения. Величина μ зависит от температуры.

В случае одномерного простого сдвигового течения Ньютона (7.1.1) принимает вид

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (7.1.3)$$

где $\tau = \tau_{12}$, $\dot{\gamma} = \partial V_1 / \partial X_2$; X_2 — координата, перпендикулярная направлению скорости жидкости V_1 .

График зависимости τ от $\dot{\gamma}$, который называется кривой течения, для ньютоновской жидкости (7.1.3) имеет вид прямой линии, проходящей через начало координат (рис. 7.1).

Кратко опишем теперь модели более сложных — неньютоновских — жидкостей (подробное изложение соответствующих вопросов можно найти, например, в книгах [9, 120, 157, 168, 174, 185, 202, 236]).

Нелинейно-вязкие жидкости. Многие сложные по структуре реостабильные (реологические характеристики которых не зависят от времени) жидкости в условиях одномерного сдвига имеют кривую течения, отличную от ньютоновской. Если кривая течения криволинейна, но проходит через начало координат в плоскости $\dot{\gamma}$, τ , то соответствующие жидкости называются нелинейно-вязкими (нередко чисто вязкими, аномально-вязкими, иногда неньютоновскими).

Нелинейно-вязкие жидкости подразделяются на *псевдопластичные* — с кривой течения, обращенной выпуклостью в сторону оси напряжений, и *дилатантные* — с кривой течения, обращенной выпуклостью в сторону оси скоростей сдвига (штриховые линии на рис. 7.1).

Примерами псевдопластических жидкостей могут служить растворы и расплавы полимеров, мазуты, растворы каучука, многие нефтепродукты, бумажные пульпы, биологические жидкости (кровь, плазма), фармацевтические средства (эмульсии, кремы, пасты), различные пищевые продукты (жиры, сметана) и др. Дилатантные свойства встречаются в основном у высококонцентрированных или грубодисперсных систем (например, высококонцентрированные водные суспензии порошков двуокиси титана, железа, слюды, кварца, крахмала, мокрый речной песок и др.).

Рис. 7.1. Характерные кривые течений нелинейно-вязких жидкостей

По аналогии с ньютоновской жидкостью удобно ввести кажущуюся (эффективную) вязкость μ_e по формуле

$$\mu_e = \tau / \dot{\gamma}.$$

Проявление псевдопластичности состоит в уменьшении кажущейся вязкости с ростом напряжения (скорости) сдвига; среда в этом случае как бы «разжижается» и становится более подвижной. У дилатантных жидкостей величина кажущейся вязкости увеличивается с ростом напряжения сдвига.

В настоящее время известно несколько десятков, в основном эмпирических, реологических моделей нелинейно-вязких жидкостей. Такое положение обусловлено различной физической природой существующих текущих систем и отсутствием на сегодня общей теории, которая позволяла бы достаточно строго, как это делается в молекулярно-кинетической теории газов, вычислять характеристики молекулярного переноса и механического поведения среды, исходя из ее внутренней, микроскопической структуры.

В табл. 7.1 приведены наиболее распространенные реологические модели нелинейно-вязких жидкостей. Большинство указанных моделей не характеризует все стороны реального поведения нелинейно-вязких жидкостей во всем диапазоне изменения скоростей сдвига, а передает лишь отдельные характерные особенности течения. В табл. 7.1 используются квазиньютоновские записи двух видов

$$\tau = \mu_e(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad \tau = \mu_e(\tau)\dot{\gamma}.$$

Коэффициенты при $\dot{\gamma}$ в правых частях этих выражений можно рассматривать как кажущиеся неньютоновские вязкости. По этим величинам следует судить о физическом согласовании моделей с поведением конкретных текущих систем.

Известно, что любая нелинейно-вязкая жидкость имеет линейные участки кривой течения при очень малых и достаточно больших скоростях сдвига (рис. 7.1). Обозначим через μ_0 — наименьшую «ньютоновскую вязкость», которая наблюдается у псевдопластических жидкостей при «нулевой» скорости сдвига, а через μ_∞ — наибольшую «ньютоновскую вязкость», соответствующую «бесконечно большому» сдвигу. Видно, что модель степенной жидкости (см. первую строчку в табл. 7.1) хорошо описывает реальное поведение нелинейно-вязких сред в промежуточной области между μ_0 и μ_∞ ; однако в предельных случаях при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ и $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ она приводит к неверным результатам. Модели Эллиса и Рабиновича правильно отражают реальность в области малых и умеренных напряжений, однако при $\tau \rightarrow \infty$ дают вязкость, равную нулю; модель Сиско приводит к бесконечно большой вязкости

ТАБЛИЦА 7.1

Реологические модели нелинейно-вязких жидкостей (по данным [168, 185, 187]); τ — сдвиговое напряжение, $\dot{\gamma} = \partial V_1 / \partial X_2$

№	Модель жидкости, фамилии авторов	Реологическое уравнение
1	Степенная жидкость, Освальд — де Виль	$\tau = k \dot{\gamma} ^{n-1}\dot{\gamma}, n > 0$
2	Сиско	$\tau = (A + B\mu_0 \dot{\gamma} ^{n-1})\dot{\gamma}, n > 0$
3	Прандтль	$\tau = A \dot{\gamma} \arcsin(\dot{\gamma}/B)$
4	Уильямсон	$\tau = \left(\frac{A}{B + \dot{\gamma}} + \mu_0\right)\dot{\gamma}$
5	Прандтль — Эйринг	$\tau = \operatorname{arsh}(\dot{\gamma}/B)$
6	Рабинович	$\tau = \mu_0(1 + A\tau^2)^{-1}\dot{\gamma}$
7	Эллис	$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{A + B \tau ^{m-1}}$
8	Эйринг	$\tau = A\dot{\gamma} + B \sin(C \tau)$
9	Рейнер — Филиппов	$\tau = \left(\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{A + B\tau^2}\right)\dot{\gamma}$

при $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Остальные модели, указанные в табл. 7.1, хорошо описывают качественную структуру полной кривой течения. В книге [185] приведены численные значения определяющих параметров реологических моделей Освальда — де Вилья, Эллиса и Рейнера — Филиппова для некоторых веществ.

Степенная жидкость. В настоящее время наибольшее распространение получила модель степенной жидкости, которая для одномерного течения описана в начале табл. 7.1. Обобщение этой модели на трехмерный случай приводит к уравнению состояния (7.1.1), где

$$\mu = k(2I_2)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (7.1.4)$$

(Здесь и далее кажущуюся вязкость жидкости μ_e для краткости будем обозначать просто μ). В правую часть формулы (7.1.4) входят две константы k и n и квадратичный инвариант тензора скоростей деформации

$$I_2 = \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}e_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i} \right)^2. \quad (7.1.5)$$

ТАБЛИЦА 7.2
 Параметры степенного реологического
 уравнения для псевдопластичных материалов

Вещество	Концентрация, %	Диапазон скоростей сдвига, сек ⁻¹	<i>n</i>	$\frac{k,}{n \cdot \text{сек}^n}$ м ²
Крахмальный клейстер	1,54	—	0,952	0,003
	2,01	—	0,926	0,004
	2,89	—	0,794	0035
Водный раствор карбоксиметил- целлюлозы	0,09	$10^3 \div 3 \cdot 10^4$	0,72	0,044
	0,22	$10 \div 10^3$	0,79	0,081
	0,22	$10^3 \div 10^4$	0,63	0,302
	0,35	$10^2 \div 10^3$	0,66	0,259
	0,35	$10^3 \div 10^4$	0,58	0,429
Бумажная пульпа (водная)	4,0	—	0,575	20,02
Напалм в керосине	10,0	—	0,520	4,28
Известковое тесто	23,0	—	0,178	7,43
Глинистый раствор	33,0	—	0,171	7,2
Раствор цементного камня в воде	54,3	—	0,153	2,51

Постоянная k называется показателем (индексом) консистенции жидкости; чем меньше ее текучесть, тем больше k . Параметр n характеризует степень неньютоновского поведения материала; чем сильнее n отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется аномалия вязкости и нелинейность кривой течения.

Значениям $0 < n < 1$ отвечают псевдопластичные жидкости, кажущаяся вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига. Ньютоновская жидкость характеризуется параметром $n = 1$. Значениям $n > 1$ отвечают дилатантные жидкости, у которых кажущаяся вязкость растет с увеличением скоростей сдвига.

Параметры k и n принимаются постоянными для данной жидкости в некотором ограниченном диапазоне изменения скоростей сдвига. Они определяются из вискозиметрических опытов и анализа так называемых кривых консистенции. В табл. 7.2 приведены значения k и n для некоторых веществ [187] (прочерк в третьей колонке означает, что соответствующих данных нет).

Следует отметить, что для достаточно большого диапазона напряжений (скоростей) сдвига реальных жидкостей величины k и n будут непостоянны. Это не препятствует широкому использованию

степенного реологического уравнения, так как на практике обычно приходится иметь дело с довольно ограниченным диапазоном скоростей сдвига.

Далее часто будем рассматривать более общую, чем (7.1.4), реологическую модель, которая в трехмерном случае описывается уравнением (7.1.1), где кажущаяся вязкость μ произвольным образом зависит от квадратичного инварианта тензора скоростей деформации:

$$\mu = \mu(I_2). \quad (7.1.6)$$

Уравнения движения неньютоновских несжимаемых жидкостей, подчиняющихся этому закону, в различных системах координат приведены в приложении 6.

Первые пять моделей, указанные в табл. 7.1, являются частными случаями (7.1.6).

Модель Рейнера — Ривлина. Среди неньютоновских жидкостей особое место занимают изотропные реостабильные среды, у которых тензор напряжения $\|\tau_{ij}\|$ является непрерывной функцией тензора скоростей деформации $\|e_{ij}\|$ и не зависит от других кинематических и динамических переменных. Существует строгое доказательство, что наиболее общей реологической моделью, удовлетворяющей этим условиям, является нелинейная модель чисто вязкой неньютоновской среды Стокса [9]:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + 4\varepsilon \sum_{k=1}^3 e_{ik}e_{kj}, \quad (7.1.7)$$

где μ и ε — скалярные функции инвариантов тензора скоростей деформации

$$I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \quad I_2 = \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}e_{ji}, \quad I_3 = \det \|e_{ij}\|. \quad (7.1.8)$$

В случае несжимаемой жидкости первый инвариант равен нулю: $I_1 = \operatorname{div} \vec{v} = 0$. Для простых одно- и двумерных потоков — течения тонких пленок, продольное течение в трубе, тангенциальное течение между концентрическими цилиндрами — третий инвариант I_3 тождественно равен нулю.

В зависимости от вида скалярных функций μ и ε получаются различные реологические модели неньютоновских сред. Например, случай $\mu = \text{const}$, $\varepsilon = 0$ соответствует линейной модели ньютоновской жидкости (7.1.1). Полагая $\mu = k(2I_2)^{\frac{n-1}{2}}$, $\varepsilon = 0$, получим модель степенной нелинейно-вязкой жидкости (7.1.1), (7.1.4).

Выбор в формуле (7.1.7) коэффициентов μ и ε не равными нулю константами приводит к модели Рейнера — Ривлина, аддитивно сочетающей линейную модель Ньютона с тензорно-квадратичной добавкой. В этом случае постоянные μ и ε называются сдвиговой и объемной (поперечной) вязкостями соответственно. Уравнение (7.1.7) позволяет описать качественные особенности механического поведения упруговязких жидкостей, в частности эффект Вейсенберга (подъем жидкости по вращающемуся валу вместо оттеснения от вала за счет центробежной силы).

Вязкопластичные среды. Кроме рассмотренных, имеются также среды, течение которых начинается лишь после превышения некоторого критического напряжения τ_0 , называемого пределом текучести. Кривая течения таких сред при $\dot{\gamma} = 0$ отсекает на оси напряжений отрезок конечной длины, равный τ_0 (рис. 7.1). Величина τ_0 характеризует пластические свойства материала, а наклон кривой течения к оси $\dot{\gamma}$ — ее подвижность. Среды такого рода называют вязкопластичными.

Сочетание пластичности и вязкости, характерное для этих сред, впервые было обнаружено Шведовым у растворов желатины, а затем Бингамом у масляных красок (вязкие жидкости, нанесенные на гладкую вертикальную поверхность, через какое-то время обязательно должны стечь с нее вниз; поэтому оставшийся на поверхности слой краски свидетельствует о наличии у нее пластических свойств).

В табл. 7.3 приведены некоторые модели вязкопластичных сред. Наиболее простой и распространенной из них является модель Шведова — Бингама, которой отвечает верхняя прямая на рис. 7.1. В основу этой модели положено представление о наличии у покоящейся жидкости достаточно жесткой пространственной структуры, которая способна сопротивляться любому напряжению, меньшему τ_0 . За этим пределом наступает мгновенное полное разрушение структуры, а среда течет как обычная ньютоновская жидкость при напряжении сдвига $\tau - \tau_0$ (когда действующие в жидкости касательные напряжения становятся меньше τ_0 , структура снова восстанавливается). В тех местах потока, где напряжения сдвига ниже предела текучести, образуются «квазитвердые» участки.

Трехмерный аналог закона Шведова — Бингама имеет вид

$$\begin{aligned} e_{ij} &= 0 && \text{при } |\tau| \leq \tau_0, \\ \tau_{ij} &= 2 \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{2I_2}} + \mu_p \right) e_{ij} && \text{при } |\tau| > \tau_0. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

В книге [120] приведены численные значения параметров τ_0 и μ_p для различных дисперсных систем, содержащих песок, цемент и нефть.

ТАБЛИЦА 7.3

Реологические модели вязкопластичных жидкостей (по данным [185, 202])

№	Модель жидкости	Реологическое уравнение
1	Шведова — Бингама	$\tau = \text{sign } \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}$
2	Балкли — Гершеля	$\tau = \text{sign } \tau_0 + k \dot{\gamma} ^{n-1}\dot{\gamma}$
3	Кэссона	$\sqrt{\tau} = k_0 + k_1\sqrt{\dot{\gamma}}$
4	Кэссона — Шульмана	$\tau^{1/n} = \tau_0^{1/n} + (\mu\dot{\gamma})^{1/n}$
5	Шульмана	$\tau^{1/n} = \tau_0^{1/n} + (\mu\dot{\gamma})^{1/m}$

Отметим, что модель Кэссона (третья модель в табл. 7.3) хорошо описывает различные лаки, краски, кровь, пищевые композиции типа шоколадных масс и другие жидкие дисперсные системы [185].

Упруговязкие жидкости. В свое время Максвелл заметил, что вещества типа смолы нельзя относить ни к твердым телам, ни к жидкостям. Если напряжение накладывается медленно либо действует достаточно продолжительное время, то смола будет вести себя как обыкновенная вязкая жидкость. В этом случае деформация будет непрерывно и необратимо нарастать во времени, а скорость деформации будет пропорциональна приложенному напряжению, повинаясь ньютоновскому закону. Когда приложенное напряжение действует весьма быстро, смола испытывает деформацию, пропорциональную напряжению и полностью исчезающую при быстром разгрузении образца.

В результате таких наблюдений Максвелл предложил аддитивно объединить закон Гука (для упругого тела) и закон Ньютона (для вязкой жидкости) в одно реологическое уравнение состояния, которое в одномерном случае записывается так:

$$\tau + t_0 \frac{d\tau}{dt} = \mu\dot{\gamma}. \quad (7.1.10)$$

Здесь $t_0 = \mu/G$ — некоторое характерное время (период релаксации), G — модуль сдвига, t — время.

Пусть в максвелловской жидкости создана некоторая постоянная деформация и приняты меры для ее сохранения в дальнейшем. Тогда развивающееся течение постепенно будет ослаблять приложенное напряжение и потребуются все меньше усилий, чтобы сохранить образец деформированным. При этих условиях ($\tau = \tau_0$, $\dot{\gamma} = 0$ при $t = 0$; $\dot{\gamma} = \text{const}$ при $t > 0$) решение уравнения (7.1.10) имеет вид

$$\tau = \tau_0 \exp(-t/t_0)$$

и устанавливает экспоненциальный характер ослабления (релаксации) напряжения со временем. Через промежуток времени $t_0 = \mu/G$ напряжение уменьшится примерно в 2,7 раза по сравнению с первоначальной величиной τ_0 .

При очень быстрых механических воздействиях или наблюдениях с характерными временами t , меньшими t_0 , вещество ведет себя как идеально-упругое тело. В последующем, при $t \gg t_0$ развивающееся течение перекрывает упругую деформацию, и материал можно рассматривать как простую ньютоновскую жидкость. Лишь когда значение t будет того же порядка, что и величина t_0 , налагающиеся эффекты упругости и вязкости действуют одновременно. В этом случае и проявляется сложная природа деформации.

Трехмерный аналог уравнения Максвелла (7.1.10) записывается следующим образом:

$$\tau_{ij} + t_0 \frac{D \tau_{ij}}{D t} = -\delta_{ij} P + 2\mu e_{ij},$$

где использовано обозначение

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Важно отметить, что все простые ньютоновские вещества, даже такие как воздух, вода и бензол, обладают заметной сдвиговой упругостью при очень больших нагружениях со скоростями, близкими к акустическим. Темп деформирования в этом случае должен иметь порядок $10^{-8} \div 10^{-10}$ сек (примерная величина релаксации простых жидкостей). Поэтому при таких быстродействиях все простые жидкости и газы можно рассматривать как упруговязкие системы.

7.2. Движение пленок неньютоновских жидкостей

Рассмотрим стационарное ламинарное течение реологически сложной жидкости вдоль наклонной плоскости (рис. 1.3). Движение считаем достаточно медленным, так что силами инерции (т.е. конвективными членами) можно пренебречь по сравнению с вязким трением и силами тяжести. Пусть толщина пленки h , которая предполагается постоянной, много меньше ее длины. В этом случае в первом приближении нормальная компонента скорости V_2 будет мала по сравнению с продольной составляющей $V = V_1$, а производными вдоль поверхности пленки можно пренебречь по сравнению с производными по нормали.

Указанные допущения приводят к одномерному профилю скорости $V = V(\xi)$ и давлению $P = P(\xi)$, где $\xi = h - Y$ — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности стенки. Соответствующие уравнения пленочного течения имеют вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \rho g \sin \alpha = 0, \quad (7.2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \rho g \cos \alpha = 0. \quad (7.2.2)$$

Уравнения следует дополнить граничными условиями. На свободной поверхности пленки, контактирующей с газом, касательное напряжение равно нулю, а нормальное напряжение равно атмосферному давлению P_0 , т.е.

$$\tau = 0, \quad P = P_0 \quad \text{при} \quad \xi = h. \quad (7.2.3)$$

На непроницаемой стенке выставляется условие прилипания:

$$V = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (7.2.4)$$

Уравнения (7.2.1) и (7.2.2) интегрируются независимо. Их решения, удовлетворяющие условиям (7.2.3), определяются формулами

$$\tau = \rho g(h - \xi) \sin \alpha, \quad (7.2.5)$$

$$P = P_0 + \rho g(h - \xi) \cos \alpha. \quad (7.2.6)$$

Видно, что напряжение трения τ линейно возрастает от нуля на свободной поверхности до своего максимального значения $\tau_s = \rho g h \sin \alpha$ на стенке независимо от реологической специфики среды.

Нелинейно-вязкие жидкости. Степенная жидкость. Зависимость скорости деформации от напряжения в общем случае нелинейно-вязких жидкостей удобно представить следующим образом:

$$\frac{dV}{d\xi} = f(\tau), \quad (7.2.7)$$

где конкретный вид функции f определяется рассматриваемой реологической моделью жидкости.

Для получения зависимости (7.2.7) в реологических уравнениях, представленных в табл. 7.1, скорость сдвига $\dot{\gamma} = dV/d\xi$ следует выразить через τ .

Подставим в уравнение (7.2.7) τ из (7.2.5), а затем проинтегрируем по ξ с учетом граничного условия на поверхности стенки (7.2.4). В результате для профиля скорости получим:

$$V = \int_0^\xi f(m(h-\zeta)) d\zeta = \frac{1}{m} \int_{m(h-\xi)}^{mh} f(\tau) d\tau, \quad \text{где } m = \rho g \sin \alpha. \quad (7.2.8)$$

Максимальная скорость достигается на свободной поверхности пленки при $\xi = h$; она вычисляется по формуле

$$U_{\max} = \frac{1}{m} \int_0^{mh} f(\tau) d\tau. \quad (7.2.9)$$

Найдем теперь среднюю скорость пленочного течения жидкости

$$\langle V \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h V d\xi = \frac{1}{mh} \int_0^h \left[\int_{m(h-\xi)}^{mh} f(\tau) d\tau \right] d\xi.$$

Меняя местами переменные интегрирования согласно формуле

$$\int_0^h \left[\int_{m(h-\xi)}^{mh} f(\tau) d\tau \right] d\xi = \int_0^{mh} \left[\int_{h-\tau/m}^h f(\tau) d\xi \right] d\tau,$$

а затем интегрируя по ξ , имеем искомое выражение для средней скорости жидкости:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{m^2 h} \int_0^{mh} \tau f(\tau) d\tau, \quad \text{где } m = \rho g \sin \alpha. \quad (7.2.10)$$

Секундное количество жидкости Q , протекающее через поперечное сечение пленки, называется расходом жидкости и определяется с помощью интеграла:

$$Q = \int_0^h V d\xi = h \langle V \rangle. \quad (7.2.11)$$

Для степенной жидкости (первая модель в табл. 7.1) зависимость скорости деформации от напряжения задается выражением (7.2.7), где функция f имеет вид

$$f(\tau) = \left(\frac{\tau}{k} \right)^{1/n}. \quad (7.2.12)$$

Подставляя эту зависимость в формулы (7.2.8) — (7.2.11), можно найти основные характеристики пленочного течения степенной жидкости по наклонной плоскости. Соответствующие результаты вычислений приведены в табл. 7.4.

Видно, что показатель степенной жидкости n существенно влияет на профиль скорости. С увеличением псевдопластичности распределение скоростей становится все более однородным, приближаясь в пределе при $n \rightarrow 0$ к квазитвердому с профилем $V = \langle V \rangle = \text{const}$. Дилатансия, наоборот, делает поле скоростей все более неоднородным, причем при $n \rightarrow \infty$ профиль приобретает треугольную форму

$$\frac{V}{\langle V \rangle} = 2 \frac{\xi}{h}.$$

Максимальная скорость по-прежнему достигается на свободной поверхности пленки и составляет

$$U_{\max} = 2\langle V \rangle.$$

Весь возможный диапазон изменения максимальной скорости при $0 < n < \infty$ определяется неравенствами

$$\langle V \rangle < U_{\max} < 2\langle V \rangle.$$

В частности, для ньютоновской жидкости имеем $U_{\max} = \frac{3}{2}\langle V \rangle$.

Вязкопластичные среды. Жидкость Шведова — Бингама. Для вязкопластичных сред зависимость скорости деформации от напряжения в общем случае можно представить следующим образом:

$$\frac{dV}{d\xi} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ f(\tau) & \text{при } \tau_0 \leq \tau \leq \rho gh \sin \alpha. \end{cases} \quad (7.2.13)$$

Для получения явного вида функции $f(\tau)$ скорость сдвига $\dot{\gamma} = dV/d\xi$ в рассматриваемых реологических моделях (см. табл. 7.3) следует выразить через τ .

Движение пластичных жидкостей, имеющих конечный предел текучести τ_0 , имеет некоторые качественные особенности, отличающие их от нелинейно-вязких жидкостей. Рассмотрим слой вязкопластичной жидкости на некоторой плоскости, угол наклона которой будем постепенно менять. Как следует из формулы (7.2.5), касательное напряжение, независимо от реологической специфики среды, уменьшается поперек пленки от своего максимального значения $\tau_{\max} = \rho gh \sin \alpha$ на твердой стенке до нуля на свободной поверхности. Поэтому течение вязкопластичной пленки жидкости может начаться

лишь после того, как касательное напряжение на стенке станет равным или превысит предел текучести τ_0 :

$$\tau_0 = \rho g h_0 \sin \alpha_0. \quad (7.2.14)$$

Предельный угол наклона плоскости, до которого на ней удерживается зависающая неподвижная пленка, равен

$$\alpha_0 = \arcsin \left(\frac{\tau_0}{\rho g h_0} \right)$$

и будет тем выше, чем больше величина τ_0 и чем тоньше слой жидкости. Для нелинейно-вязких сред значение константы α_0 всегда равно нулю.

Для «зависания» пленки на вертикальной плоскости, что соответствует значению $\alpha_0 = \pi/2$, необходимо, чтобы между равновесной толщиной пленки и пределом текучести существовало соотношение $h_0 = \tau_0/(\rho g)$, которое следует из (7.2.13). Указанное условие определяет толщину покрытия, остающегося на вертикальных поверхностях.

Зафиксируем теперь угол наклона поверхности α . Пусть толщина пленки h такая, что выполняется неравенство

$$h \geq \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha}. \quad (7.2.15)$$

Тогда вся область течения разбивается на две части с различной структурой профиля скорости:

- 1) сдвиговая пристеночная зона — при $0 \leq \xi \leq h - h_0$,
- 2) зона квазитвердого движения — при $h - h_0 \leq \xi \leq h$.

Здесь введено обозначение

$$h_0 = \frac{\tau_0}{\rho g \sin \alpha}. \quad (7.2.16)$$

В зоне квазитвердого движения, примыкающей к свободной поверхности пленки, скорость жидкости постоянна и равна значению скорости на границе сдвиговой пристеночной зоны при $\xi = h - h_0$. В зоне квазитвердого движения скорость максимальна $V = U_{\max}$.

Подставим в уравнение (7.2.13) выражение для τ из (7.2.5), а затем проинтегрируем по ξ с учетом условия прилипания на стенке (7.2.4). В результате несложных преобразований для профиля скорости получим

$$V = \begin{cases} \frac{1}{m} \int_{m(h-\xi)}^{mh} f(\tau) d\tau & \text{при } 0 \leq \xi \leq h - h_0, \\ \frac{1}{m} \int_{\tau_0}^{mh} f(\tau) d\tau & \text{при } h - h_0 \leq \xi \leq h, \end{cases} \quad (7.2.17)$$

где, как и ранее, $m = \rho g \sin \alpha$, $h_0 = \tau_0/m$.

Максимальная скорость жидкости, равная

$$U_{\max} = \frac{1}{m} \int_{\tau_0}^{mh} f(\tau) d\tau, \quad (7.2.18)$$

достигается во всей зоне квазитвердого течения.

Средняя скорость пленочного течения вязкопластичной жидкости вычисляется по формуле

$$\langle V \rangle = \frac{1}{m^2 h} \int_{\tau_0}^{mh} \tau f(\tau) d\tau. \quad (7.2.19)$$

Расход жидкости находится с помощью выражения (7.2.11), где $\langle V \rangle$ определяется согласно (7.2.19).

Для жидкости Шведова — Бингама (первая модель в табл. 7.3) зависимость скорости деформации от напряжения задается формулой (7.2.13), где

$$f(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{\mu_p}. \quad (7.2.20)$$

Параметр μ_p называется пластической (структурной) вязкостью.

Подставляя зависимость (7.2.20) в (7.2.17) — (7.2.19), найдем основные характеристики пленочного течения вязкопластичной жидкости Шведова — Бингама по наклонной плоскости (результаты соответствующих вычислений приведены в табл. 7.4).

7.3. Массоперенос в пленках реологически сложных жидкостей

Массообмен между пленкой и газом. Следуя работам [185, 186, 202], рассмотрим абсорбцию слаборастворимых газов на поверхности пленки, стекающей по наклонной плоскости. Стационарное распределение скоростей внутри пленки для нелинейно-вязких жидкостей определяется формулой (7.2.8), а для вязкопластичных — формулой (7.2.17).

Пусть на поверхности пленки устанавливается постоянная концентрация поглощаемого компонента $C = C_s$, а в сечении с координатой $X = 0$ поступает «чистая» жидкость с нулевой концентрацией. Ограничимся случаем больших чисел Пекле, когда диффузией вдоль пленки можно пренебречь. В приближении диффузионного пограничного

слоя (т.е. ограничиваясь главным членом разложения скорости жидкости вблизи свободной поверхности $V \approx U_{\max}$) распределение концентрации внутри пленки с учетом сделанных допущений описывается следующими уравнением и граничными условиями:

$$U_{\max} \frac{\partial C}{\partial X} = D \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2}; \quad (7.3.1)$$

$$X = 0, \quad C = 0; \quad Y = 0, \quad C = C_s,$$

где координата $Y = 1 - \xi$ отсчитывается внутрь по нормали к поверхности пленки.

Решение задачи (7.3.1) выражается через дополнительный интеграл вероятностей:

$$C = C_s \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{2} \sqrt{\frac{U_{\max}}{DX}} \right). \quad (7.3.2)$$

Дифференцируя эту формулу, находим диффузионный поток на поверхность пленки:

$$j_* = -\rho D \frac{\partial C}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \rho C_s \sqrt{\frac{U_{\max} D}{\pi X}}. \quad (7.3.3)$$

Для нелинейно-вязких и вязкопластичных жидкостей максимальная скорость U_{\max} , входящая в формулу (7.3.3), в общем случае вычисляется с помощью выражений (7.2.9) и (7.2.18) соответственно. В частности, для степенной жидкости U_{\max} можно взять из табл. 7.4, что дает

$$j_* = \rho C_s \left[\frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{k} \right)^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n}{n+1}} \frac{D}{\pi X} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Растворение пластины пленкой жидкости. Рассмотрим теперь массоперенос от твердой стенки к пленке жидкости. Считаем, что на поверхности пластины концентрация постоянна и равна C_s , а на входное сечение подается чистая жидкость. В приближении диффузионного пограничного слоя профиль скорости вблизи поверхности пластины приближенно можно заменить выражением

$$V \approx \left(\frac{dV}{d\xi} \right)_{\xi=0} \xi = f(mh)\xi, \quad \text{где } m = \rho g \sin \alpha.$$

Учитывая сказанное, запишем задачу для определения поля концентрации в диффузионном пограничном слое, примыкающем к поверхности стенки:

$$f(mh)\xi \frac{\partial C}{\partial X} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}; \quad (7.3.4)$$

$$X = 0, \quad C = 0; \quad \xi = 0, \quad C = C_s.$$

Решение выражается через неполную гамма-функцию:

$$C = C_s \frac{1}{\Gamma(1/3)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{f(mh)\xi^3}{9DX}\right). \quad (7.3.5)$$

Дифференцируя (7.3.5), получим диффузионный поток на поверхность пленки

$$j_* = -\rho D \frac{\partial C}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0,538 \rho C_s \left[\frac{D^2 f(mh)}{X} \right]^{1/3}. \quad (7.3.6)$$

Отсюда для степенной жидкости с помощью формулы (7.2.12) имеем

$$j_* = 0,538 \rho C_s \left[\left(\frac{\rho g \sin \alpha}{k} \right)^{1/n} \frac{D^2}{X} \right]^{1/3}. \quad (7.3.7)$$

Для вязкопластичной жидкости Шведова — Бингама в выражение (7.3.6) следует подставить $f(mh) = (\rho g h \sin \alpha - \tau_0) / \mu_p$.

7.4. Движение неньютоновских жидкостей по трубам и каналам

Круглая труба. Рассмотрим установившееся осесимметричное течение неньютоновских жидкостей в прямой горизонтальной трубе круглого сечения радиуса a . Координату Z , отсчитываемую вдоль оси трубы, направим по потоку. Ограничимся исследованием гидродинамически стабилизированного течения вдали от входного сечения, когда жидкость движется параллельно оси трубы. В этом случае перепад давления будет уменьшаться в направлении возрастания Z , градиент давления отрицателен и постоянен

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = -\frac{\Delta P}{L} = \text{const},$$

где ΔP — перепад давления на длине трубы L .

В этой задаче все производные скорости по переменным t , Z , φ , а также составляющие скорости V_φ и V_R равны нулю. Учитывая сказанное, из (7.2.5) получим уравнение движения

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d}{d\mathcal{R}} (\mathcal{R}\tau) + \frac{\Delta P}{L} = 0, \quad (7.4.1)$$

где введено обозначение $\tau = \tau_{\mathcal{R}Z}$.

Решение уравнения (7.4.1), удовлетворяющее условию ограниченности ($|\tau| < \infty$), имеет вид

$$\tau = -\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}. \quad (7.4.2)$$

Видно, что абсолютная величина напряжения трения линейно возрастает от нуля на оси трубы до своего максимального значения $\tau_s = a\Delta P/L$ на стенке трубы независимо от типа неньютоновской жидкости.

Нелинейно-вязкие жидкости. Степенная жидкость. В трубе скорость деформации отрицательна $\dot{\gamma} = dV/d\mathcal{R} < 0$, где обозначено $V = V_z$. В общем случае нелинейно-вязких жидкостей представим зависимость скорости деформации от напряжения следующим образом:

$$\frac{dV}{d\mathcal{R}} = -f(|\tau|), \quad (7.4.3)$$

где конкретный вид функции $f(\tau) \geq 0$ определяется в соответствии с выбранной реологической моделью.

Подставляя выражение (7.4.2) в (7.4.3), получим уравнение для скорости жидкости $V = V_z$. Его решение, удовлетворяющее условию прилипания на стенках трубы ($V = 0$ при $\mathcal{R} = a$), имеет вид

$$V = \int_{\mathcal{R}}^a f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R}. \quad (7.4.4)$$

Максимальная скорость жидкости достигается на оси потока

$$U_{\max} = \int_0^a f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R}. \quad (7.4.5)$$

Расход жидкости через поперечное сечение трубы вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^a 2\pi\mathcal{R}V d\mathcal{R} = \pi \int_0^a \mathcal{R}^2 f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R}, \quad (7.4.6)$$

а средняя скорость определяется так:

$$\langle V \rangle = \frac{Q}{\pi a^2}. \quad (7.4.7)$$

Для коэффициента сопротивления трения получим

$$c_f = \frac{|\tau_s|}{\frac{1}{2}\rho\langle V \rangle^2} = \frac{a\Delta P}{\rho L\langle V \rangle^2},$$

где τ_s — напряжение сдвига на стенке.

В частном случае степенной жидкости, которая описывается выражениями (7.1.1), (7.1.4), функция f в (7.4.3) имеет вид

$$f = (\tau/k)^{1/n}. \quad (7.4.8)$$

Подставляя зависимость (7.4.8) в формулы (7.4.4) — (7.4.7), можно найти основные характеристики движения степенной жидкости по круглой трубе. Результаты соответствующих вычислений [168, 174] приведены в табл. 7.5 и показаны на рис. 7.2. Видно, что с уменьшением величины реологического параметра n получаются все более заполненные профили скоростей. Предельный случай $n \rightarrow 0$ характеризуется квазитвердым движением жидкости с одинаковой скоростью по сечению трубы (лишь в непосредственной близости у стенки происходит быстрое падение скорости до нуля). Ньютоновской жидкости $n = 1$ соответствует параболический профиль Пуазейля. Предельно дилатантное течение ($n \rightarrow \infty$) имеет треугольный профиль, который характеризуется линейным законом изменения скорости по радиусу трубы.

Рис. 7.2. Характерные профили скоростей неньютоновских жидкостей при течении в круглой трубе

Вязкопластичные среды. Жидкость Шведова — Бингама. Зависимость скорости деформации от напряжения при течении вязкопластичных жидкостей по круглой трубе можно записать в следующем виде:

$$-\frac{dV}{dR} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq |\tau| \leq \tau_0, \\ f(|\tau|) & \text{при } |\tau| \geq \tau_0. \end{cases} \quad (7.4.9)$$

Подставляя это выражение в (7.4.2), получим уравнение для профиля скорости. Видно, что при малых градиентах давления, удовлетворяющих условию

$$\frac{a\Delta P}{2L} \leq \tau_0,$$

движение жидкости в трубе не происходит.

Далее будем считать, что выполнено неравенство $\frac{1}{2}a\Delta P/L > \tau_0$. Для вязкопластичных жидкостей (7.4.9) решение уравнения (7.4.2),

удовлетворяющее условию прилипания на стенках трубы, имеет вид

$$V = \begin{cases} \int_{\mathcal{R}}^a f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R} & \text{при } r_0 \leq \mathcal{R} \leq a, \\ \int_{r_0}^a f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R} & \text{при } 0 \leq \mathcal{R} \leq r_0, \end{cases} \quad (7.4.10)$$

где r_0 — радиус зоны квазитвердого движения

$$r_0 = \frac{2L\tau_0}{\Delta P}. \quad (7.4.11)$$

Максимальная скорость жидкости, равная

$$U_{\max} = \int_{r_0}^a f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R}, \quad (7.4.12)$$

достигается во всей области квазитвердого движения жидкости как целого в окрестности оси потока $0 \leq \mathcal{R} \leq r_0$.

Расход жидкости через поперечное сечение трубы вычисляется по формуле

$$Q = \pi \int_{r_0}^a \mathcal{R}^2 f\left(\frac{\Delta P}{2L}\mathcal{R}\right) d\mathcal{R}. \quad (7.4.13)$$

Средняя скорость жидкости определяется путем подстановки (7.4.13) в выражение (7.4.7).

В частном случае вязкопластичной жидкости Шведова—Бингама (первая модель в табл. 7.3) для функции f в (7.4.9) имеем

$$f(|\tau|) = \frac{|\tau| - \tau_0}{\mu_p}. \quad (7.4.14)$$

Подставляя эту зависимость в выражения (7.4.10) — (7.4.13), получим все основные характеристики этого течения. Результаты соответствующих расчетов [174, 185] указаны в табл. 7.5.

Профиль скорости изображен на рис. 7.3, заштрихованная область соответствует зоне квазитвердого движения жидкости.

Плоский канал. Рассмотрим теперь стационарное гидродинамически стабилизированное течение неньютоновской жидкости в плоском канале шириной $2h$. Введем прямоугольную систему координат X, ξ , где ось X направим вдоль течения

Рис. 7.3. Профиль скоростей течения бингамовского пластического тела

по нижней стенке канала, а координату ξ будем отсчитывать по нормали к этой стенке в глубь течения ($0 \leq \xi \leq 2h$). Задача симметрична относительно средней линии $\xi = h$, поэтому достаточно рассмотреть половину области $0 \leq \xi \leq h$.

Установившемуся течению вдали от входа в канал соответствует постоянный отрицательный градиент давления $\partial P/\partial X = -\Delta P/L = \text{const}$ (ΔP — перепад давления на длине канала L), при этом поперечная компонента скорости жидкости равна нулю. Продольная составляющая скорости $V = V_X$ зависит только от координаты ξ и описывается уравнением $\tau'_\xi = -\Delta P/L$. Интегрируя это уравнение с учетом условия симметрии ($\tau = 0$ при $\xi = h$), имеем

$$\tau = \frac{\Delta P}{L}(h - \xi). \quad (7.4.15)$$

Формула (7.4.15) с точностью до переобозначения ($\Delta P/L \rightarrow \rho g \sin \alpha$) совпадает с выражением для сдвигового напряжения (7.2.5), полученного ранее для пленочного течения. Поэтому профиль скорости V в плоском канале (в области $0 \leq \xi \leq h$), максимальную скорость U_{\max} , среднюю скорость $\langle V \rangle$ для нелинейно-вязких жидкостей можно вычислять по формулам (7.2.8) — (7.2.10), а для вязкопластичных жидкостей — по формулам (7.2.17) — (7.2.19), формально полагая в них $\rho g \sin \alpha = \Delta P/L$.

Для степенной жидкости и жидкости Шведова — Бингама основные характеристики течения в плоском канале можно найти с помощью табл. 7.4, где следует положить $m = \Delta P/L$.

Движение газожидкостных пен по трубам. Воздушные пены на основе водных растворов ионогенных поверхностно-активных веществ представляют собой структурно-метастабильные дисперсные системы. Если внешние воздействия (массовые, электрофизические, термические, деформационные) не превышают некоторого порогового значения, такие пены могут существовать, медленно эволюционируя, достаточно долго ($10^3 \div 10^4$ сек), и в этом смысле можно говорить об их гидравлических и реологических свойствах.

В работах [108, 176] экспериментально исследовалось напорное движение пены по трубам с неразрушающими скоростями (средняя скорость не превышала 1 м/сек). Было установлено, что водно-сульфонольная воздушная пена обладает свойствами вязкопластичной жидкости Шведова — Бингама. При течении в круглой трубе радиуса a под действием градиента давления $\Delta P/L$ она имеет четко выраженное квазитвердое ядро радиуса $r_0 = \tau_0 L/\Delta P$ и скорость скольжения относительно стенок трубы $V_{sl} = 2\pi a \Delta P \delta/\mu$ по жидкому слою толщиной δ с линейным распределением скорости. Для реологических параметров пены — предельного напряжения сдвига τ_0 , коэффициента бингамовской вязкости μ_p и толщины смазочного слоя δ —

найлены следующие эмпирические корреляции, выражающие их через исходные параметры:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0 \rho d^2}{\mu^2} &= 0,61 \varkappa^{0,18} \left(\frac{\sigma \rho d}{\mu^2} \right)^{0,49} \left(\frac{gd^3 \rho^2}{\mu^2} \right)^{0,35}, \\ \frac{\mu_p}{\mu} &= 8,8 \cdot 10^{-5} \varkappa^{0,99} \left(\frac{\sigma \rho d}{\mu^2} \right)^2 \left(\frac{gd^3 \rho^2}{\mu^2} \right)^{-0,98}, \\ \frac{\delta}{d} &= 0,2 \varkappa^{0,099} \left(\frac{\sigma \rho d}{\mu^2} \right)^{-0,46} \left(\frac{gd^3 \rho^2}{\mu^2} \right)^{0,1}, \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

где ρ — плотность раствора, μ — динамическая вязкость раствора, σ — коэффициент поверхностного натяжения, \varkappa — кратность пены (величина, обратная объемному влагосодержанию пены), d — дисперсность пены (средний диаметр пузырька). Погрешности первой, второй и третьей формул (7.4.16) соответственно составляют $\pm 10\%$, $\pm 17\%$ и $\pm 32\%$.

Корреляции получены на гладких трубах радиусом $5 \div 40$ мм. В качестве раствора ПАВ во всех опытах использовался 0,4%-ный раствор сульфанола в дистиллированной воде с содержанием глицерина 5,2 и 30 массовых процентов (для вариации вязкости). Величины ρ и σ при этом варьировались весьма слабо. Кратность пены \varkappa менялась в пределах $36 \div 322$, дисперсность пены d — в пределах $0,35 \div 1,0$ мм, а вязкость раствора μ — в пределах $1,5 \div 10,5$ Па · сек.

Отметим, что τ_0 и μ_p растут с увеличением кратности \varkappa и убывают с ростом дисперсности d . В то же время зависимость τ_0 и μ_p от вязкости раствора μ носит качественно разный характер. Если τ_0 растет с увеличением μ , то μ_p с ростом μ убывает. Это означает, что пена с бóльшей кратностью жидкой фазы ближе к идеально пластической жидкости с более высоким пределом текучести.

7.5. Теплоперенос в плоском канале и круглой трубе (с учетом диссипации)

Плоский канал. Рассмотрим задачу о диссипативном нагреве неньютоновской жидкости в плоском канале с изотермическими стенками, на которых поддерживается одинаковая постоянная температура

$$\xi = 0, \quad T = T_s; \quad \xi = 2h, \quad T = T_s. \quad (7.5.1)$$

(Здесь используется система координат, введенная в разд. 7.4). Если температура жидкости на входе равна температуре стенок T_s , то на протяжении некоторого участка трубы вследствие внутреннего трения жидкость постепенно нагревается до тех пор, пока количество

тепла, отводимое через стенку, не станет равным диссипативным тепловыделениям. В области, в которой установится такое равновесие, температура жидкости перестанет изменяться по длине, т.е. наступит стабилизация температурного поля (если, конечно, профиль скорости также стабилизировался). Далее анализируется именно такое термически и гидродинамически стабилизированное течение.

Следуя [84, 103] будем предполагать, что тепловыделение не влияет на физические свойства жидкости (т.е. кажущаяся вязкость, плотность, теплопроводность не зависят от температуры). В этом случае профиль скорости находится независимо от тепловой задачи (см. разд. 7.4).

В общем случае уравнение для распределения температуры в области тепловой стабилизации получается из второго уравнения, приведенного в приложении 6 (где конвективные члены равны нулю, а температура зависит только от поперечной координаты), и имеет вид

$$\lambda T''_{\xi\xi} + \tau V'_\xi = 0, \quad (7.5.2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, $\tau = \mu V'_\xi$ — сдвиговое напряжение, μ — кажущаяся вязкость жидкости, штрих обозначает производную по ξ .

Ввиду симметрии задачи относительно середины канала $\xi = h$ достаточно рассмотреть половину области $0 \leq \xi \leq h$, на границе которой следует выставить условие симметрии

$$\xi = h, \quad T'_\xi = 0. \quad (7.5.3)$$

Рассмотрим случай произвольной вязкопластичной жидкости с пределом текучести τ_0 (аналогичные результаты для нелинейновязких жидкостей будут соответствовать значению $\tau_0 = 0$). Для определения профиля температуры поступим следующим образом. Сначала в сдвиговой пристеночной зоне $0 \leq \xi \leq h - h_0$, где $h_0 = \tau_0 L / \Delta P$, решаем уравнение (7.5.2) с граничным условием (7.5.1). Затем в квазитвердой зоне $h - h_0 \leq \xi \leq h$ решаем уравнение (7.5.2) при $V'_\xi = 0$ с граничным условием (7.5.3). Затем оба полученных решения сопрягаются на общей границе при $\xi = h_0$. Указанная процедура приводит к следующему распределению температуры в канале:

$$T - T_s = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \int_0^\xi \left(\int_\xi^{h-h_0} \tau V'_\xi d\xi \right) d\xi & \text{при } 0 \leq \xi \leq h - h_0, \\ T_{\max} - T_s & \text{при } h - h_0 \leq \xi \leq h, \end{cases} \quad (7.5.4)$$

где максимальная температура T_{\max} определяется выражением

$$T_{\max} - T_s = \frac{1}{\lambda} \int_0^{h-h_0} \left(\int_\xi^{h-h_0} \tau V'_\xi d\xi \right) d\xi, \quad h_0 = L \frac{\tau_0}{\Delta P}. \quad (7.5.5)$$

Тепловой поток на стенку вычисляется по формуле

$$q_T = \lambda \left(\frac{dT}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \int_0^{h-h_0} \tau V'_\xi d\xi. \quad (7.5.6)$$

В случае степенной жидкости в соотношениях (7.5.4) — (7.5.6) следует положить $h_0 = 0$ и подставить зависимость $\tau = k(V'_\xi)^n$. Результаты соответствующих вычислений помещены в табл. 7.6. Там же приведены основные параметры теплообмена вязкопластичной жидкости Шведова — Бингама (ньютоновской жидкости отвечают значения $\tau_0 = 0$, $\mu_p = \mu$).

Круглая труба. При тех же предположениях (температура трубы постоянна и равна T_s , физические свойства среды не зависят от температуры) распределение температуры в области тепловой стабилизации для круглой трубы радиуса a с учетом диссипативного разогрева описывается следующими уравнением и граничными условиями:

$$\frac{\lambda}{\mathcal{R}} \frac{d}{d\mathcal{R}} \left(\mathcal{R} \frac{dT}{d\mathcal{R}} \right) = -\tau V'_\mathcal{R}; \quad (7.5.7)$$

$$\mathcal{R} = 0, \quad \mathcal{R} \frac{dT}{d\mathcal{R}} = 0; \quad \mathcal{R} = a, \quad T = T_s, \quad (7.5.8)$$

где τ — сдвиговое напряжение, V — скорость жидкости.

Для вязкопластичных сред с пределом текучести τ_0 решение задачи (7.5.7), (7.5.8) имеет вид

$$T - T_s = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}}^a \left(\int_{r_0}^{\mathcal{R}} \tau V'_\mathcal{R} \mathcal{R} d\mathcal{R} \right) \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} & \text{при } r_0 \leq \mathcal{R} \leq a, \\ T_{\max} - T_s & \text{при } 0 \leq \mathcal{R} \leq r_0, \end{cases} \quad (7.5.9)$$

где $r_0 = 2L\tau_0/\Delta P$, а максимальная температура T_{\max} вычисляется так:

$$T_{\max} - T_s = \frac{1}{\lambda} \int_{r_0}^a \left(\int_{r_0}^{\mathcal{R}} \tau V'_\mathcal{R} \mathcal{R} d\mathcal{R} \right) \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}}. \quad (7.5.10)$$

Тепловой поток на стенку трубы находится с помощью выражения

$$q_T = \frac{1}{\lambda} \int_{r_0}^a \tau V'_\mathcal{R} \mathcal{R} d\mathcal{R}. \quad (7.5.11)$$

Для нелинейно-вязких жидкостей основные параметры теплообмена определяются по формулам (7.5.9) — (7.5.11), где $r_0 = 0$.

Для степенной жидкости и жидкости Шведова — Бингама результаты соответствующих вычислений приведены в табл. 7.6 (ньютоновской жидкости отвечает значение $\tau_0 = 0$).

Максимальный перепад температуры для степенной жидкости в круглой трубе согласно данным табл. 7.5 и табл. 7.6 можно выразить через среднюю скорость потока $\langle V \rangle$ следующим образом:

$$T_{\max} - T_s = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{3n+1}{na} \right)^{n-1} (\langle V \rangle)^{n+1}.$$

При этом соответствующий результат для ньютоновской жидкости ($n = 1$, $k = \mu$) не зависит от радиуса трубы

$$T_{\max} - T_s = \frac{\mu}{\lambda} (\langle V \rangle)^2. \quad (7.5.12)$$

Формулы, полученные в данном разделе, применимы для подавляющего большинства обычных жидкостей. Течения очень вязких жидкостей имеют характерные качественные особенности, которые описаны в следующем разделе.

7.6. Гидродинамический тепловой взрыв в неньютоновских жидкостях

Качественные особенности теплопереноса в очень вязких жидкостях. Тепло, возникающее в очень вязких жидкостях вследствие трения, вызывает значительное нагревание даже при умеренных скоростях движения, как показывает следующий пример. Вязкость и коэффициент теплопроводности моторного масла при комнатной температуре ($T_s = 20^\circ\text{C}$), согласно данным табл. 7.7 равны: $\mu = 0,8$ кг/м·сек, $\lambda = 0,15$ н/сек·град. Подставив эти значения в формулу (7.5.12), находим

$$T_{\max} - T_s = \begin{cases} 5,5^\circ\text{C} & \text{при } \langle V \rangle = 1 \text{ м/сек,} \\ 22^\circ\text{C} & \text{при } \langle V \rangle = 2 \text{ м/сек,} \\ 49,5^\circ\text{C} & \text{при } \langle V \rangle = 3 \text{ м/сек.} \end{cases}$$

Повышение температуры масла получается столь значительным, что уже нельзя не учитывать зависимость коэффициента вязкости от температуры (из табл. 7.7 следует, что при изменении температуры от 20 до 60°C вязкость меняется более чем в 10 раз); при этом изменение удельной теплоемкости и теплопроводности масла незначительно и эти величины в первом приближении можно считать постоянными.

Исследование нелинейных эффектов, связанных с изменением вязкости от температуры, будет проведено ниже.

Реологическое уравнение в неизотермическом случае. Наиболее общее одномерное неизотермическое уравнение состояния неньютоновской жидкости можно записать в виде $F(\tau, \dot{\gamma}, T) = 0$, где τ — касательное напряжение, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, T — температура. Некоторые конкретные типы уравнения состояния описаны в табл. 7.1 и табл. 7.3, где реологические параметры $n, A, B, C, \mu_0, \mu_\infty, \tau_0$ следует считать зависящими от температуры T .

Рассмотрим подробнее степенную жидкость. Эксперименты [47] показывают, что индекс неньютоновского поведения материала n можно считать постоянным, если температурные перепады в области течения не превышают $30 \div 50^\circ\text{C}$. Консистенция среды $k = k(T)$ гораздо более чувствительна к температурным неоднородностям и уменьшается при увеличении T . Поэтому уравнение реологического состояния степенной жидкости в неизотермическом случае можно записать следующим образом:

$$\tau = k(T)|\dot{\gamma}|^{n-1}\dot{\gamma}. \quad (7.6.1)$$

Покажем теперь, что при неизотермическом движении жидкости в трубах и каналах могут возникать критические явления, связанные с существованием предельно допустимого градиента давления, превышение которого нарушает стационарный режим течения. Описанное явление сопровождается прогрессирующим уменьшением кажущейся вязкости и увеличением скорости жидкости и получило название гидродинамического теплового взрыва [22]. Указанный эффект обусловлен нелинейной зависимостью кажущейся вязкости от температуры и проявляется в том, что при некоторых внешних условиях генерация тепла в жидкости за счет трения превышает теплоотвод к стенкам трубы.

Далее принимается, что теплопроводность среды не зависит от температуры.

Уравнение для распределения температуры. Изотермическое прямолинейное стационарное течение степенной жидкости в круглой трубе радиуса a при постоянной температуре на ее поверхности на участке гидродинамической и тепловой стабилизации описывается уравнениями (7.4.1), (7.5.7), (7.6.1). На стенке трубы выставляется условие прилипания, а граничные условия для температуры приведены в (7.5.8).

Решение уравнения (7.4.1), ограниченное при $\mathcal{R} \rightarrow 0$, дается формулой (7.4.2). Исключая τ из (7.5.7) с помощью (7.4.2), имеем

$$V'_{\mathcal{R}} = \frac{2\lambda}{A\mathcal{R}^2}(\mathcal{R}T'_{\mathcal{R}})'_{\mathcal{R}}, \quad \tau = -\frac{A\mathcal{R}}{2}, \quad (7.6.2)$$

где $A = \Delta P/L$ — градиент давления.

Подставляя эти выражения в (7.6.1), после элементарных преобразований приходим к уравнению для температуры

$$T''_{\mathcal{R}\mathcal{R}} + \frac{1}{\mathcal{R}}T'_{\mathcal{R}} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Delta P}{2L} \right)^{\frac{n+1}{n}} \mathcal{R}^{\frac{n+1}{n}} [k(T)]^{-\frac{1}{n}} = 0, \quad (7.6.3)$$

которое следует дополнить граничными условиями (7.5.8).

Из формулы (7.6.1) получим выражение для скорости жидкости

$$V = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right)^{1/n} \int_{\mathcal{R}}^a \left[\frac{\mathcal{R}}{k(T)} \right]^{1/n} d\mathcal{R}, \quad (7.6.4)$$

которое можно использовать после определения зависимости $T = T(\mathcal{R})$ путем решения задачи (7.6.3), (7.5.8).

Экспоненциальная зависимость консистенции от температуры. Для очень вязких ньютоновских жидкостей (типа глицерина) обычно используется экспоненциальная зависимость вязкости от температуры [175]. Распространяя этот закон на консистенцию степенной жидкости, запишем [22, 93, 111, 185]

$$k = k_0 \exp[-\alpha(T - T_0)], \quad (7.6.5)$$

где k_0 , α , T_0 — эмпирические постоянные.

Подставим выражение (7.6.5) в уравнение (7.6.3) и введем новые переменные

$$y = \left(\frac{\mathcal{R}}{a} \right)^{\frac{3n+1}{2n}}, \quad w = \frac{\alpha}{n}(T - T_s). \quad (7.6.6)$$

В результате получим задачу

$$\begin{aligned} yw''_{yy} + w'_y + \varepsilon_n y e^w &= 0; \\ y = 0, \quad (yw'_y) = 0; \quad y = 1, \quad w = 0, \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

где параметр ε_n определяется следующим образом:

$$\varepsilon_n = \frac{4n\alpha a^2 k_0}{\lambda(3n+1)^2} \left(\frac{a\Delta P}{2k_0 L} \right)^{\frac{n+1}{n}} \exp \left[\frac{\alpha}{n}(T_s - T) \right]. \quad (7.6.8)$$

Задача (7.6.7) с точностью до переобозначений совпадает с классической задачей о тепловом взрыве [175]. Указанное обстоятельство с учетом формулы (7.6.6) позволяет найти распределение температуры внутри трубы для неизотермического течения степенной жидкости [21]

$$T = T_s + \frac{n}{\alpha} \ln \frac{8}{\varepsilon_n} - \frac{2n}{\alpha} \ln \left[b \left(\frac{\mathcal{R}}{a} \right)^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{1}{b} \right]. \quad (7.6.9)$$

Здесь постоянная интегрирования b удовлетворяет квадратному уравнению с корнями

$$b_1 = \left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right)^{1/2} - \left(\frac{2}{\varepsilon_n} - 1\right)^{1/2}, \quad b_2 = \left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right)^{1/2} + \left(\frac{2}{\varepsilon_n} - 1\right)^{1/2}, \quad (7.6.10)$$

где параметр ε_n выписан в (7.6.8). Этим двум корням соответствуют два различных профиля температур; устойчивое решение определяется корнем b_1 , а неустойчивое — корнем b_2 . Критическое условие возникновения теплового взрыва характеризуется равенством констант $b_1 = b_2$ в (7.6.10) и соответствует значению $\varepsilon_n = 2$. При $\varepsilon_n > 2$ задача (7.6.7) не имеет решения, поэтому не существует стационарных прямолинейных течений в трубе. В этом случае тепло, выделяющееся за счет вязкого трения, не успевает отводиться через стенки трубы и приводит к прогрессивному нарастанию температуры (т.е. тепловому взрыву).

Обозначим теперь $b = b_1$ и рассмотрим случай $\varepsilon_n < 2$.

Подставим выражение (7.6.9) в формулу (7.6.4) с учетом равенств (7.6.5), (7.6.8). В результате находим скорость степенной жидкости

$$V = \frac{4(3n+1)^2 \lambda L}{n \alpha a^2 b^2 \Delta P} \int_{\mathcal{R}/a}^1 \zeta^{\frac{1}{n}} \left(\zeta^{\frac{3n+1}{n}} + b^{-2} \right)^{-2} d\zeta. \quad (7.6.11)$$

Для ньютоновской жидкости, что соответствует значению $n = 1$, из (7.6.11) получим следующий профиль [22]:

$$V = \frac{16\lambda b L}{\alpha a^2 \Delta P} \left[\frac{b}{1+b^2} + \arctg b - \frac{by}{1+b^2 y^2} - \arctg(by) \right], \quad y = \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^2. \quad (7.6.12)$$

Полагая в (7.6.12) $y = 0$, вычислим скорость на оси трубы

$$U_{\max} = \frac{16\lambda b L}{\alpha a^2 \Delta P} \left(\frac{b}{1+b^2} + \arctg b \right).$$

Для степенной жидкости секундный расход жидкости Q через сечение трубы равен

$$Q = 2\pi \int_0^a V \mathcal{R} d\mathcal{R} = \frac{4\pi(3n+1)\lambda b^2 L}{\alpha(1+b^2)\Delta P}. \quad (7.6.13)$$

Изотермическому течению жидкости соответствует предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$. Из формулы (7.6.10) следует, что $b \rightarrow (\varepsilon_n/8)^{1/2}$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Учитывая сказанное, перепишем уравнение (7.6.13) следующим образом:

$$Q = \frac{8b^2}{\varepsilon_n(1+b^2)} Q_{\text{is}}, \quad Q_{\text{is}} = \frac{1}{2}\pi(3n+1)\lambda \frac{\varepsilon_n L}{\alpha \Delta P}, \quad (7.6.14)$$

где Q_{is} — расход жидкости в изотермическом случае при $T \equiv T_s$.

Вспоминая, что критические условия гидродинамического теплового взрыва характеризуются предельными значениями $\varepsilon_n = 2$, $b = 1$, из формулы (7.6.14) имеем

$$Q_* = 2Q_{is}. \quad (7.6.15)$$

Видно, что для неизотермического течения степенной жидкости по круглой трубе при экспоненциальной зависимости консистенции от температуры при любом индексе n критическое значение расхода в два раза больше, чем в изотермическом случае.

Отметим, что в работе [20] исследовалось неизотермическое течение степенной жидкости между двумя параллельными плоскостями, одна из которых двигалась с постоянной скоростью (течение Куэтта); там же рассматривалось безнапорное движение в кольцевом зазоре и течение между двумя вращающимися цилиндрами в случае экспоненциальной зависимости консистенции (7.6.5) при постоянной температуре на границах.

Степенная зависимость консистенции от температуры. В опытах [106] исследовались водные растворы карбоксиметилцеллюлозы, кривая течения которых хорошо описывается степенным уравнением Освальда — де Вилия. Было показано, что показатель n в диапазоне температур $15 \div 60^\circ\text{C}$ практически не меняется, а консистенцию среды можно аппроксимировать зависимостью

$$k = k_0 \left(1 + B_n \frac{T - T_0}{T_0} \right)^{-n}, \quad (7.6.16)$$

где B_n — характеристическая постоянная материала. Диапазон значений n используемых растворов составлял $0,33 \div 1,0$.

Решение задачи (7.6.3), (7.5.8) в случае степенной зависимости консистенции от температуры (7.6.16) можно выразить через функцию Бесселя $J_0(x)$ в виде [80]

$$\frac{B_n T + (1 - B_n) T_0}{B_n T_s + (1 - B_n) T_0} = \frac{J_0 \left(\sigma \mathcal{R} \frac{3n+1}{2n} \right)}{J_0 \left(\sigma a \frac{3n+1}{2n} \right)}, \quad (7.6.17)$$

где коэффициент σ вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{2n}{3n+1} \left(\frac{B_n}{\lambda T_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta P}{2L} \right)^{\frac{n+1}{2n}} k_0^{-\frac{1}{2n}}.$$

Для ньютоновской жидкости, что соответствует значению $n = 1$, формула (7.6.17) была выведена в работе [84].

Пусть $x_1 \approx 2,405$ — первый корень функции Бесселя $J_0(x_1) = 0$. Из выражения (7.6.17) видно, что увеличивая градиент давления $\Delta P/L$ по закону $\sigma a^{(3n+1)/(2n)} \rightarrow x_1$, можно получить сколь угодно большие значения температуры на оси потока. При $\sigma a^{(3n+1)/(2n)} \geq x_1$ ограниченного решения задачи (7.6.3), (7.5.8), (7.6.16) вообще не существует. В этом случае тепло, выделяющееся за счет вязкого трения, не успевает отводиться, что приводит к быстрому нестационарному разогреву среды.

Распределение температуры в плоском канале при степенной зависимости консистенции среды от температуры (7.6.16) получено в [110, 113], там же описаны некоторые другие решения.

В работе [109] исследовалась аналогичная задача о неизотермическом прямолинейном течении вязкопластической жидкости Шведова — Бингама в круглой трубе, когда предел текучести и пластическая вязкость обратно пропорциональны температуре.

До сих пор рассматривались неизотермические течения неньютоновских жидкостей с учетом диссипативного разогрева и зависимости кажущейся вязкости от температуры. При этом температура на стенках была постоянна и отсутствовал конвективный перенос тепла.

В работах [111–113] изучались термогидродинамические задачи неньютоновских жидкостей при переменной температуре вдоль стенок трубы (канала), когда важную роль играет конвективный перенос тепла. Считалось, что кажущаяся вязкость среды экспоненциальным или степенным образом зависит от температуры, и пренебрегалось диссипативным тепловыделением. В одномерных стационарных течениях такого типа градиент давления меняется вдоль трубы. Показано, что в некоторых случаях может возникать ситуация, характерная для теплового взрыва, когда подвод тепла за счет конвекции жидкости начинает превышать теплоотвод к стенкам трубы. Обнаружено также, что существует и другой механизм кризисных явлений: при постоянном теплоотводе от стенок трубы при достаточно малой скорости потока за счет интенсивного охлаждения жидкости может начаться прогрессирующее увеличение ее вязкости, что приведет к «запиранию» потока.

7.7. Обтекание плоской пластины степенной жидкостью

В связи с многими практическими приложениями имеется большое число работ, посвященных теории пограничного слоя нелинейно-вязких жидкостей со степенным реологическим законом (см., например, [73, 119, 121, 185, 187, 192]). Особое внимание уделяется исследованию автомоделных задач, так как их решения позволяют вы-

явить характерные свойства пограничного слоя и могут быть использованы для разработки и обоснования приближенных методов расчета. Детальный анализ течений дилатантных жидкостей показывает существование строгой пространственной локализации области, в которой происходит изменение продольной составляющей скорости [73, 74, 121].

Рассмотрим стационарное изотермическое обтекание тонкой пластины степенной жидкостью. Скорость набегающего потока равна U_i . Считаем, что координаты X и Y отсчитываются вдоль и поперек пластины, а начало координат соответствует передней кромке. Продольную и поперечную составляющие скорости жидкости обозначим V_X и V_Y .

Для степенной жидкости основным безразмерным параметром является обобщенное число Рейнольдса, которое вводится по формуле

$$\text{Re} = \frac{\rho L^n U_i^{2-n}}{k} \sim \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила трения}}, \quad (7.7.1)$$

где L — размерная величина, выбранная за масштаб длины.

При больших числах Рейнольдса оценка членов уравнений движения (см. приложение 6) и неразрывности с учетом выражений (7.1.1), (7.1.4) проводится по той же схеме, что и для ньютоновской жидкости. В результате после выделения главных членов соответствующих асимптотических разложений имеем

$$V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_X}{\partial Y} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\left| \frac{\partial V_X}{\partial Y} \right|^{n-1} \frac{\partial V_X}{\partial Y} \right), \quad (7.7.2)$$

$$\frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} = 0. \quad (7.7.3)$$

Эти уравнения, которые рассматриваются в области $X \geq 0$, $Y \geq 0$, следует дополнить граничными условиями

$$V_X(X, 0) = V_Y(X, 0) = 0, \quad V_X(0, Y) = U_i, \quad V_X(X, \infty) = U_i. \quad (7.7.4)$$

Решение задачи (7.7.2) — (7.7.4) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\left| f''_{\zeta\zeta} \right|^{n-1} f'''_{\zeta\zeta\zeta} + f f''_{\zeta\zeta} = 0 \quad (7.7.5)$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (7.7.6)$$

Компоненты скорости жидкости V_X , V_Y и автомодельная переменная ζ выражаются через координаты X , Y и функцию $f(\zeta)$ следующим образом:

$$V_X = U_i f'_\zeta, \quad V_Y = \frac{1}{n+1} \left[\frac{n(n+1)kU_i^{2n-1}}{\rho X^n} \right]^{\frac{1}{n+1}} (\zeta f'_\zeta - f),$$

$$\zeta = \left[\frac{\rho U_i^{2-n}}{n(n+1)kX} \right]^{\frac{1}{n+1}} Y. \quad (7.7.7)$$

В работах [79, 80] были получены точные аналитические решения задачи (7.7.5), (7.7.6) для псевдопластичных жидкостей при $n = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$. Ниже приведены два из этих решений, записанные в параметрической форме.

При $n = \frac{1}{5}$:

$$f = at^2, \quad \zeta = b \int_0^t (1+t^3)^{1/3} dt, \quad (7.7.8)$$

где $a = 2^{-1/6} \cdot 5^{5/6}$, $b = 10^{5/6}$, $t \in [0, +\infty)$.

При $n = \frac{3}{5}$:

$$f = at^2(1-t^3)^{-1/2}, \quad \zeta = b \int_0^t (1-t^3)^{-3/2} dt, \quad (7.7.9)$$

где $a = 2^{-3/4} \cdot 3^{1/2} \cdot 5^{5/8}$, $b = 2^{-7/4} \cdot 3^{3/2} \cdot 5^{5/8}$, $t \in [0, +1)$.

В работе [121] было доказано, что для дилатантных жидкостей (т.е. при $n > 1$) все изменение скорости происходит в ограниченной области вблизи пластины при $0 \leq \zeta \leq \zeta_*$ (вне этой области при $\zeta \geq \zeta_*$ скорость жидкости постоянна и равна U_i). Функция f и граница области локализации $\zeta = \zeta_*$ ищутся путем решения уравнения (7.7.5) с двумя граничными условиями на поверхности пластины (7.7.6) и двумя дополнительными условиями: $f'_\zeta(\zeta_*) = 1$, $f''_{\zeta\zeta}(\zeta_*) = 0$. Вне области локализации при $\zeta \geq \zeta_*$ функция f линейна: $f = \zeta - \zeta_* + f(\zeta_*)$.

В частном случае $n = 2$ величина $\zeta_* \approx 1,849$ находится из трансцендентного уравнения $2 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\zeta_*) = -\exp(\frac{3}{2}\zeta_*)$, а решение рассматриваемой задачи в области локализации $0 \leq \zeta \leq \zeta_*$ имеет вид [121]

$$f(\zeta) = \frac{\exp(-\zeta) + 2 \exp(\frac{1}{2}\zeta) \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}\zeta - \frac{1}{6}\pi)}{-\exp(-\zeta_*) + 2 \exp(\frac{1}{2}\zeta_*) \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}\zeta_* + \frac{1}{6}\pi)}.$$

Результаты численного решения задачи (7.7.5), (7.7.6) для различных значений показателя n ($0,1 \leq n \leq 2,0$) приведены в книге [187].

Вторая производная на поверхности пластины $f''_{\zeta\zeta}(0)$ хорошо аппроксимируется формулой

$$f''_{\zeta\zeta}(0) = 0,062 + 0,43n - 0,0245n^3, \quad (7.7.10)$$

погрешность которой при $0,2 \leq n \leq 2,0$ составляет менее 1%.

Введем безразмерные коэффициенты сопротивления трения — локальный

$$c_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = 2(n^2 + n)^{-\frac{n}{n+1}} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} [f''_{\zeta\zeta}(0)]^n \quad (7.7.11)$$

и полный (средний)

$$\langle c_f \rangle = \frac{2}{\rho U_i^2} \frac{1}{L} \int_0^L \tau_s dX = 2(n+1)(n^2 + n)^{-\frac{n}{n+1}} \text{Re}^{-\frac{1}{n+1}} [f''_{\zeta\zeta}(0)]^n, \quad (7.7.12)$$

где $\text{Re}_x = \rho X^n U_i^{2-n}/k$ — локальное число Рейнольдса, а Re вычисляется по формуле (7.7.1), где L — длина пластины.

Результаты численного решения задачи (7.7.5), (7.7.6) показывают, что коэффициенты сопротивления хорошо аппроксимируются выражениями

$$c_f = \frac{2,266 - 1,22n + 0,28n^2}{n+1} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}}, \quad (7.7.13)$$

$$\langle c_f \rangle = (2,266 - 1,22n + 0,28n^2) \text{Re}^{-\frac{1}{n+1}},$$

максимальная погрешность которых при $0,1 \leq n \leq 2,0$ не превосходит 0,5%.

Для слабо нелинейно-вязких жидкостей с произвольным законом вязкого трения $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ локальный коэффициент сопротивления можно найти с помощью приближенных формул

$$c_f = \frac{2\tau(w)}{\rho U_i^2}, \quad X = 0,22 \rho U_i^3 \int_w^\infty \frac{dw}{w^2 \tau(w)}, \quad (7.7.14)$$

где $w = (\dot{\gamma})_{Y=0}$ — скорость сдвига на поверхности пластины. Для того чтобы определить зависимость c_f от X , надо после вычисления интеграла исключить из выражений (7.7.14) величину w .

Формулы (7.7.14) выводятся с помощью интегрального метода, где в качестве профиля продольной составляющей скорости выбирается профиль ньютоновской жидкости.

Для степенных жидкостей тестовые расчеты показывают, что максимальная погрешность зависимости (7.7.14) при $0,8 \leq n \leq 1,3$ составляет 5%, а в более широком диапазоне $0,5 \leq n \leq 1,8$ — 9%.

Диффузия к плоской пластине, обтекаемой степенной жидкостью. Конвективный массо- и теплообмен пластины, продольно обтекаемой неньютоновской жидкостью, рассматривался в работах [185]. В приближении диффузионного пограничного слоя (при больших числах Пекле Pe) результаты решения соответствующей задачи приводят к следующему выражению для безразмерного диффузионного потока:

$$j = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})} \left[\frac{3}{2} \frac{(2n+1)}{n+1} f''_{\zeta\zeta}(0) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{Re}{n(n+1)} \right]^{\frac{1}{3(n+1)}} Re^{\frac{1}{3}} \left(\frac{X}{L} \right)^{-\frac{n+2}{3(n+1)}},$$

где $Re = \rho L^n U_i^{2-n}/k$; $Pe = LU_i/D$; L — размерная величина, выбранная за масштаб длины; f — решение задачи (7.7.5), (7.7.6). Для расчета второй производной $f''_{\zeta\zeta}(0)$ можно использовать приближенную формулу (7.7.10).

7.8. Затопленная струя степенной жидкости

Исследуем плоскую задачу об истечении несжимаемой степенной жидкости из узкой горизонтальной щели в безграничное пространство, заполненное той же средой. Введем прямоугольную систему координат X, Y , где ось X отсчитывается от щели и направлена вдоль оси струи.

Считаем, что щель бесконечно тонка, а скорость истечения жидкости из нее настолько велика, что продольная составляющая импульса струи остается конечной величиной

$$J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho V_X^2 dY = \text{const}. \quad (7.8.1)$$

Вследствие вязкого трения бьющая из щели с большой скоростью струя увлекает за собой некоторую часть окружающей жидкости и одновременно сама под тормаживается. При этом возникает тонкий пограничный слой, симметричный относительно оси X , который утолщается вниз по течению. Давление поперек струи неизменно. Поскольку вдали от щели жидкость неподвижна, то для всей области течения градиент давления равен нулю.

Распределение скоростей жидкости в струе описывается уравнениями пограничного слоя (7.7.2), (7.7.3), которые следует дополнить граничными условиями симметрии профиля скорости на оси течения

$$V_Y = 0, \quad \frac{\partial V_X}{\partial Y} = 0 \quad \text{при} \quad Y = 0, \quad (7.8.2)$$

условием затухания скорости вдали от щели

$$V_X \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Y \rightarrow \pm\infty \quad (7.8.3)$$

и интегральным условием (7.8.1).

Компоненты скорости можно выразить с помощью автомодельной переменной η и вспомогательной функции $F = F(\eta)$ следующим образом [185, 187]:

$$\eta = A(k/\rho)^{-\frac{1}{n+1}} X^{-\frac{2}{3n}} Y, \quad (7.8.4)$$

$$V_X = [3n(n+1)]^{\frac{1}{2-n}} A^{\frac{n+1}{2-n}} X^{-\frac{1}{3n}} F'_\eta,$$

$$V_Y = \frac{1}{3n} [3n(n+1)]^{\frac{1}{2-n}} A^{\frac{2n-1}{2-n}} (k/\rho)^{\frac{1}{n+1}} X^{\frac{1-3n}{3n}} (\eta F'_\eta - F),$$

где постоянная A определяется в ходе решения задачи из условия сохранения импульса (7.8.1), штрих обозначает производную по η .

Подставляя выражения (7.8.4) в (7.7.2), (7.7.3), (7.8.2), (7.8.3), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$n|F''_{\eta\eta}|^{n-1} F'''_{\eta\eta\eta} + (n+1)[FF''_{\eta\eta} + (F'_\eta)^2] = 0 \quad (7.8.5)$$

с граничными условиями

$$F = F''_{\eta\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \quad F'_\eta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (7.8.6)$$

Решение задачи (7.8.5), (7.8.6), удовлетворяющее дополнительно условию типа нормировки $F'_\eta(0) = 1$, можно записать в неявном виде

$$\eta = \begin{cases} \int_0^F [1 - (2n-1)(n+1)^{\frac{1-n}{n}} F^{\frac{n+1}{n}}]^{\frac{n}{1-2n}} dF & \text{при } n \neq \frac{1}{2}, \\ \int_0^F \exp\left(\frac{3}{4} F^3\right) dF & \text{при } n = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7.8.7)$$

Из выражений (7.8.4), (7.8.2) определим постоянную A :

$$A = [3n(n+1)]^{-\frac{2}{3n}} \left[2 \int_0^\infty (F'_\eta)^2 d\eta \right]^{\frac{n-2}{3n}} \left[\frac{J_0}{\rho} \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{\frac{2-n}{3n}}. \quad (7.8.8)$$

Несобственный интеграл можно вычислить путем перехода от переменной η к функции F согласно решению (7.8.7). В частности, при $\frac{1}{2} < n < 2$ получим:

$$\int_0^\infty (F'_\eta)^2 d\eta = n(n+1)^{-\frac{2}{n+1}} (2n-1)^{-\frac{n}{n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{n+1} + \frac{3n-1}{2n-1}\right)}, \quad (7.8.9)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. При $n = \frac{1}{2}$ имеем

$$\int_0^\infty (F'_\eta)^2 d\eta = 4^{1/3} \cdot 3^{-4/3} \Gamma(1/3) \approx 0,983.$$

Рассмотрим сначала случай неньютоновской жидкости. Вычислим интеграл (7.8.7) при $n = 1$, а затем выразим F через η . В результате находим

$$F = \text{th } \eta \quad (n = 1). \quad (7.8.10)$$

По формулам (7.8.8), (7.8.9) определим константу A :

$$A = \left(\frac{J_0}{48 \rho \sqrt{\nu}} \right)^{1/3} \approx 0,275 \left(\frac{J_0}{\rho \sqrt{\nu}} \right)^{1/3}, \quad (7.8.11)$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости.

Подставляя равенства (7.8.10), (7.8.11) в выражения (7.8.4), получим распределение скоростей в плоской струе ньютоновской жидкости [184]

$$\begin{aligned} V_X &= 0,454 \left(\frac{J_0^2}{\rho^2 \nu X} \right)^{1/3} (1 - \text{th}^2 \eta), \\ V_Y &= 0,550 \frac{J_0 \nu}{\rho X^2} [2\eta(1 - \text{th}^2 \eta) - \text{th } \eta], \end{aligned} \quad (7.8.12)$$

где

$$\eta = 0,275 \left(\frac{J_0}{\rho \nu^2} \right)^{1/3} Y X^{-2/3}.$$

Остановимся теперь на качественных особенностях струйного течения степенной жидкости в зависимости от реологического параметра n .

Из формулы (7.8.7) следует, что для $0 < n \leq \frac{1}{2}$ функция F неограниченно возрастает при $\eta \rightarrow \infty$, а для $n > \frac{1}{2}$ функция F при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к постоянному пределу, равному

$$F(\infty) = (n + 1)^{\frac{n-1}{n+1}} (2n - 1)^{-\frac{n}{n+1}}. \quad (7.8.13)$$

На оси потока скорость жидкости максимальна и убывает по закону $U_{\max} \sim X^{-1/(3n)}$. Поэтому чем меньше n , тем быстрее уменьшается скорость.

Определим 1%-ную ширину струи $\delta(X)$, как удвоенное расстояние от оси струи до точки с координатой y^0 , где продольная составляющая скорости отличается от своего предельного значения на 1% :

$$\delta(X) = 2y^0 = 2 \frac{\eta^0}{A} \left(\frac{k}{\rho} \right)^{\frac{1}{n+1}} X^{\frac{2}{3n}}, \quad (7.8.14)$$

где η^0 — значение автомодельной переменной, при которой $V_X/U_{\max} = F'_\eta = 0,01$. Из формулы (7.8.14) следует, что при $n > \frac{2}{3}$ струя имеет выпуклую наружу форму, при $n = \frac{2}{3}$ границы струи прямолинейны, а при $n < \frac{2}{3}$ границы струи имеют вид расходящихся парабол с остроконечной сингулярной точкой на оси потока.

Вычислим теперь объемный расход жидкости на единицу длины щели:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} V_X dY = 2F(\infty) [3n(n+1)A^{2n-1}]^{\frac{1}{2-n}} \left(\frac{k}{\rho}\right)^{\frac{1}{n+1}} X^{\frac{1}{3n}}. \quad (7.8.15)$$

При $\frac{1}{2} < n < 2$ в это выражение следует подставить значение $F(\infty)$ из (7.8.13). Видно, что по мере удаления от щели расход увеличивается, так как струя увлекает за собой с боков покоящуюся жидкость. Расход также увеличивается с увеличением импульса. При уменьшении показателя n от 1 до $\frac{1}{2}$ расход неограниченно увеличивается: $\lim_{n \rightarrow 1/2} Q = \infty$. При $0 < n < \frac{1}{2}$ объемный расход будет бесконечным.

7.9. Движение частиц, капель и пузырей в степенной жидкости

Движение сферических пузырей, капель и твердых частиц с постоянной скоростью U_i в степенной неньютоновской жидкости рассматривалось многими авторами (см., например, [200, 217, 224, 236, 239, 241–244, 256, 259, 260, 263, 264, 283, 315]). Ниже кратко перечислены некоторые результаты этих работ.

В случае безынерционного обтекания (при малых числах Рейнольдса) газового пузыря квазиньютоновской степенной жидкостью, у которой реологический параметр n близок единице, для расчета коэффициента сопротивления можно использовать формулу:

$$c_f = \frac{2|\vec{F}_x|}{\pi a^2 \rho U_i} = 3^{\frac{n-1}{2}} \frac{13 + 4n - 8n^2}{(n+2)(2n+1)} \frac{8}{\widetilde{\text{Re}}}, \quad (7.9.1)$$

где $\widetilde{\text{Re}} = \rho a^n U_i^{2-n} / k$ — число Рейнольдса, a — радиус пузыря.

Видно, что для псевдопластических жидкостей коэффициент сопротивления выше, а для дилатантных ниже соответствующих значений коэффициента сопротивления при обтекании пузыря ньютоновской жидкостью.

В случае обтекания капли ньютоновской жидкости поступательным стоксовым потоком степенной жидкости выражение для коэффициента сопротивления можно представить в виде

$$c_f = \frac{24 \Phi_n(\beta)}{2^n \text{Re}}, \quad (7.9.2)$$

где функция Φ_n отражает реологические свойства течения и является функцией безразмерных параметров n и $\beta = \mu a^{n-1}/(kU_i^{n-1})$; μ — динамическая вязкость капли.

Для газового пузыря и твердой частицы, которые соответствуют предельным значениям $\beta = 0$ и $\beta = \infty$, функция Φ_n хорошо аппроксимируется зависимостями

$$\Phi_n(0) = 0,81 + 0,46n - 0,6n^2 \quad (\text{пузырь}), \quad (7.9.3)$$

$$\Phi_n(\infty) = 1,65 + 0,1n - 0,75n^2 \quad (\text{частица}), \quad (7.9.4)$$

погрешность которых в диапазоне $0,6 \leq n \leq 1,0$ не превышает 1,5% (сопоставление проводилось с результатами численных решений).

В случае капли, которой соответствуют конечные значения $0 < \beta < \infty$, функцию $\Phi_n(\beta)$ можно вычислять с помощью приближенной формулы

$$\Phi_n(\beta) = \frac{1}{\beta + 1} \Phi_n(0) + \frac{\beta}{\beta + 1} \Phi_n(\infty), \quad (7.9.5)$$

максимальная погрешность которой составляет около 3%.

Выражения (7.9.2) — (7.9.5) позволяют вычислять коэффициенты сопротивления частиц, капель и пузырей в стоксовом потоке степенной жидкости.

Скорость капли, падающей под действием силы тяжести в степенной жидкости при малых числах Рейнольдса, определяется по формуле

$$U_i = 2a \left\{ \frac{ag|\rho_1 - \rho_2|}{9k\Phi_n(\beta)} \right\}^{1/n}, \quad (7.9.6)$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности капли и сплошной фазы.

При стоксовом обтекании сферического пузыря поступательным потоком вязкопластичной жидкости Шведова — Бингама с малым пределом текучести для коэффициента сопротивления получено двучленное асимптотическое разложение:

$$c_f = 8(1 + 3,22\varepsilon) \text{Re}^{-1}, \quad \text{Re} = a\rho U_i/\mu_p, \quad (7.9.7)$$

где $\varepsilon = a\tau_0/(\mu_p U_i) \ll 1$.

В работе [107] в рамках ячеечной модели исследовалось реологическое поведение концентрированных суспензий с неньютоновской дисперсионной средой, описываемой степенной моделью и моделью Керри.

В случае массообмена газового пузыря с поступательным стоксовым потоком квазиньютоновской степенной жидкости (n близко к единице) при больших числах Пекле для расчета среднего числа Шервуда можно использовать приближенную формулу:

$$\text{Sh} = [(0,497 - 0,284 n) \text{Pe}]^{1/2},$$

максимальная погрешность которой в диапазоне $0,6 \leq n \leq 1,0$ составляет около 4%.

В книгах [99, 216] дан подробный обзор исследований, посвященных движению и массообмену частиц, капель и пузырей в неньютоновской жидкости, приведены многочисленные формулы и графики для определения силы сопротивления.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Точные решения линейных уравнений тепло- и массопереноса

При составлении этого раздела использованы решения, приведенные в книгах [10, 35, 86, 89, 173].

1.1. Уравнение теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

1. Некоторые частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

1. $T = Ax + B$,
2. $T = A \exp(a^2 \lambda^2 t \pm \lambda x) + B$,
3. $T = A \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cos(\lambda x) + B$,
4. $T = A \exp(-a^2 \lambda^2 t) \sin(\lambda x) + B$,
5. $T = A \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) + B$,
6. $T = A \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) + B$,
7. $T = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + B$,

где $\operatorname{erf} z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

2. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] f(\xi) d\xi.$$

$$\text{Частный случай: } f(x) = \begin{cases} A & \text{при } |x| < x_0, \\ B & \text{при } |x| > x_0. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2}(A - B) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] + B.$$

3. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\} f(\xi) d\xi.$$

Частный случай: $f(x) = A$.

Решение:

$$T = A \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

$$\begin{aligned} 3.2. \quad T &= 0 && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \frac{g(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Частный случай: $g(x) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t < t_0, \\ B & \text{при } t_0 < t. \end{cases}$

Решение:

$$T = \begin{cases} A \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) & \text{при } 0 < t < t_0, \\ A \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + (B - A) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t-t_0}} \right) & \text{при } t_0 < t, \end{cases}$$

где $\operatorname{erfc} x \equiv 1 - \operatorname{erf} x$.

$$\begin{aligned} 3.3. \quad T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\} f(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \frac{g(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}. \end{aligned}$$

4. Область: $0 < x < +\infty$. Вторая краевая задача*.

$$4.1. \quad \begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = 0 & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\} f(\xi) d\xi.$$

$$4.2. \quad \begin{array}{lll} T = 0 & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = g(t) & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

*Частный случай: $g(t) = -A$.**Решение:*

$$T = 2Aa\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{4a^2 t} \right) - Ax \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

$$4.3. \quad \begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = g(t) & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\} f(\xi) d\xi - \\ - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

5. Область: $0 < x < +\infty$. Третья краевая задача.

$$5.1. \quad \begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT = 0 & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

* Далее помимо общепринятых обозначений используются также краткие обозначения для частных производных: $\partial_t T \equiv \frac{\partial T}{\partial t}$, $\partial_x T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}$, $\partial_{xx} T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right] - 2k \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t} - k\eta\right] d\eta.$$

$$\begin{aligned} 5.2. \quad T &= 0 && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT &= kg(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = -\frac{ak}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x, t-\tau) d\tau,$$

где

$$H(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) - k \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t} - k\eta\right] d\eta.$$

$$\text{Частный случай: } g(t) = \begin{cases} -A & \text{при } 0 < t < t_0, \\ -B & \text{при } T - 0 < t. \end{cases}$$

Решение:

$$T = \begin{cases} AW(x, t) & \text{при } 0 < t < T, \\ AW(x, t) + (B-A)W(x, t-t_0) & \text{при } t_0 < t, \end{cases}$$

где

$$W(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \exp(kx + a^2k^2t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ak\sqrt{t}\right).$$

$$\begin{aligned} 5.3. \quad T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - kT &= kg(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - \frac{ak}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x, t-\tau) d\tau,$$

где функции $G(x, \xi, t)$ и $H(x, t)$ см. в 5.1 и 5.2.

6. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

6.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Частный случай: $f(x) = A$.

Решение:

$$T = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp\left[-\frac{a^2(2n+1)^2 \pi^2 t}{l^2}\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right].$$

Частный случай: $f(x) = Ax$.

Решение:

$$T = \frac{2Al}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

6.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= h(t) && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$\begin{aligned} M_n(t) &= \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \frac{a^2 n \pi}{l} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) g(t) dt - \\ &- (-1)^n \frac{a^2 n \pi}{l} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) h(t) dt. \end{aligned}$$

7. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

7.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx; \quad n = 1, 2, \dots$$

7.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = g(t) & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T = h(t) & \text{при } x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

О решении этой задачи см. далее п. 6 раздела 1.2 при $\Phi \equiv 0$.

8. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

8.1. Однородные граничные условия ($b > 0$):

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - bT = 0 & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + bT = 0 & \text{при } x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\|y_n\|^2} \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{b}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{b}{\lambda_n^2} + \frac{l}{2} \left(1 + \frac{b^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{2b}{\lambda^2 - b^2}.$$

8.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T - bT = g(t) & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T + cT = h(t) & \text{при } x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

где $b > 0$, $c > 0$. О решении этой задачи см. далее п. 7 раздела 1.2 при $\Phi \equiv 0$.

9. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

9.1а. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) &= \vartheta\left(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) + \\ &+ \vartheta\left(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right). \end{aligned}$$

Здесь $\vartheta(x, t)$ — функция Якоби

$$\vartheta(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\pi^2 n^2 t) \cos(2\pi n x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-n)^2}{4t}\right].$$

Первый ряд быстро сходится при больших t , а второй — при малых t .

9.1б. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x T &= h(t) && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

О решении этой задачи см. далее п. 8 раздела 1.2 при $\Phi \equiv 0$.

9.2а. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T &= 0 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \vartheta\left(\frac{x - \xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) + \vartheta\left(\frac{x + \xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \\ - \vartheta\left(\frac{x + \xi - 2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x - \xi - 2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right).$$

Здесь $\vartheta(x, t)$ — функция Якоби (см. выше п. 9.1).

9.26. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x T = g(x) & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ T = h(x) & \text{при } x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

О решении этой задачи см. далее п. 8 раздела 1.2 при $\Phi \equiv 0$.

1.2. Уравнение теплопроводности с источником

$$\text{членом } \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi(x, t)$$

1. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где функция $G(x, \xi, t)$ описывается формулой

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}\right].$$

2. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

$$\begin{array}{lll} T = f(x) & \text{при } t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ T = g(t) & \text{при } x = 0 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$T = \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t - \tau)}\right] \frac{g(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} + \\ + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\}.$$

3. Область: $0 < x < +\infty$. Вторая краевая задача.

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$\partial_x T = g(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

Решение:

$$T = \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] + \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\}.$$

4. Область: $0 < x < +\infty$. Третья краевая задача.

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$\partial_x T - kT = kg(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi - \frac{ak}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} H(x, t - \tau) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] + \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t} \right] - \\ - 2k \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x + \xi + \eta)^2}{4a^2 t} - k\eta \right] d\eta. \\ H(x, t) = \exp \left(-\frac{x^2}{4a^2 t} \right) - k \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x + \eta)^2}{4a^2 t} - k\eta \right] d\eta.$$

5. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

5.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= 0 && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right).$$

5.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T &= f(x) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ T &= g(t) && \text{при } x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ T &= h(t) && \text{при } x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u = u(x, t)$ по формуле

$$T = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u,$$

получим для u аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 5.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

Решение:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ &+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right), \\ M_n(t) &= \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \frac{a^2 n \pi}{l} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) g(t) dt - \\ &- (-1)^n \frac{a^2 n \pi}{l} \int_0^t \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) h(t) dt. \end{aligned}$$

6. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

6.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T = f(x) & \quad \text{при } t = 0 & \quad (\text{начальное условие}) \\ \partial_x T = 0 & \quad \text{при } x = 0 & \quad (\text{граничное условие}) \\ \partial_x T = 0 & \quad \text{при } x = l & \quad (\text{граничное условие}) \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right).$$

6.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T = f(x) & \quad \text{при } t = 0 & \quad (\text{начальное условие}) \\ \partial_x T = g(t) & \quad \text{при } x = 0 & \quad (\text{граничное условие}) \\ \partial_x T = h(t) & \quad \text{при } x = l & \quad (\text{граничное условие}) \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u = u(x, t)$ по формуле

$$T = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u,$$

получим для u аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 6.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

7. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.7.1. Однородные граничные условия ($b > 0, c > 0$):

$$\begin{aligned} T = f(x) & \quad \text{при } t = 0 & \quad (\text{начальное условие}) \\ \partial_x T - bT = 0 & \quad \text{при } x = 0 & \quad (\text{граничное условие}) \\ \partial_x T + cT = 0 & \quad \text{при } x = l & \quad (\text{граничное условие}) \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi) \exp(-a^2 \lambda_n^2 t),$$

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{b}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x),$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{c}{2\lambda_n^2} \frac{\lambda_n^2 + b^2}{\lambda_n^2 + c^2} + \frac{b}{2\lambda_n^2} + \frac{l}{2} \left(1 + \frac{b^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{b + c}{\lambda^2 - bc}.$$

7.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T = f(x) & \quad \text{при } t = 0 & \quad (\text{начальное условие}) \\ \partial_x T - bT = g(t) & \quad \text{при } x = 0 & \quad (\text{граничное условие}) \\ \partial_x T + cT = h(t) & \quad \text{при } x = l & \quad (\text{граничное условие}) \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u = u(x, t)$ по формуле

$$T = \frac{h(t) - (1 + cl)g(t)}{b + c + bcl} + x \frac{cg(t) + bh(t)}{b + c + bcl} + u,$$

получим для u аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 7.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

8. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

8.1а. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} T = f(x) & \quad \text{при } t = 0 & \quad (\text{начальное условие}) \\ T = 0 & \quad \text{при } x = 0 & \quad (\text{граничное условие}) \\ \partial_x T = 0 & \quad \text{при } x = l & \quad (\text{граничное условие}) \end{aligned}$$

Решение:

$$T = \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) = & \vartheta \left(\frac{x - \xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l} \right) - \vartheta \left(\frac{x + \xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l} \right) + \\ & + \vartheta \left(\frac{x + \xi - 2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l} \right) - \vartheta \left(\frac{x - \xi - 2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\vartheta(x, t)$ — функция Якоби (см. п. 9 в разделе 1.1).

8.2а. Неоднородные граничные условия:

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$T = g(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

$$\partial_x T = h(t) \quad \text{при } x = l \quad (\text{граничное условие})$$

Переходя к новой зависимой переменной $u = u(x, t)$ по формуле

$$T = g(t) + xh(t) + u,$$

получим для u аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 8.1а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

8.1б. Однородные граничные условия:

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$\partial_x T = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

$$T = 0 \quad \text{при } x = l \quad (\text{граничное условие})$$

Решение:

$$T = \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \vartheta\left(\frac{x - \xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) + \vartheta\left(\frac{x + \xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \\ - \vartheta\left(\frac{x + \xi - 2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x - \xi - 2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right).$$

Здесь $\vartheta(x, t)$ — функция Якоби (см. п. 9 в разделе 1.1).

8.2б. Неоднородные граничные условия:

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$\partial_x T = g(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

$$T = h(t) \quad \text{при } x = l \quad (\text{граничное условие})$$

Переходя к новой зависимой переменной $u = u(x, t)$ по формуле

$$T = (x - l)g(t) + h(t) + u,$$

получим для u аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 8.1б (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

1.3. Уравнения с объемной реакцией

$$1. \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT.$$

При $b < 0$ это уравнение встречается в задачах массопереноса с объемной химической реакцией.

1. Некоторые частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

1. $T = (Ax + B)e^{bt}$,
2. $T = A \exp[(a^2\lambda^2 + b)t \pm \lambda x] + B$,
3. $T = A \exp[(b - a^2\lambda^2)t] \cos(\lambda x) + B$,
4. $T = A \exp[(b - a^2\lambda^2)t] \sin(\lambda x) + B$,
5. $T = A \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t} + bt\right) + B$,
6. $T = A \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t} + bt\right) + B$,
7. $T = Ae^{bt} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + B$,

где $\operatorname{erf} z$ — интеграл вероятностей.

2. Упрощающее преобразование. Замена $T = e^{bt}u$ приводит к уравнению $\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разделе 1.1. Начальное условие для новой переменной u не меняется, а неоднородная часть в граничных условиях умножается на функцию e^{-bt} . Учитывая сказанное нетрудно получить решение исходного уравнения с начальными и граничными условиями, которые рассматривались в разделе 1.1. Для примера приведем ниже решения двух типичных задач.

3. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} + bt\right] f(\xi) d\xi.$$

4. Область: $0 < x < +\infty$. **Первая краевая задача.**

$$T = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$T = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

Решение:

$$T = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\} e^{bt} f(\xi) d\xi + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right] \exp[b(t-\tau)] \frac{g(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

$$2. \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT + \Phi(x, t).$$

Замена $T = e^{bt}u$ приводит к уравнению $\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u + e^{-bt} \Phi(x, t)$, которое подробно рассматривается в разделе 1.2.

$$3. \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \frac{\partial T}{\partial x} + cT + \Phi(x, t).$$

Замена $T = \exp(\lambda t + \mu x)u$, где $\lambda = c - \frac{1}{4}b^2/a^2$, $\mu = -\frac{1}{2}b/a^2$, приводит к уравнению $\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u + \exp(-\lambda t - \mu x) \Phi(x, t)$, которое подробно рассматривается в разделе 1.2.

1.4. Уравнения с переменными коэффициентами

$$1. \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Это уравнение встречается в плоских задачах теплопроводности (теплообмен кругового цилиндра с окружающей средой, r — радиальная координата).

1. Некоторые частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

1. $T = A + B \ln r,$
2. $T = A + 4a^2 Bt + Br^2,$
3. $T = A + \frac{B}{t} \exp \left(-\frac{r^2}{4a^2 t} \right),$
4. $T = A + B \int_1^\zeta e^{-z} \frac{dz}{z}, \quad \zeta = \frac{r^2}{4a^2 t},$
5. $T = \exp(-a^2 \lambda^2 t) J_0(\lambda r),$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

2. Область: $0 < r < R$. Первая краевая задача.

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad T &= T_0 && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\
 T &= T_R && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)} \\
 T &\neq \infty && \text{при } r = 0 && \text{(граничное условие)}
 \end{aligned}$$

где $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{T(r, t) - T_R}{T_0 - T_R} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right),$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 2,4048$; $\mu_2 = 5,5201$; $\mu_3 = 8,6537$; $\mu_4 = 11,7915$; $\mu_5 = 14,9309$. При $n \rightarrow \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \rightarrow \pi$.

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad T &= f(r) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\
 T &= 0 && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)} \\
 T &\neq \infty && \text{при } r = 0 && \text{(граничное условие)}
 \end{aligned}$$

Решение:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right),$$

где

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) dr.$$

Здесь μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$.

3. Область: $0 < r < R$. Вторая краевая задача.

$$\begin{aligned}
 3.1. \quad T &= T_0 && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\
 \partial_r T &= g_R && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)} \\
 T &\neq \infty && \text{при } r = 0 && \text{(граничное условие)}
 \end{aligned}$$

где $T_0 = \text{const}$, $g_R = \text{const}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
 T(r, t) &= T_0 + g_R R \left[2 \frac{a^2 t}{R^2} - \frac{1}{4} \left(1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \right],
 \end{aligned}$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 3,8317$; $\mu_2 = 7,0156$; $\mu_3 = 10,1735$; $\mu_4 = 13,3237$; $\mu_5 = 16,4706$. При $n \rightarrow \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \rightarrow \pi$.

$$\begin{aligned} 3.2. \quad T &= f(r) && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T &= g(t) && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty && \text{при } r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r) dr + \frac{2a}{R} \int_0^t g(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) H_n(r, t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_n(r, t) &= \frac{1}{J_0^2(\mu_n)} \left[\frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr + \right. \\ &\left. + \frac{2a}{R} \int_0^t g(\tau) \exp\left(\frac{a^2 \mu_n^2 \tau}{R^2}\right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Здесь μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$.

4. Область: $0 < r < R$. Третья краевая задача.

$$\begin{aligned} T &= T_0 && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T &= k(T_R - T) && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty && \text{при } r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

где $k = \text{const}$, $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{T(r, t) - T_0}{T_R - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где

$$A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\mu_n J_1(\mu_n) - kR J_0(\mu_n) = 0$.

$$2. \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Это уравнение встречается в осесимметричных задачах теплопроводности (теплообмен шара с окружающей средой, r — радиальная координата). Замена $u(r, t) = rT(r, t)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2 \partial_{rr} u$, которое рассматривается в разделе 1.1.

1. Некоторые частные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

1. $T = A + B \frac{1}{r},$
2. $T = A + 6a^2 B t + B r^2,$
3. $T = A + \frac{B}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2 t}\right),$
4. $T = A + \frac{B}{r\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2 t}\right),$
5. $T = A r^{-1} \exp(a^2 \lambda^2 t \pm \lambda r) + B,$
6. $T = A r^{-1} \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cos(\lambda r) + B,$
7. $T = A r^{-1} \exp(-a^2 \lambda^2 t) \sin(\lambda r) + B.$

2. Область: $0 < r < R$. Первая краевая задача.

- 2.1. $T = T_0$ при $t = 0$ (начальное условие)
 $T = T_R$ при $r = R$ (граничное условие)
 $T \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

где $T_0 = \text{const}, T_R = \text{const}.$

Решение:

$$\frac{T(r, t) - T_R}{T_0 - T_R} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} R}{\pi n r} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \pi^2 n^2 t}{R^2}\right).$$

- 2.2. $T = f(r)$ при $t = 0$ (начальное условие)
 $T = T_R$ при $r = R$ (граничное условие)
 $T \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right),$$

где

$$A_n = \frac{2}{R} \int_0^R r f(r) \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr.$$

3. Область: $0 < r < R$. Вторая краевая задача.

$$\begin{aligned} 3.1. \quad T &= T_0 & \text{при } t &= 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T &= g_R & \text{при } r &= R & \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty & \text{при } r &= 0 & \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

где $T_0 = \text{const}$, $g_R = \text{const}$.

Решение:

$$\begin{aligned} T(r, t) = T_0 + g_R R \left[\frac{3a^2 t}{R^2} + \frac{5r^2 - 3R^2}{10R^2} - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{\mu_n^3 \cos(\mu_n) r} \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\text{tg}(\mu_n) - \mu_n = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 4,4934$; $\mu_2 = 7,7253$; $\mu_3 = 10,9041$; $\mu_4 = 14,0662$; $\mu_5 = 17,2208$.

$$\begin{aligned} 3.2. \quad T &= f(r) & \text{при } t &= 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T &= g(t) & \text{при } r &= R & \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty & \text{при } r &= 0 & \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} T(r, t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 f(r) dr + \frac{3a}{R} \int_0^t g(\tau) d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right) \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) H_n(r, t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_n(r, t) = \frac{2}{\mu_n^2 \cos(\mu_n) r} \left[\frac{1}{R \mu_n} \int_0^R r f(r) \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr + \right. \\ \left. + a \int_0^t g(\tau) \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 \tau}{R^2}\right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:
 $\operatorname{tg}(\mu_n) - \mu_n = 0$.

4. Область: $0 < r < R$. Третья краевая задача.

$$\begin{aligned} T &= T_0 && \text{при } t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_r T &= k(T_R - T) && \text{при } r = R && \text{(граничное условие)} \\ T &\neq \infty && \text{при } r = 0 && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

где $k = \text{const}$, $T_0 = \text{const}$, $T_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{T(r, t) - T_0}{T_R - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R}{r} \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right),$$

где

$$A_n = \frac{2}{\mu_n} \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Здесь μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:
 $(kR - 1) \operatorname{tg}(\mu_n) + \mu_n = 0$.

3.
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1 - 2\beta}{x} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного погранично-го слоя.

1. Некоторые частные решения:

$$T = A + Bx^{2\beta}, \quad a, b = \text{const},$$

$$T = A + 4(1 - \beta)Bt + Bx^2,$$

$$T = A + Bt^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

$$T = A + B \frac{x^{2\beta}}{t^{\beta+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

$$T = A + B \int_0^\zeta z^{\beta-1} e^{-z} dz, \quad \zeta = \frac{x^2}{4t},$$

$$T = A + B \frac{x^\beta}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + \lambda^2}{4t}\right) I_\beta\left(\frac{\lambda x}{2t}\right),$$

$$T = A + B \frac{x^\beta}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + \lambda^2}{4t}\right) I_{-\beta}\left(\frac{\lambda x}{2t}\right),$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, $I_\beta(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

2. Область: $0 \leq x < \infty$. Первая краевая задача.

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$T = g(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

Решение:

$$T = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi) \xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4t}\right) I_\beta\left(\frac{\xi x}{2t}\right) d\xi + \\ + \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta)} \int_0^t g(\tau) \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

Частный случай: $f(x) = a$, $g(x) = b$, где a, b — константы.

Решение:

$$T = \frac{(a-b)}{\Gamma(\beta)} \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4t}\right) + b,$$

где $\gamma(\beta, z) = \int_0^z \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\beta) = \gamma(\beta, +\infty)$ — гамма-функция.

3. Область: $0 \leq x < \infty$. Вторая краевая задача.

$$T = f(x) \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$(x^{1-2\beta} \partial_x T) = g(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

Решение:

$$T = \frac{x^\beta}{2t} \int_0^\infty f(\xi) \xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4t}\right) I_{-\beta}\left(\frac{\xi x}{2t}\right) d\xi - \\ - \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t g(\tau) \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

4. Область: $0 \leq x < \infty$. Третья краевая задача.

$$T = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие})$$

$$[x^{1-2\beta} \partial_x T + a(T_s - T)] = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие})$$

где a и T_s — некоторые постоянные.

Решение:

$$T = \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \varphi(\tau) \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}},$$

где функция $\varphi(t)$ задается в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\beta)^n}{\Gamma(n\beta + 1)}, \quad \lambda = \frac{2^{2\beta-1} a \Gamma(\beta)}{\Gamma(1 - \beta)},$$

который сходится для всех x .

$$4. \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 x^{1-k} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < k < \infty.$$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного погранично-го слоя.

Преобразование

$$\tau = \frac{1}{4} a^2 (k+1)^2 t, \quad \xi = x \frac{k+1}{2}$$

приводит к уравнению 3 из этого раздела:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad \text{где } \beta = \frac{1}{k+1}.$$

Для $0 \leq x < \infty$ решение исходного уравнения при наиболее распространенных условиях

$$\begin{aligned} T &= T_0 & \text{при } t &= 0 \\ T &= T_s & \text{при } x &= 0 \end{aligned}$$

где $T_0 = \text{const}$, $T_s = \text{const}$, имеет вид

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \gamma \left(\nu, \nu^2 \frac{x^{k+1}}{t} \right), \quad \nu = \frac{1}{k+1},$$

где $\Gamma(\nu) = \gamma(\nu, \infty)$ — гамма-функция, $\gamma(\nu, \zeta) = \int_0^\zeta \zeta^{\nu-1} e^{-\zeta} d\zeta$ — неполная гамма-функция.

П.2. Преобразования уравнений тепло- и массопереноса

1. Интеграл Дюамеля. Однородное уравнение с неоднородным граничным условием. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T}{\partial x} + c(x) T \quad (1)$$

$$T = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (\text{начальное условие}) \quad (2)$$

$$T = g(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{граничное условие}) \quad (3)$$

$$T = 0 \quad \text{при } x = l \quad (\text{граничное условие}) \quad (4)$$

с нестационарным граничным условием при $x = 0$ может быть выражено по формуле (интеграл Дюамеля)

$$T(x, t) = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t - \tau) g(\tau) d\tau$$

через решение $W(x, t)$ вспомогательной задачи для уравнения (1) с начальным и граничным условием (2), (4) (в уравнении, начальном и граничном условиях следует заменить T на W) с более простым стационарным граничным условием при $x = 0$:

$$W = 1 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}) \quad (5)$$

Указанную формулу можно использовать и при $l = \infty$.

Аналогичная формула будет справедлива для однородного граничного условия при $x = a$ и неоднородного нестационарного граничного условия при $x = b$.

2. Интеграл Дюамеля. Неоднородное уравнение с однородными граничными условиями. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} + c(x, t) T + \Phi(x, t) \quad (6)$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}) \quad (7)$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}) \quad (8)$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}) \quad (9)$$

может быть выражено по формуле (интеграл Дюамеля)

$$T(x, t) = \int_0^t U(x, t - \tau; \tau) d\tau$$

через решение $U(x, t; \tau)$ вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} + c(x, t) U \quad (10)$$

с граничными условиями (8), (9) (в которых следует заменить T на U) с неоднородным начальным условием, зависящим от параметра τ :

$$U = \Phi(x, \tau) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}) \quad (11)$$

Указанную формулу можно использовать и при $l = \infty$.

3. Задачи с «объемной реакцией». Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T}{\partial x} - kT \quad (12)$$

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (\text{начальное условие}) \quad (13)$$

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (\text{граничное условие}) \quad (14)$$

$$T = T_l \quad \text{при} \quad x = l \quad (\text{граничное условие}) \quad (15)$$

где k, T_0, T_l — некоторые постоянные.

Уравнение (12) часто встречается в задачах химической технологии, где функция T играет роль концентрации, а параметр k играет роль константы скорости объемной химической реакции.

Решение задачи с объемной реакцией (12) — (15) можно выразить по формуле

$$T(x, t) = k \int_0^t e^{-k\tau} \tilde{T}(x, \tau) d\tau + e^{-kt} \tilde{T}(x, t)$$

через решение $\tilde{T}(x, t)$ более простого вспомогательной уравнения без объемной химической реакции

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \quad (16)$$

с теми же начальным и граничными условиями (13) — (15) (в которых следует заменить T на \tilde{T}). Указанную формулу можно использовать и при $l = \infty$.

П.3. Ортогональные криволинейные системы координат

При составлении этого раздела использованы книги [89, 178].

1. Произвольная ортогональная система координат. Криволинейные координаты x^1, x^2, x^3 задаются как функции прямоугольных декартовых координат x, y, z :

$$x^1 = x^1(x, y, z), \quad x^2 = x^2(x, y, z), \quad x^3 = x^3(x, y, z).$$

Используя эти выражения можно выразить x, y, z через криволинейные координаты x^1, x^2, x^3 :

$$x = x(x^1, x^2, x^3), \quad y = y(x^1, x^2, x^3), \quad z = z(x^1, x^2, x^3).$$

Компоненты метрического тензора g_{ij} определяются по формулам

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} \right)_{x^1, x^2, x^3};$$

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = g_{ji}(x^1, x^2, x^3); \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Система координат является ортогональной, если выполняются соотношения

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В этом случае третий инвариант метрического тензора определяется формулой

$$g = g_{11} g_{22} g_{33}.$$

Ниже приведены основные дифференциальные операторы в ортогональной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 . Соответствующие единичные направляющие вектора обозначаются $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Градиент скаляра p :

$$\nabla p = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial x^1} \vec{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial p}{\partial x^2} \vec{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial p}{\partial x^3} \vec{i}_3.$$

Дивергенция вектора $\vec{v} = \vec{i}_1 v_1 + \vec{i}_2 v_2 + \vec{i}_3 v_3$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(v_1 \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(v_2 \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(v_3 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) \right].$$

Градиент скаляра c по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) c = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial c}{\partial x^1} + \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial c}{\partial x^2} + \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial c}{\partial x^3}.$$

Градиент вектора \vec{w} по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} = \vec{i}_1 (\vec{v} \cdot \nabla) w_1 + \vec{i}_2 (\vec{v} \cdot \nabla) w_2 + \vec{i}_3 (\vec{v} \cdot \nabla) w_3.$$

Ротор вектора \vec{v} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = & \vec{i}_1 \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} (v_3 \sqrt{g_{33}}) - \frac{\partial}{\partial x^3} (v_2 \sqrt{g_{22}}) \right] + \\ & + \vec{i}_2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^3} (v_1 \sqrt{g_{11}}) - \frac{\partial}{\partial x^1} (v_3 \sqrt{g_{33}}) \right] + \\ & + \vec{i}_3 \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (v_2 \sqrt{g_{22}}) - \frac{\partial}{\partial x^2} (v_1 \sqrt{g_{11}}) \right]. \end{aligned}$$

Оператор Лапласа скаляра c :

$$\Delta c \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial c}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial c}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial c}{\partial x^3} \right) \right].$$

Лапласиан вектора \vec{v} :

$$\Delta \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}).$$

2. Цилиндрические координаты ϱ , φ , z (применяются также как полярные координаты на плоскости xy). Преобразования координат ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x, \quad z = z \quad (\sin \varphi = y/\varrho), \\ x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\varrho\varrho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \varrho^2, \quad g_{zz} = 1, \quad \sqrt{g} = \varrho.$$

Градиент скаляра p :

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \vec{i}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{i}_z.$$

Дивергенция вектора \vec{v} :

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho v_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент скаляра c по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = v_\varrho \frac{\partial c}{\partial \varrho} + \frac{v_\varphi}{\varrho} \frac{\partial c}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Градиент вектора \vec{w} по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = (\vec{v} \cdot \nabla)w_\varrho \vec{i}_\varrho + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\varphi \vec{i}_\varphi + (\vec{v} \cdot \nabla)w_z \vec{i}_z.$$

Ротор вектора \vec{v} :

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{i}_\varrho + \left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} \right) \vec{i}_\varphi + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{\partial v_\varrho}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_z.$$

Лапласиан скаляра c :

$$\Delta w = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

3. Сферические координаты r, θ, φ . Преобразования координат ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{r}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \left(\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad \sqrt{g} = r^2 \sin \theta.$$

Градиент скаляра p :

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi.$$

Дивергенция вектора \vec{v} :

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Градиент скаляра c по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial c}{\partial \varphi}.$$

Градиент вектора \vec{w} по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = (\vec{v} \cdot \nabla)w_r \vec{i}_r + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\theta \vec{i}_\theta + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\varphi \vec{i}_\varphi.$$

Ротор вектора \vec{v} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_r + \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{i}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \vec{i}_\varphi. \end{aligned}$$

Лапласиан скаляра c :

$$\Delta w = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

4. Координаты вытянутого эллипсоида вращения σ , τ , φ . Преобразования координат ($\sigma \geq 1 \geq \tau \geq -1$):

$$x^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \cos^2 \varphi, \quad y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \sin^2 \varphi, \quad z = a\sigma\tau.$$

Специальная система координат u, v, φ ($0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} \sigma = \operatorname{ch} u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi, \\ x = a \operatorname{sh} u \sin v \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v \sin \varphi, \quad z = a \operatorname{ch} u \cos v. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2), \\ \sqrt{g} = a^3(\sigma^2 - \tau^2), \quad g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v. \end{aligned}$$

Градиент скаляра p :

$$\nabla p = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \vec{i}_\sigma + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2}} \frac{\partial p}{\partial \tau} \vec{i}_\tau + \frac{1}{a \sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)}} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi.$$

Дивергенция вектора \vec{v} :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{a(\sigma^2 - \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[v_\sigma \sqrt{(\sigma^2 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[v_\tau \sqrt{(\sigma^2 - \tau^2)(1 - \tau^2)} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[v_\varphi \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Градиент скаляра c по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = \frac{v_\sigma}{a} \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}} \frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{v_\tau}{a} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2}} \frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{v_\varphi}{a \sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}} \frac{\partial c}{\partial \varphi}.$$

Градиент вектора \vec{w} по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = (\vec{v} \cdot \nabla)w_\sigma \vec{i}_\sigma + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\tau \vec{i}_\tau + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\varphi \vec{i}_\varphi.$$

Лапласиан скаляра c :

$$\Delta w = \frac{1}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(\sigma^2 - 1) \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{\partial w}{\partial \tau} \right] + \frac{\sigma^2 - \tau^2}{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

5. Координаты сплюснутого эллипсоида вращения σ, τ, φ . Преобразование координат ($\sigma \geq 0, -1 \leq \tau \leq 1$):

$$x^2 = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2) \cos^2 \varphi, \quad y^2 = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2) \sin^2 \varphi, \quad z = a\sigma\tau.$$

Специальная система координат u, v, φ ($0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{sh } u, \quad \tau = \cos v, \quad \varphi = \varphi, \\ x &= a \text{ch } u \sin v \cos \varphi, \quad y = a \text{ch } u \sin v \sin \varphi, \quad z = a \text{sh } u \cos v. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} g_{\sigma\sigma} &= a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 + \sigma^2}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2), \\ \sqrt{g} &= a^3(\sigma^2 + \tau^2), \quad g_{uu} = g_{vv} = a^2(\text{sh}^2 u + \cos^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \text{ch}^2 u \sin^2 v. \end{aligned}$$

Градиент скаляра p :

$$\nabla p = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \vec{i}_\sigma + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial p}{\partial \tau} \vec{i}_\tau + \frac{1}{a\sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 + 1)}} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi.$$

Дивергенция вектора \vec{v} :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \frac{1}{a(\sigma^2 + \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[v_\sigma \sqrt{(\sigma^2 + \tau^2)(\sigma^2 + 1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[v_\tau \sqrt{(\sigma^2 + \tau^2)(1 - \tau^2)} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[v_\varphi \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2)}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Градиент скаляра c по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = \frac{v_\sigma}{a} \sqrt{\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial c}{\partial \sigma} + \frac{v_\tau}{a} \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{v_\varphi}{a\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2)}} \frac{\partial c}{\partial \varphi}.$$

Градиент вектора \vec{w} по вектору \vec{v} :

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = (\vec{v} \cdot \nabla)w_\sigma \vec{i}_\sigma + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\tau \vec{i}_\tau + (\vec{v} \cdot \nabla)w_\varphi \vec{i}_\varphi.$$

Лапласиан скаляра c :

$$\Delta w = \frac{1}{a^2(\sigma^2 + \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[(1 + \sigma^2) \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{\partial w}{\partial \tau} \right] + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

6. Координаты эллиптического цилиндра σ , τ , z (применяются также как эллиптические координаты на плоскости xy). Преобразования координат ($\sigma \geq 0$, $-1 \leq \tau \leq 1$):

$$x = a\sigma\tau, \quad y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2), \quad z = z.$$

Специальная система координат u , v , z ($0 \leq u < \infty$, $0 \leq v \leq \pi$):

$$\begin{aligned} \sigma &= \operatorname{ch} u, & \tau &= \cos v, & z &= z, \\ x &= a \operatorname{ch} u \cos v, & y &= a \operatorname{sh} u \sin v, & z &= z. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} g_{\sigma\sigma} &= a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, & g_{\tau\tau} &= a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, & g_{zz} &= 1, \\ g_{uu} &= g_{vv} = a^2 (\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), & g_{zz} &= 1. \end{aligned}$$

Лапласиан:

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{1}{a^2 (\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sqrt{\sigma^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) + \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{1 - \tau^2} \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

П.4. Уравнение конвективной диффузии в различных системах координат

Декартова система координат: см. уравнение (3.1.1).

Цилиндрическая система координат:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_R \frac{\partial C}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial C}{\partial \theta} + V_Z \frac{\partial C}{\partial Z} = D \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right].$$

Сферическая система координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V_R \frac{\partial C}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial C}{\partial \varphi} = \\ = D \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial C}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned}$$

Произвольная ортогональная система координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{V_1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{V_2}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{V_3}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial C}{\partial x^3} = \\ = \frac{D}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial C}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial C}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial C}{\partial x^3} \right) \right], \end{aligned}$$

где g_{11} , g_{22} , g_{33} — компоненты метрического тензора; $g = g_{11}g_{22}g_{33}$.

П.5. Уравнения движения жидкости в различных системах координат

Используется модель вязкой несжимаемой жидкости.

Декартова система координат: см. уравнения (1.1.2), (1.1.2).

Цилиндрическая система координат.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} + \frac{V_R}{R} = 0.$$

Уравнения движения (F_R, F_φ, F_Z — компоненты внешней объемной силы):

$$\begin{aligned} \mathbb{H} V_R - \frac{V_\varphi^2}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \nu \left(\Delta V_R - \frac{V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) + F_R, \\ \mathbb{H} V_\varphi + \frac{V_R V_\varphi}{R} &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} \right) + F_\varphi, \\ \mathbb{H} V_Z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + \nu \Delta V_Z + F_Z, \end{aligned}$$

где дифференциальные операторы \mathbb{H} и Δ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + V_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} + V_Z \frac{\partial}{\partial Z}, \\ \Delta &\equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}. \end{aligned}$$

Сферическая система координат.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial R} (R^2 \sin \theta V_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (R V_\varphi) = 0.$$

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} V_R - \frac{V_\theta^2 + V_\varphi^2}{R} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \nu \Delta V_R - \\ &\quad - \frac{2\nu}{R^2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_R + \operatorname{ctg} \theta V_\theta \right) + F_R, \\ \mathbb{M} V_\theta + \frac{V_R V_\theta - V_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{R} &= -\frac{1}{\rho} R \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \Delta V_\theta + \\ &\quad + \frac{\nu}{R^2 \sin^2 \theta} \left(2 \sin^2 \theta \frac{\partial V_R}{\partial \theta} - 2 \cos \theta \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - V_\theta \right) + F_\theta, \\ \mathbb{M} V_\varphi + \frac{V_R V_\varphi + V_\theta V_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} &= -\frac{1}{\rho R \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \Delta V_\varphi + \\ &\quad + \frac{\nu}{R^2 \sin^2 \theta} \left(2 \sin \theta \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} + 2 \cos \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - V_\varphi \right) + F_\varphi, \end{aligned}$$

где дифференциальные операторы \mathbb{M} и Δ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + V_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \Delta &\equiv \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

П.6. Уравнения движения и теплообмена неньютоновских жидкостей

Ниже приведены уравнения движения и теплообмена несжимаемых неньютоновских жидкостей, подчиняющихся реологическому уравнению состояния (7.1.1), когда кажущаяся вязкость $\mu = \mu(I_2, T)$ произвольным образом зависит от второго инварианта тензора скоростей деформации I_2 и температуры T . При составлении этого раздела использованы книги [120, 185, 202]. Уравнение неразрывности в цилиндрической и сферической системах координат см. в приложении 5.

Прямоугольная декартова система координат.

Уравнения движения:

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial X_j} \frac{\partial V_j}{\partial X_i} + \rho F_i,$$

где ρ — плотность жидкости; $i, j = 1, 2, 3$; по индексу j ведется суммирование.

Уравнение теплопереноса:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_j \frac{\partial T}{\partial X_j} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial X_j^2} + 2\mu I_2,$$

где λ и c_p — теплопроводность и удельная теплоемкость жидкости (эти величины считаются постоянными); по индексу $j = 1, 2, 3$ ведется суммирование. Последнее слагаемое в правой части (7.2.3) учитывает диссипативный разогрев жидкости, инвариант I_2 вычисляется по формуле (7.1.15).

Цилиндрическая система координат.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} + V_Z \frac{\partial V_R}{\partial Z} - \frac{V_\varphi^2}{R} \right) &= \\ &= \rho F_R + \frac{\partial \tau_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{RZ}}{\partial Z} + \frac{\tau_{RR} - \tau_{\varphi\varphi}}{R}, \\ \rho \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_Z \frac{\partial V_\varphi}{\partial Z} + \frac{V_R V_\varphi}{R} \right) &= \\ &= \rho F_\varphi + \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi Z}}{\partial Z} + \frac{2\tau_{R\varphi}}{R}, \\ \rho \left(\frac{\partial V_Z}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_Z}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_Z}{\partial \varphi} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \right) &= \\ &= \rho F_Z + \frac{\partial \tau_{RZ}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\varphi Z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{ZZ}}{\partial Z} + \frac{\tau_{RZ}}{R}, \end{aligned}$$

где компоненты тензора напряжений определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{RR} &= -P + 2\mu \frac{\partial V_R}{\partial R}, & \tau_{\varphi\varphi} &= -P + 2\mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_R}{R} \right), \\ \tau_{ZZ} &= -P + 2\mu \frac{\partial V_Z}{\partial Z}, & \tau_{R\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{R} \right), \\ \tau_{\varphi Z} &= \mu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_Z}{\partial \varphi} \right), & \tau_{RZ} &= \mu \left(\frac{\partial V_Z}{\partial R} + \frac{\partial V_R}{\partial Z} \right). \end{aligned}$$

Уравнение теплопереноса:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_R \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + V_Z \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \\ = \lambda \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right] + 2\mu I_2.$$

Сферическая система координат.

Уравнения движения:

$$\rho \left(\frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta^2 + V_\varphi^2}{R} \right) = \rho F_R + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \tau_{RR} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \tau_{R\theta} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{R}, \\ \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{V_R V_\theta - V_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{R} \right) = \rho F_\theta + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \tau_{R\theta} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \tau_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{R\theta} - \tau_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{R}, \\ \rho \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_R V_\varphi + V_\theta V_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} \right) = \rho F_\varphi + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \tau_{R\varphi} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \tau_{\theta\varphi} \right) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{R\varphi} + \tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{R},$$

где компоненты тензора напряжений определяются по формулам:

$$\tau_{RR} = -P + 2\mu \frac{\partial V_R}{\partial R}, \quad \tau_{\theta\theta} = -P + 2\mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_R}{R} \right), \\ \tau_{\varphi\varphi} = -P + 2\mu \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_R}{R} + \frac{V_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R} \right), \\ \tau_{R\theta} = \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} \right), \quad \tau_{R\varphi} = \mu \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{R} \right), \\ \tau_{\theta\varphi} = \mu \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \frac{V_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} \right).$$

Уравнение теплопереноса:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_R \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \\ = \frac{\lambda}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + 2\mu I_2.$$

Второй инвариант тензора скоростей деформации в сферической системе координат имеет вид:

$$I_2 = \left(\frac{\partial V_R}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_R}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_R}{R} + \frac{V_\theta \operatorname{ctg} \theta}{R} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{R} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \frac{V_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{R} \right)^2.$$

Для степенной жидкости (7.1.4) диссипативный член в уравнениях теплопереноса вычисляется по формуле $2\mu I_2 = k(2I_2)^{\frac{n+1}{2}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамзон В. И., Фишбейн Г. А.* Некоторые задачи конвективной диффузии к сферической частице при $Re \geq 1000$. // Инж.-физич. журнал. — 1977. — Т. 32. — № 6. — С. 1053 — 1058.
2. *Абрамзон В. И., Ривкинд В. Я., Фишбейн Г. А.* Нестационарный массообмен с гетерогенной химической реакцией при ламинарном обтекании сферы. // Инж.-физич. журнал. — 1976. — Т. 30. — № 1. — С. 73 — 79.
3. *Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Теория турбулентных струй. — М.: Наука, 1984. — 717 с.
4. *Аксельруд Г. А., Молчанов А. Д.* Растворение твердых веществ. — М.: Химия, 1977. — 269 с.
5. *Алексеевко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.* Волновое течение пленок жидкости. — Новосибирск: ВО Наука, 1992. — 256 с.
6. *Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.* Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1986. — № 2. — С. 59 — 64.
7. *Аставин В. С., Королев И. О., Рязанцев Ю. С.* О температуре потока в канале со скачком температуры на стенке. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1979. — № 5. — С. 194 — 198.
8. *Астарита Дж.* Массопередача с химической реакцией. — Л.: Химия, 1973. — 224 с.
9. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. — М.: Мир, 1978. — 311 с.
10. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964. — 368 с.
11. *Баренблатт Г. И., Черный Г. Г.* О моментных соотношениях на поверхностях разрыва в диссипативных средах. // Прикл. мат. и мех. — 1963. — Т. 27. — № 5. — С. 784 — 793.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. — М.: Наука, 1974. — 296 с.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 3. — М.: Наука, 1967. — 300 с.
15. *Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е.* Явления переноса. — М.: Химия, 1974. — 688 с.
16. *Бирих Р. В.* О температурной конвекции в горизонтальном слое жидкости. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1966. — № 3. — С. 67 — 72.
17. *Богатыл И. С.* К вопросу определения коэффициента сопротивления частиц жидкой или твердой фаз, диспергированных в газовом потоке // Журн. прикл. химии. — 1987. — Т. 60. — № 12. — С. 2710 — 2712.
18. *Борзыл А. А., Череланов Г. П.* Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена. // Прикл. мат. и мех. — 1978. — Т. 42. — № 5. — С. 848 — 855.
19. *Боршанский В. М., Кутателадзе С. С., Новиков И. И. и др.* Жидкометаллические теплоносители. — М.: Атомиздат, 1976. — 328 с.
20. *Бостанджиян С. А., Черняева С. М.* Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении неньютоновской жидкости. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1966. — № 3. — С. 85 — 89.
21. *Бостанджиян С. А., Черняева С. М.* О гидродинамическом тепловом «взрыве» неньютоновской жидкости. // Доклады АН СССР. — 1966. — Т. 170. — № 2. — С. 301 — 304.

22. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И.* О гидродинамическом тепловом «взрыве». // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 163. — № 1. — С. 133 — 136.
23. *Бояджиев Х., Бешиков В.* Массоперенос в движущихся пленках жидкости. — М.: Мир, 1988. — 137 с.
24. *Братухин Ю. К.* Обтекание газового пузыря потоком неравномерно нагретой жидкости при малых числах Марангони. // Инж.-физич. журнал. — 1977. — Т. 32. — № 2. — С. 251 — 256.
25. *Братухин Ю. К.* Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1975. — № 5. — С. 156 — 161.
26. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей (инженерные методы расчета). — Л.: Химия, 1966. — 536 с.
27. *Броунштейн Б. И., Ривкинд В. Я.* Внутренняя задача массо- и теплообмена с замкнутыми линиями тока. // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 260. — № 6. — С. 1323 — 1326.
28. *Броунштейн Б. И., Фишбеин Г. А.* Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. — Л.: Химия, 1977. — 280 с.
29. *Броунштейн Б. И., Щеголев В. В.* Гидродинамика, массо- и теплообмен в колонных аппаратах. — Л.: Химия, 1988. — 336 с.
30. *Бубнов М. М., Дианов Е. М., Казенин Д. А., Кутепов А. М., Макеев А. А, Семенов С. Л.* К проблеме нанесения защитного металлического покрытия на волоконный световод. // Доклады АН СССР. — 1994. — Т. 337. — № 5. — С. 624 — 627.
31. *Буевич Ю. А.* О конвективной диффузии к частицам конденсированного полидисперсного облака твердых сфер. // Инж.-физич. журнал. — 1972. — Т. 23. — № 4. — С. 709 — 712.
32. *Буевич Ю. А., Казенин Д. А.* Предельные задачи о переносе тепла и массы к цилиндру и сфере, погруженным в инфильтруемый зернистый слой. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1977. — № 5. — С. 94 — 102.
33. *Буевич Ю. А., Корнеев Ю. А.* О межфазном массо- и теплообмене в концентрированной дисперсной системе. // Инж.-физич. журнал. — 1973. — Т. 25. — № 4. — С. 594 — 600.
34. *Буевич Ю. А., Щелчкова И. Н.* Реологические свойства однородных мелко-дисперсных суспензий. Стационарные течения. // Инж.-физич. журнал. — 1977. — Т. 33. — № 5. — С. 872 — 879.
35. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979. — 224 с.
36. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 760 с.
37. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986. — 182 с.
38. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 312 с.
39. *Витков Г. А., Холпанов Л. П., Шерстнев С. Н.* Гидравлическое сопротивление и тепломассообмен. — М: Наука, 1994. — 282 с.
40. *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости. // Итоги науки и техн. (мех. жид. и газа). — 1976. — Т. 10. — С. 86 — 147.
41. *Воинов О. В., Петров А. Г.* О течениях с замкнутыми линиями тока и движении капель при больших числах Рейнольдса. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1987. — № 5. — С. 61 — 70.
42. *Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г.* Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1970. — № 3. — С. 76 — 81.

43. *Воинов О. В., Петров А. Г., Шрагер Г. Р.* О модели течения внутри жидкой капли, обтекаемой газом. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1989. — № 6. — С. 167 — 170.
44. *Волощук В. М., Седунов Ю. С.* Процессы коагуляции в дисперсных системах. — Л.: Гидрометеоздат, 1975. — 320 с.
45. *Воронцов Е. Г., Тананайко Ю. М.* Теплообмен в жидких пленках. — Киев: Техніка, 1972. — 196 с.
46. *Вулис Л. А., Кашикаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. — М.: Наука, 1965. — 432 с.
47. *Гальперин Д. И., Мошев В. В., Степанова В. Г.* Термодинамические свойства пластифицированной этилцеллюлозы. // Коллоидный журнал. — 1961. — Т. 23. — № 1. — С. 8 — 11.
48. *Гершуни Г. З., Жуловицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М: Наука, 1972. — 392 с.
49. *Гершуни Г. З., Жуловицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. — М: Наука, 1989. — 319 с.
50. *Головин А. А.* Влияние эффектов Марангони на гидродинамику и массоперенос при жидкостной экстракции. // Дисс. канд. тех. наук. — М.: НИИХИ им. Л.Я.Карпова, 1989. — 208 с.
51. *Головин А. А., Рязанцев Ю. С.* Дрейф реагирующей капли, вызванный хемоконцентрационным капиллярным эффектом. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1990. — № 3. — С. 51 — 61.
52. *Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О хемотермокапиллярном эффекте при движении капли в жидкости. // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 290. — № 1. — С. 35 — 39.
53. *Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Хемоконцентрационный капиллярный эффект при движении капли в жидкости. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1988. — № 1. — С. 147 — 154.
54. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Влияние объемной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле. // Вестник МГУ. Сер. 1 (мат. и мех.). — 1979. — № 4. — С. 77 — 83.
55. *Головин А. М., Животягин А. Ф.* Нестационарный конвективный массоперенос внутри капли при больших числах Пекле. // Прикл. мат. и мех. — 1983. — Т. 47. — № 5. — С. 771 — 780.
56. *Гольдштик М. А.* Процессы переноса в зернистом слое. — Новосибирск: ИТФ, 1984. — 164 с.
57. *Гонор А. Л., Ривкинд В. Я.* Динамика капли. // Итоги науки и техн. (мех. жид. и газа). — 1982. — Т. 17.
58. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя. // Прикл. мат. и мех. — 1972. — Т. 36. — № 3. — С. 475 — 479.
59. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1988. — № 5. — С. 132 — 137.
60. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
61. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Некоторые общие соотношения инвариантности в задачах о конвективном тепло- и массообмене при больших числах Пекле. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1981. — № 6. — С. 92 — 97.
62. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О диффузии к цепочке капель (пузырей) при больших числах Пекле. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1978. — № 1. — С. 59 — 69.

63. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1977. — № 2. — С. 64 — 74.
64. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости. // Прикл. мат. и мех. — 1977. — Т. 41. — № 2. — С. 307 — 311.
65. Гупало Ю. П., Редников А. Е., Рязанцев Ю. С. Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры. // Прикл. мат. и мех. — 1989. — Т. 53. — № 3. — С. 433 — 442.
66. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Диффузионный поток на деформированный газовый пузырь при больших числах Рейнольдса. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1976. — № 4. — С. 70 — 76.
67. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Улин В. И. Диффузия к частице в однородном поступательно-сдвиговом потоке. // Прикл. мат. и мех. — 1975. — Т. 39. — № 3. — С. 497 — 504.
68. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А. и др. О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости. // Прикл. мат. и мех. — 1978. — Т. 42. — № 3. — С. 441 — 449.
69. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. и др. О конвективном массообмене в системе периодически расположенных сфер. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1979. — № 4. — С. 39 — 41.
70. Данквертс П. В. Газожидкостные реакции. — М.: Химия, 1973. — 296 с.
71. Девнин С. И. Аэромеханика плохообтекаемых конструкций. Справочник. — Л.: Судостроение, 1983. — 332 с.
72. Дильман В. В., Полянин А. Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. — М.: Химия, 1988. — 304 с.
73. Жижин Г. В. Ламинарный пограничный слой неньютоновской жидкости (качественное исследование). // Прикл. мех. и тех. физика. — 1987. — № 3. — С. 71 — 81.
74. Жижин Г. В., Уфимцев А. А. О течениях в плоском ламинарном пограничном слое дилатантных жидкостей. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1977. — № 5. — С. 164 — 168.
75. Жукаускас А., Жюгжда И. Теплоотдача цилиндра в поперечном потоке жидкости. — Вильнюс: Мокслас, 1979. — 237 с.
76. Журов А. И. Обтекание пористого цилиндра сдвиговым потоком. // Теор. основы хим. технол. — 1995. — Т. 29. — № 2. — С. 213 — 216.
77. Журов А. И., Полянин А. Д., Потапов Е. Д. Обтекание пористой частицы сдвиговым потоком. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1995. — № 3. — С. 113 — 120.
78. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Динамика сферического пузыря в неньютоновских жидкостях. // Теор. основы хим. технол. — 1992. — Т. 26. — № 2. — С. 236 — 242.
79. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. О точных решениях уравнений пограничного слоя степенных жидкостей. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1989. — № 5. — С. 39 — 42.
80. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. — М.: Наука, 1993. — 464 с.
81. Зинченко А. З. К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса. // Прикл. мат. и мех. — 1978. — Т. 42. — № 5. — С. 955 — 959.
82. Зинченко А. З. Медленное асимметричное движение двух капель в вязкой среде. // Прикл. мат. и мех. — 1980. — Т. 44. — № 1. — С. 49 — 59.

83. *Иоффе И. И., Письмен Л. М.* Инженерная химия гетерогенного катализа. — Л.: Химия, 1972. — 462 с.
84. *Каганов С. А.* Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1962. — № 3. — С. 96 — 99.
85. *Кадер Б. А., Яглом А. М.* Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои. // Итоги науки и техн. (мех. жид. и газа). — 1984. — Т. 18. — С. 3 — 111.
86. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.
87. *Касаткин А. Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. — М.: Химия, 1973. — 754 с.
88. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. — М.: Мир, 1964. — 351 с.
89. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1984. — 832 с.
90. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972. — 274 с.
91. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 560 с.
92. *Курдюмов В. Н., Полянин А. Д.* О массообмене частиц, капель и пузырей в сдвиговом потоке. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1990. — № 4. — С. 137 — 141.
93. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.
94. *Кутателадзе С. С.* Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 367 с.
95. *Кутепов А. М., Стерман Л. С., Стюшин Н. Г.* Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. — М.: Высшая школа, 1977. — 352 с.
96. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
97. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. — 928 с.
98. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1986. — 736 с.
99. *Левичкий С. П., Шульман З. П.* Динамика и тепломассообмен пузырьков в полимерных жидкостях. — Минск: Наука и техника, 1990. — 175 с.
100. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. — М.: Физматлит, 1959. — 670 с.
101. *Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П.* К теории нестационарной диффузии из движущейся капли. // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 161. — № 3. — С. 648 — 652.
102. *Лехтмаатер С. О.* Осаждение частиц из ламинарного потока в зависимости от числа Пекле. // Инж.-физич. журнал. — 1971. — Т. 20. — № 3. — С. 546 — 549.
103. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. — 840 с.
104. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
105. *Мак-Лаклан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. — М.: Изд. иностр. литер., 1953. — 476 с.
106. *Мизушина Т., Куриваки Ю.* Теплообмен при ламинарном течении псевдопластичных жидкостей в круглой трубе. // В сб. «Тепло- и массоперенос», Т. 3. — Минск, 1968.

107. *Мошев В. В., Иванов В. А.* Реологическое поведение концентрированных неньютоновских суспензий. — М.: Наука, 1990. — 89 с.
108. *Мюллер Х., Ветошкин А. Г., Казенин Д. А., Канн К. Б., Кутепов А. М.* Реологическое поведение газожидкостных пен. // Журнал прикл. химии. — 1989. — Т. 62. — № 3. — С. 580 — 585.
109. *Найденов В. И.* Неизотермическая неустойчивость движения вязкопластичных жидкостей в трубах. // Теплофиз. высоких температур. — 1990. — Т. 28. — № 3. — С. 512 — 517.
110. *Найденов В. И.* Об интегральных уравнениях, описывающих распределение температуры в плоском течении неньютоновских сред. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1983. — № 5. — С. 103 — 109.
111. *Найденов В. И.* О нелинейных уравнениях автомодельного неизотермического движения вязкой жидкости. // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 1988. — Т. 28. — № 12. — С. 1884 — 1896.
112. *Найденов В. И., Полянин А. Д.* О конвективно-тепловых эффектах в теории фильтрации и гидродинамике. // Доклады АН СССР. — 1984. — Т. 279. — № 3. — С. 575 — 579.
113. *Найденов В. И., Полянин А. Д.* О некоторых неизотермических течениях жидкости. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1990. — № 3. — С. 83 — 92.
114. *Найфэ А.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 456 с.
115. *Накоряков В. Е., Покусав Б. Г., Шрейбер И. Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 247 с.
116. *Натансон Г. Л.* Диффузионное осаждение аэрозолей на обтекаемом цилиндре при малых коэффициентах захвата. // Доклады АН СССР. — 1957. — Т. 112. — № 1. — С. 100 — 103.
117. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
118. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
119. *Низмеев Ю. Г., Миненков В. А., Мумладзе А. И.* Тепловой взрыв при течении нелинейно-вязких сред в круглой трубе. // Инж.-физич. журнал. — 1988. — Т. 55. — № 2. — С. 212 — 217.
120. *Огibalов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. — М.: Изд. МГУ, 1970. — 416 с.
121. *Павлов К. Б.* К теории пограничного слоя неньютоновских нелинейно-вязких сред. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1978. — № 3. — С. 26 — 33.
122. *Пасконов В. М., Полежасов В. И., Чудов Л. А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
123. *Перлмуттер Д.* Устойчивость химических реакторов. — Л.: Химия, 1976. — 256 с.
124. *Перри Дж.* Справочник инженера-химика, т. 1. — Л.: Химия, 1969. — 640 с.
125. *Петров А. Г.* Внутреннее течение и деформация вязких капель. // Вестник МГУ. Сер. 1 (мат. и мех.). — 1988. — № 3. — С. 85 — 88.
126. *Петров А. Г.* Криволинейное движение эллипсоидального пузыря. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1972. — № 3. — С. 90 — 93.
127. *Петров А. Г.* Скорость диссипации энергии вязкой жидкости с условием для касательного напряжения на граничной линии тока. // Доклады АН СССР. — 1989. — Т. 304. — № 5. — С. 1082 — 1086.
128. *Петров А. Г.* Циркуляция внутри вязких деформированных капель, движущихся в газе с постоянной скоростью. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1989. — № 6. — С. 127 — 134.
129. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. — М.: Энергия, 1967. — 412 с.

130. *Повицкий А. С., Любин Л. Я.* Основы динамики и теплообмена жидкостей и газов при невесомости. — М.: Машиностроение, 1972. — 252 с.
131. *Полежаев В. И., Бунэ А. В., Врезуб Н. А. и др.* Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса. — М.: Наука, 1987. — 272 с.
132. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
133. *Полянин А. Д.* Асимптотический анализ некоторых нелинейных задач о массо- и теплообмене частиц с потоком при малых числах Пекле. // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 264. — № 6. — С. 1322 — 1326.
134. *Полянин А. Д.* Качественные особенности внутренних задач нестационарного конвективного массо- и теплообмена при больших числах Пекле. // Теор. основы хим. технол. — 1984. — Т. 18. — № 3. — С. 284 — 296.
135. *Полянин А. Д.* Нелинейная задача о нестационарном массообмене капли при соизмеримых фазовых сопротивлениях. // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 272. — № 4. — С. 820 — 824.
136. *Полянин А. Д.* Об интегрировании нелинейных нестационарных уравнений конвективного тепло- и массообмена. // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 251. — № 4. — С. 817 — 820.
137. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии капель в жидкости. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1978. — № 2. — С. 44 — 56.
138. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии твердых частиц при больших числах Пекле. // Прикл. мат. и мех. — 1978. — Т. 42. — № 2. — С. 301 — 312.
139. *Полянин А. Д.* О структуре диффузионного следа поглощающей частицы вблизи критических линий. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1977. — № 3. — С. 82 — 86.
140. *Полянин А. Д.* Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, находящейся в стоковом потоке. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1977. — № 1. — С. 176 — 179.
141. *Полянин А. Д.* Трехмерные задачи диффузионного пограничного слоя. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1984. — № 4. — С. 71 — 81.
142. *Полянин А. Д., Вязьмин А. В.* Массо- и теплообмен частиц с потоком. // Теор. основы хим. технол. — 1995. — Т. 29. — № 2. — С. 141 — 153.
143. *Полянин А. Д., Вязьмин А. В.* Массо- и теплообмен капель и пузырями с потоком. // Теор. основы хим. технол. — 1995. — Т. 29. — № 3. — С. 249 — 260.
144. *Полянин А. Д., Ерохин Л. Ю.* О теплообмене тел сложной формы. // Теор. основы хим. технол. — 1990. — Т. 24. — № 1. — С. 12 — 19.
145. *Полянин А. Д., Прядкин П. А.* О двух задачах конвективной диффузии к поверхностям плохообтекаемых тел. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1978. — № 6. — С. 104 — 109.
146. *Полянин А. Д., Шевцова В. М.* Массообмен капель и частиц с потоком при наличии объемной химической реакции. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1987. — № 6. — С. 109 — 113.
147. *Полянин А. Д., Шевцова В. М.* О нестационарном массообмене капли (пузыря) в трехмерном сдвиговом потоке. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1986. — № 6. — С. 111 — 119.
148. *Полянин А. Д., Курдюмов В. Н., Дильман В. В.* Метод асимптотической коррекции в задачах химической технологии. // Теор. основы хим. технол. — 1992. — Т. 26. — № 5. — С. 494 — 509.
149. *Полянин А. Д., Шевцова В. М., Ковачева Н. Т.* Нелинейные задачи тепло- и массообмена при переменных коэффициентах переноса. // Теор. основы хим. технол. — 1990. — Т. 24. — № 6. — С. 723 — 734.

150. *Попов Д. А.* Учет продольной диффузии при течении в канале. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1973. — № 6. — С. 63 — 73.
151. *Потапов Е. Д., Серебрякова Н. Г., Трошин В. Г.* Взаимодействие пористых сферических тел, обтекаемых медленным потоком вязкой жидкости. // Изв. РАН, Мех. жид. и газа. — 1992. — № 3. — С. 181 — 183.
152. *Пухначев В. В.* Движение вязкой жидкости со свободными границами. — Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та, 1989. — 96 с.
153. *Рамм В. М.* Абсорбция газов. — М.: Химия, 1976. — 656 с.
154. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. — Киев: Наукова думка, 1976. — 288 с.
155. *Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении капли под действием излучения. // Прикл. мех. и тех. физика. — 1989. — № 2. — С. 179 — 183.
156. *Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении капли с однородным внутренним тепловыделением. // Прикл. мат. и мех. — 1989. — Т. 53. — № 2. — С. 271 — 277.
157. *Рейнер М.* Реология. — М.: Мир, 1965. — 224 с.
158. *Ривкинд В. Я., Сизовцев Г. С.* Движение капли с учетом термокапиллярных сил. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1982. — № 4. — С. 80 — 86.
159. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. — Л.: Химия, 1982. — 592 с.
160. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
161. *Рыскин Г. М.* Автореферат канд. диссертации. — Л.: ЛПИ им. М. И. Калинина, 1976.
162. *Рязанцев Ю. С.* Конвекция в жидкости и эксперименты в условиях микрогравитации. — М.: Препринт ИПМеханики АН СССР. — № 480, 1990. — 36 с.
163. *Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении реагирующей капли в химически активной среде. // Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа. — 1985. — № 3. — С. 180 — 183.
164. *Сибиси Т., Вредшоу П.* Конвективный теплообмен. — М.: Мир, 1987. — 592 с.
165. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1973. — 536 с.
166. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.
167. *Слободов Е. Б., Чепура И. В.* К вопросу о ячеечной модели двухфазных сред. // Теор. основы хим. технол. — 1982. — Т. 16. — № 3. — С. 331 — 335.
168. *Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М.* Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. — Минск: Наука и техника, 1970. — 448 с.
169. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
170. Справочник по специальным функциям (под ред. *Абрамовица М., Стиган И.*) — М.: Наука, 1979. — 832 с.
171. *Стечкина И. Б.* Диффузионное осаждение аэрозолей в волокнистых фильтрах. // Доклады АН СССР. — 1966. — Т. 167. — № 6. — С. 1327 — 1330.
172. *Терновский И. Г., Кутепов А. М.* Гидроциклонирование. — М.: Наука, 1994. — 352 с.
173. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
174. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. — М.: Мир, 1964. — 216 с.
175. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1987. — 502 с.

176. Фройндорфер Б., Мюллер Х., Ветошкин А. Г., Казенин Д. А., Кутепов А. М. Математическое описание реологических моделей пены. // Журнал прикл. химии. — 1986. — Т. 59. — № 12. — С. 2694 — 2701.
177. Фукс Н. А. Механика аэрозолей. — М.: Изд. АН СССР, 1955. — 352 с.
178. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976. — 631 с.
179. Хинце И. О. Турбулентность. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 680 с.
180. Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
181. Цой П. В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. — М.: Энергия, 1971. — 383 с.
182. Шервуд Т., Пикфорд Р., Уилки Ч. Массопередача. — М.: Химия, 1982. — 696 с.
183. Шкадов В. Я., Запрянов З. Д. Течения вязкой жидкости — М.: Изд. Моск. ун-та, 1984. — 200 с.
184. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 711 с.
185. Шульман З. П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. — М.: Энергия, 1975. — 352 с.
186. Шульман З. П., Байков В. И. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. — Минск: Наука и техника, 1979. — 296 с.
187. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. — Минск: Наука и техника, 1966. — 240 с.
188. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968. — 344 с.
189. Acrivos A. A note of the rate of heat or mass transfer from a small sphere freely suspended in linear shear field. // J. Fluid Mech. — 1980. — V. 98. — No. 2. — P. 299 — 304.
190. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer. Part 1. Low speed flows. // J. Fluid Mech. — 1965. — V. 23. — No. 2. — P. 273 — 291.
191. Acrivos A., Taylor T. D. Heat and mass transfer from single sphere in Stokes flow. // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5. — No. 4. — P. 387 — 394.
192. Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces. // AIChE J. — 1960. — V. 6. — No. 2. — P. 312 — 317.
193. Anderson J. L. Droplet interactions in thermocapillary motion. // Int. J. Mult. Flow. — 1985. — V. 11. — No. 6. — P. 813 — 824.
194. Anderson J. L. Prediction of the concentration dependence of macromolecular diffusion coefficients. // Ind. Engng. Chem. Fundam. — 1973. — V. 12. — No. 4. — P. 488 — 490.
195. Ascoli E. P., Dandy D. S., Leal L. G. Buoyancy-driven motion of a deformable drop toward a plan wall at low Reynolds number. // J. Fluid Mech. — 1990. — V. 213. — No. 2. — P. 287 — 311.
196. Batchelor G. K. Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution. // J. Fluid Mech. — 1979. — V. 95. — No. 2. — P. 369 — 400.
197. Bauer H. F. Diffusion, convection and chemical reaction in a channel. // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1976. — V. 19. — No. 5. — P. 479 — 486.
198. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. // J. Fluid Mech. — 1967. — V. 30. — No. 1. — P. 197 — 207.
199. Beavers G. S., Sparrow E. M., Magnuson R. A. Experiments on coupled parallel flows in a channel and boundary porous medium. // Trans. ASME, J. Basic Eng. — 1970. — V. 92. — No. 4. — P. 843 — 848.

200. *Bhavaraju S. M., Mashelkar R. A., Blanch H. W.* Bubble motion and mass transfer in non-Newtonian fluids. // *AIChE J.* — 1978. — V. 24. — No. 6. — P. 1063 — 1076.
201. *Blasius H.* Crenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung. // *Zeitschr. für Math. und Phys.* — 1908. — Bd. 56. — S. 1 — 37.
202. *Böhme G.* Non-Newtonian fluid mechanics. (North-Holland series in applied mathematics and mechanics; V. 31). — Amsterdam, The Netherlands: Elsevier science publishers B. V., 1987. — 352 p.
203. *Boussinesq M. I.* Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluids. // *J. de Math. Pures et Appliques.* — 1905. — Bd. 1. — Ser. 6. — S. 285 — 332.
204. *Brauer H., Schmidt-Traub H.* Kopplung von Stofftransport und chemischer Reaction und Platten und Kugeln sowie in Poren. // *Chemic Ingenieur Technik.* — 1973. — Bd. 45. — No. 5. — S. 341 — 344.
205. *Brenner H.* Effect of finite boundaries on the Stokes resistance on arbitrary particle. // *J. Fluid Mech.* — 1962. — V. 12. — Pt. 1. — P. 35 — 48.
206. *Brenner H.* Forced convection-heat and mass transfer at small Peclet numbers from particle of arbitrary shape. // *Chem. Eng. Sci.* — 1963. — V. 18. — No. 2. — P. 109 — 122.
207. *Brenner H.* On the invariance of the heat transfer coefficient to flow reversal in Stokes and potential streaming flows past particles of arbitrary shape. // *J. Math. Phys. Sci.* — 1967. — V. 1. — P. 173.
208. *Brignell A. S.* Solute extraction from an internally circulating spherical liquid drop. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1975. — V. 18. — No. 1. — P. 61 — 68.
209. *Brown G. M.* Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in circular or flat conduit. // *AIChE J.* — 1960. — V. 6. — No. 2. — P. 179 — 183.
210. *Brunn P. O.* Absorption by bacterial cell: Interaction between reseptor sites and the effect of fluid motion. // *Trans. ASME, J. Biomechan. Eng.* — 1981. — V. 103. — No. 1. — P. 32 — 37.
211. *Buyevich Yu. A., Shchelchkova I. N.* Flow of dense suspensions. // *Progr. Aerospace Sci.* — 1978. — V. 18. — No. 2-A. — P. 121 — 150.
212. *Chao B. T.* Transient heat and mass transfer to translating droplet. // *Trans. ASME, J. Heat Transfer.* — 1969. — V. 91. — No. 2. — P. 273 — 291.
213. *Chervenivanova E., Zapryanov Z.* On the deformation of compound multiphase drops at low Reynolds Numbers. // *Physicochemical Hydrodynamics.* — 1989. — V. 11. — P. 243 — 259.
214. *Chervenivanova E., Zapryanov Z.* On the deformation of two droplets in a quasisteady Stokes flow. // *Int. J. Multiphase Flow.* — 1985. — V. 11. — No. 5. — P. 721 — 738.
215. *Chervenivanova E., Zapryanov Z.* The slow motion of droplets perpendicular to a deformable flat fluid interface. // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* — 1988. — V. 41. — P. 419 — 444.
216. *Chhabra R. P.* Bubbles, drops, and particles in non-Newtonian fluids. — London, Tokyo: CRC Press, 1993. — 432 p.
217. *Chhabra R. P., Dhirgra S. C.* Creeping motion of a Carrean fluid past a newtonian fluid sphere. // *Can. J. Chem. Engng.* — 1986. — V. 64. — No. 6. — P. 897 — 905.
218. *Chwang A. T., Wu T. Y.* Hydrodynamics of low Reynolds number flow. Part 2. Singularity method for Stokes flows. // *J. Fluid Mech.* — 1975. — V. 67. — No. 4. — P. 787 — 815.
219. *Clift R., Grace J. R., Weber M. E.* Bubbles, drops and particles. — New York — San Francisco — London: Acad. Press, 1978. — 380 p.
220. *Cochran W. G.* The flow due to a rotating disk. // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* — 1934. — V. 30. — P. 365 — 375.

221. *Cox R. G., Zia I. Y. Z., Mason S. G.* Particle motion in sheared suspensions. XXV. Streamlines around cylinders and spheres. // *J. Colloid Interface Sci.* — 1968. — V. 27. — No. 1. — P. 7 — 18.
222. *Dankwerts P. V.* Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction into particles of various shapes and into falling drops. // *Trans. Faraday Soc.* — 1951. — V. 47. — No. 2. — P. 1014 — 1023.
223. *Davis E. J.* Exact solutions for a class of heat and mass transfer problems. // *Can. J. Chem. Engng.* — 1973. — V. 51. — No. 5. — P. 562 — 572.
224. *Dazki Gu., Tanner R. I.* The drag on a sphere in a power-law fluid. // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* — 1985. — V. 17. — No. 1. — P. 1 — 12.
225. *Deavours C. A.* An exact solution for the temperature distribution in parallel plate Poiseuille flow. // *Trans. ASME, J. Heat Transfer.* — 1974. — V. 96. — No. 4.
226. *Dennis S. C. R., Walker J. D. A.* Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds number. // *J. Fluid Mech.* — 1971. — V. 48. — Pt. 4. — P. 771 — 778.
227. *Dennis S. C. R., Walker J. D. A., Hudson J. D.* Heat transfer from a sphere at low Reynolds numbers. // *J. Fluid Mech.* — 1973. — V. 60. — No. 2. — P. 273 — 283.
228. *Dullien F. A. L.* Statistical test of Vigners correlation of liquid-phase diffusion coefficients. // *Ind. Engng. Chem. Fundam.* — 1971. — V. 10. — No. 1. — P. 41 — 49.
229. *Finlayson B. A.* The method of weighted residuals and variational principles. — New York: Acad. Press, 1972.
230. *Frankel N. A., Acrivos A.* Heat and mass transfer from small spheres and cylinders freely suspended in shear flow. // *Phys. Fluids.* — 1968. — V. 11. — No. 9. — P. 1913 — 1918.
231. *Friedlander S. K.* Mass and heat transfer to single spheres and cylinders at low Reynolds numbers. // *AIChE J.* — 1957. — V. 3. — No. 1. — P. 43 — 48.
232. *Graetz L.* Über die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten. // *Annln. Phys.* — 1883. — Bd. 18. — S. 79 — 84.
233. *Hadamard J. S.* Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. // *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris.* — 1911. — V. 152. — No. 25. — P. 1735 — 1739; — 1912. — V. 154. — No. 3. — P. 109.
234. *Handbook of Multiphase Systems.* / Ed. Hetsroni G. — Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1982.
235. *Harper J. F., Moore D. W.* The motion of a spherical liquid drop at high Reynolds number. // *J. Fluid Mech.* — 1968. — V. 32. — No. 2. — P. 367 — 391.
236. *Harris J.* *Rheology and Non-Newtonian Flow.* — London — New York: Longman, 1977. — 338 p.
237. *Hieber C. A., Gebhart B.* Low Reynolds number heat transfer from a circular cylinder. // *J. Fluid Mech.* — 1968. — V. 32. — No. 1. — P. 21 — 28.
238. *Hill R., Power G.* Extremum principles for slow viscous flow and approximate calculation of drag. // *Quarterly J. Mech. Appl. Math.* — 1956. — V. 9. — No. 3. — P. 313 — 319.
239. *Hirose T., Moo-Young M.* Boubble drag and mass transfer in non-Newtonian fluids: creeping flow with power law fluids. // *Can. J. Chem. Engng.* — 1969. — V. 47. — No. 3. — P. 265 — 267.
240. *Hobler T.* Minimum Zrzaszania Powierzchni. // *Chimia Stosowana.* — 1964. — Bd. 2B. — S. 145 — 159.
241. *Hopfe S. W., Slattery J. C.* Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in an Ellis model fluid. // *AIChE J.* — 1970. — V. 16. — P. 224 — 229.

242. *Jarzebski A. B., Malinowski J. J.* Drag and mass transfer in a creeping flow of a Carrean fluid over drops or bubbles. // *Can. J. Chem. Engng.* — 1987. — V. 65. — No. 4. — P. 680 — 684.
243. *Jarzebski A. B., Malinowski J. J.* Drag and mass transfer in multiple drop slow motion in a power law fluid. // *Chem. Eng. Sci.* — 1986. — V. 41. — No. 10. — P. 2569 — 2573.
244. *Jarzebski A. B., Malinowski J. J.* Transient mass and heat transfer from drops or bubbles in slow non-Newtonian flows. // *Chem. Eng. Sci.* — 1986. — V. 41. — No. 10. — P. 2575 — 2578.
245. *Javery V.* Laminar heat transfer in rectangular channel for the temperature boundary condition of the third kind. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1978. — V. 21. — No. 8. — P. 1029 — 1034.
246. *Jones A. S.* Extensions to the solution of the Graets problem. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1971. — V. 14. — No. 4. — P. 619 — 623.
247. *Kaplun S., Lagerstrom P. A.* Asymptotic expansions of Navier — Stokes solutions for small Reynolds numbers. // *J. Math. Mech.* — 1957. — V. 6. — P. 585 — 593.
248. *Kasoy D. R.* Heat transfer from circular cylinders at low Reynolds number. // *Phys. Fluids.* — 1967. — V. 10. — No. 5. — P. 938 — 946.
249. *Kovatcheva N. P., Polyaniin A. D., Kurdyumov V. N.* Mass transfer from a particle in a shear flow with surface reactions. // *Acta Mech. (Springer-Verlag)* — 1993. — V. 101. — P. 155 — 160.
250. *Kovatcheva N. T., Polyaniin A. D., Zapryanov Z. D.* The change of the diffusivity with the change of the concentration of the solvent in a solution. // *Acta Mech. (Springer-Verlag)* — 1989. — V. 80. — P. 259 — 272.
251. *Kronig R., Brink J. C.* On the theory of extraction from falling droplets. // *Appl. Sci. Res.* — 1950. — V. A2. — No. 2. — P. 142 — 154.
252. *Le Clair B. P., Hamielec A. E.* A theoretical and experimental study of the internal circulation in water drops falling at terminal velocity in air. // *J. Atmosph. Sci.* — 1972. — V. 29. — No. 4.
253. *Le Clair B. P., Hamielec A. E.* Viscous flow through particle assemblages at intermediate Reynolds numbers. — A cell model for transport in bubble swarms. // *Can. J. Chem. Engng.* — 1971. — V. 49. — No. 6. — P. 713 — 720.
254. *Legros J. C., Limbourg M. C., Petre G.* Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection. // *Acta Astronautica.* — 1984. — V. 11. — No. 2. — P. 143 — 147.
255. *Leveque M. A.* Les lois de la transmission de chaleur par convection. // *Ann. Mines.* — 1928. — Bd. 13. — S. 527 — 532.
256. *Marrucci G., Apuzzo G., Astarita G.* Motion of liquid drops in non-Newtonian systems. // *AIChE J.* — 1970. — V. 16. — No. 4. — P. 538 — 541.
257. *Masiyah J. H., Epstein N.* Numerical solution of heat and mass transfer from spheroids in steady axisymmetric flow. // *Progress Heat Mass Transfer.* — 1972. — V. 6. — P. 613 — 632.
258. *Meyyappan M., Wilcox W. R., Subramanian R. S.* Thermocapillary migration of a bubble normal to a plane surface. // *J. Colloid Interface Sci.* — 1981. — V. 94. — P. 243 — 257.
259. *Mohan V.* Creeping flow of a power law fluid over a Newtonian fluid sphere. // *AIChE J.* — 1974. — V. 20. — P. 180 — 182.
260. *Mohan V., Venkateshwarlu D.* Creeping flow of a power law fluid past a fluid sphere. // *Int. J. Mult. Flow.* — 1976. — V. 2. — P. 563 — 569.
261. *Moore D. M.* The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. // *J. Fluid Mech.* — 1965. — V. 23. — No. 4. — P. 749 — 766.
262. *Morrison F. A.* Transient heat and mass transfer to a drop in a electric field. // *Trans. ASME, J. Heat Transfer.* — 1977. — V. 99. — No. 2. — P. 269 — 274.

263. *Nakano Y., Tien C.* Creeping flow a power-low fluid over a Newtonian fluid drop. // *AIChE J.* — 1968. — V. 14. — P. 145 — 151.
264. *Nakano Y., Tien C.* Viscous incompressible non-Newtonian flow around fluid sphere at intermediate Reynolds number. // *AIChE J.* — 1970. — V. 16. — No. 4. — P. 554 — 569.
265. *Newman J.* Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers. // *J. Ind. Eng. Chem. Fundamentals.* — 1969. — V. 8. — No. 3. — P. 82 — 86.
266. *Nusselt W.* Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl con der Rohrlänge. // *VDI Zeitschrift.* — 1910. — Bd. 54. — No. 28. — S. 1154 — 1158.
267. *Oellrich L., Schmidt-Traub H., Brauer H.* Theoretische Berechnung des Stofftransport in der Umgebung einer Einzelblase. // *Chem. Eng. Sci.* — 1973. — V. 28. — No. 3. — P. 711 — 721.
268. *Oliver D. L. R., DeWitt K. J.* Surface tension driven flows for a droplet in a microgravity environment. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1988. — V. 31. — No. 7. — P. 1534 — 1537.
269. *O'Neill M. E., Stewartson K.* On the slow motion of a sphere parallel to a nearly plane wall. // *J. Fluid Mech.* — 1967. — V. 27. — P. 705 — 724.
270. *Petrov A. G.* Inner flow of viscous drop. // *Proc. Third Int. Aeros. Conf., Kyoto, Japan.* — 1990. — P. 339 — 342.
271. *Poe G. G.* Closed streamline flows past rotating particles: inertial effects, lateral migration, heat transfer. — Ph.D. dissertation. Stanford University, 1975.
272. *Poe G. G., Acrivos A.* Closed streamline flows past small rotating particles; heat transfer at high Peclet numbers. // *Int. J. Mult. Flow.* — 1976. — V. 2. — No. 4. — P. 365 — 377.
273. *Polyanin A. D.* An asymptotic analysis of some nonlinear boundary-value problems of convective mass and heat transfer of reacting particles with the flow. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1984. — V. 27. — No. 2. — P. 163 — 189.
274. *Polyanin A. D.* Method for solution of some non-linear boundary value problems of a non-stationary diffusion-controlled (thermal) boundary layer. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1982. — V. 25. — No. 4. — P. 471 — 485.
275. *Polyanin A. D.* Three-demensional problems of unsteady diffusion boundary layer. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1990. — V. 33. — No. 7. — P. 1375 — 1386.
276. *Polyanin A. D., Dil'man V. V.* An algebraic method for heat and mass transfer problems. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1990. — V. 33. — No. 1. — P. 183 — 201.
277. *Polyanin A. D., Dil'man V. V.* New methods of the mass and heat transfer theory. — 1. The method of asymptotic correction and the method of model equations and analogies. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1985. — V. 28. — No. 1. — P. 25 — 43.
278. *Polyanin A. D., Dil'man V. V.* New methods of the mass and heat transfer theory. — 2. New methods of asymptotic interpolation and extrapolation. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1985. — V. 28. — No. 1. — P. 45 — 58.
279. *Polyanin A. D., Dil'man V. V.* Methods of modeling equations and analogies in chemical engineering. — London, Tokyo: CRC Press, Begell House, 1994. — 356 p.
280. *Polyanin A. D., Dil'man V. V.* The method of asymptotic analogies in the mass and heat transfer theory and chemical engineering science. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1990. — V. 33. — No. 6. — P. 1057 — 1072.
281. *Polyanin A. D., Dil'man V. V.* The method of the «carry over» of integral transforms in non-linear mass and heat transfer problems. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1990. — V. 33. — No. 1. — P. 175 — 181.

282. *Proudman I., Pearson J. R. A.* Expansions at small Reynolds number for the flow past a sphere and circular cylinder. // *J. Fluid Mech.* — 1957. — V. 2. — No. 3. — P. 237 — 262.
283. *Ramkissoon H.* Slow flow of a non-Newtonian liquid past a fluid sphere. // *Acta Mech.* (Springer-Verlag) — 1989. — V. 78. — No. 1 — 2. — P. 73 — 80.
284. *Ranger K. B.* The circular disk straddling the interface of a two-phase flow. // *Int. J. Mult. Flow.* — 1978. — V. 4. — P. 263 — 277.
285. *Rao S. S., Bennett C. O.* Steady state technique for measuring fluxes and diffusivities in binary liquid systems. // *AIChE J.* — 1971. — V. 17. — No. 1. — P. 75 — 81.
286. *Rednikov A. Ye., Ryazantsev Yu. S., Velarde M. G.* Drop motion with surfactant transfer in a homogeneous surrounding // *Phys. Fluids.* — 1994. — V. 6. — No. 2. — P. 451 — 468.
287. *Rimmer P. L.* Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number. // *J. Fluid Mech.* — 1968. — V. 32. — No. 1. — P. 1 — 7. (Corrigenda: *J. Fluid Mech.* — 1969. — V. 35. — No. 4. — P. 827 — 829).
288. *Rimon J., Cheng S. I.* Numerical solution of a uniform flow over a sphere at intermediate Reynolds numbers. // *Phys. Fluid.* — 1969. — V. 12. — No. 5. — P. 949 — 959.
289. *Robertson C. R., Acrivos A.* Low Reynolds number shear flow past a rotating circular cylinder. Part 2. Heat transfer. // *J. Fluid Mech.* — 1970. — V. 40. — No. 4. — P. 705 — 718.
290. *Rotem Z., Neilson J. E.* Exact solution for diffusion to flow down an incline. // *Can. J. Chem. Engng.* — 1966. — V. 47. — P. 341 — 346.
291. *Rubczynski M. W.* Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium. // *Bull. Acad. Sci. Cracovie, Ser. A, Sci. Math.* — 1911. — Bd. 1. — S. 40 — 46.
292. *Ruckenstein E.* Mass transfer between a single drop and continuous phase. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1967. — V. 10. — No. 12. — P. 1785 — 1792.
293. *Rushton E., Davies G. A.* Settling of encapsulated droplets at low Reynolds numbers. // *Int. J. Mult. Flow.* — 1983. — V. 9. — No. 3. — P. 337 — 342.
294. *Rushton E., Davies G. A.* The slow unsteady settling of two fluid spheres along their line of centers. // *Appl. Sci. Res.* — 1973. — V. 28. — No. 1 — 2. — P. 37 — 61.
295. *Saffman P. G.* On the boundary condition at the surface of a porous medium. // *Stud. Appl. Math.* — 1971. — V. 50. — No. 2. — P. 93 — 101.
296. *Sakiadis B. C.* Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: 2. Boundary layer on a continuous flat surface. // *AIChE J.* — 1961. — V. 7. — No. 2. — P. 221 — 225.
297. *Sehlin R. C.* Forced-convection heat and mass transfer at large Peclet numbers from axisymmetric body in laminar flow: prolate and oblate spheroids. — M.S. thesis (Chem. Engng.). Carnegie Inst. of Techn., Pittsburgh, 1969.
298. *Sellers J. R., Tribus M., Klin J. S.* Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit — the Graetz problem extended. // *Trans. ASME.* — 1956. — V. 78. — No. 2. — P. 441 — 448.
299. *Sih P. H., Newman J.* Mass transfer to the rear of sphere in Stokes flow. // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1967. — V. 10. — No. 12. — P. 1749 — 1756.
300. *Stimson M., Jeffrey G. B.* The motion of two spheres in a viscous flow. // *Proc. Roy. Soc. London.* — 1926. — V. A111. — No. 757.
301. *Subramanian R. S.* Slow migration of a gas bubble in a thermal gradient. // *AIChE J.* — 1981. — V. 27. — No. 4. — P. 646 — 654.
302. *Subramanian R. S.* The Stokes force in a droplet in an unbounded fluid medium due to capillary effects. // *J. Fluid Mech.* — 1985. — V. 153. — P. 389 — 400.

303. *Subramanian R. S.* Thermocapillary migration of bubbles and droplets. // *Advances in Space Research*, Pergamon Press. — 1983. — V. 3. — No. 5. — P. 145.
304. *Sykes J. A., Marchello J. M.* Laminar flow of two immiscible liquid falling films. // *AIChE J.* — 1969. — V. 15. — No. 2. — P. 305 — 306.
305. *Szymczyk J., Siekmann J.* Numerical calculation of the thermocapillary motion of a bubble under microgravity. // *Chem. Eng. Comm.* — 1988. — V. 69. — P. 129 — 147.
306. Tables relating to Mathieu function. — New York, Columbia Univ. Press, 1951. (Русск. перевод: Таблицы для вычисления функций Матье; собственные значения, коэффициенты и множители связи. — М.: ВЦ АН СССР, 1967. — 279 с.)
307. *Tam C. K. W.* The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. // *J. Fluid Mech.* — 1969. — V. 38. — No. 3. — P. 537 — 546.
308. *Taylor G. I.* Formation of emulsion in peffinable film of flow. // *Proc. Roy. Soc. London.* — 1934. — V. A146. — No. 858. — P. 501 — 523.
309. *Taylor G. I.* Viscosity of a fluid, containing small drops of another fluid. // *Proc. Roy. Soc. London.* — 1932. — V. A138. — No. 834. — P. 41 — 48.
310. *Taylor T., Acrivos A.* On a deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. // *J. Fluid Mech.* — 1964. — V. 18. — Pt. 3. — P. 466 — 476.
311. *Vignes A.* Diffusion in binary solutions. // *Ind. Engng. Chem. Fundam.* — 1966. — V. 5. — No. 2. — P. 189 — 199.
312. *Vochten R., Petre G.* Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. 2. Experimental determination of the heat of reversible adsorption of some alcohols. // *J. Colloid Interface Sci.* — 1973. — V. 42. — No. 2. — P. 320 — 327.
313. *Vochten R., Petre G., Defay R.* Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. 1. Thermodynamical calculation of the heat of reversible adsorption of nonionic surfactants. // *J. Colloid Interface Sci.* — 1973. — V. 42. — No. 2. — P. 310 — 319.
314. *Waslo S., Gal-Or B.* Boundary layer theory for mass and heat transfer in clouds of moving drops, bubbles or solid particles. // *Chem. Eng. Sci.* — 1971. — V. 26. — No. 6. — P. 829 — 838.
315. *Wasserman M. L., Slattery J. C.* Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in a power-law fluid. // *AIChE J.* — 1964. — V. 10. — No. 3. — P. 383 — 388.
316. *Weber M. E.* Mass transfer from spherical drops at high Reynolds numbers. // *Ind. Engng. Chem. Fundam.* — 1975. — V. 14. — No. 4. — P. 365 — 366.
317. *Weinberger H. F.* Variational properties of steady fall in Stokes flow. // *J. Fluid Mech.* — 1972. — V. 52. — Pt. 2. — P. 321 — 344.
318. *Winnikow S.* Letter to the Editors. // *Chem. Eng. Sci.* — 1967. — V. 22. — No. 3. — P. 477.
319. *Young N. O., Goldstein J. S., Block M. G.* The motion of bubbles in a vertical temperature gradient. // *J. Fluid Mech.* — 1959. — V. 6. — Pt. 3. — P. 350 — 356.