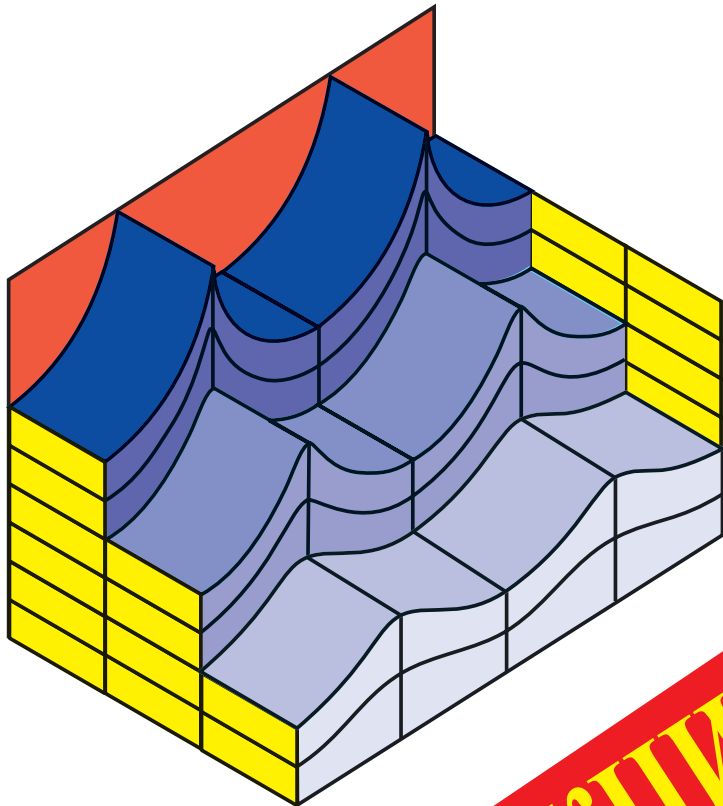


УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

*В.А.Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А.Караваяев*

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ



У  
К  
О  
Ф



**ЛЕКЦИИ**

Университетский курс  
общей физики

---

В.А.Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А.Караваяев

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ЛЕКЦИИ

МОСКВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ  
2001

УДК 530.1  
ББК 22.236.35

**АЛЕШКЕВИЧ В.А., ДЕДЕНКО Л.Г., КАРАВАЕВ В.А. Колебания и волны. Лекции.** (Университетский курс общей физики). — М.: Физический факультет МГУ, 2001. — 144 с.

ISBN 5–8279–0011–7

Пособие содержит лекции по механическим колебаниям и волнам, которые являются составной частью раздела «Механика» курса общей физики.

Для студентов физических специальностей университетов и высших учебных заведений.

ISBN 5–8279–0011–7

© Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А., 2001  
© Физический факультет МГУ, 2001

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*На кафедре общей физики ведется работа по подготовке и изданию оригинального курса «Общая физика», предназначенного для студентов физических специальностей вузов.*

*Курс будет охватывать четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электромагнетизм» и «Оптика», соответствовать новым учебным программам, разработанным на физическом факультете МГУ, и отражать современные тенденции и технологии физического образования.*

*Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем наиболее последовательно в методическом отношении проводится точка зрения о существенном единстве основных форм обучения физике: лекций, лабораторных экспериментов и семинарских упражнений. Лекции по каждой теме начинаются с демонстрации основных экспериментальных фактов, которые затем анализируются и обобщаются в виде физических законов и соотношений. Такой подход к изложению материала закрепляется при выполнении лабораторных экспериментов, цель которых — научить студентов навыкам самостоятельной постановки и решения физических проблем, проведению экспериментальных исследований, компьютерного моделирования, а также методам интерпретации и анализа экспериментальных данных. Более глубокое понимание основных физических явлений и закономерностей достигается на семинарских занятиях.*

*В соответствии с поставленными задачами каждый раздел курса будет состоять из четырех пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный эксперимент», «Семинарские занятия». Пособия, написанные в едином методическом ключе, будут комплектоваться видеозаписями лекционных демонстраций и дискетами с описанием модельных экспериментов.*

*Учебное пособие «Колебания и волны. Лекции» является частью готовящегося к изданию курса «Механика» и может рассматриваться как самостоятельное учебное пособие по данной теме. Лекции написаны на основе курсов, читаемых авторами на физическом факультете МГУ. Как и в предыдущих выпусках этой серии, предлагается многоуровневый подход к изучению этого важнейшего раздела.*

*В части, посвященной колебаниям систем с одной степенью свободы (лекции 1–2), наряду с традиционными системами рассматриваются характеристики различных осцилляторов: высокочастотного камертона, прецизионного физического маятника, используемого в качестве гравитационной антенны, колебательного контура, многоатомных молекул и оптического осциллятора — электрона в атоме. Анализируются фазовые портреты при различных режимах колебаний, а также нелинейные колебания математического маятника. Предложена упрощенная концепция количественного описания автоколебаний (маятник на вращающемся валу) и параметрических колебаний (математический маятник с изменяющейся длиной нити) с использованием условий энергетического баланса. Более детально, чем обычно, рассмотрены свободные и вынужденные колебания систем с двумя, тремя и  $N$  степенями свободы и введено дисперсионное соотношение, позволяющее связать частоту моды  $\omega$  и ее конфигурацию, задаваемую волновым числом  $k$  (лекции 3–4). Вводится понятие тепловых фононов в кристаллах. Стоячие волны в сплошных средах рассматриваются путем предельного перехода при  $N \rightarrow \infty$ .*

*Лекции 5–6 посвящены бегущим волнам. Здесь рассматриваются не только общепринятые модели волновых движений частиц твердых тел, жидкости и газа, но также объемные и поверхностные сейсмические волны и современная сейсмическая модель Земли. На основе системы уравнений Эйлера, введенной в предыдущих учебных пособиях этой серии, предлагается адаптированный подход к описанию гравитационно-капиллярных волн и оцениваются характеристики таких волн, включая волны цунами. Для наиболее подготовленных студентов излагаются основные элементы нелинейного распространения акустических волн конечной амплитуды.*

*Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность чл.–корр. РАН проф. О.В.Руденко, проф. В.П.Митрофанову, доц. В.И.Балакишю, проф. К.В.Показееву, с.н.с. Е.В.Ворониной за полезное обсуждение содержания отдельных тем, входящих в область профессиональных научных интересов наших коллег.*

*Мы традиционно признательны доц. М.В.Семенову и асс. А.А.Якуте за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, а также н.с. А.В.Селиверстову, м.н.с. М.П.Виноградову, А.А.Баранову, Д.А.Баранову и Н.А.Якута за подготовку рукописи к изданию.*

---

---

## ЛЕКЦИЯ 1

*Незатухающие гармонические колебания систем с одной степенью свободы. Метод векторных диаграмм. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фазовый портрет колебательной системы. Негармонические колебания математического маятника. Свободные колебания в диссипативных системах с вязким трением. Коэффициент и время затухания, логарифмический декремент, добротность. Колебания в системе с сухим трением. Явление застоя.*

Окружающий нас мир полон движущихся объектов. Чрезвычайно важным классом движений являются такие, в которых объект совершает финитное (ограниченное) движение вблизи некоторого положения равновесия. Разумеется, под движением мы понимаем не только его простейшую форму — изменение положения объекта в пространстве, — но и любое изменение во времени свойств материи, распределенной в пространстве. Колебаниями называются процессы, повторяющиеся (или приблизительно повторяющиеся) во времени.

Любая система, колебания которой мы будем изучать, может быть охарактеризована некоторой физической величиной, отклонение которой  $f(x, y, z, t)$  от равновесного значения зависит от координат и времени.

В случае механических систем (а именно такие системы мы будем далее изучать в курсе «Механика») движущимися объектами являются точечные массы или физически малые элементы объема материальной среды (жидкости, газа, твердого тела и т.д.). Поэтому при описании колебаний таких систем функция  $f(x, y, z, t)$  может характеризовать смещение (линейное или угловое), скорость, ускорение, деформацию, кинетическую или потенциальную энергию, давление и пр.

При колебаниях в электрических системах колеблющейся величиной  $f$  может быть ток в цепи, заряд на пластинах конденсатора колебательного контура, напряжение на катушке индуктивности. В случае открытого колебательного контура в окружающем пространстве колеблются электрическое  $E(x, y, z, t)$  и магнитное  $B(x, y, z, t)$  поля.

Колебания могут быть результатом кратковременного внешнего возбуждения. Тогда они называются свободными, или собственными. Такие колебания происходят на частотах, обусловленных исключительно конструктивными особенностями системы — собственных частотах, и продолжаются в течение некоторого характерного времени — времени затухания, зависящего от диссипации энергии в системе.

Для поддержания незатухающих колебаний к системе должна непрерывно подводиться энергия от внешнего источника. В этом случае колебания будут вынужденными. В зависимости от способа поддержания незатухающих колебаний различают вынужденные колебания под действием периодической силы, автоколебания, параметрические колебания, релаксационные колебания и т.д.

Далее мы постепенно рассмотрим все многообразие механических колебаний.

---

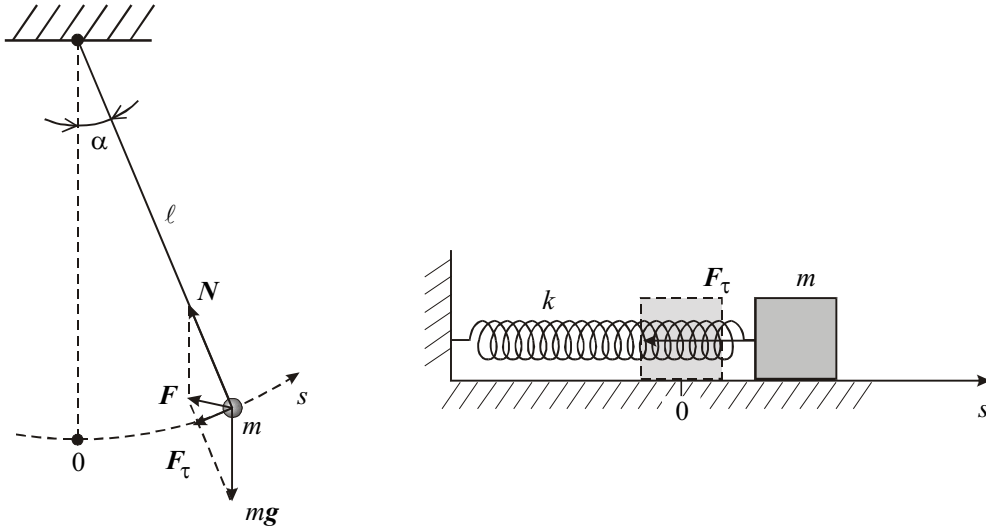


Рис. 1.1.

**Незатухающие гармонические колебания систем с одной степенью свободы.** Если положение системы может быть описано одним единственным параметром  $f(t)$ , зависящим от времени, то такая система имеет одну степень свободы. Примерами таких систем являются хорошо известные из школьного курса математический и пружинный маятники, изображенные на рис. 1.1, если первый из них движется в одной плоскости, а второй — по прямой.

Для математического маятника  $f(t)$  может характеризовать либо угловое смещение ( $f(t) = \alpha(t)$ ), либо линейное смещение вдоль траектории ( $f(t) = s(t)$ ) точечной массы  $m$  от положения равновесия, а для пружинного маятника  $f(t) = s(t)$ , где  $s(t)$  — смещение массы  $m$  от ее равновесного положения, изображенного пунктиром.

Движение таких и подобных им систем можно описать на основе второго закона Ньютона:

$$ma = \mathbf{F}. \quad (1.1)$$

Если пренебречь вначале силами сопротивления (в дальнейшем мы учтем их действие), то на массу  $m$  математического маятника будет действовать результирующая сила  $\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$  ( $\mathbf{N}$  — сила натяжения нити), направленная, вообще говоря, под углом к траектории, а на массу  $m$  пружинного маятника, лежащего на гладкой горизонтальной поверхности, — горизонтальная сила  $F_\tau$ , являющаяся функцией смещения  $s$  от положения равновесия.

Так как смещение  $s(t)$  в случае математического маятника определяется тангенциальным ускорением, то уравнение (1.1) для обоих маятников запишется в виде

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) = -mg \sin \frac{s}{\ell}; \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s), \quad (1.2)$$

где  $\ell$  — длина нити.

В первом уравнении использована проекция  $F_\tau(s)$  результирующей силы  $F$  на направление скорости в виде  $F_\tau = -mg \sin \alpha = -mg \sin(s/\ell)$ .

В рассматриваемых примерах возвращающая сила  $F_\tau(s)$  является, вообще говоря, нелинейной функцией смещения  $s$ . Поэтому точное решение уравнений (1.2), которые являются нелинейными, получить не удастся. Далее мы рассмотрим некоторые примеры таких нелинейных колебаний.

Здесь же мы будем считать смещения малыми по сравнению с длиной нити или длиной недеформированной пружины. При таких предположениях возвращающая сила пропорциональна смещению:

$$F_\tau(s) = -mg \frac{s}{\ell}; \quad F_\tau(s) = -ks. \quad (1.3)$$

Выражение слева записано при учете условия  $\sin(s/\ell) \approx s/\ell$ , а справа — с использованием закона Гука, справедливого при малых деформациях пружины с жесткостью  $k$ .

С учетом (1.3) уравнения (1.2) примут одинаковый вид:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} s; \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{m} s. \quad (1.4)$$

Различаются лишь коэффициенты в правых частях этих уравнений, которые численно равны отношению возвращающей силы при единичном смещении к массе колеблющегося тела и имеют размерность  $[c^{-2}]$ . Если использовать обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.5)$$

то уравнения (1.4) примут вид уравнения незатухающих гармонических колебаний, или уравнения гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 s. \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.6) является семейство гармонических функций

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.7)$$

в чем легко убедиться, дважды продифференцировав функцию  $s(t)$  по времени:

$$\frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -s_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Заметим, что если уравнение движения приводится к виду (1.6), то его решением являются гармонические функции (1.7) с частотой  $\omega_0$ , равной корню квадратному из коэффициента при  $s$ .

Значения этих гармонических функций в начальный момент времени (при  $t = 0$ ) определяются начальной фазой  $\varphi_0$  (см. ниже) и амплитудой колебаний  $s_0$ . У одной и той же системы эти значения могут быть различными при разных способах возбуждения колебаний.



Чтобы возбудить собственные колебания, надо вначале (при  $t = 0$ ) либо отклонить тело (задать начальное смещение  $s(0)$ ), либо толкнуть его (задать начальную скорость  $\frac{ds}{dt}(0) = v(0)$ ), либо сделать и то, и другое одновременно. Знание начальных условий (смещения и скорости) позволяет определить амплитуду  $s_0$  и начальную фазу колебаний  $\varphi_0$  из очевидных уравнений:

$$s(0) = s(t)|_{t=0} = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)|_{t=0} = s_0 \sin \varphi_0; \quad (1.8)$$

$$v(0) = \frac{ds}{dt}|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos \varphi_0. \quad (1.9)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$s_0 = \sqrt{s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\omega_0 s(0)}{v(0)}. \quad (1.10)$$

Важно отметить, что амплитуда колебаний  $s_0$ , равная величине максимального смещения тела от положения равновесия, может превосходить начальное смещение  $s(0)$  при наличии начального толчка.

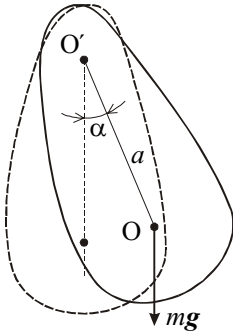


Рис. 1.2.

Наряду с круговой частотой  $\omega_0$  колебания характеризуются циклической частотой  $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ , равной числу колебаний за единицу времени, и периодом колебаний  $T = 1 / \nu_0$ , равным длительности одного колебания.

Период гармонических колебаний (равно как и частоты  $\omega_0$  и  $\nu_0$ ) не зависит от начальных условий и равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.11)$$

Другим примером являются колебания физического маятника — тела произвольной формы массы  $m$ , закрепленного на горизонтальной оси  $O'$  так, что его центр масс находится в точке  $O$ , удаленной от оси на расстояние  $a$ . При отклонении маятника от вертикали на небольшой угол  $\alpha$  он будет совершать свободные гармонические колебания под действием силы тяжести, приложенной к центру масс (рис. 1.2).

Если известен момент инерции тела  $J$  относительно оси вращения, то уравнение вращательного движения запишется в виде

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M = -mga \sin \alpha. \quad (1.12)$$

Если считать, что при вращении, например, против часовой стрелки угол  $\alpha$  увеличивается, то момент силы тяжести  $M$  вызывает уменьшение этого угла и, следовательно, при  $\alpha > 0$  момент  $M < 0$ . Это и отражает знак минус в правой части (1.12).

Для малых углов отклонения уравнение (1.12) переходит в уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mga}{J}\alpha, \quad (1.13)$$

из вида которого сразу ясно, что частота  $\omega_0$  и период  $T$  колебаний соответственно равны

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (1.14)$$

Сравнивая выражения для периода колебаний физического (1.14) и математического (1.11) маятников, легко видеть, что оба периода совпадают, если

$$\frac{J}{ma} = \ell. \quad (1.15)$$

Поэтому физический маятник характеризуется приведенной длиной (1.15), которая равна длине математического маятника с таким же периодом колебаний.

Период колебаний физического маятника ( $a$ , следовательно, и его приведенная длина  $\ell$ ) немонотонно зависит от расстояния  $a$ . Это легко заметить, если в соответствии с теоремой Гюйгенса–Штейнера момент инерции  $J$  выразить через момент инерции  $J_0$  относительно параллельной горизонтальной оси, проходящей через центр масс:  $J = J_0 + ma^2$ . Тогда период колебаний (1.14) будет равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}. \quad (1.16)$$

Изменение периода колебаний при удалении оси вращения от центра масс  $O$  в обе стороны на расстояние  $a$  показано на рис. 1.3.

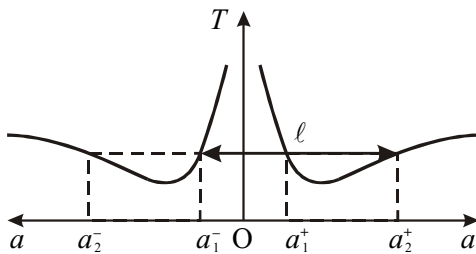


Рис. 1.3.

Легко видеть, что один и тот же период колебаний может реализоваться относительно любой из четырех осей, расположенных попарно по разные стороны от центра масс. Можно показать, что сумма расстояний  $a_1^+$  и  $a_2^+$  равна приведенной длине физического маятника:  $\ell = a_1^+ + a_2^+$ . В силу симметрии графика ясно, что

$$\ell = a_2^+ + a_1^-. \quad (1.17)$$

Это обстоятельство позволяет для любой оси вращения  $O^+$  определить сопряженную ось  $O^-$ . Период колебаний относительно этих осей одинаков, а расстояние между ними равно приведенной длине физического маятника.

На рис. 1.4 изображены положения осей  $O^+$  и  $O^-$ , при этом ось вращения, удаленная на расстояние  $a_2^-$ , при такой форме маятника находится вне его.

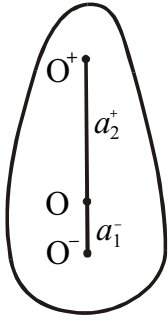


Рис. 1.4.

Физический маятник применяется для измерения ускорения свободного падения. С этой целью измеряют зависимость периода колебаний маятника от положения оси вращения и по этой экспериментальной зависимости находят в соответствии с формулой (1.17) приведенную длину. Определенная таким образом приведенная длина в сочетании с измеренным с хорошей точностью периодом колебаний относительно обеих осей позволяет рассчитать ускорение свободного падения. Важно отметить, что при таком способе измерений не требуется определение положения центра масс, что в ряде случаев повышает точность измерений.

**Метод векторных диаграмм.** Гармонические колебания (1.7) допускают наглядную графическую интерпретацию. Ее смысл состоит в том, что каждому гармоническому колебанию с частотой  $\omega_0$  можно поставить в соответствие вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$  вектор, длина которого равна амплитуде  $s_0$ , а его начальное (стартовое) положение задается углом  $\varphi_0$ , совпадающим с начальной фазой (рис. 1.5).

Вертикальная проекция вектора  $s_0$  изменяется со временем:  $s(t) = s_0 \sin \varphi(t)$ . Мгновенное положение вектора  $s_0$  определяется углом  $\varphi(t)$ , который называется фазой и равен:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0. \quad (1.18)$$

При угловой скорости (круговой частоте)  $\omega_0$  вектор совершает  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  оборотов (циклов) в секунду, а продолжительность одного оборота (период) равна отношению угла  $2\pi$  к угловой скорости  $\omega_0$ :  $T = 2\pi/\omega_0$ .

С помощью векторных диаграмм легко осуществить сложение гармонических колебаний. Так, если необходимо сложить два колебания с одинаковыми частотами

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

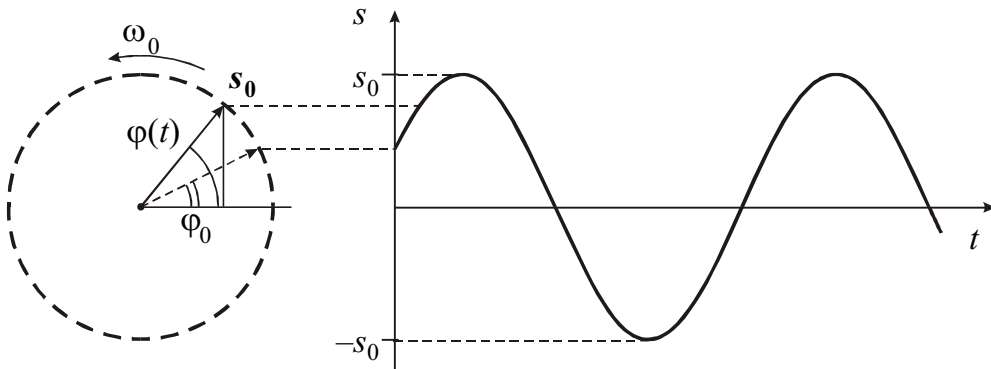


Рис. 1.5.

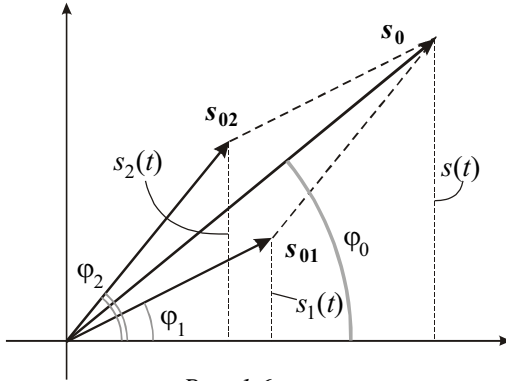


Рис. 1.6а.

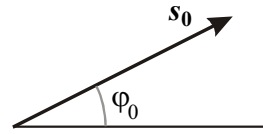


Рис. 1.6б.

то амплитуду  $s_0$  и начальную фазу  $\varphi_0$  суммарного колебания  $s(t)$  с той же частотой  $\omega_0$  можно легко рассчитать из рис. 1.6а, на котором графически изображена операция сложения векторов  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_{01} + \mathbf{s}_{02}$  в момент времени  $t = 0$ :

$$s_0 = \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}.$$

Ясно, что вертикальная проекция вектора  $\mathbf{s}_0$  будет также изменяться по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ , поскольку взаимное расположение векторов  $\mathbf{s}_{01}$  и  $\mathbf{s}_{02}$  не изменяется с течением времени.

Из этой диаграммы наглядно видно, что суммарное колебание  $s(t)$  опережает по фазе колебание  $s_1(t)$  и отстает по фазе от колебания  $s_2(t)$ . Полная фаза для каждого из трех колебаний в произвольный момент времени отличается от их начальных фаз на одну и ту же величину  $\omega_0 t$ , которую при построении векторных диаграмм не учитывают. При этом колебание изображается неподвижным вектором (рис. 1.6б), а частота колебания предполагается известной.

**Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.** Рассмотрим колебатель-

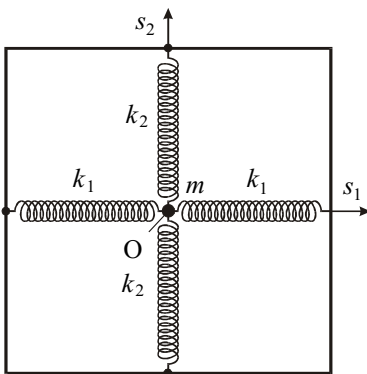


Рис. 1.7.

ную систему, состоящую из точечного груза массы  $m$  и четырех связанных с ним пружин (рис. 1.7) — усложненный вариант рассмотренного выше пружинного маятника.

Если масса движется по гладкой горизонтальной поверхности (на рисунке показан вид сверху), то ее мгновенное расположение описывается двумя смещениями из положения равновесия — точки  $O$ :  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Такая система обладает двумя степенями свободы. Будем считать смещения малыми, чтобы, во-первых, выполнялся закон Гука, и, во-вторых, при смещении вдоль

направления  $s_1$  деформации пружин с жесткостью  $k_2$  не приводили к сколько-нибудь заметному вкладу в возвращающую силу  $F_1 = -2k_1 s_1$ . Аналогично, при смещении в перпендикулярном направлении  $s_2$  возвращающая сила  $F_2 = -2k_2 s_2$ . При таких условиях колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях происходят независимо друг от друга:

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega_{01} t + \varphi_1), \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega_{02} t + \varphi_2). \quad (1.19)$$

Здесь собственные частоты гармонических колебаний равны

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}, \quad (1.20)$$

а амплитуды и начальные фазы определяются начальными условиями.

При возбуждении колебаний в такой системе при произвольном соотношении собственных частот  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  траектория колеблющегося груза может быть чрезвычайно сложной. Ее, в принципе, можно проанализировать, принимая во внимание тот факт, что результирующее движение груза является суперпозицией двух взаимно перпендикулярных независимых колебаний.

Рассмотрим вначале движение груза, если  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  (жесткости всех пружин одинаковы). Чтобы получить траекторию движения, исключим из (1.19) текущее время. Для этого перепишем (1.19) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_{01}} &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_1, \\ \frac{s_2}{s_{02}} &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Умножим первое уравнение (1.21) на  $\cos \varphi_2$ , а второе — на  $\cos \varphi_1$  и вычтем второе уравнение из первого. В результате получим:

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cos \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cos \varphi_1 = \cos \omega_0 t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.22a)$$

Теперь умножим первое уравнение на  $\sin \varphi_2$ , а второе — на  $\sin \varphi_1$ , повторим вычитание и получим

$$\frac{s_1}{s_{01}} \sin \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \sin \varphi_1 = \sin \omega_0 t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.22b)$$

Наконец, возведем в квадрат каждое из равенств (1.22) и сложим их. В результате время будет исключено, а уравнение траектории движущегося груза будет уравнением эллипса:

$$\left(\frac{s_1}{s_{01}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{s_{02}}\right)^2 - 2 \frac{s_1}{s_{01}} \frac{s_2}{s_{02}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.23)$$

Таким образом, в общем случае груз будет совершать периодические движения по эллиптической траектории. Направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей  $Os_1$  и  $Os_2$  зависят от начальной разности фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

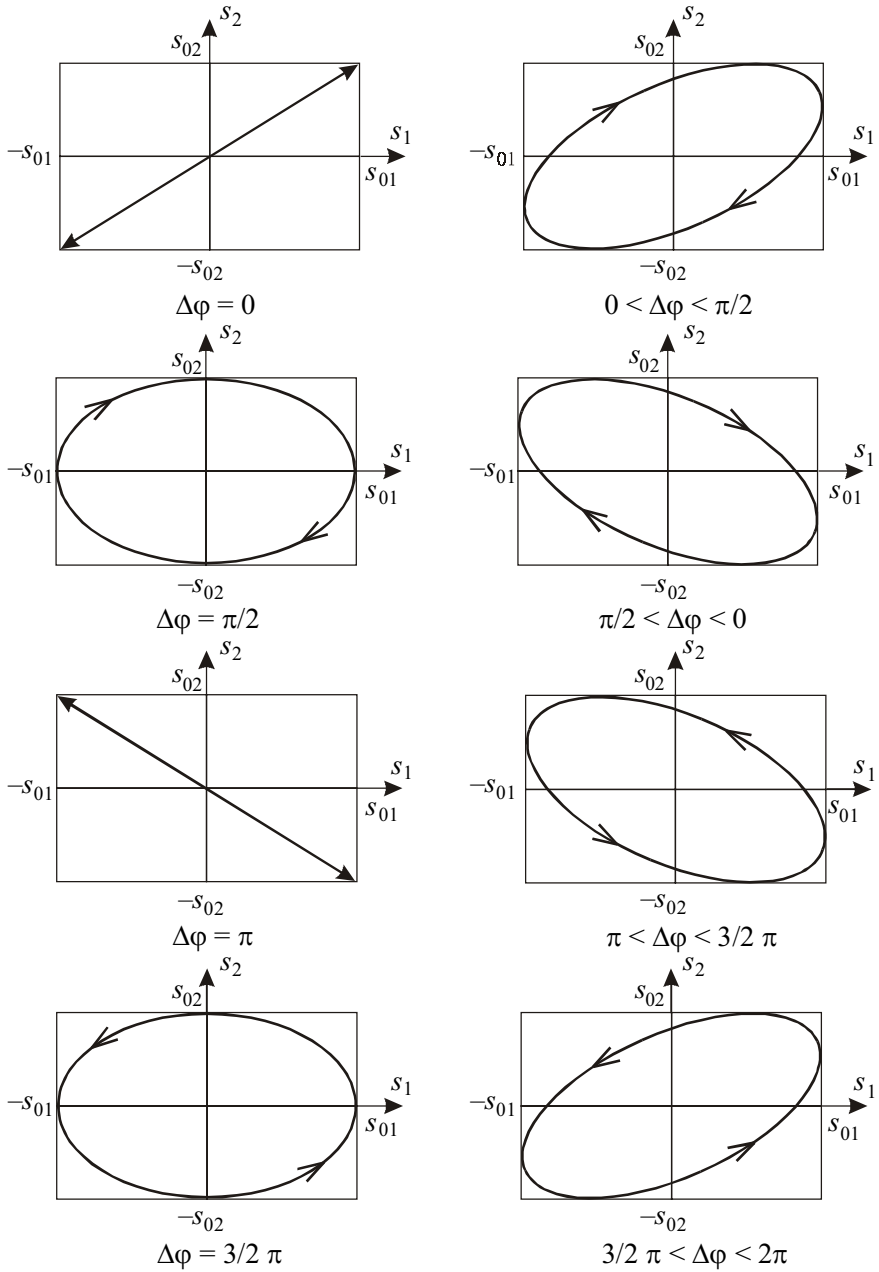


Рис. 1.8.

На рис. 1.8 изображены траектории движения груза при различных значениях  $\Delta\varphi$ .

Все траектории заключены в прямоугольник со сторонами  $2s_{01}$  и  $2s_{02}$ . При  $\Delta\varphi = 0$  и  $\Delta\varphi = \pi$  груз движется по прямой линии. При  $\Delta\varphi = \pi/2$  и  $\Delta\varphi = 3\pi/2$  полуоси эллипса совпадают с  $Os_1$  и  $Os_2$  (при  $s_{01} = s_{02}$  эллипс вырождается в окружность). При разности фаз  $0 < \Delta\varphi < \pi$  груз движется по часовой стрелке, а при  $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$  — против часовой стрелки.

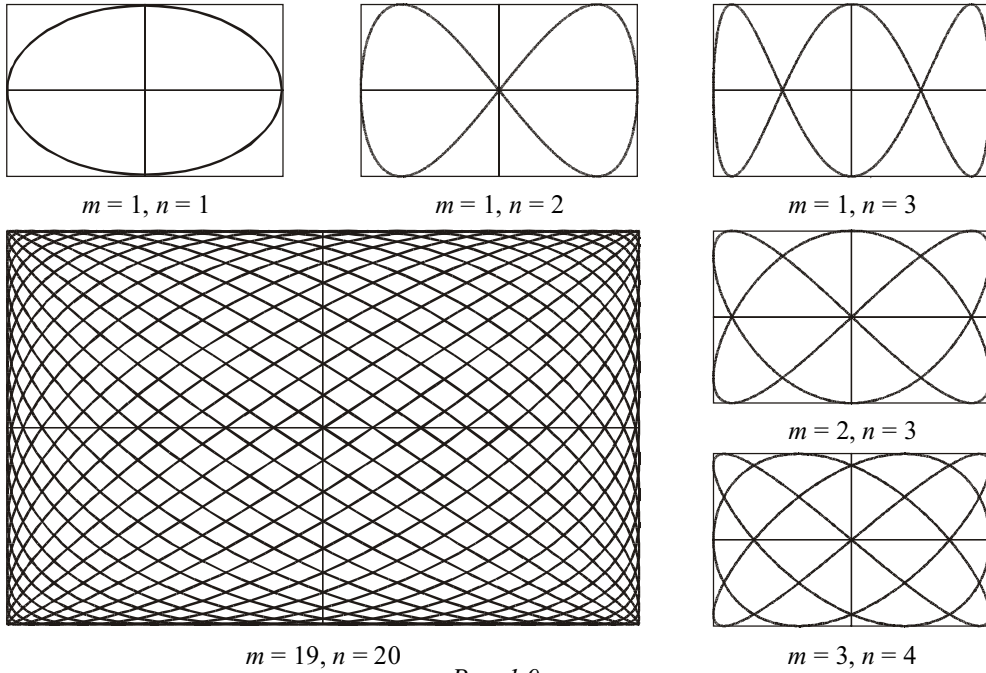


Рис. 1.9.

Типичным примером двумерного осциллятора (маятника) является электрон в атоме, который движется вокруг ядра по эллиптической орбите с периодом обращения  $T \sim 10^{-15}$  с. Можно считать, что такой электрон одновременно совершает два взаимно перпендикулярных колебания с частотой  $\omega_0 = 2\pi/T \sim 10^{16}$  с<sup>-1</sup>.

Если частоты двух взаимно перпендикулярных колебаний не совпадают, но являются кратными:  $m\omega_0 = n\omega_0$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, то траектории движения представляют собой замкнутые кривые, называемые фигурами Лиссажу (рис. 1.9). Отметим, что отношение частот колебаний равно отношению чисел точек касания фигуры Лиссажу к сторонам прямоугольника, в который она вписана.

Если кратность между частотами отсутствует, то траектории не являются замкнутыми и постепенно заполняют весь прямоугольник, напоминая нить в клубке.

**Фазовый портрет колебательной системы.** В любой колебательной системе с одной степенью свободы смещение  $s(t)$  и скорость  $v(t) = ds/dt$  меняются со временем.

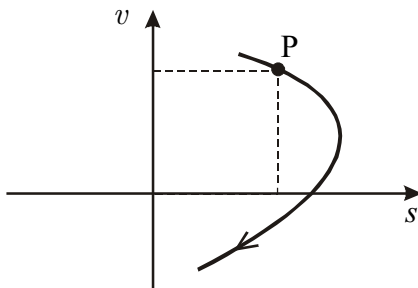


Рис. 1.10.

Состояние системы в каждый момент времени можно характеризовать двумя значениями  $s$  и  $v$ , и на плоскости этих переменных это состояние однозначно определяется положением изображающей точки  $P$  с координатами  $s$  и  $v$ . С течением времени изображающая точка  $P$  будет перемещаться по кривой, которую называют фазовой траекторией движения (рис. 1.10).

Плоскость переменных  $s$  и  $v$  называется фазовой плоскостью. Семейство фазовых траекторий образует фазовый портрет колебательной системы. Анализ фазового портрета дает хотя и не полную, но обширную информацию о колебательной системе. К построению такого портрета прибегают тогда, когда не удается решить аналитически уравнение, описывающее сложные колебания. В первую очередь это относится к нелинейным колебаниям, анализ которых затруднен из-за отсутствия точных решений нелинейных уравнений.

Вначале проиллюстрируем сказанное на примере простейших гармонических колебаний вида  $s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Поскольку скорость

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

опережает смещение по фазе на  $\pi/2$ , то фазовая траектория будет эллипсом. Точка P будет двигаться по эллиптической траектории по часовой стрелке (при  $v > 0$  смещение  $s$  увеличивается, а при  $v < 0$  — уменьшается (рис. 1.11)).

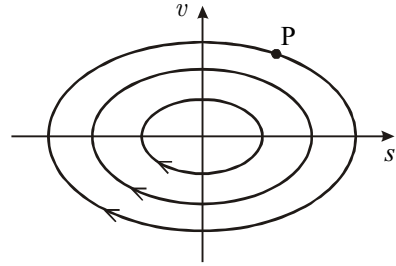


Рис. 1.11.

Параметры эллипса определяются энергией, запасенной гармоническим осциллятором. Потенциальная энергия пружинного маятника пропорциональна квадрату смещения:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k s_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.24)$$

Кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 s_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.25)$$

Если принять во внимание равенство  $k = m\omega_0^2$ , то легко видеть, что взаимопревращения одного вида энергии в другой за период происходят дважды. При этом полная энергия системы остается постоянной:

$$E_0 = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m (\omega_0^2 s^2 + v^2). \quad (1.26)$$

Равенство (1.26) как раз и является уравнением эллипса, которое можно переписать в более удобном виде:

$$s^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0}{m\omega_0^2}. \quad (1.27)$$

Фазовый портрет гармонического осциллятора представляет собой семейство эллипсов, каждому из которых соответствует энергия  $E_0$ , запасенная осциллятором. Положение равновесия в точке 0 на фазовой плоскости является особой точкой и называется особой точкой типа «центр».

С увеличением энергии  $E_0$  возрастают амплитуды колебаний смещения  $s_0$  и скорости  $s_0 \omega_0$ . Колебания, как правило, перестают быть гармоническими, а фазовые траектории — эллипсами.



Проанализируем на фазовой плоскости колебания математического маятника при произвольных углах  $\alpha$  отклонения от положения равновесия. При этом будем считать, что точечная масса  $m$  прикреплена не к нити, а к жесткому невесомому стержню длины  $\ell$ . Первое из уравнений (1.2) запишем в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha. \quad (1.28)$$

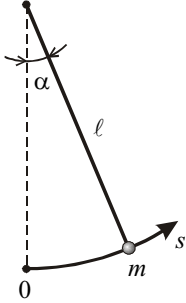


Рис. 1.12.

Это нелинейное уравнение не имеет простого аналитического решения, поэтому позднее мы приведем его приближенное решение. Однако многие закономерности таких колебаний можно проанализировать с использованием фазового портрета на плоскости  $(\alpha; \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt})$ . С этой целью уравнение (1.28) надо преобразовать к такому виду, чтобы в нем остались только эти переменные, а время было бы исключено. Для этого угловое ускорение в левой части (1.28) преобразуем к виду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\alpha}^2)}{d\alpha}. \quad (1.29)$$

Подставляя (1.29) в (1.28), получим

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha}^2) = -\omega_0^2 \sin \alpha d\alpha. \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) отражает тот факт, что приращение кинетической энергии маятника равно убыли его потенциальной энергии в поле силы тяжести. Интегрируя (1.30), получим

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \alpha = const. \quad (1.31)$$

Если принять, что потенциальная энергия маятника в положении равновесия равна нулю, то константа выражается через запасенную маятником энергию  $E_0 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}_0^2$  ( $\dot{\alpha}_0$  — угловая скорость маятника в положении равновесия):

$$const = \frac{E_0}{m \ell^2} - \omega_0^2. \quad (1.32)$$

Уравнение фазовой траектории (1.31) окончательно запишется в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} + (1 - \cos \alpha) = \frac{E_0}{m \ell^2 \omega_0^2}. \quad (1.33)$$

При этом потенциальная и кинетическая энергии задаются выражениями

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2; \quad E_{\text{пот}} = m \ell^2 \omega_0^2 (1 - \cos \alpha). \quad (1.34)$$

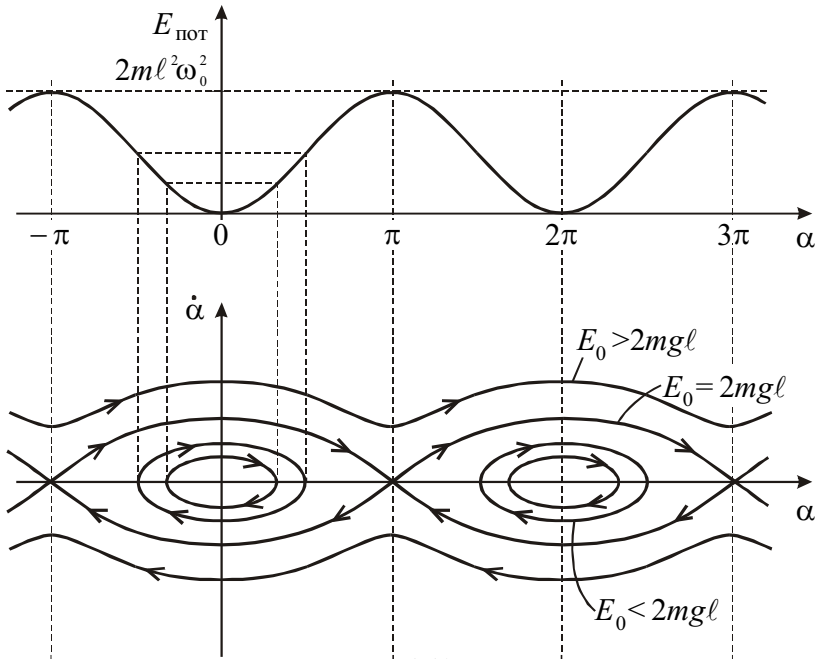


Рис. 1.13.

Используя (1.33), построим фазовый портрет системы (рис. 1.13).

Отчетливо видны два типа фазовых траекторий, соответствующие двум типам движения. Замкнутые траектории, окружающие особые точки типа «центр» с координатами  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = 2\pi n$  ( $n$  — целое число), соответствуют колебаниям маятника относительно устойчивого нижнего положения равновесия. Такие колебания имеют место, если энергия системы  $E_0 < m\ell^2 \omega_0^2 = 2mgl$  (см. рис. 1.13). При этом, если  $E_0 \ll 2mgl$ , то колебания будут гармоническими, а фазовые траектории — эллипсами. Если  $E_0 \sim 2mgl$ , то колебания будут негармоническими. При увеличении энергии, а, значит, и амплитуды колебаний осциллятора, их период будет возрастать, поскольку возвращающая сила в уравнении (1.28) меньше, чем в случае гармонического осциллятора.

Верхнему положению равновесия с координатами  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = (2n - 1)\pi$  соответствуют особые точки типа «седло». Фазовые кривые, проходящие через «седла», соответствуют энергии  $E_0 = 2mgl$  и называются сепаратрисами.

Если, наконец,  $E_0 > 2mgl$ , то получаются незамкнутые (убегающие) траектории, соответствующие вращательному движению маятника.

Таким образом, сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на две области: область замкнутых траекторий и область траекторий, приходящих из бесконечности и уходящих в бесконечность.

Отметим, что для негармонических колебаний нельзя употреблять термин «круговая частота», поскольку, как будет показано ниже, такие колебания являются, как правило, суперпозицией гармонических колебаний с различными частотами. Период же является по-прежнему одной из главных характеристик колебаний. Фазовый портрет не

позволяет определить, как быстро движется точка Р по траектории. Однако период нелинейных колебаний математического маятника можно получить на основе приближенного решения уравнения (1.28).

**Негармонические колебания математического маятника.** Колебания математического маятника при больших амплитудах, как уже отмечалось, не будут гармоническими. Это происходит потому, что возвращающая сила в правой части уравнения (1.28) пропорциональна  $\sin \alpha$  и при больших  $\alpha$  становится меньше той «линейной» силы (пропорциональной  $\alpha$ ), которая возвращает колеблющуюся массу в положение равновесия за неизменное время, равное четверти периода колебаний. Такая «линейная» сила обеспечивает независимость этого времени от амплитуды  $\alpha_0$ , т.е. изохронность колебаний.

Для анализа колебаний при больших амплитудах  $\alpha_0$  запишем разложение  $\sin \alpha$  в ряд:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots, \quad (1.35)$$

в котором отброшены члены более высокого порядка:  $\alpha^5$ ,  $\alpha^7$  и т.д. Подстановка (1.35) в (1.28) приводит к нелинейному уравнению колебаний:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3. \quad (1.36)$$

Решением этого уравнения уже не будет гармоническая функция. Действительно, допустим, что решением уравнения (1.36) будет гармоническое колебание вида  $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Подставляя это выражение в правую часть (1.36) и учитывая тригонометрическое тождество

$$\sin^3 \omega t \equiv \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (1.37)$$

приходим к противоречию. Получается так, что нелинейный член в правой части уравнения изменяется во времени не только с основной частотой  $\omega$ , но также и с утроенной частотой  $3\omega$  (частотой третьей гармоники). Чтобы устранить это противоречие, будем считать, что колебания маятника происходят одновременно на частотах  $\omega$  и  $3\omega$  так, что

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon \alpha_0 \sin 3(\omega t + \varphi_0), \quad (1.38)$$

где  $\varepsilon$  — безразмерный параметр.

Подставляя (1.38) в (1.36), снова обнаруживаем, что нелинейный член, помимо двух частот  $\omega$  и  $3\omega$ , меняется во времени и на частоте  $9\omega$ . Это говорит о том, что решение (1.38) не является полным (в нем отсутствуют высшие гармоники  $9\omega$ ,  $27\omega$  и т.д.). Между тем, если амплитуда колебаний  $\alpha_0$  не очень велика, то параметр  $\varepsilon \ll 1$ , и отсутствующие члены с высшими гармониками имеют амплитуды  $\varepsilon^2 \alpha_0$ ,  $\varepsilon^3 \alpha_0$  и т.д., которые много меньше амплитуды третьей гармоники  $\varepsilon \alpha_0$ .

Теперь рассчитаем частоту  $\omega$ . Для простоты положим  $\varphi_0 = 0$  (маятник получает начальный толчок в положении равновесия). Используя (1.38), запишем каждый из трех членов уравнения (1.36), опуская слагаемые, имеющие порядок малости  $\varepsilon^2$  и выше:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -\omega^2\alpha_0 \sin \omega t - 9\omega^2\varepsilon\alpha_0 \sin 3\omega t; \\ \omega^2\alpha &= \omega^2\alpha_0 \sin \omega t + \omega_0^2\varepsilon\alpha_0 \sin 3\omega t; \\ -\frac{1}{6}\omega_0^2\alpha^3 &= -\frac{3\omega_0^2}{24}\alpha_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2}\alpha_0^3\varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t.\end{aligned}\quad (1.39)$$

Заметим, что в последнем равенстве третье слагаемое в правой части, содержащее множитель  $\alpha_0^3\varepsilon$ , мало по сравнению с двумя предыдущими, и его также можно отбросить.

Сложим полученные три равенства. В силу (1.36), сумма левых частей равенств (1.39) равна нулю. Поэтому

$$0 = \alpha_0(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24}\omega_0^2\alpha_0^2) \sin \omega t + \alpha_0(-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{1}{24}\omega_0^2\alpha_0^2) \sin 3\omega t. \quad (1.40)$$

Поскольку равенство (1.40) должно выполняться для любого момента времени, то каждое из выражений, стоящих в круглых скобках, должно равняться нулю. Из равенства нулю первого выражения легко определить квадрат частоты основной гармоники

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{8}\alpha_0^2 \right). \quad (1.41)$$

Если  $\frac{\alpha_0^2}{8} \ll 1$ , то для частоты получим

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{8} \right)^{1/2} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{16} \right). \quad (1.42)$$

Последнее выражение показывает, что с возрастанием амплитуды колебаний их частота уменьшается (период увеличивается), т.е. нарушается изохронность колебаний.

Приравняем далее нулю второе выражение в круглых скобках в формуле (1.40):

$$-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^2 = 0. \quad (1.43)$$

Считая, что  $\omega \approx \omega_0$ , находим величину малого коэффициента  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0^2}{192}. \quad (1.44)$$

Если положить  $\alpha_0 = 15^\circ = 0,26$  рад, то  $\varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-4}$ , и вклад третьей гармоники в колебания ничтожно мал. Отличие частоты  $\omega$  от частоты гармонических колебаний  $\omega_0$  составит величину

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\alpha_0^2}{16} = 4,2 \cdot 10^{-3}. \quad (1.45)$$

Даже при  $\alpha_0 \sim 1$  рад  $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , а  $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \sim 6\%$ . Таким образом, приближенным решением уравнения (1.36) будет (1.38), где частота  $\omega$  определяется (1.41), а параметр  $\varepsilon$  находится из (1.44).

Заметим, что негармонические колебания могут возникать не только при больших отклонениях от положения равновесия системы. Например, если в разложении возвращающей силы  $F_{\tau}(s)$  по степеням  $s$  отсутствует линейный член, и оно начинается с члена, пропорционального  $s^3$ , то колебания будут ангармоническими при любых, даже сколь угодно малых, отклонениях.

**Свободные колебания в диссипативных системах с вязким трением.** В реальных системах всегда происходит диссипация энергии. Если потери энергии не будут компенсироваться за счет внешних устройств, то колебания с течением времени будут затухать и через какое-то время прекратятся вообще.

Формально затухающие колебания описываются уравнением

$$m\ddot{s} = F_{\tau}(s) + F_{\text{тр}}(\dot{s}), \quad (1.46)$$

которое, в отличие от (1.2), помимо возвращающей силы  $F_{\tau}$ , содержит и силу трения  $F_{\text{тр}}$ . Сила сопротивления движению, вообще говоря, зависит как от направления скорости (например, при сухом трении), так и от величины скорости (при движении в вязкой среде). Если возвращающая сила пропорциональна смещению:  $F_{\tau}(s) = -ks$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности (для пружинного маятника — жесткость пружины), то уравнение (1.46) можно переписать в виде

$$\ddot{s} - \frac{F_{\text{тр}}}{m} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.47)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — собственная частота незатухающих гармонических колебаний.

Вначале мы рассмотрим затухающие колебания в случае, когда на колеблющееся тело действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости:  $F_{\text{тр}} = -\Gamma\dot{s}$ . Такая ситуация может иметь место, например, при колебательном движении тела в воздухе или жидкости, когда число Рейнольдса  $Re \sim 1$  или  $Re < 1$ . Тогда уравнение (1.47) можно записать в виде:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.48)$$

где  $\delta = \frac{\Gamma}{2m}$  — коэффициент, или показатель затухания.

Общая идея решения однородных линейных уравнений типа (1.48) заключается в следующем: в качестве функциональной зависимости  $s(t)$  надо выбрать такую, которая при дифференцировании по времени переходит в саму себя, то есть экспоненту:  $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$ . Подставим ее в уравнение (1.48):

$$s_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) = 0. \quad (1.49)$$

Поскольку  $e^{\lambda t} \neq 0$ , получаем так называемое «характеристическое» уравнение:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (1.50)$$

которое в данном случае (для уравнения второго порядка) имеет два корня

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (1.51)$$

а само уравнение (1.48) – два независимых решения:  $s_1(t) = s_{01} e^{\lambda_1 t}$  и  $s_2(t) = s_{02} e^{\lambda_2 t}$ . В силу линейности уравнения (1.48) сумма любых его решений также является решением, то есть справедлив так называемый «принцип суперпозиции» решений, и общим решением данного уравнения является

$$s(t) = s_{01} e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + s_{02} e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (1.52)$$

Решение содержит две независимые константы  $s_{01}$  и  $s_{02}$ , которые определяются из начальных условий  $s(0)$ ,  $v(0)$ .

В зависимости от соотношения  $\delta$  и  $\omega_0$  возможны три случая.

Если  $\delta < \omega_0$ , то  $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , где  $i \equiv \sqrt{-1}$  — «мнимая» единица. Решение является комплексным<sup>1)</sup>, но, поскольку начальные условия действительные, то с помощью формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad (1.53)$$

нетрудно показать, что общее решение будет действительно и может быть записано в виде:

$$s(t) = s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.54)$$

то есть представляет собой затухающие колебания, частота которых  $\omega$  меньше, чем у собственных незатухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.55)$$

Колебания, описываемые (1.54), не являются гармоническими (рис. 1.14). Под их амплитудой будем понимать величину

$$A(t) = s_0 e^{-\delta t}, \quad (1.56)$$

которая монотонно убывает со временем. «Длительность» колебаний характеризуется временем затухания

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \quad (1.57)$$

Если подставить  $\tau$  в (1.56), то легко видеть, что по истечении времени затухания  $\tau$  амплитуда убывает в  $e$  раз. Количество совершенных системой колебаний за время  $\tau$  равно отношению этого времени к периоду затухающих колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Если затухание в системе мало ( $\delta \ll \omega_0$ ), то период колебаний  $T \approx 2\pi/\omega_0$ , и число этих колебаний велико:

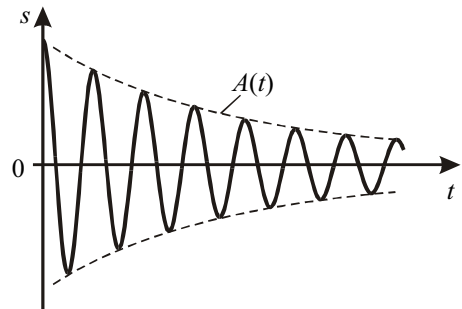


Рис. 1.14.

$$N = \frac{\tau}{T} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\delta} \gg 1. \quad (1.58)$$

<sup>1)</sup> Более подробно метод комплексных амплитуд будет обсуждаться ниже, при рассмотрении вынужденных колебаний.

Экспоненциальный закон убывания амплитуды со временем позволяет ввести безразмерный параметр — логарифмический декремент затухания  $\theta$ , который равен логарифму отношения двух последовательных отклонений в одну и ту же сторону:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (1.59)$$

Из (1.57), (1.58) и (1.59) находим:

$$\theta = \frac{1}{N}. \quad (1.60)$$

Логарифмический декремент затухания можно оценить, если подсчитать число колебаний, совершенных системой за время затухания  $\tau$ , то есть до уменьшения амплитуды колебаний примерно в 3 раза. Чем больше число этих колебаний, тем меньше потери энергии в системе.

Проследим за убыванием энергии, запасенной осциллятором, с течением времени. Используя (1.54), запишем по аналогии с (1.24) и (1.25) выражения для потенциальной и кинетической энергий осциллятора:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} k s_0^2 e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (1.61)$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m \omega^2 s_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.62)$$

Заметим, что, строго говоря, скорость равна

$$v = \dot{s} = -s_0 \delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + s_0 \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.63)$$

Очевидно, что если  $\delta \ll \omega$ , то первым слагаемым в (1.63) можно пренебречь и записать выражение для кинетической энергии в виде (1.62). Суммарная энергия осциллятора убывает со временем:

$$E(t) = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} s_0^2 e^{-2\delta t} [k \sin^2(\omega t + \varphi_0) + m \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (1.64)$$

Примем во внимание, что при  $\delta \ll \omega_0$  частота  $\omega \approx \omega_0$ . Так как  $k = m \omega_0^2$ , то (1.64) окончательно запишется в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (1.65)$$

Полная энергия осциллятора, равная вначале  $E_0 = \frac{1}{2} s_0 m \omega_0^2$ , монотонно убывает со временем по экспоненциальному закону и уменьшается в  $e$  раз за время

$$\tau_E = \frac{1}{2\delta} = \frac{\tau}{2}. \quad (1.66)$$

«Качество» колебательной системы характеризуют безразмерным параметром  $Q$ , называемым добротностью. Добротность пропорциональна отношению запасенной энергии  $E(t)$  к энергии  $\Delta E_T$ , теряемой за период (рис. 1.15):

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{E_0 e^{-2\delta t} - E_0 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}. \quad (1.67)$$

Если число колебаний велико, то  $\delta T = 1/N \ll 1$ . Тогда

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T + \dots)} \approx \frac{\pi}{\theta} = \pi N. \quad (1.68)$$

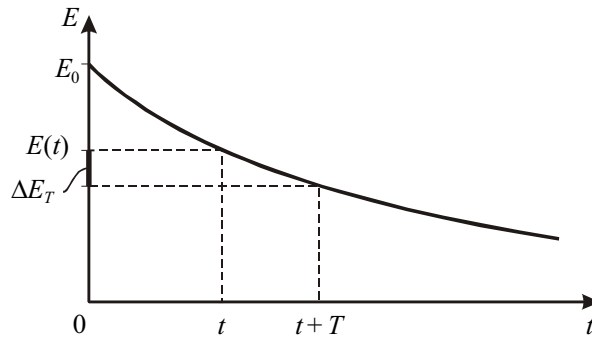


Рис. 1.15.

При экспоненциальном законе убывания энергии со временем добротность  $Q$  оказывается постоянной величиной, которую, как и логарифмический декремент затухания  $\theta$ , можно легко оценить по числу колебаний  $N_Q = \pi N \approx 3N$ , совершенных системой до их полного прекращения (за время  $3\tau$  амплитуда колебаний уменьшается в  $e^3 \approx 20$  раз, то есть колебания практически полностью затухают).

Следует отметить, что добротность не только характеризует затухание колебаний, но и является важной величиной, определяющей параметры вынужденных колебаний, осуществляемых под действием внешней периодической силы (см. далее).

Рассмотрим теперь случай  $\delta = \omega_0$ , когда корни характеристического уравнения кратные:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . При этом частота  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$ , то есть колебания отсутствуют. Общее решение, как нетрудно проверить подстановкой, имеет следующий вид:

$$s(t) = (s_0 + Ct)e^{-\delta t}, \quad (1.69)$$

где независимые постоянные  $s_0$  и  $C$  определяются, как и раньше, начальными условиями. Возможный вид зависимости  $s(t)$  при разных начальных условиях изображен на рисунке 1.16.

Их характерной особенностью является то, что они пересекают ось  $Ot$  не более одного раза, и возврат к равновесному состоянию у системы, выведенной из него, происходит за время порядка нескольких  $\tau$ . Такой режим движения называется критическим.

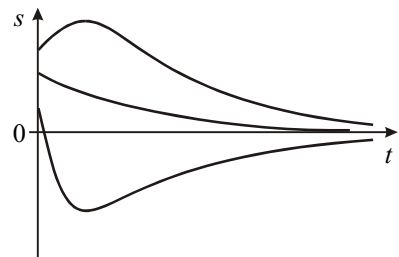


Рис. 1.16.

Наконец, если  $\delta > \omega_0$ , то общее решение (1.52) является суммой двух убывающих с течением времени экспонент, поскольку  $-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$ . Возможный вид зависимостей  $s(t)$  похож на то, что изображено на рис. 1.16, но возврат к равновесию осуществляется медленнее, чем в критическом режиме, поскольку вязкое трение больше. Данный режим движения называется аperiодическим, или закритическим.



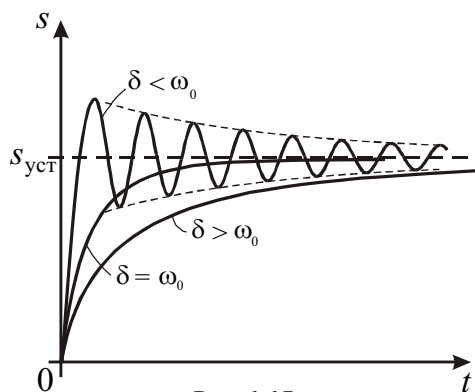


Рис. 1.17.

Отметим, что наиболее быстрое возвращение системы к положению равновесия происходит в критическом режиме, а в колебательном и аperiodическом режимах этот процесс длится дольше. Поэтому, например, гальванометры — приборы для электрических измерений — работают обычно в режиме, близком к критическому, когда процесс установления их показаний, то есть смещения  $s$  рамки к устойчивому отклонению  $s_{уст}$ , имеет наименьшую длительность (см. рис. 1.17).

Иллюстрацией к рассмотренным закономерностям затухающих колебаний являются фазовые портреты, построенные для колебательного ( $\delta < \omega_0$ ), а также критического и аperiodического ( $\delta \geq \omega_0$ ) режимов (рис. 1.18).

При  $\delta < \omega_0$  фазовый портрет представляет собой совокупность спиралей, стягивающихся в особую точку типа «фокус». На рис. 1.18 изображена одна из таких спиралей. За каждый оборот радиус спирали уменьшается в  $e^\theta$  раз. Для критического и аperiodического режимов  $\delta \geq \omega_0$  фазовые траектории сходятся в особую точку типа «узел».

**Затухание колебаний в системах с сухим трением.** На практике мы часто имеем дело с системами, в которых главную роль играет сила сухого трения, не зависящая от скорости. Типичный пример — пружинный маятник, груз которого скользит по шероховатой горизонтальной поверхности, или колебательная система у стрелочных измерительных приборов, основу которой составляет вращающаяся рамка, испытываю-

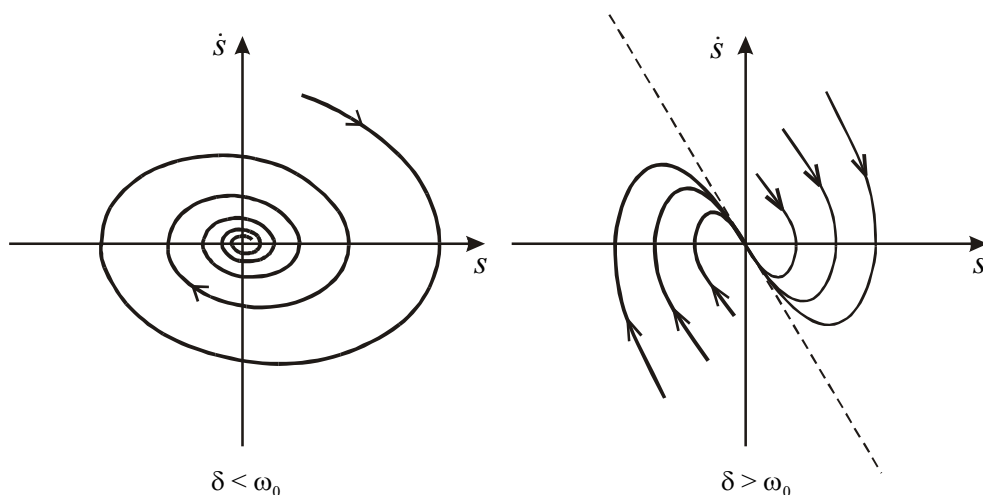


Рис. 1.18.

щая действие сил сухого трения в оси вращения. Хотя сила  $F_{\text{тр}}$  сухого трения и не меняется по величине, тем не менее она меняет свое направление при изменении направления скорости. В силу этого необходимо записать два уравнения

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = -\frac{F_{\text{тр}}}{m} \text{ для } \dot{s} > 0; \tag{1.70}$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = +\frac{F_{\text{тр}}}{m} \text{ для } \dot{s} < 0. \tag{1.71}$$

Если в (1.70) использовать переменную  $s_1 = s + \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ , а в (1.71) —  $s_2 = s - \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ , то оба уравнения примут одинаковый вид:

$$\ddot{s}_{1,2} + \omega_0^2 s_{1,2} = 0. \tag{1.72}$$

Фазовые траектории, соответствующие этому уравнению, представляют собой эллипсы с центрами, имеющими координаты  $s_- = -\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$  ( $s_1 = 0$ ) для верхней полуплоскости  $\dot{s} > 0$ , и  $s_+ = +\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$  ( $s_2 = 0$ ) для нижней полуплоскости  $\dot{s} < 0$ . Чтобы нарисовать фазовый портрет, необходимо сомкнуть фазовые траектории верхней и нижней полуплоскостей на их общей границе  $\dot{s} = 0$ .

Из построенного на рис. 1.19 фазового портрета видно, что движение прекращается после конечного числа колебаний. Чрезвычайно важно, что система не обязательно придет к состоянию  $s = 0$ , а может остановиться, попав в зону застоя  $s_+ - s_-$ . Зона застоя тем больше, чем больше сила  $F_{\text{тр}}$ . Из фазового портрета легко определить убывание амплитуды колебаний за один период. Это изменение амплитуды в два раза превышает протяженность зоны застоя:

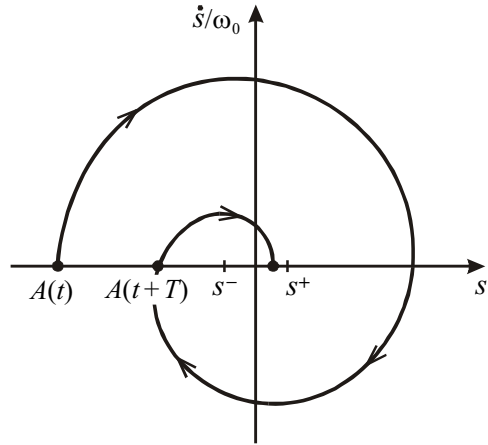


Рис. 1.19.

$$\Delta A = A(t) - A(t+T) = 2(s_+ - s_-) = \frac{4F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}. \tag{1.73}$$

Таким образом, в отличие от экспоненциального закона (1.56), характерного для вязкого трения, амплитуда колебаний убывает со временем линейно.

На рис. 1.20 показана зависимость от времени смещения колеблющегося тела при сухом трении. Число совершаемых системой колебаний до их прекращения зависит от начальной амплитуды  $A_0$ , и его можно оценить по формуле:

$$N = \frac{A_0}{\Delta A} = \frac{A_0}{2(s_+ - s_-)}. \tag{1.74}$$

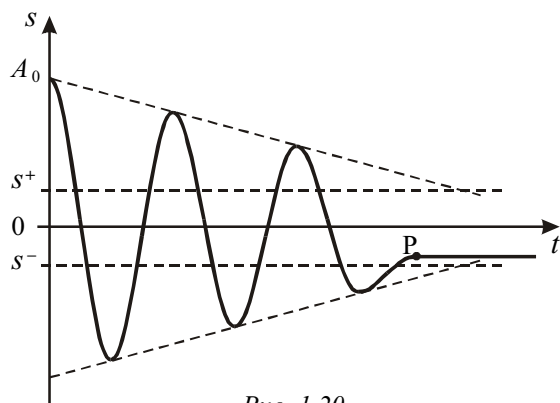


Рис. 1.20.

При этом в реальных условиях колеблющаяся масса останавливается в случайном положении внутри этой зоны (в точке P на рис. 1.20).

Оно зависит от начальной амплитуды  $A_0$ . Частота колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  остается такой же, как и при отсутствии силы трения (см. (1.72)).

Колебания продолжают-ся до тех пор, пока их амплитуда остается больше половины ширины зоны застоя  $s_+ - s_-$ .

## ЛЕКЦИЯ 2

*Вынужденные колебания под действием гармонической силы. Режимы медленных, быстрых и резонансных колебаний. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Баллистический режим колебаний. Установление колебаний. Характеристики различных колебательных систем. Параметрические колебания. Автоколебания.*

В предыдущей лекции мы рассмотрели свободные затухающие колебания, возникающие при начальном кратковременном воздействии внешних сил на колебательную систему. Между тем, в повседневной практике мы сталкиваемся с незатухающими колебаниями, для поддержания которых необходимо подводить энергию к колебательной системе, чтобы компенсировать ее энергетические потери.

Одним из распространенных способов поддержания незатухающих колебаний является непрерывное воздействие на колеблющуюся массу периодической силы (вынуждающей силы)

$$F(t) = F(t + T), \quad (2.1)$$

меняющейся во времени  $t$ , вообще говоря, произвольно в пределах периода длительностью  $T$ . Если, например, такую силу приложить к колеблющейся массе описанного выше пружинного маятника (рис. 2.1), то уравнение ее движения примет вид:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - ks + F(t). \quad (2.2)$$

Опыт показывает, что если сила внезапно начинает действовать (например, в момент времени  $t = 0$ ), то маятник начнет постепенно раскачиваться, и спустя какое-то время его колебания установятся. По порядку величины время установления таких вынужденных колебаний будет совпадать с временем затухания  $\tau = \delta^{-1} = 2m/\Gamma$ . Далее мы сконцентрируем внимание именно на установившихся колебаниях. Естественно, что параметры таких колебаний будут зависеть от конкретного вида силы  $F(t)$ . Из математики хорошо известно, что любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье:

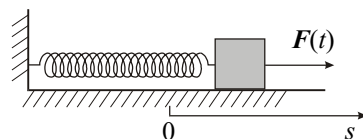


Рис. 2.1.

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \psi_n\right) \quad (2.3)$$

Физический смысл этого представления состоит в том, что периодическое воздействие  $F(t)$  эквивалентно одновременному воздействию постоянной силы  $F_{00}$  и набора гармонических сил с соответствующими амплитудами  $F_{0n}$ , начальными фазами  $\psi_n$  и частотами  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n = n\omega$ , кратными низшей (основной) частоте  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Чтобы получить полную картину вынужденных колебаний под действием силы (2.3), необходимо принять во внимание линейность уравнения (2.2). Это позволяет представить его решение  $s(t)$  как сумму гармонических колебаний:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \phi_n\right), \quad (2.4)$$

происходящих с установившимися амплитудами  $s_{0n}$  и фазами  $\varphi_n$  на частотах  $\omega_n$  соответствующих гармоник вынуждающей силы (2.3). Каждое слагаемое в (2.4) может рассматриваться как вынужденное гармоническое колебание, происходящее под действием внешней гармонической силы с амплитудой  $F_{0n}$  и частотой  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$ .

Амплитуды  $s_{0n}$  и фазы  $\varphi_n$  требуют определения, и мы перейдем сейчас к их нахождению.

**Вынужденные колебания под действием гармонической силы.** Пусть внешняя сила меняется по гармоническому закону

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.2) в этом случае принимает вид:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - ks + F_0 \sin \omega t. \quad (2.6)$$

Под действием этой силы маятник в установившемся режиме будет совершать гармонические колебания

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.7)$$

Как показывает опыт, амплитуда  $s_0$  и начальная фаза  $\varphi_0$  (т.е. сдвиг фазы между смещением  $s$  и силой  $F$ ) установившихся колебаний зависят не только от амплитуды силы  $F_0$  (что очевидно из уравнения (2.6)), но и от того, насколько частота вынуждающей силы  $\omega$  отличается от собственной частоты колебаний маятника  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Наиболее сильно маятник будет раскачиваться, когда эти частоты практически совпадают:  $\omega \approx \omega_0$ .

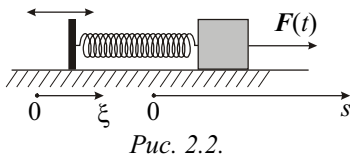


Рис. 2.2.

Прежде чем приступить к нахождению  $s_0$  и  $\varphi_0$ , заметим, что для механических колебательных систем не так просто с технической точки зрения осуществить воздействие гармонической силы непосредственно на движущуюся массу. Гораздо проще это сделать для

электрических и оптических колебательных систем, например, для колебательного контура, подключенного к внешнему источнику переменного напряжения. Легко, однако, видеть, что можно поддерживать вынужденные колебания маятника, изображенного на рис. 2.1, иным способом, не прикладывая непосредственно внешнюю силу  $F(t)$  к массе  $m$ . Достаточно лишь эту силу приложить к левому концу свободной пружины так, чтобы этот конец двигался по гармоническому закону  $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$  (рис. 2.2). Тогда удлинение пружины составит величину  $s - \xi$ , а сила упругости, приложенная к массе  $m$ , будет равна  $-k(s - \xi)$ . Поэтому уравнение движения массы  $m$  запишется в виде:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - k(s - \xi). \quad (2.8)$$

Если принять во внимание, что сила упругости пружины в отсутствие смещения груза ( $s = 0$ ) равна

$$F(t) = k\xi(t) = k\xi_0 \sin \omega t, \quad (2.9)$$

то уравнение (2.8) полностью эквивалентно уравнению (2.6). Сила (2.9) выполняет роль внешней гармонической силы в классической схеме, изображенной на рис. 2.1. Эта сила

легко может быть визуализирована, поскольку ее величина и направление однозначно определяется смещением подвижного левого конца пружины. Это, в свою очередь, дает возможность наглядно продемонстрировать фазовые соотношения между силой  $F(t)$  (или смещением  $\xi(t)$ ) и смещением  $s(t)$  колеблющейся массы.

Перепишем уравнение (2.8) следующим образом:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (2.10)$$

где  $F_0 = k\xi_0$ .

Решение этого уравнения будем искать в виде гармонического колебания (2.7), где амплитуда  $s_0$  и фаза  $\varphi_0$  могут быть определены, если подставить (2.7) в (2.10). Мы сделаем это несколько позднее, а пока рассмотрим три важных режима вынужденных колебаний.

**Медленные колебания.** Если частота вынуждающей силы  $\omega$  значительно меньше  $\omega_0$ , то скорость  $\dot{s}$  и ускорение  $\ddot{s}$  колеблющейся массы будут очень малыми. Поэтому можно пренебречь первыми двумя членами в левой части уравнения (2.10) и записать его в приближенном виде:

$$\omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (2.11)$$

Его решение очевидно:

$$s(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{k} \sin \omega t. \quad (2.12)$$

В этом режиме смещение груза пропорционально внешней силе и не зависит от величины его массы  $m$ . Решение (2.12) является, по существу, математическим выражением закона Гука для статической деформации пружины. Поэтому этот режим можно назвать квазистатическим (почти статическим). Амплитуда колебаний в соответствии с этим законом равна  $s_0 = F_0/k$ , а смещение  $s(t)$  изменяется в фазе с внешней силой.

В схеме, изображенной на рис. 2.2, это эквивалентно тому, что смещение массы  $m$  практически повторяет смещение левого конца пружины:

$$s(t) = \frac{F_0}{k} \sin \omega t = \frac{k\xi_0}{k} \sin \omega t = \xi(t), \quad (2.13)$$

поскольку  $F_0 = k\xi_0$ . Это и не удивительно, т.к. для движения массы  $m$  с пренебрежимо малым ускорением  $\ddot{s}$  не требуется больших деформаций пружины:  $s(t) - \xi(t) \approx 0$ .

**Быстрые колебания.** Если  $\omega \gg \omega_0$ , то период вынужденных колебаний  $T = 2\pi/\omega$  мал. Это означает, что масса  $m$  испытывает действие лишь внешней силы  $F(t)$ , а сила упругости  $ks$  и вязкого трения  $\Gamma\dot{s}$  малы. Действительно, за половину короткого периода колебаний, когда масса движется в одном направлении, она не успевает набрать как заметную скорость  $\dot{s}$ , так и сместиться на достаточную величину  $s$  от положения равновесия. Поэтому в уравнении (2.10) можно опустить члены, содержащие  $s$  и  $\dot{s}$ , и записать его в другом приближенном виде:

$$\ddot{s} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (2.14)$$

Интегрируя это уравнение два раза, находим закон движения колеблющейся массы:

$$s(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что смещение по отношению к внешней силе запаздывает по фазе на  $\pi$  ( $\varphi_0 = -\pi$ ), а амплитуда, как мы и предполагали, убывает с увеличением частоты.

В схеме, изображенной на рис. 2.2, в таком режиме левый подвижный конец пружины и масса  $m$  всегда движутся в противоположных направлениях:

$$s(t) = -\frac{k\xi_0}{m\omega^2} \sin \omega t = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \xi(t). \quad (2.16)$$

По абсолютной величине смещение массы  $m$  в  $\omega^2 / \omega_0^2 \gg 1$  раз меньше смещения левого конца пружины, т.е. практически не будет заметным.

**Резонансный режим.** Если частота  $\omega \approx \omega_0$ , то вынужденные колебания происходят на собственной частоте колебаний. Это означает, что

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (2.17)$$

Следовательно, уравнение (2.10) при учете (2.17) примет вид:

$$2\delta\dot{s} = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t. \quad (2.18)$$

Интегрируя его, получаем выражение для смещения:

$$s(t) = \frac{F_0}{2\delta m \omega_0} \sin(\omega_0 t - \pi/2). \quad (2.19)$$

Последнее выражение удобно переписать в виде

$$s(t) = \frac{F_0}{k} Q \sin(\omega_0 t - \pi/2), \quad (2.20)$$

где  $Q = \frac{\pi}{\delta T}$  — добротность маятника. Если добротность  $Q \gg 1$ , то амплитуда колебаний может во много раз превышать амплитуду медленных квазистатических колебаний (сравните с (2.12)). Поэтому такой режим называется резонансным.

Велики также амплитуды скорости и ускорения. Поскольку скорость  $\dot{s}$ , как следует из (2.18), изменяется в фазе с внешней силой, то с энергетической точки зрения это весьма благоприятно для «подкачки» энергии в колебательную систему. Работа внешней силы за период колебаний равна:

$$A = \int_0^T F(t) \cdot \dot{s}(t) dt = \frac{F_0^2}{2\delta m} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{F_0^2 T}{4\delta m} \quad (2.21)$$

и значительно превосходит работу этой силы в обоих рассмотренных выше режимах. Такая большая работа необходима для компенсации значительных потерь из-за силы вязкого трения.

Для большей наглядности последнего результата обратимся к схеме с подвижным левым концом пружины, где, как это видно из решения (2.20),

$$s(t) = \xi_0 Q \sin(\omega_0 t - \pi/2). \quad (2.22)$$

Амплитуда смещения правого конца пружины в  $Q$  раз превосходит амплитуду смещения левого конца. При прохождении массой  $m$  положения равновесия  $s = 0$ , когда ее скорость максимальна, левый конец пружины смещен на максимальную величину  $\xi_0$  в направлении скорости движущейся массы. В этот момент времени мощность силы упругости пружины имеет максимально возможное положительное значение при заданной величине  $\xi_0$ . В последующие моменты времени эта мощность будет оставаться положительной, что, естественно, обеспечивает наиболее эффективную передачу энергии движущемуся с трением телу.

Если сила (2.5) меняется с произвольной частотой  $\omega$ , то амплитуда  $s_0$  и фаза  $\varphi_0$ , входящие в решение (2.7), могут быть найдены, как было сказано выше, подстановкой решения (2.7) в уравнение (2.10). Такую подстановку можно осуществить наиболее просто, если воспользоваться методом комплексных амплитуд, широко применяемым в различных областях физики: теории колебаний, теории волн, электромагнетизме, оптике и др.

**Метод комплексных амплитуд.** Если в формуле Эйлера (1.53):  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  под  $\varphi$  понимать фазу гармонических колебаний

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (2.23)$$

то каждому такому колебанию  $s(t)$  можно поставить в соответствие комплексное число

$$\hat{s}(t) = s_0 e^{i\varphi} = s_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = s_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + i s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.24)$$

Из (2.24) видно, что решение (2.7) является мнимой частью комплексного выражения:

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \text{Im} \hat{s}_0 e^{i\omega t}, \quad (2.25)$$

где  $\hat{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$  — комплексная амплитуда, которая несет информацию об амплитуде  $s_0$  и начальной фазе  $\varphi_0$  колебаний. Надо отметить, что метод комплексных амплитуд является, фактически, аналитическим выражением метода векторных диаграмм. Если в последнем методе колебание с частотой  $\omega$  полностью задается вектором  $s_0$ , то в методе комплексных амплитуд колебание задается числом  $\hat{s}_0$  на комплексной плоскости. Поскольку с комплексными числами удобно и просто производить математические операции, то мы используем это обстоятельство для получения решения уравнения вынужденных колебаний (2.10).

**Вынужденные колебания с произвольной частотой.** Будем искать решение уравнения (2.10) в комплексном виде:

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_0 e^{i\omega t}. \quad (2.26)$$

Вынуждающую силу в правой части (2.10) также запишем в комплексной форме:

$$\hat{F}(t) = \hat{F}_0 e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

где  $\hat{F}_0 = F_0$  — действительное число, поскольку для простоты мы положили, что начальная фаза в выражении для силы (2.5) равна нулю.



Тогда уравнение (2.10) можно записать в виде:

$$\ddot{\hat{s}} + 2\delta\dot{\hat{s}} + \omega_0^2\hat{s} = \frac{\hat{F}_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (2.28)$$

Комплексную амплитуду  $\hat{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$  легко находим подстановкой (2.26) в (2.28):

$$(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2)\hat{s}_0 e^{i\omega t} = \frac{\hat{F}_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (2.29)$$

Отсюда получаем:

$$\hat{s}_0 = \frac{\hat{F}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)}. \quad (2.30)$$

Из (2.30) нетрудно найти амплитуду колебаний  $s_0 = |\hat{s}_0|$ :

$$s_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (2.31)$$

и фазу  $\varphi_0 = \arg \hat{s}_0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\operatorname{Im} \hat{s}_0}{\operatorname{Re} \hat{s}_0} = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (2.32)$$

полностью определяющие вынужденные колебания (2.25).

Зависимость амплитуды  $s_0$  от частоты  $\omega$ , задаваемая формулой (2.31), называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а зависимость  $\varphi_0(\omega)$ , описываемая формулой (2.32), называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ). На рис. 2.3 изображена АЧХ, которая отображает нарастание амплитуды  $s_0$  при приближении  $\omega$  к  $\omega_0$ . Это явление получило название резонанса смещений. Интересно, что максимальное значение амплитуды, в  $Q$  раз превосходящее статическое смещение  $F_0/k$ , достигается на частоте

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (2.33)$$

которая несколько меньше как собственной частоты  $\omega_0$ , так и частоты затухающих колебаний  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Для практических целей для частот  $\omega$ , лежащих вблизи частоты  $\omega_0$ , формула (2.31) может быть значительно упрощена. Так, можно положить

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 \approx (\omega_0 - \omega)^2 \cdot 4\omega_0^2; \\ 4\delta^2\omega^2 &\approx 4\delta^2\omega_0^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

С учетом приближений (2.34) формула (2.31) примет вид:

$$s_0(\omega) = \frac{F_0}{k} Q \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\delta}\right)^2 + 1}}. \quad (2.35)$$

В физике безразмерную функцию

$$L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\delta}\right)^2 + 1}} \quad (2.36)$$

называют лоренцевой, а график этой функции называют лоренцевым контуром. Ширину  $\Delta\omega$  этого контура, определяющую остроту резонанса, находят из условия убывания

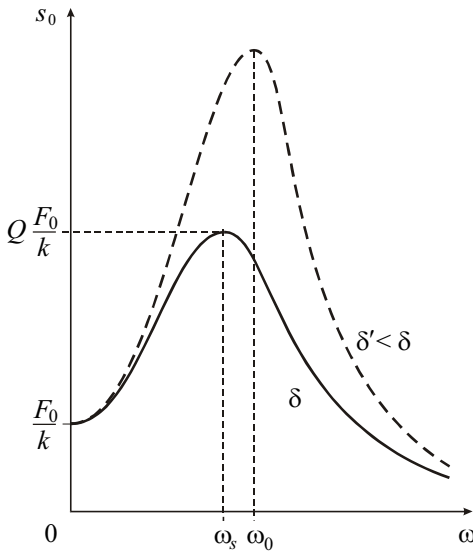


Рис. 2.3.

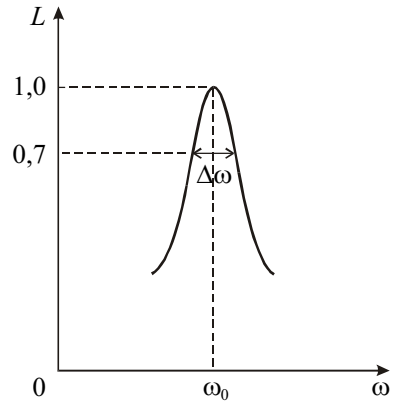


Рис. 2.4.

вдвое энергии колебательной системы, пропорциональной квадрату амплитуды  $s_0(\omega)$  в (2.35), что эквивалентно приближенному соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega/2}{\delta}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7, \tag{2.37}$$

которое поясняется рисунком 2.4. При этом условии  $\frac{\Delta\omega}{2} = \delta$ , т.е.  $\Delta\omega = 2\delta$ . Ширина лоренцева контура характеризует полосу пропускания колебательной системы, т.е. такую область частот внешней силы, для которых система эффективно откликается на гармоническое внешнее воздействие. Легко видеть, что добротность системы равна

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \tag{2.38}$$

т.е. обратно пропорциональна полосе пропускания.

С уменьшением коэффициента  $\delta$  АЧХ меняет свою форму, как это изображено пунктиром на рис. 2.3 для  $\delta' < \delta$ . Полоса пропускания  $\Delta\omega$  уменьшается, добротность  $Q'$  возрастает, и резонанс становится более острым.

Фазо-частотная характеристика для двух различных коэффициентов затухания изображена на рис. 2.5. Физическое содержание зависимости  $\varphi_0(\omega)$  мы подробно обсудили для трех различных режимов вынужденных колебаний. Отметим лишь, что с уменьшением затухания  $\delta$  кривая  $\varphi_0(\omega)$  становится более «чувствительной» к изменению частоты вблизи резонанса.

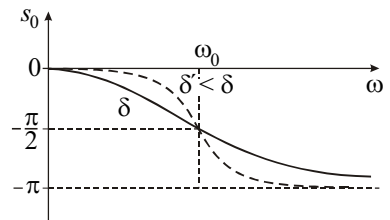


Рис. 2.5.

Наряду с резонансом смещений можно говорить о резонансе скоростей  $\dot{s}$  и резонансе ускорений  $\ddot{s}$ .

Скорость колеблющейся массы равна:

$$\dot{s} = s_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (2.39)$$

а ее ускорение:

$$\ddot{s} = s_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi), \quad (2.40)$$

т.е. амплитудно-частотная характеристика для скорости получается умножением АЧХ (2.31) на  $\omega$ , а для ускорения — на  $\omega^2$ :

$$v_0 = s_0 \omega = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}},$$

$$w_0 = s_0 \omega^2 = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + 4\frac{\delta^2}{\omega^2}}}.$$

На рис. 2.6 изображены частотные зависимости амплитуд скорости  $v_0 = s_0 \omega$  и ускорения  $w_0 = s_0 \omega^2$ .

Характерно, что резонанс скорости происходит на частоте  $\omega_s = \omega_0$ , а резонанс ускорения — при  $\omega_{s'} > \omega_0$ . Отметим, что все резонансные частоты связаны между собой:

$$\omega_s \cdot \omega_{s'} = \omega_0^2. \quad (2.41)$$

Отметим также, что по причинам, рассмотренным ранее, в области низких частот малы как ускорение, так и скорость. В области высоких частот ускорение конечно ( $s_0 \omega^2 \rightarrow F_0/m$ ) и обеспечивается лишь внешней силой. Однако скорость по-прежнему незначительна, поскольку тело не успевает разогнаться.

Не представляет труда нарисовать самостоятельно фазо-частотные характеристики для скорости и для ускорения, пользуясь формулами (2.39) и (2.40), поскольку они получаются простым сдвигом ФЧХ для смещения (2.32), изображенной на рис. 2.5, вверх соответственно на  $\pi/2$  или на  $\pi$ .

В заключение рассмотрим вопрос о подводе энергии к осциллятору при произвольной частоте вынуждающей силы. Средняя за период мощность этой силы равна

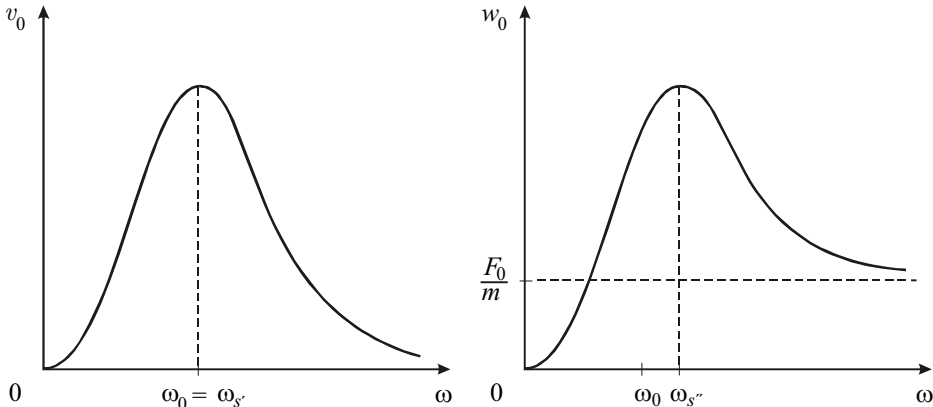


Рис. 2.6.

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{s}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \sin \omega t \cdot v_0 \sin \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) dt = \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t + \psi_0) dt =$$

$$= \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin^2 \omega t \cos \psi_0 dt + \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t \sin \psi_0 dt = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \psi_0,$$

где  $\psi_0 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  — сдвиг фаз между скоростью и силой. Мы видим, что максимум подводимой к осциллятору мощности достигается на частоте  $\omega_0$ , поскольку при этом максимальны и амплитуда скорости  $v_0$ , и  $\cos \psi_0$  ( $\psi_0 = 0$ ). При других частотах вынуждающей силы эта мощность быстро уменьшается и стремится к нулю, как при  $\omega \rightarrow 0$ , так и при  $\omega \rightarrow \infty$ .

**Баллистический режим колебаний.** Рассмотрим колебания системы, к которой приложена произвольная сила  $F(t)$ , действующая в течение промежутка времени  $\Delta t$ , значительно меньшего периода собственных колебаний:  $\Delta t \ll T$ . Отклик системы на такое воздействие будет пропорционален импульсу действующей силы:

$$p = \frac{1}{T} \int_0^{\Delta t} F(t) dt. \quad (2.42)$$

В самом деле, при кратковременном воздействии (в течение времени  $\Delta t$ ) маятник не успевает заметно сместиться из положения равновесия, однако будет обладать ускорением

$$\ddot{s} = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.43)$$

При записи (2.43) мы пренебрегли силой вязкого трения. По окончании действия силы маятник приобретет скорость

$$v_0 = \dot{s} = \frac{1}{T} \int_0^{\Delta t} \ddot{s} dt = \frac{p}{m}, \quad (2.44)$$

пропорциональную импульсу силы.

Далее маятник будет совершать собственные гармонические колебания с амплитудой

$$s_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{p}{m\omega_0}. \quad (2.45)$$

Если параметры  $m$  и  $\omega_0$  известны, то можно определить  $p$ , измеряя амплитуду первого колебания после воздействия.

В качестве примера рассмотрим процедуру измерения заряда, протекающего по электрической цепи, с использованием баллистического гальванометра. Этот гальванометр содержит рамку, которая может совершать крутильные колебания. Рамка имеет увеличенный (по сравнению с обычным гальванометром) момент инерции, что увеличивает период ее собственных колебаний до нескольких секунд. Т.к. рамка находится в магнитном поле постоянного магнита, то при протекании через нее электрического тока на рамку будет действовать момент сил, пропорциональный току. При протекании кратковременного тока рамка приобретает угловую скорость и затем за четверть периода

колебаний отклоняется на некоторый максимальный угол, который пропорционален интегралу от протекшего через рамку тока, т.е. величине протекшего заряда.

**Установление колебаний.** Мы уже отмечали, что если приложить к покоящемуся маятнику гармоническую силу в момент времени  $t = 0$ , то маятник начнет постепенно раскачиваться, как это качественно изображено на рис. 2.7а. Установление колебаний связано с тем фактом, что наряду с вынужденными колебаниями на частоте  $\omega$  будут возбуждены и собственные колебания на частоте  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , которые, конечно, будут затухать.

Из математики известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения (2.10) при  $\delta < \omega_0$  имеет вид:

$$s(t) = s_{0c} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_c) + s_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.50)$$

представляющий собой суперпозицию собственных затухающих колебаний на частоте  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  и незатухающих вынужденных колебаний на частоте  $\omega$ . Из (2.50) видно, что колебания установятся лишь тогда, когда затухнут собственные колебания. Это произойдет по истечении времени

$$\Delta t_{\text{уст}} \sim \tau = \frac{1}{\delta}. \quad (2.51)$$

За это время в систему «закачивается» энергия, поскольку до установления колебаний работа внешней силы превышает работу сил трения. В установившемся режиме имеет место баланс поступающей и расходуемой энергий.

В частности, если  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , то (2.50) при  $s(0) = 0$ ,  $\dot{s}(0) = 0$  и  $\delta \ll \omega_0$ , как нетрудно показать, имеет вид

$$s(t) = s_0 (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t - \pi/2), \quad (2.52)$$

поскольку при этих условиях  $s_{0c} = s_0$ ,  $\varphi_c = -\varphi_0 \approx \frac{\pi}{2}$ .

Отметим, что формула (2.51) определяет лишь порядок величины (временной масштаб)  $\Delta t_{\text{уст}}$ . Для практических целей время установления (равно как и время затухания) колебаний принимают равным  $\Delta t_{\text{уст}} = (3 \div 5)\tau$ .

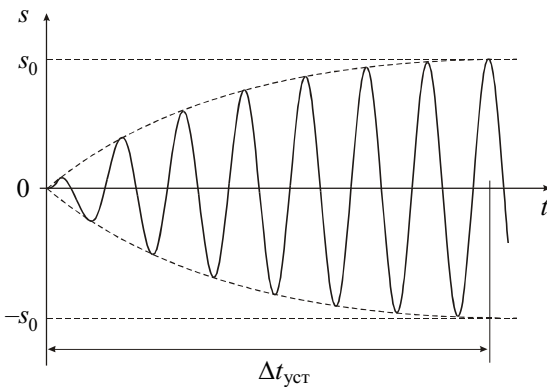


Рис. 2.7а.

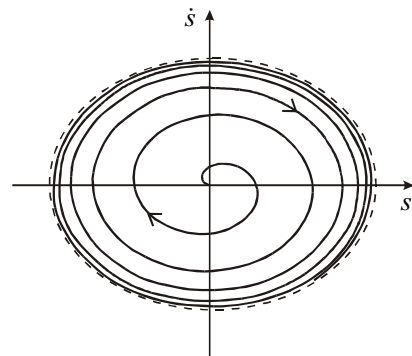


Рис. 2.7б.

На фазовой плоскости (рис. 2.7б) фазовая траектория будет постепенно «раскручиваться» из начала координат и стремиться к предельному циклу — эллипсу, изображенному на рисунке пунктирной линией.

**Характеристики различных колебательных систем (осцилляторов).** Интересно сопоставить основные характеристики различных колебательных систем (иногда их для краткости называют осцилляторами). Примерами таких осцилляторов могут быть механические (рассмотренные выше), электрические (известные из школьного курса физики, например, колебательный контур), оптические (например, электрон в атоме) и другие системы.

Вначале обратимся к характеристикам наиболее распространенного осциллятора — маятника, представляющего собой тело, подвешенное на нити.

Маятник является одним из древнейших физических приборов. С помощью крутильных маятников были открыты законы гравитационного и электрического взаимодействий, измерено давление света, выполнено множество других физических экспериментов. В последнее время предложен и реализуется ряд новых экспериментов для изучения фундаментальных свойств материи, в которых очень малые силы измеряются с помощью крутильных маятников. Чувствительность таких экспериментов зависит от того, насколько ослаблены сейсмические возмущения, действующие на маятник, а также от стабильности его параметров, например, упругих свойств нити подвеса. Но даже если устранены все внешние возмущающие воздействия, остается один принципиальный источник флуктуаций его амплитуды и фазы колебаний. Это хаотическое тепловое движение молекул в нити подвеса и подвешенном теле. Действующая на него флуктуационная сила зависит от температуры и от добротности маятника. Чем выше добротность маятника, тем медленнее затухают его колебания и диссипирует его энергия, превращаясь в тепло, т.е. хаотическое движение молекул. Это означает, что ослабевает и обратный процесс раскачки маятника хаотическим движением молекул, т.е. уменьшается флуктуационная сила, действующая на маятник. Для того, чтобы уменьшить затухание, тело и нить подвеса изготавливают из высококачественного плавленого кварца — материала с низкими потерями упругой энергии, а также принимают специальные меры для исключения других источников диссипации энергии. В результате добротность крутильных маятников достигает величины  $\sim 10^7$ .

В настоящее время в нескольких странах строятся лазерные гравитационные антенны для регистрации гравитационного излучения от космических объектов. Принцип действия антенны основан на том, что гравитационная волна действует на свободные массы, помещенные в разные точки пространства, изменяя расстояние между ними. Это изменение пропорционально интенсивности волны и расстоянию между массами. По этой причине в гравитационных антеннах пробные массы располагают в нескольких километрах друг от друга в специальных вакуумных камерах, а расстояние между ними измеряют уникальным лазерным интерферометром. Каждая пробная масса подвешива-

---

ется на тонких нитях, образуя маятник качания. С массами связывают два зеркала, отражающие лазерный луч, распространяющийся вдоль прямой, соединяющей эти массы. По сдвигу интерференционной картины, даваемой такой сложной оптической системой, можно «почувствовать» взаимное смещение масс на величину порядка  $10^{-17}$  см, что на 7 порядков меньше размеров атома! Чувствительность гравитационной антенны ограничена тепловыми флуктуациями колебаний такого маятника, а значит, также определяется его добротностью. В отличие от крутильных, добротность маятников качания зависит не только от потерь в упругом элементе — нити подвеса, но и от ее натяжения. За счет этого эффекта можно значительно увеличить добротность маятника качания. Так, добротность маятников качания, целиком изготовленных из плавленого кварца, может превышать  $10^8$ , т.е. время затухания их колебаний достигает нескольких лет. Конечно, при столь малой диссипации энергии маятника на его добротность влияют весьма слабые внешние воздействия, например, электрические и магнитные поля, или частицы пыли, осевшие на нити подвеса, и т. д.

При таких высоких значениях добротности и соответствующем подавлении сейсмических возмущений проявляются квантовые свойства маятника. В этом случае поведение вполне макроскопического объекта будет определяться принципом неопределенности Гейзенберга. Правда, необходимые условия реализуются пока для малых временных интервалов (около  $10^{-3}$  с), и для наблюдения квантовых особенностей поведения маятников требуются очень чувствительные регистрирующие устройства, но именно такие маятники, обладающие предельно высокой добротностью, предполагается использовать в будущих гравитационных антеннах.

Камертон, служащий для настройки музыкальных инструментов, также является высокодобротным осциллятором. Звук, издаваемый вибрирующими ножками камертона, затихает за достаточно длительное время по сравнению с периодом их колебаний. Если, например, собственная частота камертона лежит в диапазоне  $\nu = 300 \div 400$  Гц, а продолжительность звучания (весьма грубо) составляет время порядка  $\tau \sim 10$  с, то камертон совершит  $\nu\tau \sim 3000 \div 4000$  колебаний. Это означает, что его добротность по порядку величины равна  $Q \sim 10^4$ .

Как это ни покажется парадоксальным, электрический колебательный контур является менее добротной системой, хотя частота его собственных колебаний имеет порядок величины  $\nu \sim (10^5 \div 10^8)$  Гц. Добротность контура ограничена, главным образом, омическими потерями и имеет порядок величины  $Q \sim 10^2$ . Это, в свою очередь, означает, что полоса пропускания  $\Delta\nu = Q^{-1} \cdot \nu$ , введенная ранее при рассмотрении вынужденных колебаний, равна  $\Delta\nu \sim (10^3 \div 10^6)$  Гц.

Если частота радиопередающей станции  $\nu_c$  высока ( $\nu_c > 10^6$  Гц), то ее преобразовывают в радиоприемных устройствах до низкой (называемой промежуточной) частоты  $\nu_{\text{п}} \sim 10^5$  Гц. Тогда колебательный контур радиоприемника будет иметь очень малую полосу пропускания  $\Delta\nu \sim Q \cdot \nu_{\text{п}} \sim 5 \cdot 10^3$  Гц. Это значит, что если частоты двух станций  $\nu_{1c}$

и  $v_{2c}$  соответственно различаются более, чем на величину полосы пропускания ( $|v_{1c} - v_{2c}| > \Delta v$ ), то, перестраивая собственную частоту колебательного контура приемника, можно по отдельности настроиться на каждую из этих передающих станций.

Оптический электрон в атоме, осуществляя переходы с одной орбиты на другую, в соответствии с постулатами Бора излучает квант света с энергией  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ . С классической точки зрения это можно интерпретировать таким образом, что электрон совершает колебания на этой частоте  $\omega$ , т.е. является оптическим осциллятором. Поскольку электрон теряет энергию на излучение, то амплитуда его колебаний должна затухать в течение некоторого характерного времени  $\tau$ . Для уединенного атома (не взаимодействующего с соседними атомами) это время определяется зарядом и массой электрона и зависит от частоты  $\omega$ . Однако для всех атомов оно имеет один и тот же порядок величины:  $\tau \sim 10^{-8} \div 10^{-9}$  с. Учитывая, что в видимом оптическом диапазоне период колебаний  $T = 2\pi/\omega \sim 10^{-15}$  с, легко подсчитать число колебаний до их затухания. Оно имеет порядок величины  $\frac{\tau}{T} \sim 10^6 \div 10^7$ . Поэтому добротность оптического осциллятора ( $Q \sim 10^7$ ), будучи высокой, все же уступает добротности прецизионных кварцевых маятников.

**Параметрические колебания.** В повседневной жизни мы сталкиваемся с незатухающими колебаниями, для поддержания которых требуется периодически менять какой-либо параметр колебательной системы. Одним из ярких примеров являются колебания качелей. Хорошо известно, что можно поддерживать колебания длительное время, если быстро присесть в момент наибольшего отклонения качелей и также быстро встать при прохождении положения равновесия. Благодаря этому параметр физического маятника (качелей) — расстояние  $a$  между осью вращения и центром масс — меняется скачкообразно на величину  $\pm\Delta a$  ( $\Delta a \ll a$ ). Величина  $\Delta a$  должна быть такой, чтобы обеспечить баланс энергии системы: потери энергии маятника за период должны компенсироваться за счет совершения работы, осуществляемой при приседании и вставании.

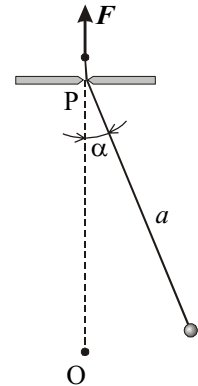


Рис. 2.8.

Напишем условие энергетического баланса для простейшего случая колебаний математического маятника с длиной нити  $a$ , которая меняется на величину  $\pm\Delta a$  (рис. 2.8.). Это можно осуществить, если пропустить нить маятника через отверстие в точке P (точке подвеса) и затем, прикладывая внешнюю силу  $F$  к концу нити, периодически менять ее длину.

Рассмотрим установившиеся параметрические колебания маятника с не слишком большими амплитудами и будем считать, что затухание мало ( $\delta \ll \omega_0$ ). Поскольку  $\Delta a \ll a$ , то приближенно можно считать, что угол  $\alpha$  отклонения маятника от положения равновесия меняется во времени по гармоническому закону

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t, \quad (2.53)$$



где согласно (1.42)  $\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$ , а  $\omega_0 = \sqrt{g/a}$ .

В момент наибольшего отклонения на угол  $\alpha_0$  сила натяжения нити равна  $N_1 = mg \cos \alpha_0$ . Поэтому, удлиняя нить на величину  $\Delta a$ , внешняя сила  $F_1 = N_1$  совершает отрицательную работу  $A_- = -mg \cos \alpha_0 \cdot \Delta a$ . Раскладывая  $\cos \alpha_0$  в ряд  $\cos \alpha_0 \approx 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24} + \dots$ , получим

$$A_- \approx -mg \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24}\right) \Delta a. \quad (2.54)$$

При прохождении маятником положения равновесия ( $\alpha = 0$ )  $F_2 = N_2 = mg + \frac{mv_0^2}{a}$ , где  $v_0 = \alpha_0 \omega a$ . Поэтому положительная работа при укорачивании нити с точностью до членов порядка  $\alpha_0^4$  равна:

$$A_+ = (mg + m\alpha_0^2 \omega^2 a) \Delta a \approx mg \left(1 + \alpha_0^2 - \frac{\alpha_0^4}{8}\right) \Delta a, \quad (2.55)$$

где учтено, что  $\omega_0^2 a = g$ .

Полная работа, совершаемая за период внешней силой  $F$ , будет положительной и равной

$$A = 2(A_+ + A_-) = 3mg\alpha_0^2 \Delta a - \frac{mg\alpha_0^4}{3} \Delta a = 3mg\alpha_0^2 \Delta a \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right) \quad (2.56)$$

Потери энергии за период численно равны работе силы трения:

$$A_{\text{тр}} = \int_0^T F_{\text{тр}} v dt = - \int_0^T \Gamma v^2 dt, \quad (2.57)$$

где  $F_{\text{тр}} = -\Gamma v$ .

При гармонических колебаниях (2.53) скорость

$$v(t) = a \dot{\alpha}(t) = a\alpha_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.58)$$

Подставляя (2.58) в (2.57) и выполняя интегрирование, получаем:

$$A_{\text{тр}} = -\Gamma a^2 \alpha_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = -\Gamma a^2 \alpha_0^2 \omega^2 \frac{T}{2} \approx -\Gamma \alpha_0^2 g a \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \frac{T_0}{2}, \quad (2.59)$$

поскольку  $\omega T = \omega_0 T_0 = 2\pi$ .

Следовательно, условие баланса энергии состоит в равенстве нулю суммы работ:  $A + A_{\text{тр}} = 0$ , или

$$3mg\alpha_0^2 \Delta a \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right) = \Gamma \alpha_0^2 g a \frac{T_0}{2} \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \quad (2.60)$$

Проводя сокращения и используя определение выражение для добротности  $Q \approx \frac{\pi}{\delta T_0}$ , получаем приближенное выражение для амплитуды  $\alpha_0$  установившихся параметрических колебаний:

$$\alpha_0 \approx \frac{12}{\sqrt{7}} \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q(\Delta a/a)}}. \quad (2.61)$$

Отношение  $\Delta a/a$  называют глубиной модуляции параметра  $a$ . Из (2.61) видно, что для возникновения параметрических колебаний глубина модуляции должна превзойти некоторое минимальное (пороговое) значение, примерно равное величине, обратной добротности:

$$\frac{\Delta a}{a} \geq \frac{1}{Q}. \quad (2.62)$$

Чем более добротна система, тем меньше пороговая глубина модуляции. С повышением величины  $\Delta a/a$  амплитуда колебаний  $\alpha_0$ , как это следует из формулы (2.61), будет увеличиваться. Однако при больших амплитудах ( $\alpha_0 > 1$ ) формула (2.61) становится мало приемлемой, поскольку сделанные нами приближения становятся неприменимыми.

Следует отметить, что параметрическое возбуждение является существенно нелинейным эффектом. Это видно, в частности, из уравнения (2.60): если пренебречь в нем малыми слагаемыми  $\sim \alpha_0^2$ , которые описывают нелинейность, то  $\alpha_0$  из уравнения выпадает, и получается соотношение  $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\pi}{3Q}$ . Физически это означает, что при таком значении глубины модуляции энергетический баланс в системе обеспечивается при любых амплитудах  $\alpha_0$ , что неверно.

Заметим, что возбуждение параметрических колебаний, вообще говоря, может происходить не только на удвоенной частоте собственных колебаний системы, когда параметр меняется один раз за каждые полпериода, но и при более редком воздействии: через один, два, три и т. д. полупериодов колебаний, т.е. на частотах  $2\omega_0/n$ , где  $n$  — любое целое число. Возбуждение также возможно внутри некоторой области — вблизи каждой из этих частот, но пороговые значения глубины модуляции для разных частот будут различны.

**Автоколебания.** Наблюдая колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью улиц, полотнищ на ветру и др., мы понимаем, что во всех перечисленных случаях незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра. При этом сама колебательная система производит отбор энергии ветра в нужный момент времени и в количестве, требуемом для компенсации неизбежно присутствующих энергетических потерь. Колебания в этих системах начинаются самопроизвольно за счет начальных флуктуаций (дрожаний) колеблющихся предметов. Частота и амплитуда установившихся колебаний определяется как параметрами самой системы, так и параметрами ее взаимодействия с ветром. Такие колебания являются примерами автоколебаний, а сами системы — примерами автоколебательных систем.

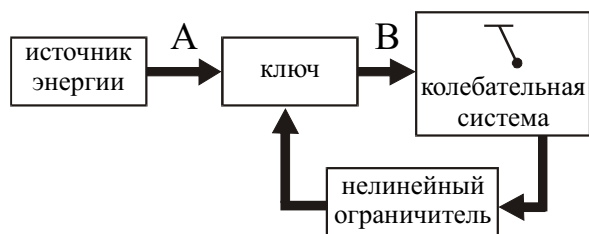


Рис. 2.9а.

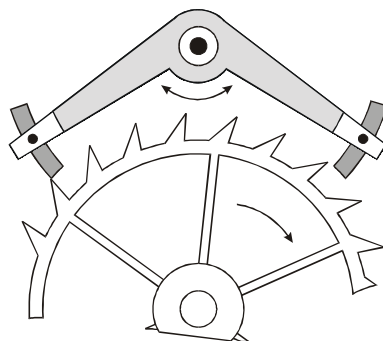


Рис. 2.9б.

Классическим примером автоколебательной системы служат механические часы с маятником и гирями. Эти часы периодически «черпают» энергию при опускании гирь, подвешенных к цепочке, перекинутой через шестерню часового механизма.

Принцип работы всех автоколебательных систем можно понять, обратившись к схеме, изображенной на рис. 2.9а.

Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи. Схематически это изображено в виде некоторого запирающего канал АВ устройства (ключа), который управляется самой системой. Так, в зависимости от положения и скорости колеблющегося листа на ветру будет различной мощность сил аэродинамического давления. В конструкции часового механизма (рис. 2.9б) присутствует специальное устройство — анкер, выполняющий роль ключа. Этот анкер, представляющий собой коромысло, приводится в колебание самим маятником часов. При определенных положениях он «отпирает» одну из шестерен часового механизма. В этот момент времени шестерня проворачивается за счет момента сил, приложенного со стороны натянутой цепи с грузом. Груз при этом опускается на небольшую величину. Количество энергии, поступающей в часовой механизм, равно по величине уменьшению потенциальной энергии груза в поле силы тяжести.

Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна. На схеме это отражено наличием в системе обратной связи нелинейного ограничителя сигнала, управляющего ключом. Нелинейность системы проявляется в том, что при начальном нарастании амплитуды колебаний, порожденных флуктуациями, поступление энергии в систему за каждый последующий период колебаний увеличивается нелинейно, т.е. прирост поступающей энергии становится все меньше и меньше. Естественно, что амплитуда колебаний достигнет такой установившейся величины, при которой приток энергии и ее потери будут равны по величине.

**Маятник на вращающемся валу (маятник Фруда).** Для более углубленного изучения принципа действия автоколебательной системы проанализируем колебания маятника, подвес которого скреплен с муфтой 1, одетой на горизонтальный вал 2 (рис. 2.10).

Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  по часовой стрелке. Если угол отклонения маятника от вертикали  $\beta(t)$  меняется с течением времени, то сила сухого трения в подвесе, нелинейно зависящая от относительной скорости муфты и вала  $\Omega - \dot{\beta}$ , также будет меняться во времени ( $\dot{\beta}$  — угловая скорость муфты). Момент этой силы  $M_{\text{тр}}$  будет оказывать периодическое воздействие на маятник, поддерживая его колебания. На рис. 2.11 изображена нелинейная зависимость  $M_{\text{тр}}$  от относительной угловой скорости муфты и вала. На изображенной кривой имеется точка перегиба P. Подберем скорость вращения вала  $\Omega$  такой, чтобы в

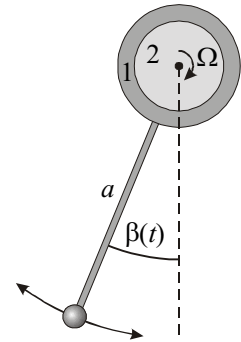


Рис. 2.10.

отсутствие колебаний ( $\dot{\beta} = 0$ ) попасть в эту точку. В этом случае к муфте маятника будет приложен постоянный момент силы трения:  $M_{\text{тр}} = M_0$ . Для дальнейшего анализа более удобно воспользоваться зависимостью  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$ , изображенной на рис. 2.12. Следует подчеркнуть, что начальное (линейное) нарастание  $M_{\text{тр}}$  с угловой скоростью  $\dot{\beta}$  обеспечивает условие для самопроизвольного нарастания колебаний из флуктуации, что эквивалентно наличию положительной обратной связи, а последующее замедление роста  $M_{\text{тр}}$  при увеличении  $\dot{\beta}$  является причиной нелинейного ограничения нарастания колебаний: амплитуда смещения маятника ( $a$  значит и амплитуда его скорости  $\dot{\beta}_{\text{max}}$ ) достигнет максимальной (установившейся) величины, что эквивалентно наличию нелинейного ограничителя.

Отклоним осторожно маятник от вертикали на угол  $\beta_0$  такой, чтобы момент силы трения, действующий на неподвижный маятник,  $M_0 = M_{\text{тр}}(0)$ , был уравновешен моментом силы тяжести  $M(\beta_0) = mga \sin \beta_0$ :

$$M_{\text{тр}}(0) = M(\beta_0), \text{ или } M_0 = mga \sin \beta_0. \tag{2.63}$$

Здесь  $m$  — масса маятника,  $a$  — расстояние от вала до центра масс маятника.

На первый взгляд, может показаться, что маятник так и останется висеть под углом  $\beta_0$  к вертикали. На самом деле это положение будет неустойчивым. Представим, что в результате ничтожного толчка маятник приобретет небольшую угловую скорость

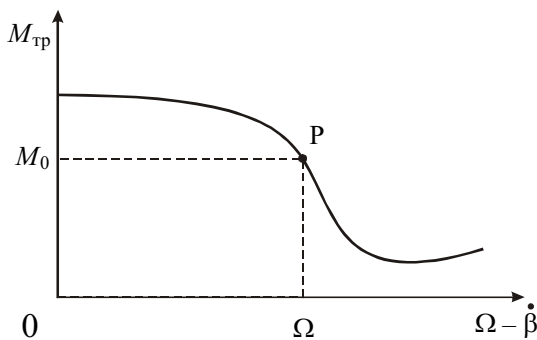


Рис. 2.11.

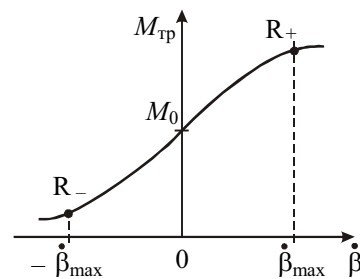


Рис. 2.12.

$\dot{\beta} > 0$ . При этом возрастут моменты сил тяжести  $M$  и трения  $M_{\text{тр}}$ , и условие (2.63) может нарушиться. Если начальный наклон кривой  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$  на рис. 2.12 достаточно велик (сильная положительная обратная связь), то  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) > M(\beta_0)$ . Это означает, что угловая скорость  $\dot{\beta}$  будет нарастать. Однако затем это нарастание прекратится, т.к. из-за нелинейного загиба кривой  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$  равенство моментов опять восстановится (сработает механизм нелинейного ограничения):

$$M_{\text{тр}}(\dot{\beta}_{\text{max}}) = M(\beta). \quad (2.64)$$

Условию (2.64) соответствует точка  $R_+$  на кривой  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$ . После этого угловая скорость начнет уменьшаться, поскольку с ростом угла  $\beta$  момент  $M(\beta)$  продолжает расти, а  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$  — убывать. Следовательно, маятник спустя какое-то время остановится, а его угол отклонения достигнет максимальной величины  $\beta_{\text{max}}$ . Поскольку в этот момент  $M(\beta_{\text{max}}) > M_{\text{тр}} = M_0$ , то маятник начнет двигаться в обратном направлении. Момент силы тяжести начнет уменьшаться, а момент силы трения будет также уменьшаться, но быстрее, чем момент силы тяжести (опять срабатывает положительная обратная связь). Сначала это движение будет ускоренным, пока  $M > M_{\text{тр}}$  (до точки  $R_-$  на рис. 2.12), а затем при  $M < M_{\text{тр}}$  — замедленным (до точки  $P$  на рис. 2.12). Остановившись при некотором угле наклона  $\beta_{\text{min}}$ , маятник опять движется влево, т.к. все еще  $M < M_{\text{тр}}$ . Наконец, он достигает стартовой позиции, однако приобретенная им скорость будет больше скорости начального толчка. Таким образом, в течение одного периода колебаний увеличилась энергия маятника за счет ее заимствования от устройства, вращающего вал.

В последующие периоды колебаний точки  $R_+$  и  $R_-$  на кривой  $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$  будут сдвигаться в разные стороны, однако из-за нелинейности кривой этот сдвиг прекратится (срабатывает механизм нелинейного ограничения), и колебания установятся.

Чтобы количественно проанализировать автоколебания маятника, запишем уравнение вращательного движения маятника с моментом инерции  $J$ :

$$J\ddot{\beta} = M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) - mga \sin \beta. \quad (2.65)$$

В этом уравнении мы пока пренебрежем моментом силы вязкого трения, действующей на движущийся маятник. Момент силы сухого трения в подвесе, нелинейно зависящий от угловой скорости  $\dot{\beta}$  (см. рис. 2.12), можно аппроксимировать следующим выражением

$$M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) = M_0 + k_1\dot{\beta} - k_2\dot{\beta}^3, \quad (2.66)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — размерные коэффициенты, определяющие обратную связь и нелинейное ограничение соответственно. Если колебание описывать углом отклонения  $\alpha$  от положения неустойчивого равновесия, задаваемого углом  $\beta_0$  ( $\alpha = \beta - \beta_0$ ), то

$$mga \sin \beta = mga(\sin \beta_0 \cos \alpha + \cos \beta_0 \sin \alpha). \quad (2.67)$$

Для малых углов  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Если учесть далее, что  $\dot{\beta} = \dot{\alpha}$ , то уравнение (2.65) примет вид:

$$J\ddot{\alpha} + mga \cos \beta_0 \alpha = k_1 \dot{\alpha} - k_2 \alpha^3. \quad (2.68)$$

Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением и не имеет аналитического решения. В теории колебаний развиты методы, позволяющие решить его приближенно, исследовать условия, при которых возможно самовозбуждение колебаний, и найти амплитуду  $\alpha_0$  и частоту  $\omega$  установившихся колебаний:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t. \quad (2.69)$$

Мы же поступим более просто и определим  $\alpha_0$  из условия энергетического баланса. Поскольку правая часть (2.68) мала, то частота колебаний приближенно равна:  $\omega = \sqrt{mga \cos \beta_0 / J}$ .

Подсчитаем работу за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ , совершаемую устройством (например, электродвигателем), вращающим вал. Она, очевидно, равна:

$$A = \int_0^T M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) \Omega dt = M_0 \Omega T. \quad (2.70)$$

Здесь учтено, что интегралы по времени от  $\dot{\beta}$  и  $\dot{\beta}^3$  равны нулю, поскольку

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.71)$$

Потери энергии в скользящем подвесе за это время составят величину

$$q = \int_0^T M_{\text{тр}}(\dot{\beta})(\Omega - \dot{\beta}) dt = \left( M_0 \Omega - \frac{k_1 \alpha_0^2 \omega^2}{2} + \frac{3k_2 \alpha_0^4 \omega^4}{8} \right) T. \quad (2.72)$$

На рис. 2.13 изображены зависимости  $A$  и  $q$  от амплитуды  $\alpha_0$ . Видно, что при случайных флуктуациях, когда  $\alpha_0$  мало,  $A > q$ . Это означает, что колебания будут нарастать. Однако с ростом амплитуды начинают расти потери  $q$ . Колебания установятся при  $A = q$  (точка R на графике). Амплитуда установившихся колебаний определится из равенства

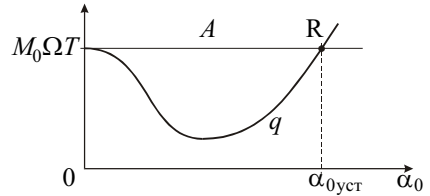


Рис. 2.13.

$$M_0 \Omega T = M_0 \Omega T - \frac{k_1 \alpha_{0\text{уст}}^2 \omega^2}{2} + \frac{3k_2 \alpha_{0\text{уст}}^4 \omega^4}{8}. \quad (2.73)$$

Отсюда

$$\alpha_{0\text{уст}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}}. \quad (2.74)$$

Заметим, что теперь мы можем легко учесть силы вязкого трения, для чего в правую часть уравнения (2.68) следует добавить член  $-\Gamma \dot{\alpha}$ . Это приведет к тому, что  $k_1$  в (2.74) будет уменьшен на величину  $\Gamma$ . Поэтому (2.74) изменится:

$$\alpha_{0\text{уст}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1 - \Gamma}{3k_2}}. \quad (2.75)$$

Из последнего выражения следует, что при  $\Gamma \geq k_1$  колебания не могут самопроизвольно начаться.

Автоколебательные системы находят широчайшее применение в технике. Так, например, духовые и смычковые инструменты, органные трубы, генераторы электромагнитного излучения в приемно-передающих линиях связи, оптические квантовые генераторы (лазеры) и др. представляют примеры автоколебательных систем.

Однако, автоколебания могут играть и негативную роль, начиная от безобидных колебаний деталей кранов водопроводных систем, «ревущих» при достаточном напоре воды, до опасных колебаний крыльев самолетов, получивших название «флаттер». В ноябре 1940 г. подвесной мост через реку Такома в США разрушился из-за крутильных автоколебаний, возникших под действием дувшего вдоль реки ветра.

---

### ЛЕКЦИЯ 3

*Свободные незатухающие колебания в системах с двумя степенями свободы. Нормальные колебания (моды). Парциальные и нормальные частоты. Биения. Понятие спектра колебаний. Методика анализа колебаний двух связанных осцилляторов. Затухание колебаний и диссипация энергии. Вынужденные колебания. Резонанс. Колебания систем со многими степенями свободы. Дисперсионное соотношение.*

Наблюдая колебания массы  $m$ , подвешенной на легкой пружине жесткости  $k_1$ , нельзя не обратить внимание на то, что, наряду с вертикальными колебаниями груза, возникают и так называемые маятниковые колебания (из стороны в сторону) — см. рис. 3.1.

Наиболее сильными эти маятниковые колебания будут тогда, когда частота вертикальных колебаний  $\sqrt{k_1/m}$  будет равна удвоенной частоте маятниковых колебаний  $\sqrt{g/a}$  ( $a$  — длина растянутой пружины при неподвижном грузе). Такой результат легко понять, если рассматривать маятниковые колебания как резонансные параметрические колебания, при этом параметр маятника — длина пружины  $a$  — меняется при вертикальных колебаниях на величину  $\pm\Delta a$  (см. предыдущую лекцию). В течение некоторого времени маятниковые колебания могут усиливаться за счет уменьшения энергии вертикальных колебаний. Затем процесс пойдет в обратном направлении: маятниковые колебания начнут ослабевать, «возвращая» энергию усиливающимся вертикальным колебаниям. Следовательно, вертикальные колебания не будут гармоническими, что связано с наличием маятниковых колебаний, соответствующих возбуждению второй степени свободы. При определенных условиях могут возникать и крутильные колебания груза вокруг вертикальной оси пружины. Опыт показывает, что наиболее сильными эти колебания будут в том случае, когда их частота  $\sqrt{k_2/J}$  ( $k_2$  — коэффициент жесткости пружины при ее скручивании, рассмотренный в лекции по деформации твердого тела,  $J$  — момент инерции тела относительно вертикальной оси) будет примерно в два раза меньше частоты вертикальных колебаний. В общем случае в этой системе могут происходить четыре типа колебаний, соответствующих четырём степеням свободы: одно вертикальное, два маятниковых в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях и одно крутильное.

Таким образом, перед нами возникает задача изучения основных закономерностей колебаний в системах с двумя, тремя и более степенями свободы, затем можно рассмотреть и колебания сплошной среды, как системы с бесконечно большим числом степеней свободы.

#### **Свободные незатухающие колебания в системах с двумя степенями свободы.**

На рис. 3.2 изображены три различные колебательные системы с двумя степенями свободы. Первая из них (а) — это два различных пружинных маятника, связанные пружиной с жестко-

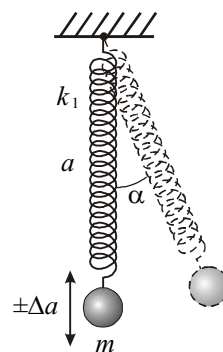


Рис. 3.1.



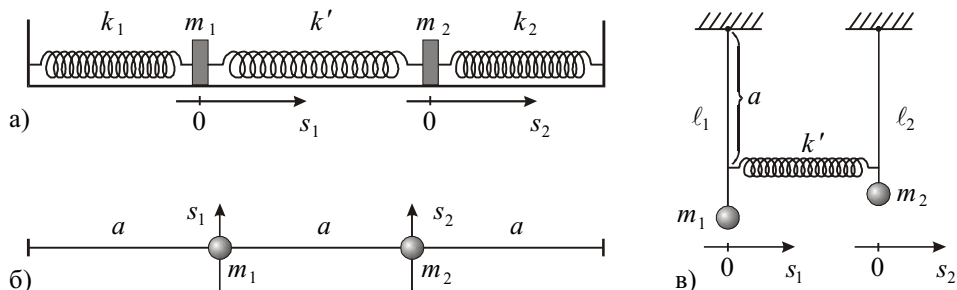


Рис. 3.2.

стью  $k'$ . Вторая (б) — два груза с массами  $m_1$  и  $m_2$ , закрепленные на натянутом некоторой силой  $F$  невесомом резиновом шнуре. Третья (в) — два связанных пружиной  $k'$  различных маятника, каждый из которых состоит из груза, подвешенного на невесомом стержне.

Колебания грузов в каждой из трех систем описываются двумя временными зависимостями их смещений  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . Положительное направление смещения  $s$  на рисунке указано стрелками.

Опыт показывает, что при произвольном способе возбуждения колебания не будут гармоническими: амплитуда колебаний каждой из масс будет периодически меняться во времени. Однако можно создать такие начальные условия, при которых каждый груз будет совершать гармонические колебания с одной и той же частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \sin(\omega t + \varphi); \\ s_2(t) &= s_{02} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Частота этих колебаний  $\omega$  определяется свойствами системы. Отношение

$$\zeta = s_{02}/s_{01} \quad (3.2)$$

также определяется параметрами системы. Эта безразмерная алгебраическая величина  $\zeta$  называется коэффициентом распределения амплитуд при гармоническом колебании. Отметим, что  $s_{01}$  и  $s_{02}$  могут иметь любой знак. Если  $\zeta > 0$ , то смещения обеих масс всегда происходят в одну сторону (синфазные колебания), а при  $\zeta < 0$  — в противоположные стороны (противофазные колебания). Гармонические колебания (3.1) называются нормальными колебаниями, или модами, а частота  $\omega$  называется нормальной частотой. Таким образом, мода характеризуется двумя параметрами: частотой  $\omega$  и коэффициентом  $\zeta$ , определяющим «конфигурацию» моды.

Практика показывает, что в системе с двумя степенями свободы могут существовать синфазные гармонические колебания с частотой  $\omega_I$  и противофазные гармонические колебания с частотой  $\omega_{II} > \omega_I$ .

Следовательно, в системе могут быть возбуждены две моды:

$$\begin{aligned} & s_1^I(t) = s_{01}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I); \\ \text{I мода} \quad & s_2^I(t) = s_{02}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I); \\ & \zeta_I = s_{02}^I / s_{01}^I > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 s_1^{\text{II}}(t) &= s_{01}^{\text{II}} \sin(\omega_{\text{II}}t + \varphi_{\text{II}}); \\
 \text{II мода} \quad s_2^{\text{II}}(t) &= s_{02}^{\text{II}} \sin(\omega_{\text{II}}t + \varphi_{\text{II}}); \\
 \zeta_{\text{II}} &= s_{02}^{\text{II}} / s_{01}^{\text{II}} < 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Нетрудно теперь понять, что любое колебание связанной линейной системы с двумя степенями свободы (а именно такие системы мы будем далее рассматривать) может быть представлено в виде суперпозиции двух нормальных колебаний (3.3) и (3.4):

$$\begin{aligned}
 s_1(t) &= s_1^{\text{I}}(t) + s_1^{\text{II}}(t) = s_{01}^{\text{I}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + s_{01}^{\text{II}} \sin(\omega_{\text{II}}t + \varphi_{\text{II}}); \\
 s_2(t) &= s_2^{\text{I}}(t) + s_2^{\text{II}}(t) = s_{02}^{\text{I}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + s_{02}^{\text{II}} \sin(\omega_{\text{II}}t + \varphi_{\text{II}}).
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Не прибегая пока к детальному математическому исследованию, проанализируем поведение системы с двумя степенями свободы, пользуясь основными идеями, развитыми в предыдущих лекциях. Представим любую из систем, изображенных на рис. 3.2, как сложную систему, состоящую из двух парциальных систем. Эти парциальные системы, соответствующие случаю (а) рис. 3.2, показаны на рис. 3.3: каждая из этих парциальных систем имеет собственную частоту колебаний, которая называется парциальной частотой.

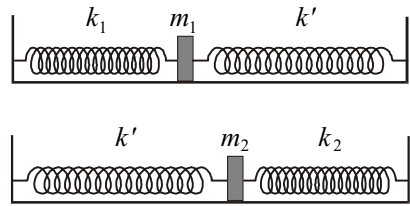


Рис. 3.3.

Величины этих парциальных частот, соответственно, равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k'}{m_1}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k'}{m_2}}.
 \tag{3.6}$$

Совершенно очевидно, что частота  $\omega_1$  — это частота колебаний массы  $m_1$  в системе двух связанных маятников, когда масса  $m_2$  неподвижна (заблокирована вторая степень свободы). Аналогично, с частотой  $\omega_2$  будет колебаться масса  $m_2$ , когда неподвижна масса  $m_1$ .

Теперь перейдем к определению нормальных частот  $\omega_1$  и  $\omega_{\text{II}}$ . Вспомним, что квадрат частоты гармонических колебаний равен отношению возвращающей силы к смещению груза  $s$  и величине его массы  $m$ . Подберем начальные смещения масс  $m_1$  и  $m_2$  таким образом, чтобы для обеих масс эти отношения (а, следовательно, и частоты) были бы одинаковы. Такой подбор легко угадывается для симметричной системы ( $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k$ ), (рис. 3.4), у которой парциальные частоты совпадают:

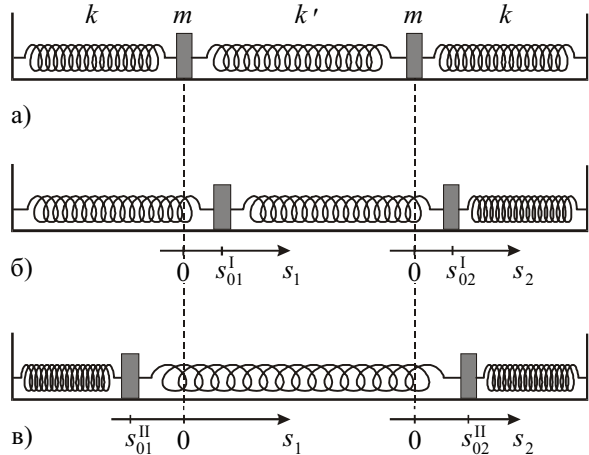


Рис. 3.4.

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}}. \quad (3.7)$$

Если оба груза сместить вправо на одинаковые расстояния  $s_{01}^I = s_{02}^I$ , то средняя пружина  $k'$  (пружина связи) не будет деформирована (позиция б). После отпущения пружина будет оставаться недеформированной. Поэтому каждый из грузов будет совершать гармонические колебания с одной и той же частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.8)$$

которая и является первой нормальной частотой. Конфигурация этого синфазного колебания (моды) задается коэффициентом распределения амплитуд  $\zeta_1 = +1$ .

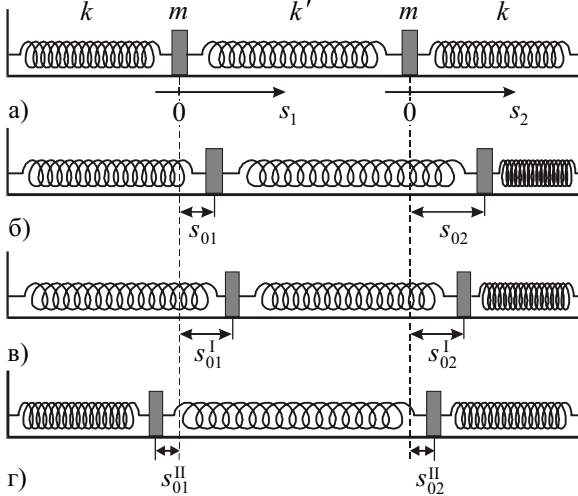


Рис. 3.5.

Если теперь обе массы сместить в разные стороны на одинаковые расстояния  $s_{02}^{II} = -s_{01}^{II}$  (позиция в), то пружина  $k'$  удлинится на величину  $2s_{02}^{II}$ . Поэтому к правой массе будет приложена возвращающая сила, равная  $-(ks_{02}^{II} + 2k's_{02}^{II})$ , а на левую массу будет действовать в противоположном направлении сила  $-(ks_{01}^{II} + 2k's_{01}^{II})$ . После отпущения грузы будут совершать противофазные гармонические колебания со второй нормальной частотой

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}. \quad (3.9)$$

Конфигурация второй моды характеризуется коэффициентом распределения  $\zeta_{II} = -1$ .

Если грузы, изображенные на рис. 3.5а, сместить на произвольные расстояния (например, в одну сторону на величины  $s_{01}$  и  $s_{02}$ , как это изображено на рис. 3.5б), то это эквивалентно суперпозиции двух типов начальных смещений: в одну сторону на одинаковые величины (позиция в)

$$s_{01}^I = s_{02}^I = \frac{1}{2}(s_{01} + s_{02}); \quad (3.10)$$

и в разные стороны (позиция г) на величины

$$-s_{01}^{II} = s_{02}^{II} = \frac{1}{2}(s_{02} - s_{01}). \quad (3.11)$$

Поскольку колебательная система линейна, то синфазные колебания, возникающие после отпущения грузов в позиции (в), будут происходить независимо от присутствия

противофазных колебаний, возникающих при отпускании грузов в позиции (г). Смещения обоих грузов с течением времени будут описываться формулами (3.5), в которых амплитуды определяются равенствами (3.10) и (3.11), а начальные фазы  $\varphi_I = \varphi_{II} = \pi/2$ .

Проанализируем более подробно колебания в системе, изображенной на рис. 3.5. Пусть мы сдвинули левую массу вправо на расстояние  $s_{01}$ , а правую массу оставили в несмещенном положении ( $s_{02} = 0$ ). После отпускания обоих грузов в системе возникнут колебания. Из (3.10) и (3.11) определяем амплитуды мод:  $s_{01}^I = s_{02}^I = s_{01}/2$ ;  $-s_{01}^{II} = s_{02}^{II} = -s_{01}/2$ . Поскольку фазы  $\varphi_I = \varphi_{II} = \pi/2$  (т.к. начальные скорости у грузов отсутствуют), то смещения

$$s_1(t) = \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_I t + \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_{II} t; \tag{3.12}$$

$$s_2(t) = \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_I t - \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_{II} t.$$

Производя суммирование тригонометрических функций в (3.12), получим:

$$s_1(t) = s_{01} \cos \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t; \tag{3.13}$$

$$s_2(t) = s_{01} \sin \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t.$$

Временные зависимости (3.13) изображены на рис. 3.6.

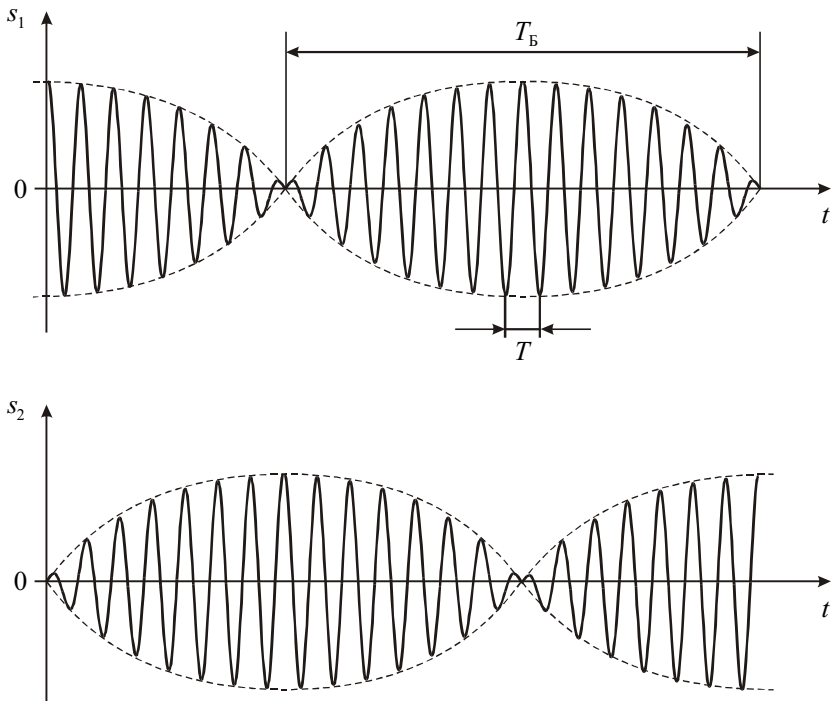


Рис. 3.6.

Видно, что колебания каждой из масс имеют форму биений. Период этих биений равен <sup>1)</sup>

$$T_6 = \frac{2\pi}{\omega_{II} - \omega_I} = \frac{2\pi}{\Omega_6}, \tag{3.14}$$

где частота биений

$$\Omega_6 = \Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I. \tag{3.15}$$

Если ввести среднюю частоту

$$\omega_0 = \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}, \tag{3.16}$$

то с этой частотой связан период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Если частота биений  $\Omega_6 \ll \omega_0$ , как это изображено на рис. 3.6, то  $T_6 \gg T$ . В этом случае колебания обоих грузов будут почти гармоническими (квазигармоническими). Если переписать (3.13) с использованием средней частоты  $\omega_0$  и частоты биений  $\Omega_6$  в виде:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \cos \frac{\Omega_6}{2} t \cos \omega_0 t = A_1(t) \cos \omega_0 t; \\ s_2(t) &= s_{01} \sin \frac{\Omega_6}{2} t \cos \omega_0 t = A_2(t) \cos \omega_0 t; \end{aligned} \tag{3.17}$$

то при  $\Omega_6 \ll \omega_0$  колебания (3.17) можно трактовать как колебания с частотой  $\omega_0$  и медленно меняющейся амплитудой  $A(t)$ .

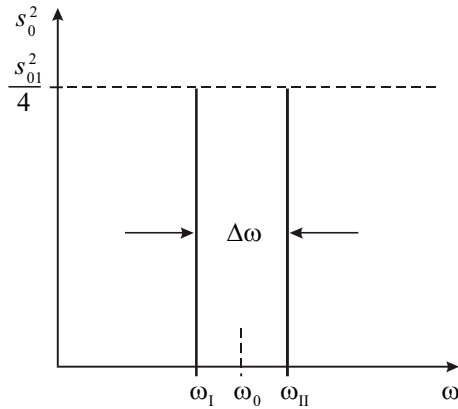


Рис. 3.7.

В теории колебаний и в других разделах физики для анализа колебательного процесса используют спектральное представление, или спектр колебаний. Этот спектр изображают графически: по оси абсцисс указывают частоты колебаний, а по оси ординат откладывают квадраты их амплитуд. Так, в частности, для колебаний, изображенных на рис. 3.6 ( $s_1$  или  $s_2$ ) и описываемых формулами (3.17), легко нарисовать спектр, поскольку уже известно спектральное разложение

этого колебания (представление в виде суммы гармонических колебаний), задаваемое формулами (3.12).

Такой спектр изображен на рис. 3.7.

<sup>1)</sup> Колебания (3.12), вообще говоря, не являются периодическими, т.е. нельзя указать такое время  $T^*$ , спустя которое они точно повторяются (отношение частот  $\omega_I / \omega_{II}$  — чаще всего иррациональное число, а случаи их рационального отношения: периодом биений  $T_6$  мы называем период (3.14) повторения *огibaющей* суммарного колебания, равный половине периода колебания с частотой  $\frac{\omega_{II} - \omega_I}{2}$ , а  $\Omega_6 = \frac{2\pi}{T_6} = \omega_{II} - \omega_I$ .

Этот спектр содержит две спектральные компоненты. Его можно охарактеризовать средней частотой  $\omega_0$  и шириной  $\Delta\omega$ . В соответствии с формулой (3.14) произведение  $\Delta\omega$  на период  $T_0$  равно постоянной величине:

$$\Delta\omega \cdot T_0 = 2\pi. \tag{3.18}$$

Формула (3.18) имеет глубокое физическое содержание. Так, если происходит некоторое квазигармоническое колебание вида

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \tag{3.19}$$

для которого амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi$  медленно меняются на масштабе времени  $\tau$  (рис. 3.8а), то спектр такого колебания может состоять из большого числа частот.

Эти частоты группируются вблизи центральной (основной) частоты  $\omega_0 = 2\pi/T$  в пределах характерного интервала частот  $\Delta\omega$ , обратно пропорционального временному масштабу  $\tau$ . На рис. 3.8б изображен этот спектр, где по оси ординат отложен квадрат амплитуды  $s_0$  каждой из гармонических составляющих, причем между  $\tau$  и  $\Delta\omega$  существует связь:  $\Delta\omega \cdot \tau \sim 2\pi$ .

Количественная связь между колебательным процессом  $s(t)$  и его спектром представляется (по аналогии с формулами (3.12)) в виде суммы конечного или бесконечного числа гармонических составляющих (в виде ряда или интеграла Фурье). Такое представление будет широко использоваться в курсе «Оптика».

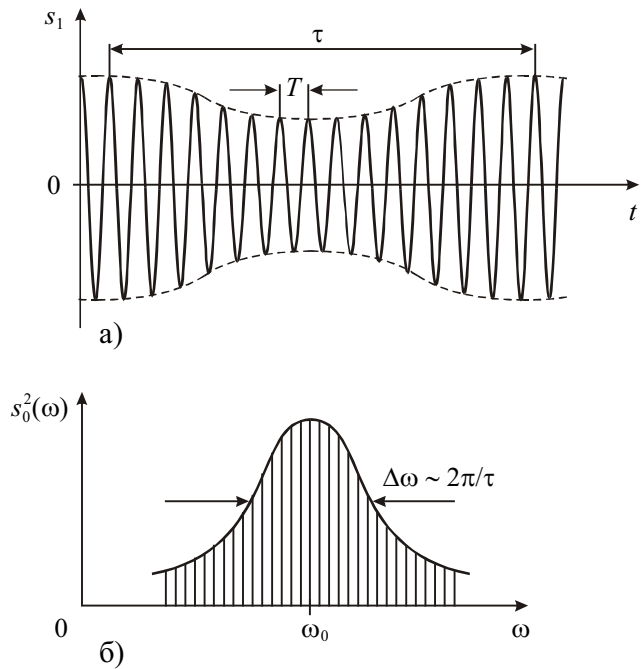


Рис. 3.8.

**Методика анализа колебаний связанных осцилляторов.** Выше мы рассмотрели колебания двух одинаковых связанных пружинных маятников, не прибегая к решению уравнений их движения. Однако, если жесткости пружин и массы тел имеют произвольные величины, то зачастую бывает трудно догадаться о конфигурации мод и их частотах. Поэтому представляется важным вооружиться универсальным методом, позволяющим по единой схеме провести последовательный анализ любой колебательной системы с двумя степенями свободы, являющейся системой любых связанных осцилляторов.

Запишем уравнения движения двух связанных пружинных маятников в виде:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -k_1 s_1 - k' s_1 + k' s_2; \\ m_2 \ddot{s}_2 &= -k_2 s_2 - k' s_2 + k' s_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Разделив первое уравнение на  $m_1$ , а второе — на  $m_2$  и используя выражения (3.6) для парциальных частот, перепишем (3.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= -\omega_1^2 s_1 - \alpha_1 s_2, \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $\alpha_1 = -k'/m_1$ ,  $\alpha_2 = -k'/m_2$  — коэффициенты, зависящие от жесткости  $k'$  пружины связи. Обратим внимание, что уравнения (3.21) не могут решаться по отдельности, т.к. каждое из них содержит  $s_1$  и  $s_2$ . Поэтому целесообразно перейти от смещений  $s_1$  и  $s_2$  к новым функциям  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , называемым нормальными координатами. Смысл перехода состоит в получении двух независимых уравнений движения, которые можно решать по отдельности.

Однако, в общем случае эти координаты найти не просто. Поэтому для иллюстрации такого перехода рассмотрим систему с одинаковыми массами ( $m_1 = m_2 = m$ ) и пружинами ( $k_1 = k_2 = k$ ). Поскольку парциальные частоты совпадают ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{k+k'}{m}}$ ), а также  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\frac{k'}{m}$ , то система уравнений (3.21) становится более простой. Сложив оба уравнения, получаем:

$$\ddot{\xi}_1 = -(\omega^2 + \alpha)\xi_1, \quad (3.22a)$$

где  $\xi_1 = s_1 + s_2$  — первая нормальная координата. Вычитая второе уравнение из первого, находим:

$$\ddot{\xi}_2 = -(\omega^2 - \alpha)\xi_2, \quad (3.22б)$$

где  $\xi_2 = s_1 - s_2$  — вторая нормальная координата. Теперь уравнения (3.22) независимы. Первое из них описывает колебание центра масс системы с частотой

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \frac{k'}{m}, \quad (3.23)$$

меньшей парциальной частоты  $\omega$ . Второе уравнение описывает изменение расстояния между двумя массами с частотой

$$\omega_{II}^2 = \omega^2 + \frac{k'}{m}, \quad (3.24)$$

превышающей парциальную частоту. Решения уравнений (3.22) очевидны:

$$\xi_1(t) = s_1(t) + s_2(t) = \xi_{01} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad (3.25a)$$

$$\xi_2(t) = s_1(t) - s_2(t) = \xi_{02} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \quad (3.25б)$$

Возвращаясь к функциям  $s_1$  и  $s_2$ , получаем:

$$s_1(t) = \frac{\xi_{01}}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\xi_{02}}{2} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}); \quad (3.26a)$$

$$s_2(t) = \frac{\xi_{01}}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{\xi_{02}}{2} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \quad (3.26б)$$

Четыре величины  $\xi_{01}, \xi_{02}, \varphi_I$  и  $\varphi_{II}$  определяются из начальных условий:  $s_1(t=0), s_2(t=0), \dot{s}_1(t=0), \dot{s}_2(t=0)$ .

Проиллюстрировав переход к нормальным координатам, вернемся к методике анализа колебаний в произвольных системах, описываемых уравнениями (3.21).

Пусть в системе происходит нормальное колебание с неизвестной пока частотой  $\omega$  и коэффициентом распределения амплитуд  $\zeta = \frac{s_{02}}{s_{01}}$ :

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega t + \varphi), \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.27)$$

Подставим (3.27) в систему уравнений (3.21). Тогда получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2)s_{01} + \alpha_1 s_{02} &= 0; \\ \alpha_2 s_{01} + (\omega_2^2 - \omega^2)s_{02} &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Система линейных однородных уравнений (3.28) имеет отличные от нуля решения только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \omega_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0. \quad (3.29)$$

Это — квадратное уравнение относительно  $\omega^2$ , причем  $\omega > 0$ . Поэтому, решая уравнение (3.29), можно найти нормальные частоты  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$ . После нахождения частот не составляет труда найти конфигурацию мод, т.е. коэффициенты распределения амплитуд  $\zeta_I$  и  $\zeta_{II}$ . Их можно определить, например, из первого уравнения (3.28), причем очевидно, что для каждой нормальной частоты ( $\omega_I$  или  $\omega_{II}$ ) эти коэффициенты различны:

$$\zeta_I = \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)_I = \frac{\omega_1^2 - \omega_I^2}{\alpha_1}, \quad \zeta_{II} = \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)_{II} = \frac{\omega_{II}^2 - \omega_I^2}{\alpha_1}. \quad (3.30)$$

Таким образом, уравнение (3.29) и равенство (3.30) позволяют полностью рассчитать параметры каждой из двух мод. Движение каждой из масс, как уже неоднократно отмечалось, является суперпозицией двух нормальных колебаний:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01_I} \sin(\omega_I t + \varphi_I) + s_{01_{II}} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}), \\ s_2(t) &= \zeta_I \cdot s_{01_I} \sin(\omega_I t + \varphi_I) + \zeta_{II} \cdot s_{01_{II}} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}), \end{aligned}$$

где амплитуды  $s_{01_I}$  и  $s_{01_{II}}$  и начальные фазы  $\varphi_I$  и  $\varphi_{II}$  определяются, как и раньше, из начальных условий:  $s_1(0), s_2(0), \dot{s}_1(0), \dot{s}_2(0)$ .

Расчет мод для любой системы двух связанных осцилляторов читатель может проделать самостоятельно.

**Соотношение между парциальными и нормальными частотами.** Для установления связи между парциальными и нормальными частотами перепишем (3.29) в виде

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \gamma^2 \omega_1^2 \omega_2^2 = 0, \quad (3.31)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\omega_1^2 \omega_2^2} = \frac{k'^2}{(k_1 + k')(k_2 + k')}. \quad (3.32)$$



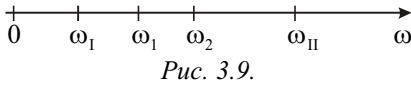


Рис. 3.9.

Безразмерный коэффициент связи  $\gamma$  между двумя системами может принимать значения  $0 < \gamma < 1$ . Если из (3.31) определить нормальные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_{II}$ , то они будут выражаться через парциальные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и коэффициент  $\gamma$ . Эти четыре частоты будут располагаться на оси частот в последовательности, изображенной на рис. 3.9.

При слабой связи ( $\gamma \ll 1$ ) нормальные частоты близки к парциальным, а при сильной связи ( $\gamma \leq 1$ ) различие в частотах становится существенным. Это хорошо видно, если парциальные частоты совпадают ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ). Тогда (3.31) примет вид:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega_0^4 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = \omega_0^2(1 - \gamma), \quad \omega_{II}^2 = \omega_0^2(1 + \gamma). \quad (3.33)$$

**Затухание колебаний.** Если энергия не подводится извне, то колебания связанных осцилляторов будут затухать. Поскольку сила вязкого трения пропорциональна скорости, то уравнения (3.21) с учетом затухания примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= -\omega_1^2 s_1 - 2\delta_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 s_2, \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2 - 2\delta_2 \dot{s}_2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь  $\delta_1 = \Gamma_1 / 2m_1$  и  $\delta_2 = \Gamma_2 / 2m_2$  — коэффициенты затухания для первого и второго осцилляторов. Если искать решение этой системы в виде нормальных затухающих колебаний:

$$s_1(t) = s_{01} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad s_2(t) = s_{02} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.35)$$

то после подстановки (3.35) в (3.34) можно найти нормальную частоту  $\omega$ , коэффициент затухания  $\delta$  и конфигурацию  $\zeta$  каждой из двух мод. Опуская промежуточные выкладки, отметим, что при  $\omega_1 \gg \delta_1$  и  $\omega_2 \gg \delta_2$  (слабое затухание) нормальные частоты и распределение амплитуд в модах будут близки к тем, что и в отсутствие затухания. Для коэффициента затухания  $\delta$  получается выражение:

$$\delta = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)\delta_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)\delta_2}{(\omega_1^2 - \omega^2) + (\omega_2^2 - \omega^2)}. \quad (3.36)$$

Можно видеть, что при произвольном соотношении между  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  коэффициенты затухания мод  $\delta_I$  и  $\delta_{II}$ , получаемые из (3.36) при  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = \omega_{II}$ , будут различными.

Если парциальные частоты совпадают ( $\omega_1 = \omega_2$ ), то

$$\delta_I = \delta_{II} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2). \quad (3.37)$$

Если  $\omega_1 \neq \omega_2$ , а  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , то

$$\delta_I = \delta_{II} = \delta. \quad (3.38)$$

Последним результатом мы воспользуемся при рассмотрении диссипации энергии в связанной колебательной системе.

**Энергия колебательной системы и ее диссипация.** Рассмотрим колебания двух одинаковых масс (рис. 3.10а), закрепленных на растянутом легком резиновом шнуре.

Если один из грузов оттянуть на расстояние  $2s_0$  (б) и затем одновременно отпустить обе массы, то их колебания будут иметь вид биений. С другой стороны, при этих начальных условиях будут возбуждены две моды (в и г) с одинаковыми амплитудами колебаний обеих масс, равными  $s_0$ . Энергия, запасенная в первой моде, равна сумме кинетических энергий

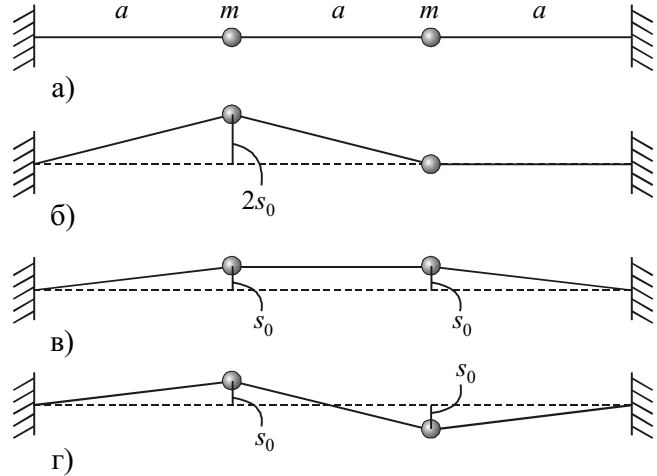


Рис. 3.10.

обеих масс при прохождении ими положения равновесия со скоростью  $v_0^I = s_0 \omega_I$ , т.е.:

$$E_0^I = 2 \frac{m}{2} (v_0^I)^2 = ms_0^2 \omega_I^2, \tag{3.39a}$$

а энергия второй моды, аналогично, равна

$$E_0^{II} = 2 \frac{m}{2} (v_0^{II})^2 = ms_0^2 \omega_{II}^2. \tag{3.39б}$$

Важно отметить, что энергообмен между модами отсутствует, а полная энергия системы равна сумме энергий ее мод. В то же время в процессе биений энергия первого осциллятора за время, равное половине периода биений, «перетекает» ко второму осциллятору и затем за такое же время возвращается обратно. Полный энергообмен между осцилляторами возможен лишь тогда, когда обе массы одинаковы и отношение  $(\omega_I + \omega_{II})/(\omega_{II} - \omega_I)$  равно целому числу  $n$ , т.е.:

$$\frac{\omega_I + \omega_{II}}{\omega_{II} - \omega_I} = \frac{2\omega_0}{\Omega_\delta} = n. \tag{3.40}$$

Следовательно, частота  $\omega_0$  должна быть кратной частоте биений. В самом деле, при выполнении условия (3.40) каждая из масс будет периодически останавливаться в положении равновесия (как следует из формул (3.17)). С течением времени колебания будут затухать, и будет экспоненциально уменьшаться энергия, запасенная в модах:

$$E^I(t) = ms_0^2 e^{-2\delta t} \omega_I^2 = E_0^I e^{-2\delta t}, \tag{3.41a}$$

$$E^{II}(t) = ms_0^2 e^{-2\delta t} \omega_{II}^2 = E_0^{II} e^{-2\delta t}. \tag{3.41б}$$

Важно подчеркнуть, что через время  $\tau_E = \frac{1}{2\delta}$  энергия каждой из мод уменьшится в  $e$  раз, при этом противофазная мода «потеряет» больше энергии, чем синфазная, поскольку начальная энергия  $E_0^{II}$  у нее была больше, чем  $E_0^I$  (см. (3.39)).

**Вынужденные колебания.** Рассмотрим основные закономерности вынужденных установившихся колебаний в системе, изображенной на рис. 3.11, если на левую массу  $m_1$  действует сила  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ . Уравнения движения в этом случае будут отличаться от (3.34) наличием этой силы в правой части первого уравнения:

$$\ddot{s}_1 = -\omega_1^2 s_1 - 2\delta_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 s_2 + \frac{F_0}{m_1} \sin \omega t, \quad (3.42)$$

$$\ddot{s}_2 = -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2 - 2\delta_2 \dot{s}_2.$$

Нетрудно догадаться, что решениями этой системы в установившемся режиме являются гармонические функции

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega t + \varphi_1), \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (3.43)$$

которые отражают тот факт, что обе массы колеблются на частоте вынуждающей силы. Подставляя (3.43) в (3.42), можно вычислить амплитуды и фазы вынужденных колебаний. Мы ограничимся лишь обсуждением результатов.

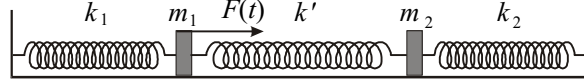


Рис. 3.11.

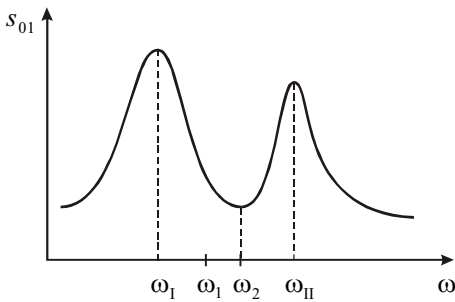


Рис. 3.12.

На рис. 3.12 изображена АЧХ для первого осциллятора, к которому приложена сила. Обращает на себя внимание наличие двух резонансов, которые при малом затухании наблюдаются на нормальных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_{II}$ . При изменении частоты  $\omega$  от  $\omega_1$  до  $\omega_{II}$  амплитуда  $s_{01}$  падает и достигает минимума на второй парциальной частоте  $\omega_2$ , при этом с уменьшением затухания амплитуда на этой частоте стремится к нулю. Это обстоятельство используют для подавления отклика системы на действие внешней силы. В радиотехнике, где используются связанные колебательные контуры, их применяют как фильтры и демпферы.

Два резонанса имеют место и для смещения  $s_2$  второй массы. Если проанализировать отношение амплитуд  $s_{02}/s_{01}$  в зависимости от частоты  $\omega$ , то оказывается, что это отношение вблизи частоты  $\omega_1$  равно коэффициенту распределения амплитуд  $\zeta_1$  для первой моды, а вблизи частоты  $\omega_{II}$  — коэффициенту распределения амплитуд  $\zeta_{II}$  для второй моды. Это используется для определения этих коэффициентов, поскольку при вынужденных колебаниях это сделать проще, чем при собственных.

**Колебания систем со многими степенями свободы.** Основные идеи, сформулированные при рассмотрении колебаний систем с двумя степенями свободы, теперь могут быть с успехом использованы для анализа колебаний систем с тремя, четырьмя, ...,  $N$  степенями свободы, и в пределе, при  $N \rightarrow \infty$ , для анализа колебаний в сплошных средах, т.е. волн.

Обратимся вначале к колебаниям трех одинаковых масс  $m$ , закрепленных на равных расстояниях  $a$  на натянутом легком резиновом шнуре, как показано на рис. 3.13а. Любое колебание этой системы может быть представлено как суперпозиция трех нормальных колебаний с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_{II}$  и  $\omega_{III}$ . Опуская на время вопрос о величине частот, найдем конфигурацию этих мод. Примем во внимание, что квадрат частоты колебаний каждой массы в данной моде должен быть одинаков. Этого можно добиться в случае, когда отношения

возвращающей силы к величине массы  $m$  и ее смещению  $s$  у всех грузов будут одинаковыми. Такие условия реализуются при смещении масс тремя способами (б, в и г на рис. 3.13). При отпуске грузов из положения (б) в системе будет происходить первое нормальное колебание на частоте  $\omega_I$ ; из положения (в) — второе на частоте  $\omega_{II}$ ; из положения (г) — третье на частоте  $\omega_{III}$ . Очевидно, что  $\omega_{III} > \omega_{II} > \omega_I$ .

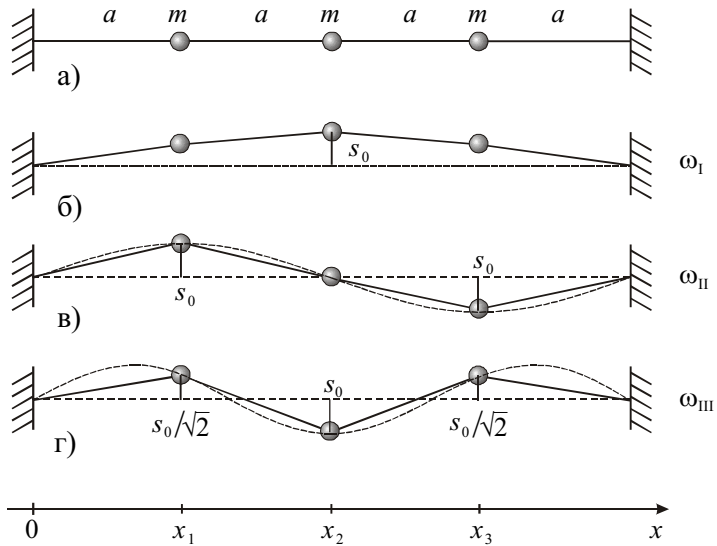


Рис. 3.13.

Конфигурация каждой из мод может быть описана с помощью двух коэффициентов распределения амплитуд. Забегая вперед, отметим, что для четырех масс таких коэффициентов должно быть три, и т.д.

Однако ситуация может быть упрощена, если обратить внимание, что расположение масс в позициях (б), (в) и (г) на рис. 3.13 напоминает «синусоидальное» (пунктиром изображен фрагмент функции  $\sin kx$ , где  $k$  — некоторый параметр, характеризующий период этой функции). Тогда конфигурация первой моды будет описана следующим образом:

$$s_0^I(x) = s_0 \sin k_I x; \quad k_I = \frac{\pi}{4a}. \tag{3.44a}$$

Для второй моды:

$$s_0^{II}(x) = s_0 \sin k_{II} x; \quad k_{II} = 2k_I. \tag{3.44б}$$

Для третьей моды:

$$s_0^{III}(x) = s_0 \sin k_{III} x; \quad k_{III} = 3k_I. \tag{3.44в}$$

Роль безразмерных коэффициентов  $\zeta$  выполняет функция  $\sin k_p x$  ( $p = I, II, III$ ), вычисленная в точках  $x = x_1 = a$ ,  $x = x_2 = 2a$ ,  $x = x_3 = 3a$ .

Другими примерами связанных осцилляторов являются атомы в молекулах  $CO_2$ ,  $H_2O$  и т. д. На рис. 3.14 изображены конфигурации мод и приведены значения частот нормальных колебаний молекул. Обратим внимание, что эти частоты имеют порядок величины  $(10^{13} \div 10^{14}) \text{ с}^{-1}$  и значительно превышают (на несколько порядков) частоты механических колебаний макроскопических систем. Резонансные колебания этих (и других) молекул можно возбудить при взаимодействии разноименно заряженных ионов, составляющих эти молекулы, с электрическим полем световой электромагнитной волны инфракрасного (ИК) диапазона, имеющей близкую частоту.

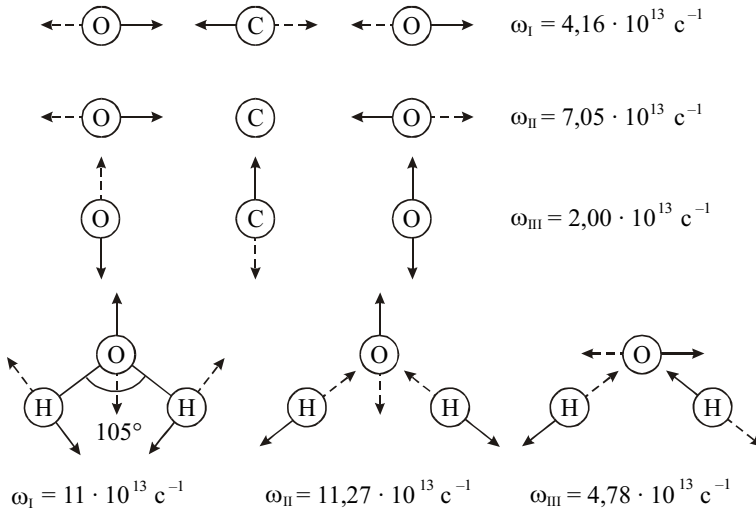


Рис. 3.14.

В курсе «Оптика» мы познакомимся с таким взаимодействием, приводящим, в частности, к ослаблению (поглощению) энергии световой волны и ее рассеянию в среде с колеблющимися молекулами (комбинационному рассеянию).

Будем увеличивать число масс, закрепленных на шнуре через равные промежутки  $a$ . Если  $N$  — число этих масс, то полная длина шнура равна  $\ell = a(N + 1)$  (рис. 3.15). Рассчитаем нормальные частоты всех мод и их конфигурации. Будем считать, что невесомый шнур натянут с силой  $F$ , и при малых отклонениях масс от положения равновесия  $s \ll \ell$  эта сила не меняется. Каждая масса испытывает действие сил натяжения шнура по обе стороны от нее.

На рис. 3.16 показано мгновенное положение фрагмента шнура и трех масс. Если углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  малы, то возвращающая сила, действующая на среднюю массу, равна:

$$f = -F \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \approx -F(\theta_1 + \theta_2). \tag{3.45}$$

Величины углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  определяются взаимным расположением масс:

$$\theta_1 \approx \frac{s_n - s_{n-1}}{a}; \quad \theta_2 \approx \frac{s_n - s_{n+1}}{a}. \tag{3.46}$$

С учетом (3.45) и (3.46) уравнение движения средней массы примет вид:

$$m\ddot{s}_n = -F \left( \frac{s_n - s_{n-1}}{a} + \frac{s_n - s_{n+1}}{a} \right) \tag{3.47}$$

Если колебания являются нормальными, то

$$\begin{aligned} s_{n-1}(t) &= s_{0,n-1} \sin \omega t, \\ s_n(t) &= s_{0,n} \sin \omega t, \\ s_{n+1}(t) &= s_{0,n+1} \sin \omega t, \end{aligned} \tag{3.48}$$

где частоту  $\omega$  и распределение амплитуд предстоит определить.

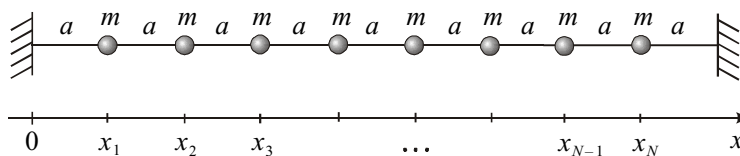


Рис. 3.15.

Подставляя (3.48) в (3.47), получим

$$-s_{0,n-1} + \left(2 - \frac{ma\omega^2}{F}\right)s_{0,n} - s_{0,n+1} = 0. \quad (3.49)$$

Поскольку  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ , то (3.49) представляет собой систему  $N$  линейных однородных уравнений.

Из условия равенства нулю ее определителя можно рассчитать все  $N$  нормальных частот, а затем для каждой из этих частот определить распределение амплитуд в каждой моде, число которых, очевидно, будет равно  $N$ .

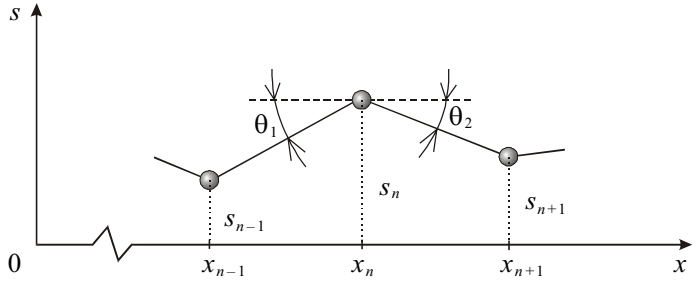


Рис. 3.16.

Мы же используем уже описанный ранее более легкий путь и будем искать конфигурацию каждой моды в виде «синусоидальной» конфигурации:

$$s_0(x) = s_0 \sin kx, \text{ или } s_{0n} = s_0(x_n), \quad (3.50)$$

где  $x_1 = a, x_2 = 2a, \dots, x_n = na, \dots, x_N = Na$ .

Убедимся, что конфигурация (3.50) удовлетворяет уравнению (3.49), которое перепишем в виде:

$$\frac{s_{0,n+1} + s_{0,n-1}}{s_{0,n}} = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}, \quad (3.51)$$

где  $\Omega^2 = \frac{F}{ma}$ .

Подставим (3.50) в левую часть (3.51):

$$\frac{\sin k(n+1)a + \sin k(n-1)a}{\sin kna} = 2 \cos ka = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}. \quad (3.52)$$

Очевидно, что (3.50) удовлетворит уравнению (3.49), если подобрать для данного  $k$  подходящую частоту  $\omega$ .

Параметр  $k$  назовем волновым числом. Объяснение этому будет дано в последующих лекциях. Этот параметр должен быть таким, чтобы на концах закрепленного шнура удовлетворялись граничные условия. При  $x = 0$  эти условия выполняются:  $\sin(k \cdot 0) = 0$ . На другом конце, где  $x = a(N + 1)$ , потребуем, чтобы

$$\sin ka(N + 1) = 0, \quad (3.53)$$

откуда получаем:

$$k_p a(N + 1) = p \cdot \pi, \text{ или } k_p = \frac{p\pi}{a(N + 1)}, \quad (3.54)$$

где целое число  $p = I, II, \dots, N$  характеризует номер моды (количество мод, как было показано выше, равно  $N$ ). Каждой  $p$ -ой моде соответствует своя частота, которая легко находится из уравнения (3.52):

$$\omega_p^2 = 2\Omega^2 (1 - \cos k_p a) = 2\Omega^2 \left(1 - \cos \frac{p\pi}{N + 1}\right) \quad (3.55)$$

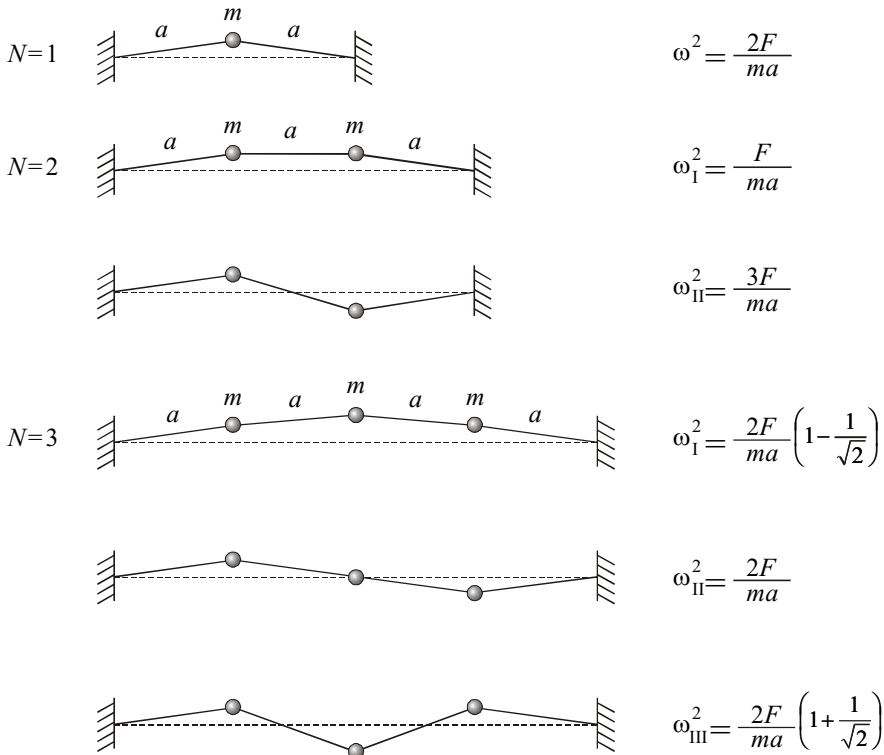


Рис. 3.17.

Зная волновые числа  $k_p$  и нормальные частоты  $\omega_p$ , не составляет труда записать выражения для смещений всех масс, как функций времени. Для  $p$ -ой моды можно записать:

$$s_p(x_n, t) = s_{0p} \sin k_p x_n \cdot \sin(\omega_p t + \varphi_p); \quad (3.56)$$

здесь  $x_n = na$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Амплитуда  $s_{0p}$  и начальная фаза  $\varphi_p$  определяются начальными условиями, а  $k_p$  и  $\omega_p$  — свойствами самой системы (формулы (3.54) и (3.55)).

В силу линейности колебательной системы в самом общем случае колебаний получаем для смещения всех частиц выражение:

$$s(x_n, t) = \sum_p s_p(x_n, t), \quad (3.57)$$

где суммирование проводится только по тем модам, которые «участвуют» в колебаниях.

Так, например, удерживая все время среднюю массу в положении равновесия, мы не можем возбудить моды с нечетными номерами  $p = I, III, \dots$ , поскольку эти моды «требуют» смещения центральной массы.

Пользуясь формулой (3.55), нетрудно вычислить нормальные частоты колеблющихся масс на шнуре.

На рис. 3.17 изображены моды колебаний в системе с одной, двумя и тремя массами и для каждой моды указаны величины нормальных частот.

В заключение отметим, что связь типа (3.55) между частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  называется дисперсионным соотношением. Это соотношение будет далее использовано при анализе распространения волн в периодических структурах.

## ЛЕКЦИЯ 4

*Распространение возмущений в системе с большим числом степеней свободы. Скорость распространения. Возбуждение волн. Группа волн и ее скорость. Волновое уравнение. Волны в сплошном шнуре. Отражение волн. Возбуждение стоячих волн в шнуре. Моды колебаний. Волны в упругих телах. Поперечные волны. Энергия, переносимая волной. Вектор Умова. Продольные волны. Скорость волн в тонком и толстом стержнях. Отражение и прохождение волн на границах двух сред. Удельное волновое сопротивление.*

### Распространение возмущений в системе с большим числом степеней свободы.

Рассмотрим колебания  $N \gg 1$  масс на резиновом шнуре (рис. 4.1а). Отклоним несколько масс в середине шнура от положения равновесия (рис. 4.1б), и затем отпустим их в момент времени  $t = 0$ . Как показывает опыт, эта начальная конфигурация, представляющая собой по форме импульс, с течением времени трансформируется в два одинаковых импульса, которые побегут в разные стороны с некоторой конечной скоростью  $c$  (рис. 4.1в). Эти импульсы добегут до концов шнура, изменят свою полярность при отражении и побегут в обратном направлении (рис. 4.1г). После встречи в середине шнура они отразятся еще раз, восстановят исходную полярность и спустя время  $\Delta t = 2\ell / c$  вновь встретятся в середине, сформировав исходный импульс. Затем этот процесс с периодом  $\Delta t$  будет повторяться до тех пор, пока импульсы не затухнут из-за диссипации энергии.

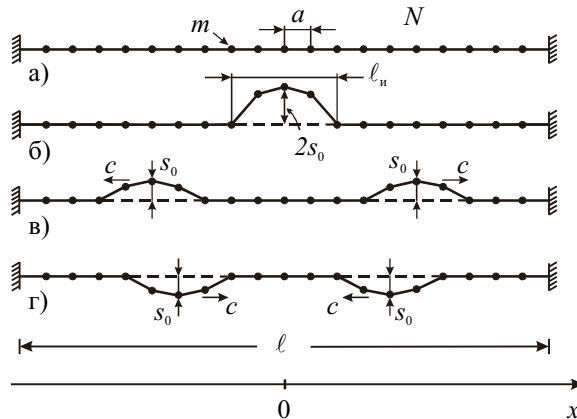


Рис. 4.1.

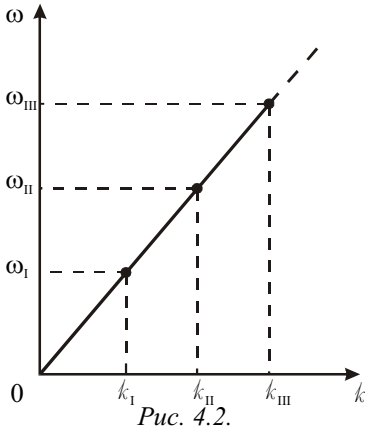
С точки зрения повседневного опыта в этом нет ничего удивительного, поскольку смещения группы масс ведут к возникновению упругих сил, стремящихся вернуть эту группу в положение равновесия и одновременно вывести соседние частицы из положения равновесия.

С точки зрения описания колебаний «на языке мод» также понятно, что отклонив, а затем отпустив группу частиц, мы возбуждаем много мод. Колебания всех  $N$  частиц происходят одновременно на нескольких нормальных частотах  $\omega_p$ . Все эти частоты различны, и сумма нормальных колебаний представляет собой биения. Поскольку через время, равное периоду биений, колебания группы частиц в центре шнура восстановятся, то очевидно, что период биений равен упоминавшемуся несколько ранее времени  $\Delta t = 2\ell / c$ .

Определим скорость  $c$ , исходя из представления о биениях, как суперпозиции нормальных колебаний. Для этого вначале перепишем дисперсионное соотношение (3.55) в виде

$$\omega_p = 2\Omega \sin \frac{k_p a}{2} = 2\Omega \sin \frac{1}{2} \left( \frac{p\pi}{N+1} \right) \quad (4.1)$$





Строго говоря, при наличии многих частот в спектре колебаний, даваемых формулой (4.1), биения не будут периодическими — начальная конфигурация не повторяется. Визуально это будет проявляться в искажении формы бегущих импульсов, если длина импульса  $\ell_n \geq a$  (импульс «накрывает» мало частиц), а шнур достаточно длинный. Говорят, что искажение импульса связано с дисперсией «среды» (шнура с масса-ми), по которой импульс распространяется.

Это искажение будет ничтожным, если  $\ell_n \gg a$  (группа состоит из большого числа колеблющихся масс). Так обычно и происходит при распространении возмущений в твердом теле, где  $a \sim 10^{-10}$  м (расстояние между узлами кристаллической решетки, около которых колеблются атомы).

Если  $\ell_n \gg a$ , то в спектре колебаний доминируют низшие моды, которые характеризуются волновыми числами  $k_p$ , где  $p = I, II, III, \dots \ll N$ . Частоты этих мод получаются из формулы (4.1):

$$\omega_p = \Omega a k_p = \frac{\Omega \pi}{N+1} \cdot p; \quad p = I, II, III, \dots \quad (4.2)$$

Здесь использовано приближение  $\sin x \approx x$  при  $x \ll 1$ . Эта зависимость  $\omega_p(k_p)$  изображена на рис. 4.2.

Обратим внимание, что низшие частоты располагаются эквидистантно:  $\Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I = \omega_{III} - \omega_{II} = \dots$ . Поэтому период биений (см. также формулу (3.14)) получается равным:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2(N+1)}{\Omega}. \quad (4.3)$$

Если учесть, что длина шнура  $\ell = a(N+1)$ , то скорость движения импульса в среде без дисперсии равна:

$$c_0 = \frac{2\ell}{\Delta t} = a\Omega = \sqrt{\frac{Fa}{m}}. \quad (4.4)$$

Если мы будем увеличивать число масс  $N$  на шнуре фиксированной длины, тем самым уменьшая расстояние  $a$ , то мы сделаем предельный переход к непрерывному распределению масс — т.е. к однородному весо-мому шнуру, при этом

$$\rho_1 = m/a \quad (4.5)$$

является массой единицы длины однородного шнура (иногда употребляют термин «плотность единицы длины»). Поэтому окончательно для скорости распространения импульса произвольной формы по шнуру имеем

$$c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1}}. \quad (4.6)$$

Например, в случае тонкого резинового шланга с линейной плотностью  $\rho_1 \sim 0,1$  кг/м, натянутого с силой  $F \sim 10^2$  Н, скорость движения импульса получается равной  $c_0 \sim 30$  м/с. Такая сравнительно небольшая величина скорости позволяет легко наблюдать распространение и отражение импульса.

Итак, подведем некоторые итоги.

1. Если пренебречь периодической структурой среды, то скорость  $c_0$  распространения импульса не зависит от его формы, а сам импульс при распространении не искажается (нет дисперсии).

2. Если ось  $x$  направить вдоль шнура и задать начальное возмущение (в момент  $t = 0$ ) в виде  $s(x)$ , то с течением времени возмущение шнура будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}s(x - c_0t) + \frac{1}{2}s(x + c_0t). \quad (4.7)$$

Первое слагаемое описывает возмущение, бегущее со скоростью  $c_0$  в положительном направлении оси  $x$ , указанном на рис. 4.1, а второе соответствует импульсу, распространяющемуся в противоположном направлении.

3. У концов невесомого шнура с массами оба импульса отражаются. Отраженный импульс имеет противоположную полярность (направление смещения  $s$ ) по сравнению с падающим.

Аналогичные граничные условия реализуются для сплошного массивного шнура с закрепленными концами (рис. 4.3).

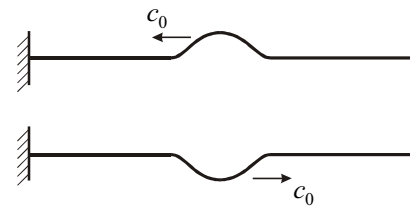


Рис. 4.3.

4. В области перекрытия бегущих импульсов образуется колебание, называемое стоячей волной. Так мы приходим к понятиям бегущих и стоячих волн, при этом стоячая волна может рассматриваться как суперпозиция волн, бегущих в противоположных направлениях.

**Возбуждение волн.** Рассмотрим колебания невесомого шнура с грузами, правый конец которого закреплен, а левый под действием внешней силы в момент времени  $t = 0$  начинает смещаться по гармоническому закону:

$$s(t) = s_0 \sin \omega t. \quad (4.8)$$

Под действием этой силы грузы, связанные друг с другом отрезками натянутого шнура, рано или поздно начнут совершать вынужденные гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Естественно, что систему грузов (по аналогии с системой с двумя грузами) можно заметно раскачать лишь в случае резонанса, когда частота  $\omega$  совпадает с одной из нормальных частот  $\omega_p$ .

Вначале придут в движение грузы вблизи левого подвижного конца шнура, а с течением времени в колебания будут вовлекаться все новые грузы.

Такие колебания представляют собой волновой процесс (волну), распространяющийся «слева – направо» с некоторой скоростью  $c_p$ . На рис. 4.4 изображены положения колеблющихся масс в некоторый момент времени  $t_0$ . Поскольку грузы колеблются «попе-

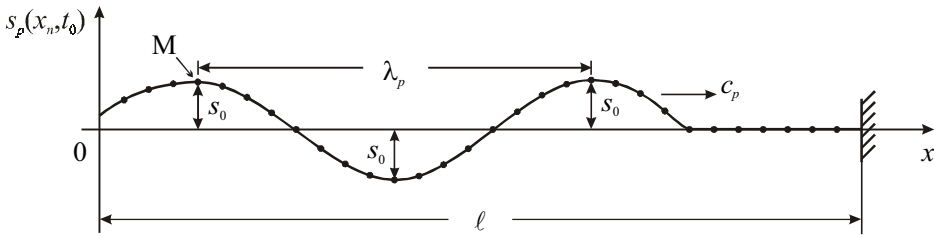


Рис. 4.4.

рек» направления распространения (оси  $Ox$ ), то волна называется поперечной. Эта волна добегит до правого закрепленного конца шнура и отразится. После этого будут существовать две волны: исходная бегущая (иногда ее называют падающей волной) и отраженная волна, которая бежит навстречу падающей. Спустя время  $\Delta t = 2\ell / c_p$  отраженная волна достигнет левого конца, снова отразится, и «сформируется» мода колебаний. Конфигурация этой моды задается волновым числом  $k_p$  (см. соотношение (4.1)).

Рассмотрим подробнее падающую волну с этим  $k_p$ . Пространственный период  $\lambda_p$ , изображенный на рис. 4.4 как минимальное расстояние между массами, колеблющимися в фазе, называется длиной волны. Длина волны связана с волновым числом  $k_p$  соотношением:

$$k_p = 2\pi / \lambda_p. \quad (4.9)$$

Если силы вязкого трения, приложенные к каждому из грузов, малы, то амплитуды колебаний всех грузов будут одинаковы и равны  $s_0$ . Теперь мы можем записать *уравнение бегущей волны* — уравнение, описывающее смещение любой из масс в произвольный момент времени. Для частоты  $\omega_p$ , волнового числа  $k_p$  и амплитуды  $s_0$  оно имеет вид:

$$\begin{aligned} s_p(x_n, t) &= s_0 \sin(\omega_p t - k_p x_n); \\ x_n &= a; 2a; \dots; na; \dots; Na. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Выражение  $\varphi = \omega_p t - k_p x_n$  называется фазой волны. Уравнение (4.10) отражает тот факт, что все массы колеблются с одинаковой частотой  $\omega_p$ , имеют одинаковую амплитуду  $s_0$ , однако эти колебания различаются по фазе  $\varphi$ .

Определим теперь скорость  $c_p$  движения этой волны. Для этого проследим за движением гребня волны, вершина которого в некоторый момент времени находится в точке М. Пусть за время  $\Delta t$  этот гребень сместится на расстояние  $\Delta x_n \gg a$ . Поскольку на вершине гребня массы имеют максимальное положительное смещение, то фаза их колебаний постоянна и равна

$$\omega_p t - k_p x_n = \frac{\pi}{2}. \quad (4.11)$$

Поэтому

$$\omega_p \Delta t - k_p \Delta x_n = 0. \quad (4.12)$$

Отсюда скорость  $c_p$  получается равной

$$c_p = \frac{\Delta x_n}{\Delta t} = \frac{\omega_p}{k_p} = v_p \cdot \lambda_p. \quad (4.13)$$

Скорость  $c_p$  называется фазовой скоростью гармонической волны с частотой  $\omega_p = 2\pi\nu_p$ . Проанализируем зависимость этой скорости от волнового числа, пользуясь дисперсионным соотношением (4.1). Для этого перепишем его с учетом (4.4) в виде:

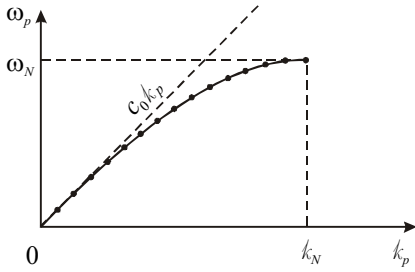


Рис. 4.5а.

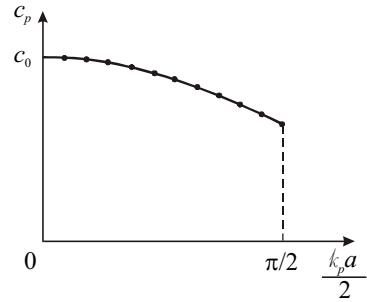


Рис. 4.5б.

$$\omega_p = c_0 k_p \cdot \left( \frac{\sin \frac{k_p a}{2}}{\frac{k_p a}{2}} \right) \tag{4.14}$$

График зависимости (4.14) называется дисперсионной кривой и изображен на рис. 4.5а.

На этой кривой точками отмечены значения частот  $\omega_p$  и волновых чисел  $k_p$ . Пунктиром изображена прямая  $\omega_p = c_0 k_p$ . Она получается из (4.14) предельным переходом при  $a \rightarrow 0$  (непрерывная среда).

Из формулы (4.14) или из рис. 4.5а можно сделать ряд принципиально важных выводов.

1) Из нелинейной зависимости  $\omega_p = \omega(k_p)$ , описываемой формулой (4.14), следует, что фазовая скорость гармонической волны  $c_p = \omega_p / k_p$  зависит от  $k_p$  (или от  $\omega_p$ ):

$$c_p = c_0 \cdot \frac{\sin \frac{k_p a}{2}}{\frac{k_p a}{2}}. \tag{4.15}$$

Зависимость (4.15) изображена на рис. 4.5б.

Это явление носит название дисперсии среды по отношению к распространяющейся в ней волне. Эквивалентным является выражение «дисперсия волны в среде». Если фазовая скорость волны не зависит от  $k_p$ , как, например, в случае непрерывной среды, то говорят, что дисперсия отсутствует.

2) Для маленьких волновых чисел ( $k_p a \ll 1$ , или  $\lambda_p \gg a$ ) дисперсия мала. Скорость таких «длинных волн»  $c_p \approx c_0$ , и среда может считаться сплошной.

3) С увеличением волнового числа  $k_p$  (а значит и  $\omega_p$ ) скорость  $c_p$ , как это следует из (4.15), убывает. Такое поведение скорости называется нормальной дисперсией. Следует отметить, что в оптике, помимо этой, реализуется и другая ситуация, когда фазовая скорость света в некотором диапазоне частот может возрастать с увеличением частоты. В этом случае дисперсия называется аномальной.

4) Дисперсионная кривая заканчивается, когда волновое число и частота достигают максимальных значений  $k_N$  и  $\omega_N$ . Они получаются из (4.14) и (4.1) при  $N \gg 1$ :

$$k_N = \frac{\pi}{a}; \quad \omega_N = 2\Omega.$$

Это означает, что волны с частотой  $\omega > \omega_N$  в такой среде распространяться не могут. Действительно, при частоте  $\omega = \omega_N$  длина волны  $\lambda_N = 2\pi/k_N = 2a$ . Волны с меньшей длиной волны не могут существовать, поскольку на длине распространяющейся волны должно находиться не меньше двух колеблющихся грузов.

Заметим, что в некоторых случаях, например, при распространении электромагнитных волн в твердом теле и в плазме, кривая дисперсии может начинаться с некоторой точки на оси частот  $\omega(0)$ . В таких средах могут распространяться электромагнитные волны только с частотами  $\omega$ , лежащими внутри интервала  $\omega(0) < \omega \leq \omega_N$ .

В качестве примера укажем, что для кристаллов величина  $F/a \sim 15$  Н/м ( $F$  — упругая сила, величина которой определяется межатомным взаимодействием). Если принять массу иона равной  $m \sim 6 \cdot 10^{-26}$  кг, то  $\omega_N = 2\sqrt{\frac{F}{ma}} \sim 3 \cdot 10^{13}$  с<sup>-1</sup>. Эта частота, как и частоты колебаний молекул  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ , лежит в инфракрасной области электромагнитного спектра. Поэтому при распространении ИК-излучения в кристаллах ионы могут совершать резонансные колебания. В этом частотном оптическом диапазоне может существовать сильная дисперсия света.

Отметим, что при распространении волн в протяженных средах проблемы «настройки» частоты  $\omega$  внешнего воздействия, порождающего волну, на частоту  $\omega_p$  одной из мод среды не существует. Любое воздействие внешней силы, даже сколь угодно близкой к гармонической, на самом деле всегда будет квазигармоническим, характеризуемым узким интервалом частот  $\Delta\omega \ll \omega$ . С другой стороны, для протяженной среды к частоте  $\omega$  будут близки частоты  $\omega_p$  мод с большими номерами  $p$  ( $p \gg 1$ ). Разность частот двух соседних мод  $\Delta\omega_p = \omega_{p+1} - \omega_p$ , как это легко видеть из рисунка 4.5, будет настолько малой, что  $\Delta\omega_p \ll \Delta\omega$ . Следовательно, для любой частоты  $\omega$  внешнего воздействия, прикладываемого к границе среды, по ней побежит волна, которую в ряде случаев можно приближенно считать гармонической:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx). \quad (4.16)$$

**Группа волн и ее скорость.** Как и внешнее воздействие, волна, возникающая в среде, будет, строго говоря, квазигармонической, т. е.  $\Delta\omega_p \ll \Delta\omega$ . Поэтому вместо (4.16) следует записать уравнение волны в более усложненном виде:

$$s(x, t) = s_0(x, t) \sin[\omega_0 t - k_0 x + \varphi_0(x, t)]. \quad (4.17)$$

Здесь амплитуда  $s_0(x, t)$  и фаза  $\varphi_0(x, t)$  являются медленно меняющимися функциями времени на некотором масштабе времени  $\tau$  (сравните с формулой (3.19)). Естественно, что такая волна представляет собой группу гармонических волн, частоты которых располагаются вблизи основной частоты  $\omega_0$  в пределах интервала  $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$ . Каждая из волн группы в среде с дисперсией имеет собственную фазовую скорость. В среде с нормальной дисперсией волны большей частоты будут двигаться медленнее, чем волны меньшей частоты. Возникает естественный вопрос: что является скоростью

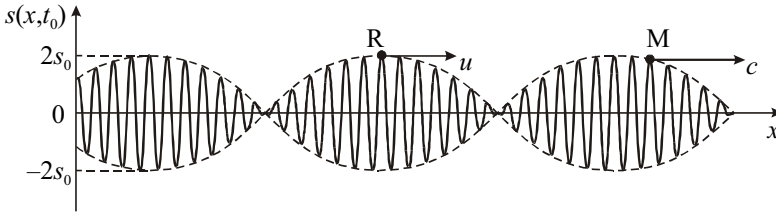


Рис. 4.6.

группы волн, и если такая скорость существует, то как ее вычислить? Какой физический смысл имеет эта скорость и в чем ее отличие от фазовой скорости ?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим для простоты группу из двух волн с одинаковыми амплитудами  $s_0$  и с близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , бегущих в положительном направлении оси  $x$ . Будем считать, что  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . С такой ситуацией мы уже встречались при анализе биений двух связанных осцилляторов. Зададим дисперсионные свойства среды дисперсионным соотношением  $\omega = \omega(k)$ . С его помощью вычислим значения  $k_1$  и  $k_2$  двух волновых чисел, соответствующих частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Тогда уравнение группы волн примет вид:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + s_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x) = 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \sin(\omega_0 t - k_0 x). \quad (4.18)$$

Здесь  $\Delta k = k_2 - k_1$ ,  $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ .

На рис. 4.6 изображена группа из двух волн в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$ . Выделим две точки: M и R. Первая из них отвечает фиксированному значению фазы  $\varphi_M = \omega_0 t - k_0 x_M$ , при которой  $\sin \varphi_M = 1$ . Очевидно, что скорость этой точки, определяемая из условия  $d\varphi_M = \omega_0 dt - k_0 dx_M = 0$ , равна

$$c = \frac{dx_M}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (4.19)$$

и совпадает с фазовой скоростью волны с частотой  $\omega_0$ .

Амплитуда квазигармонической волны (4.18) определяется как

$$s_0(x, t) = 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right), \quad (4.20)$$

и ее распределение на рис. 4.6 изображено пунктиром в виде медленно меняющейся вдоль  $x$  огибающей волны основной частоты  $\omega_0$ . Точка R на вершине этой огибающей будет двигаться со скоростью, отличающейся от  $c$ . Действительно, для координаты  $x_R$  этой точки, как это следует из (4.20), можем записать условие

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_R = const. \quad (4.21)$$

За время  $dt$  она сместится на расстояние  $dx_R$ , которое находится из равенства:

$$\frac{\Delta\omega}{2} dt - \frac{\Delta k}{2} dx_R = 0. \quad (4.22)$$

Следовательно, скорость движения вершины огибающей будет равна

$$u = \frac{dx_R}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (4.23)$$

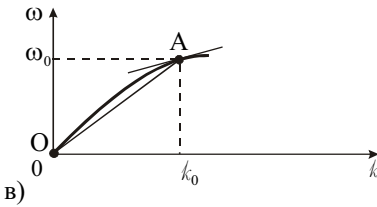
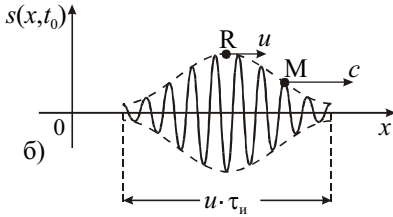
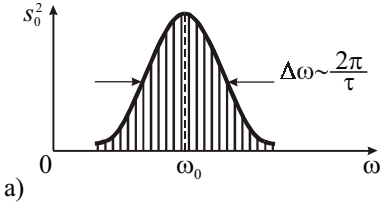


Рис. 4.7.

Эта скорость характеризует движение группы волн и называется групповой скоростью. Ее смысл станет еще более понятным, если в пределах интервала  $\Delta\omega$  в группе будут находиться волны с близко расположенными частотами, как, например, изображено на рис. 4.7а.

Сама группа имеет вид одного импульса длительностью  $\tau_n$ , распространяющегося вдоль оси  $x$  (рис. 4.7б). Импульс будет двигаться с групповой скоростью  $u = d\omega/dk$ . На дисперсионной кривой (рис. 4.7в) эта скорость равна угловому коэффициенту касательной прямой в точке А. «Синусоида» внутри импульса будет его обгонять и двигаться с фазовой скоростью  $c = \omega_0/k_0$ . Численно эта скорость будет равна угловому коэффициенту отрезка ОА. В среде без дисперсии дисперсионная кривая является прямой линией  $\omega = ck$ . Поэтому

$$c = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u, \quad (4.24)$$

т.е. фазовая и групповая скорости совпадают. В среде с нормальной дисперсией, как это видно из рис. 4.7в,  $u < c$ . В среде с аномальной дисперсией кривая  $\omega = \omega(k)$  должна загнуться вверх и, формально,  $u > c$ . Однако обычно эта зависимость настолько нелинейна, что понятие групповой скорости теряет смысл.

Действительно, когда импульс, изображенный на рис. 4.7б, пройдет очень большое расстояние в диспергирующей среде, то форма его исказится, и он растянется в пространстве. В среде с сильной аномальной дисперсией это искажение происходит уже на малых расстояниях, поэтому говорить о распространении импульса как целого с групповой скоростью  $u$  некорректно.

Дисперсионное уширение импульсов негативно сказывается, например, на скорости передачи информации (количество бит в единицу времени) посредством коротких световых импульсов, бегущих по волоконно-оптическим линиям связи, длина которых достигает нескольких тысяч километров. Два следующих друг за другом импульса могут расширяться настолько, что сольются в один (станут неразличимыми). Естественно, что приемник, установленный в конце линии, «воспримет» два импульса как один, и часть передаваемой информации будет утеряна.

**Волновое уравнение.** Уравнение бегущей гармонической волны в однородном шнуре, где дисперсия отсутствует ( $\omega = c_0 k$ ), по аналогии с (4.16) имеет вид:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t \mp kx) = s_0 \sin \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{c_0} \right) \right]. \quad (4.25)$$

Знак « $\rightarrow$ » соответствует волне, бегущей в положительном направлении по оси  $Ox$ , а знак « $\leftarrow$ » — в отрицательном.

В более общем случае распространения произвольного импульса (группы волн), двигающегося с той же скоростью  $c_0$ , уравнение волны можно записать в виде:

$$s(x, t) = s \left( t \mp \frac{x}{c_0} \right), \quad (4.26)$$

где  $s(\theta)$  — произвольная функция своего аргумента  $\theta = t \mp x/c_0$ .

Покажем, что закон движения шнура (4.26) и, конечно, его частный случай (4.25) являются решениями некоторого уравнения движения, которое называется *волновым уравнением*. Это волновое уравнение можно получить предельным переходом из уравнения (3.47).

На рис. 4.8 показан фрагмент колеблющегося шнура. На этом фрагменте изображены три отрезка шнура длиной  $\Delta x$  и массой  $dm$  каждый. Смещения этих отрезков в некоторый произвольный момент времени равны  $s_{n-1} = s(x - \Delta x, t)$ ,  $s_n = s(x, t)$ ,  $s_{n+1} = s(x + \Delta x, t)$ . Ускорение центрального отрезка  $\ddot{s}_n = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}$ . Оно записано в виде второй частной производной функции  $s(x, t)$  по времени. Учтем далее, что

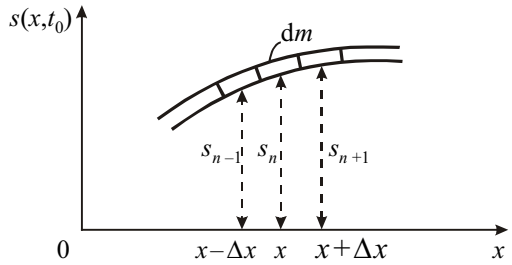


Рис. 4.8.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x, t) - s(x, t)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \frac{dx}{2}}. \quad (4.27a)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{s_n - s_{n-1}}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x, t) - s(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \frac{dx}{2}}. \quad (4.27b)$$

Обратим внимание, что сила  $F \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + dx/2}$  является проекцией на направление смещения  $s$  силы  $F$ , приложенной к центральному элементу справа (в точке  $x + dx/2$ ).

Аналогично, слева (в точке  $x - dx/2$ ) проекция этой силы равна  $-F \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - dx/2}$ . Результирующая этих сил, очевидно, определяется приращением первой производной на длине бесконечно малого элемента  $dx$ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F}{dm} \left( \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + dx/2} - \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - dx/2} \right) \quad (4.28)$$



Если теперь учесть, что  $dm = \rho_1 dx$  ( $\rho_1$  — плотность единицы длины, или линейная плотность шнура), то (4.28) примет вид волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_1} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.29)$$

Это волновое уравнение является математическим выражением второго закона Ньютона, в котором ускорение единицы длины шнура и действующая на него сила записаны в виде вторых частных производных смещения  $s$  по времени и координате соответственно. С математической точки зрения оно является линейным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка. Его решение хорошо известно: им может быть любая функция  $s(\theta)$ , аргумент которой «сконструирован» в виде (4.26), а

скорость  $c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1}}$ . Убедимся в справедливости этого утверждения. Для этого вычислим вторые производные в соответствии с правилами дифференцирования функции со сложным аргументом  $\theta = t \mp \frac{x}{c_0}$ :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta}; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \left( \mp \frac{1}{c_0} \right) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{d^2 s}{d\theta^2}; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \left( \mp \frac{1}{c_0} \right)^2. \quad (4.31)$$

Подставляя вторые производные из (4.31) в (4.29), приходим к выводу, что при  $c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1}}$  уравнение (4.29) тождественно удовлетворяется, т.е. функция  $s(\theta)$  действительно является его решением.

Волновое уравнение является одним из фундаментальных уравнений. В разных областях физики это уравнение получается как результат применения соответствующих законов, описывающих поведение систем различной природы (механических, электромагнитных и др.). В общем случае оно описывает распространение волн в трехмерном пространстве и имеет более сложный вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) \quad (4.32)$$

Под  $s$  может подразумеваться любая колеблющаяся величина: смещение, скорость, плотность, давление, электрический ток, электрическое напряжение, напряженность электрического и индукция магнитного полей и др.

Важно подчеркнуть, что если нам удастся получить волновое уравнение (вывести его) для какого-либо процесса, то стоящий перед вторыми пространственными производными множитель сразу определяет квадрат скорости распространения волны в среде без дисперсии. Этим приемом часто пользуются для вычисления скорости распространения волн различной природы. Ниже мы тоже так поступим, когда будем рассматривать волны в твердых телах, жидкостях и газах.

**Отражение волны на конце шнура.** Мы уже упоминали в начале этой лекции, что волна, достигнув конца шнура, отразится. Характер этого отражения зависит от условий закрепления конца шнура (граничных условий).

Рассмотрим вначале более подробно процесс отражения импульса от закрепленного конца шнура.

На рис. 4.9 показаны последовательные стадии отражения импульса треугольной формы, где пунктиром изображены «падающий» и «отраженный» импульсы. Если длительность импульса равна  $\tau_n$ , то его протяженность вдоль струны равна  $c_0 \tau_n$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  он добежит до конца струны. В последующие моменты времени шнур будет воздействовать на кронштейн, к которому прикреплен его конец, с переменной силой, перпендикулярной направлению движения импульса. Эта сила в момент времени  $t > 0$  начинает тянуть кронштейн вверх. В течении времени  $0 < t < \tau_n / 2$  она остается постоянной, и в момент времени  $t = \tau_n / 2$  становится равной нулю. По третьему закону Ньютона с такой же силой кронштейн действует вниз на конец шнура. В момент времени  $t = \tau_n / 2$  шнур

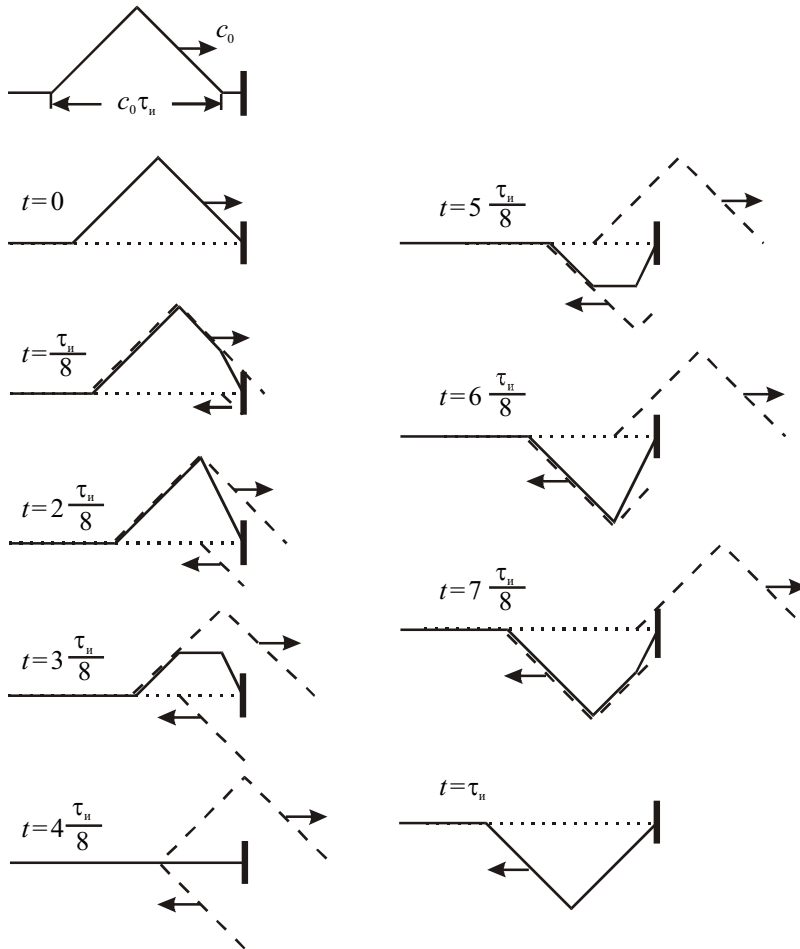


Рис. 4.9.

становится прямым. Однако часть шнура длиной  $c\tau_n/2$  продолжает двигаться вниз по инерции. При  $t > \tau_n/2$  шнур тянет кронштейн вниз, и это действие прекращается при  $t = \tau_n$ . Естественно, что кронштейн воздействует на конец шнура с силой, направленной вверх, тормозя движение его элементов вниз. Окончательно поперечное действие шнура на кронштейн прекратится при  $t > \tau_n$ , когда сформируется отраженный импульс, имеющий противоположную (по отношению к падающему) полярность.

Если по шнуру бежит гармоническая волна, то по достижении закрепленного конца шнура возникает обращенная отраженная волна. Чтобы учесть изменение ее полярности, в аргумент уравнения отраженной волны добавляют фазовый сдвиг  $\varphi_{\text{отр}} = \pi$ . Поэтому говорят, что в этом случае при отражении фаза волны скачком меняется на  $\pi$ , или «теряется полволны». В общем случае при произвольных граничных условиях сдвиг фазы  $\varphi_{\text{отр}}$  может меняться в интервале  $0 \leq \varphi_{\text{отр}} \leq \pi$ . Поясним сказанное простейшим расчетом.

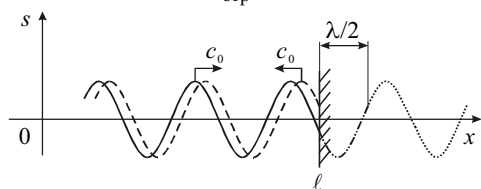


Рис. 4.10.

Пусть по шнуру бежит гармоническая волна. Достигнув конца шнура при  $x = l$ , она будет отражаться (рис. 4.10). Смещение любого участка, имеющего координату  $x \leq l$ , определяется как суперпозиция бегущей и отраженной волн:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx) + s_0 \sin[\omega t - k(2l - x) + \varphi_{\text{отр}}]. \quad (4.33)$$

В (4.33) учтено, что отраженная волна, во-первых, проходит расстояние «туда и обратно», равное  $l + (l - x) = 2l - x$ , и, во-вторых, приобретает сдвиг фазы  $\varphi_{\text{отр}}$  при ее отражении. Проведем суммирование в (4.33) и получим:

$$s(x, t) = 2s_0 \cos \left[ k(\ell - x) + \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} \right] \sin \left[ \omega t - k\ell + \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} \right]. \quad (4.34)$$

Полагаем, что амплитуда волны  $s_0$  остается постоянной при распространении и не меняется при отражении.

Это выражение является уравнением стоячей волны. Основные ее характеристики могут быть сведены к следующим:

1. В стоячей волне все участки шнура колеблются с одинаковой частотой  $\omega$  и в фазе, однако амплитуда этих колебаний меняется вдоль шнура, т.е. стоячая волна является модой колебаний.

2. Амплитуда колебаний в стоячей волне получается из (4.34) равной:

$$A(x) = 2s_0 \cos \left[ k(\ell - x) + \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} \right]. \quad (4.35)$$

Из этого выражения видно, что некоторые участки шнура колеблются с амплитудой, равной  $2s_0$ . Это так называемые «пучности» стоячей волны. С другой стороны, существуют участки, которые остаются неподвижными, т.к. для них амплитуда  $A = 0$ . Это так называемые «узлы» стоячей волны.

На рис 4.11 изображены смещения фрагмента струны для трех последовательных моментов времени  $t_1, t_2$  и  $t_3$ . Нетрудно показать, что расстояния между двумя соседними узлами, указанными точками,

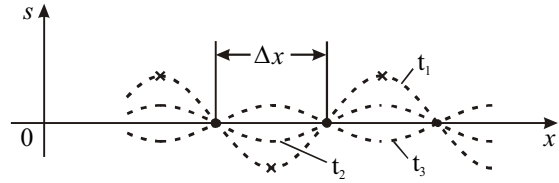


Рис. 4.11.

и составляет величину  $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$ .

3. Все части шнура, лежащие между двумя соседними узлами, совершают колебания в фазе. При переходе через узел фаза колебаний скачком изменяется на  $\pi$ , что соответствует изменению знака  $A(x)$ .

4. На конце шнура ( $x = \ell$ ) амплитуда

$$A(\ell) = 2s_0 \cos \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}. \quad (4.36)$$

Для закрепленного конца шнура  $A(\ell) = 0$  и  $\varphi_{\text{отр}} = \pi$ . На рис. 4.10 показан участок в полволны, который «теряется» при таком отражении. Расположенная правее этого участка часть волны, изображенная пунктиром в области  $x > \ell$ , после поворота направления распространения как раз и будет являться волной, отраженной в закрепленной точке  $x = \ell$ .

Обратимся теперь к отражению волны от свободного конца шнура. Технически это можно реализовать, если конец шнура привязать к тонкой и легкой нити, которая служит лишь для создания натяжения шнура с силой  $F$ .

Процесс отражения треугольного импульса от свободного конца шнура показан на рис. 4.12. Обращают на себя внимание два обстоятельства:

1. Отраженный импульс сохраняет ту же полярность, что и падающий. Это связано с тем, что при движении свободный конец будет тянуть вверх прилегающие к нему слева участки шнура, и, в результате, будет возбужден отраженный импульс, в котором элементы шнура также смещены вверх. В случае гармонической волны отраженная волна находится в фазе с падающей. Образующаяся стоячая волна будет описываться уравнением (4.34), в котором  $\varphi_{\text{отр}} = 0$ .

2. Конец шнура совершает «взмах», величина которого вдвое превышает амплитуду импульса в его середине. Для гармонической волны на конце шнура ( $x = \ell$ ) образуется пучность стоячей волны. Это следует из формулы (4.36), в которой следует положить  $\varphi_{\text{отр}} = 0$ .

**Возбуждение стоячих волн в шнуре. Моды колебаний.** Пусть кронштейн, к которому привязан левый конец шнура, совершает гармонические колебания  $s(t) = \xi_0 \sin \omega t$ , где  $\xi_0$  — очень малая амплитуда. Поэтому левый конец шнура можно считать закрепленным. По шнуру побежит гармоническая волна (рис. 4.13), которая после отражения от правого закрепленного конца приобретет сдвиг фазы, равный  $\pi$ . Добежав до левого конца, она еще раз отразится, а сдвиг фазы станет равным  $2\pi$ .

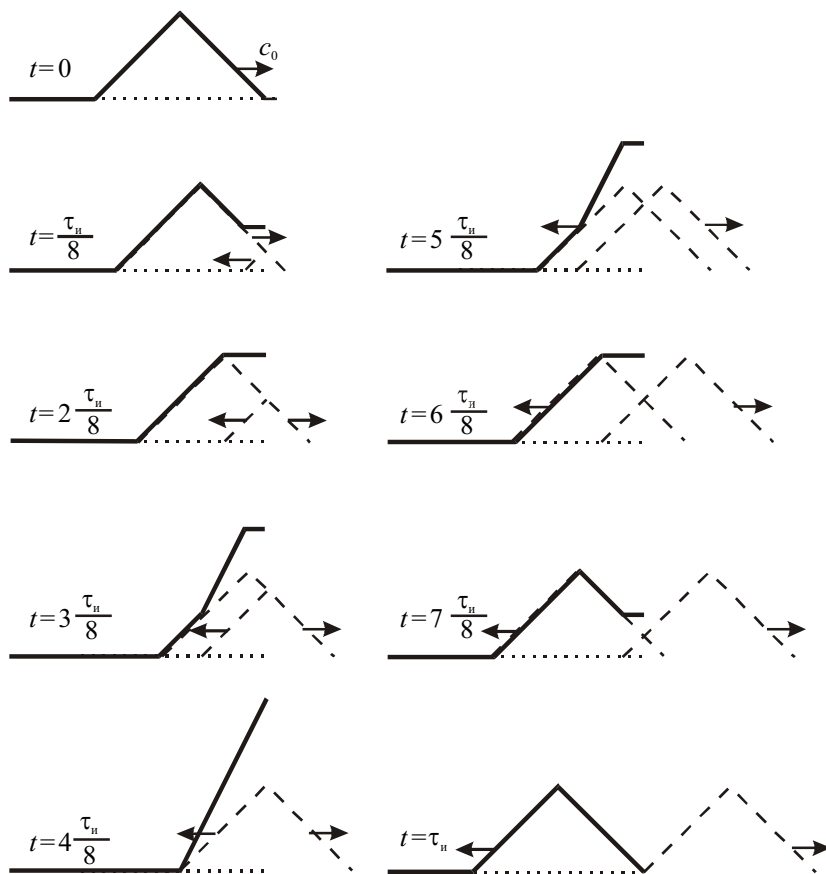


Рис. 4.12.

Двукратно отраженная волна наложится на постоянно бегущую вправо гармоническую волну. Если сдвиг фазы колебаний у этих волн будет кратным величине  $2\pi$ , то результатом наложения будет волна, амплитуда которой превышает амплитуду  $\xi_0$  исходной бегущей волны. Таким образом, бегущая волна усилится. Если бы не было потерь энергии, то нарастание амплитуды при многократном отражении было бы неограниченным. Однако потери, как мы не раз видели, также увеличатся с ростом амплитуды. Поэтому колебания установятся: в систему будет закачено некоторое количество энергии, а дальнейший приток ее будет равен диссипации.

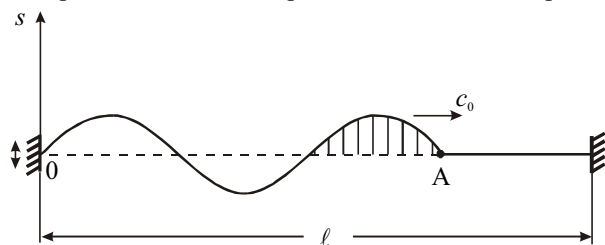


Рис. 4.13.

Определим частоту внешнего воздействия  $\omega$ , с которой следует двигать левый кронштейн, чтобы обеспечить максимальное усиление волны. Поскольку бегущая гармоническая волна может рассматриваться как набор следующих друг за другом

со скоростью  $c_0$  импульсов разной полярности, то мы проследим за усилением любого из них (например, заштрихованного на рис. 4.13). Время движения импульса (для определенности точки А в его начале) по шнуру туда и обратно равно  $\Delta t = 2\ell / c_0$ . Учтем далее, что после двух отражений этот импульс два раза обратится. Для его усиления необходимо, чтобы в момент  $t = \Delta t$  левый конец шнура проходил положение равновесия и двигался при этом вверх:

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \xi_0 \sin(\omega \Delta t) = 0, \\ \dot{s}(\Delta t) &= \xi_0 \omega \cos(\omega \Delta t) = +\xi_0 \omega. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Поэтому частота  $\omega$  должна удовлетворять условию

$$\omega_p \Delta t = 2\pi p, \tag{4.38}$$

где  $p = I, II, III, \dots$

Отсюда

$$\omega_p = \frac{\pi c_0}{\ell} p. \tag{4.39}$$

Конфигурацию колеблющейся струны на частотах (4.39) можно легко нарисовать, когда амплитуды бегущей и отраженной волн не меняются вдоль шнура и равны между собой. Очевидно, что это будут стоячие волны, рассмотренные нами выше и соответствующие одинаковым граничным условиям: на обоих концах шнура должны быть узлы смещения.

Для примера на рис. 4.14 изображены три возможные конфигурации шнура в момент времени, когда смещения элементов шнура максимальны. Колебания, соответствующие этим конфигурациям, являются нормальными колебаниями (модами), а частоты  $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$  — нормальными частотами. Если действие внешней силы прекратится, то эти колебания будут продолжаться как собственные, пока не затухнут.

Условие (4.39) можно переписать в более наглядном виде, если перейти от частоты  $\omega_p$  к длине волны  $\lambda_p = 2\pi c_0 / \omega_p$ :

$$\ell = p \frac{\lambda_p}{2}. \tag{4.40}$$

Это условие означает, что при нормальных колебаниях на длине шнура должно укладываться целое число полуволн. Легко теперь видеть, что каждая из мод может быть возбуждена, если прикладывать силу нужной частоты к любому участку шнура, за исключением тех, которые совпадают с узлами данной моды.

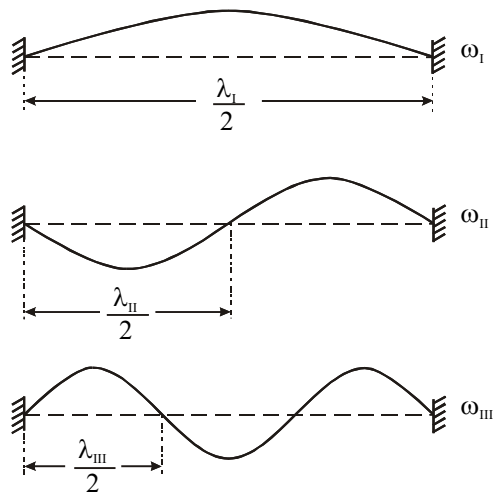


Рис. 4.14.

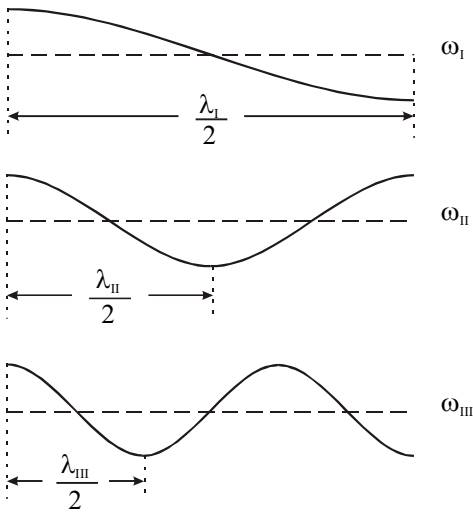


Рис. 4.15.

Видоизменим граничные условия и сделаем оба конца шнура свободными (привяжем их к натянутым легким нитям). Подсчитаем частоты вынуждающей силы, на которых возбуждаются стоячие волны (моды). Учтем, что после двух отражений импульс не меняет свою полярность, поэтому условие (4.40) останется прежним.

На рис. 4.15 показаны конфигурации мод для шнура со свободными концами. Видно, что при нормальных колебаниях на длине шнура также должно укладываться целое число полуволн, но таким образом, чтобы на концах шнура были пучности.

Закрепим теперь только левый конец шнура и будем двигать кронштейн с малой амплитудой  $\xi_0$ . Условие оптимального возбуждения стоячих волн (мод) получается из тех соображений, что импульс обращается только при отражении от левого конца шнура. Для усиления импульса необходимо, чтобы левый конец в момент времени  $t = \Delta t$  двигался вниз, проходя положение равновесия:

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \xi_0 \sin(\omega \Delta t) = 0, \\ \dot{s}(\Delta t) &= \xi_0 \omega \cos(\omega \Delta t) = -\xi_0 \omega. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Поэтому частота  $\omega$  должна удовлетворять условию

$$\omega_p \Delta t = (2p - 1)\pi, \quad (4.42)$$

где  $p = I, II, III, \dots$

Отсюда

$$\omega_p = \frac{\pi c_0}{2\ell} (2p - 1). \quad (4.43)$$

Последнее условие становится более наглядным, если перейти к длине волны  $\lambda_p$ :

$$\ell = (2p - 1) \frac{\lambda_p}{4}, \quad (4.44)$$

где  $p = I, II, III, \dots$

Соответствующие три низшие моды изображены на рис. 4.16. Очевидно, что это будут стоячие волны, отвечающие разным граничным условиям: на левом конце должен быть узел, а на правом — пучность. На длине шнура при этом укладывается нечетное число четвертей длин волн.

**Замечание.** При возбуждении моды мы задавали закон движения закрепленного конца шнура в виде  $s(t) = \xi_0 \sin \omega t$ , что может вызвать у читателя некоторое недоумение — как может двигаться закрепленный конец? Однако амплитуда колебаний  $\xi_0$  обычно значи-

тельно меньше амплитуды колебаний в пучностях, поэтому незначительно вибрирующий конец шнура может рассматриваться, как неподвижный.

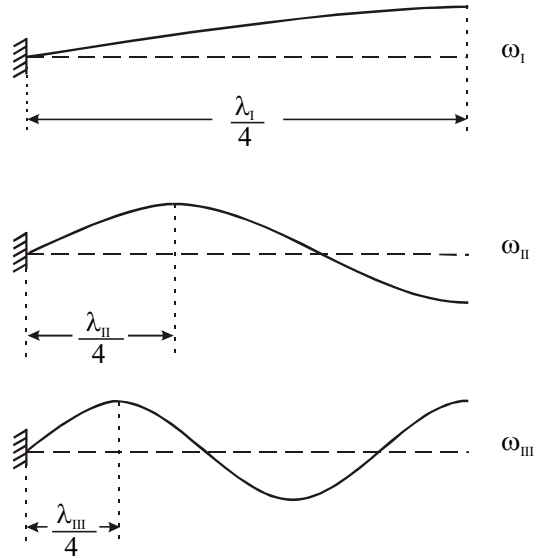


Рис. 4.16.

**Волны в упругих телах.** Как мы видели, силы взаимодействия между соседними колеблющимися элементами шнура обеспечивают распространение в нем волн. В упругих телах такие силы сводятся к касательным и нормальным напряжениям, возникающим при деформациях сдвига и растяжения (сжатия). Этим деформациям соответствуют 2 типа волн: поперечные и продольные. Рассмотрим эти волны по отдельности.

**Поперечные волны.** Если по стержню, изготовленному из упругого материала, ударить молотком в его средней части (рис. 4.17), то к его концам побегут импульсы, как это имело место в шнуре с грузами, изображенном на рис. 4.1. Однако поперечные смещения частиц стержня будут незаметны для глаза, поэтому для регистрации бегущих по стержню возмущений требуются специальные методы.

Поскольку дисперсия волн механической природы в сплошной среде отсутствует, то скорость их распространения можно рассчитать с помощью волнового уравнения.

На рис. 4.18 показан фрагмент колеблющегося стержня. На средний элемент длиной  $dx$  действуют касательные напряжения (слева  $\sigma_\tau(x)$  и справа  $\sigma_\tau(x + dx)$ ), величины которых пропорциональны деформациям сдвига соседних элементов:

$$\sigma_\tau(x) = G \operatorname{tg} \gamma(x) = G \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x, \tag{4.45}$$

$$\sigma_\tau(x + dx) = G \operatorname{tg} \gamma(x + dx) = G \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+dx}.$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига,  $\gamma$  — угол сдвига.

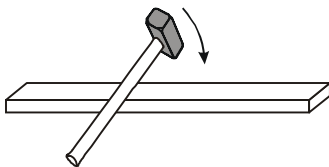


Рис. 4.17.

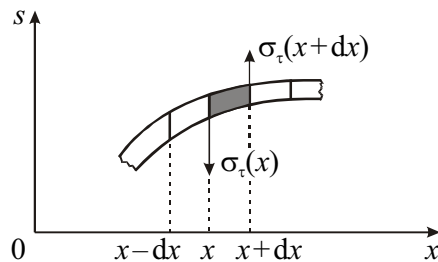


Рис. 4.18.



Если площадь поперечного сечения стержня равна  $S$ , то масса элемента  $dm = S\rho dx$  ( $\rho$  — плотность материала). Следовательно, уравнение его движения может быть записано в виде:

$$S\rho dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_x \right) S. \quad (4.46)$$

Поделив обе части (4.46) на  $S$  и  $dx$ , получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.47)$$

Его решением, как мы уже отмечали выше, является любая функция аргумента  $\theta = t \mp x/c$ :

$$s(x, t) = s(\theta) = s \left( t \mp \frac{x}{c} \right), \quad (4.48)$$

а скорость распространения волны

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (4.49)$$

Процессы распространения и отражения поперечных волн в стержне полностью аналогичны таковым в однородном натянутом шнуре, поэтому мы их рассматривать не будем. Сконцентрируем внимание на закономерностях переноса механической энергии бегущей волной.

**Энергия, переносимая волной.** В лекции по деформациям упругих твердых тел мы отмечали, что при деформации сдвига в единице объема тела запасается потенциальная энергия

$$w_\gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2, \quad (4.50)$$

называемая объемной плотностью энергии деформации сдвига. В (4.50) полагаем

$$\gamma \approx tg \gamma = \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Помимо этого, единица объема с массой, равной  $\rho$ , и колебательной скоростью  $v = \partial s / \partial t$  имеет кинетическую энергию

$$w_v = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2. \quad (4.51)$$

Полная энергия единицы объема равна

$$w = w_\gamma + w_v = \frac{1}{2} \left[ G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (4.52)$$

Покажем, что в бегущей волне (4.48)  $w_\gamma = w_v$ . Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \left( \mp \frac{1}{c} \right), \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \cdot 1. \quad (4.53)$$

Из (4.53) получаем

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \mp \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}, \text{ или } \gamma = \mp \frac{v}{c}. \quad (4.54)$$

Отметим, что в бегущей волне деформации  $\gamma$  какого-либо элемента пропорциональны его колебательной скорости  $v$ .

Возводя в квадрат левое равенство (4.54), деля его пополам и учитывая, что  $c^2 = G/\rho$ , получаем

$$\frac{1}{2} G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2, \text{ или } w_\gamma = w_v. \quad (4.55)$$

Равенство величин  $w_\gamma$  и  $w_v$  позволяет записать полную плотность энергии  $w$  в виде:

$$w = 2w_\gamma = 2w_v. \quad (4.56)$$

Поскольку волна движется, то она осуществляет перенос механической энергии.

Так, например, за время  $\Delta t$  через площадку единичной площади, заштрихованную на рис. 4.19, будет перенесена энергия, равная

$$\Delta W = wc\Delta t. \quad (4.57)$$

В физике используют понятие плотности потока энергии, определяемой количеством энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Согласно (4.57), эта плотность равна

$$J = \frac{\Delta W}{\Delta t} = wc \quad (4.58)$$

и имеет размерность  $[J] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

Если площадка имеет площадь  $dS$ , а ее нормаль  $\mathbf{n}$  составляет с направлением распространения волны (осью  $Ox$ ) угол  $\alpha$  (рис. 4.20), то количество энергии, переносимое волной через эту площадку за единицу времени (поток энергии) равен

$$d\Phi = wc \cdot dS \cos \alpha. \quad (4.59)$$

Профессором Московского университета Н.А. Умовым в 1874 г. был введен вектор плотности потока энергии

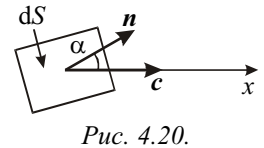
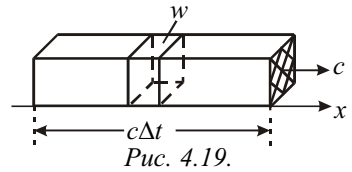
$$\mathbf{J} = wc, \quad (4.60)$$

получивший название вектора Умова. С его использованием поток  $d\Phi$  может быть записан в виде

$$d\Phi = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JdS \cos \alpha, \quad (4.61)$$

где  $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ .

С подобным представлением потока вектора скорости мы встречались при изучении движения жидкостей.



Удобство вектора Умова становится особенно ощутимым, когда волна распространяется в трехмерном пространстве. Тогда поток энергии через произвольную поверхность  $S$  выражается в виде интеграла по этой поверхности:

$$\Phi = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} . \quad (4.62)$$

Последняя формула будет использована ниже.

Подсчитаем среднее за период значение вектора Умова для бегущей вдоль стержня поперечной гармонической волны

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx) . \quad (4.63)$$

Объемная плотность энергии (сумма потенциальной и кинетической энергий) равна

$$w = \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \rho s_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) . \quad (4.64)$$

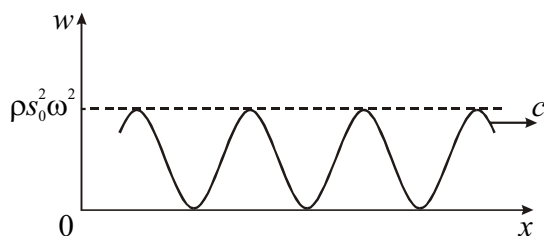


Рис. 4.21.

В некоторый момент времени она распределена вдоль стержня так, как показано на рис. 4.21. С течением времени это распределение смещается вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $c$ . Плотность потока энергии через любое сечение  $x = \text{const}$  будет периодически возрастать от нуля до максимальной величины  $\rho s_0^2 \omega^2$ . Поэтому удобно пользоваться средним значением  $J$  за период  $T = 2\pi/\omega$ . Эта величина называется интенсивностью бегущей волны и равна

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T J dt = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 s_0^2 . \quad (4.65)$$

Важно отметить, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды.

В стоячей волне нет переноса энергии, т. к. она является суперпозицией двух бегущих волн, переносящих одинаковое количество энергии в противоположных направлениях. Однако, локальное движение энергии в ограниченном пространстве между соседними узлами все же происходит. В самом деле, запишем уравнение стоячей волны (4.34), опустив в нем постоянные фазовые добавки  $\varphi_{\text{отр}}/2$  и  $k\ell$ :

$$s(x, t) = 2s_0 \cos kx \sin \omega t . \quad (4.66)$$

Объемная плотность энергии деформации сдвига равна:

$$w_\gamma = \frac{1}{2} G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = 2s_0^2 k^2 G \sin^2 kx \sin^2 \omega t , \quad (4.67)$$

а объемная плотность кинетической энергии выражается как:

$$w_v = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = 2s_0^2 \omega^2 \rho \cos^2 kx \cos^2 \omega t = 2s_0^2 k^2 G \cos^2 kx \cos^2 \omega t , \quad (4.68)$$

поскольку  $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{G}{\rho}$ .

Локальное движение энергии наглядно демонстрирует рис. 4.22, на котором показан фрагмент стоячей волны в моменты времени  $t_1 = 0$  и  $t_2 = t_1 + T/4$  (а) и соответствующие распределения  $w_\gamma$  (б) и  $w_v$  (в).

Видно, что при  $t = t_1$ , когда элементы стержня проходят положение равновесия и имеют максимальные скорости, деформация отсутствует ( $w_\gamma = 0$ ), а вся энергия запасена в виде кинетической энергии  $w_v$  и локализована вблизи пучности. Однако через четверть периода колебаний частицы стержня сместятся на максимальные расстояния и остановятся ( $w_v = 0$ ). Энергия будет запасена в виде потенциальной энергии  $w_\gamma$  и локализована вблизи узлов. Это означает, что энергия из области вблизи пучности за четверть периода колебаний перетекает в обе стороны по направлению к узлам. Затем она движется в обратном направлении, и этот процесс повторяется многократно. Поток энергии через узлы отсутствует. Среднее за период значение потока энергии через любое сечение  $x = \text{const}$  будет равно нулю ( $I = 0$ ).

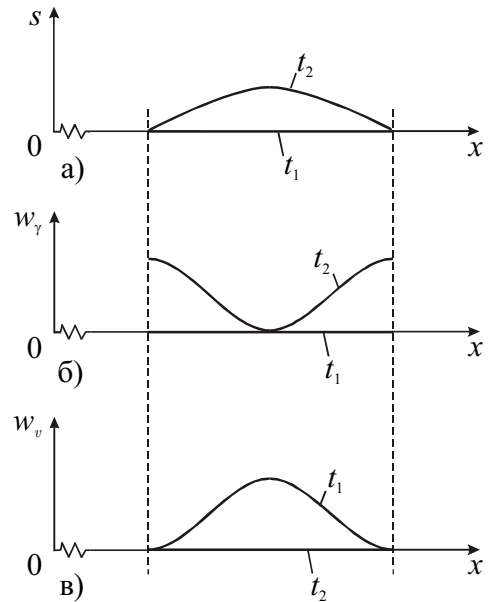


Рис. 4.22.

**Продольные волны.** Такие волны могут быть возбуждены ударом молотка по одному из торцов упругого стержня. Возмущение, распространяющееся вдоль стержня, визуально незаметно, однако основные закономерности такого волнового процесса можно смоделировать, если вместо стержня использовать длинную пружину с большим диаметром витков (рис. 4.23). Если эту пружину подвесить горизонтально на нескольких нитях (не показанных на рисунке) и резко ударить ладонью по левому торцу, то по ней побежит импульс сжатия с некоторой скоростью  $c$ . На рис. 4.23а этот импульс имеет длину  $c\tau_n$  ( $\tau_n$  — длительность импульса, равная длительности удара). Добежав до правого конца пружины, он отразится, при этом, если конец закреплен (рис. 4.23б), то отраженный импульс будет также импульсом сжатия. Если правый конец свободен, то отраженный импульс будет импульсом растяжения (рис. 4.23в). Он возникает в момент смещения вправо свободного конца пружины, когда до него добежит импульс сжатия. Эта ситуация напоминает смещение свободного конца шнура. Отметим, что в рассмотренном случае смещения витков пружины происходят вдоль направления распространения волны, поэтому волна называется продольной.

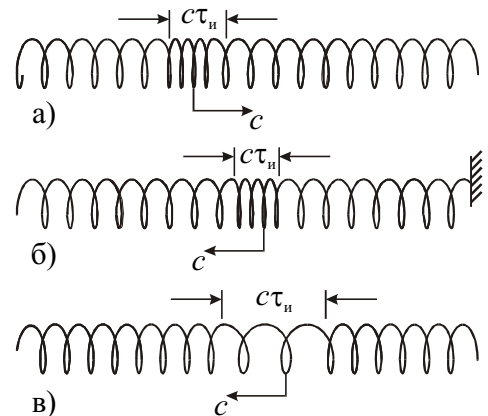


Рис. 4.23.

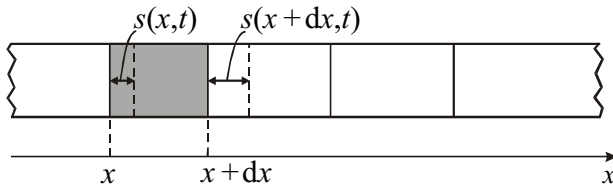


Рис. 4.24.

Рассмотрим теперь распространение импульсов сжатия и растяжения в стержне.

Мысленно разобьем стержень на ряд элементов длиной  $dx$  каждый. При распространении

продольной волны концы каждого элемента, отмеченные на рис. 4.24 сплошными линиями, будут смещены в новые положения, отмеченные пунктиром. Эти смещения  $s$  будем считать положительными, если они происходят в положительном направлении оси  $Ox$ , и отрицательными — в противоположном случае.

Пусть левый конец некоторого элемента, имеющий координату  $x$ , сместился в данный момент времени  $t$  на расстояние  $s(x, t)$ , а правый конец — на  $s(x + dx, t)$ . Деформация растяжения (сжатия) определяется относительным удлинением элемента  $dx$ :

$$\epsilon(x, t) = \frac{s(x + dx, t) - s(x, t)}{dx} = \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{4.69}$$

Отметим, деформации растяжения соответствует  $\epsilon > 0$ , а сжатия —  $\epsilon < 0$ .

В отличие от поперечной волны, при растяжении (сжатии) уменьшается (увеличивается) плотность среды  $\rho$ . Ее можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad |\delta\rho| \ll \rho_0. \tag{4.70}$$

Здесь  $\delta\rho$  — малая добавка к равновесной плотности  $\rho_0$ , причем  $\delta\rho$  может быть как положительной, так и отрицательной. С учетом постоянства массы деформируемого элемента  $dx$  можем записать

$$\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)[dx + s(x + dx, t) - s(x, t)] = (\rho_0 + \delta\rho)dx(1 + \epsilon). \tag{4.71}$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной  $\epsilon \cdot \delta\rho$ , находим

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\epsilon. \tag{4.72}$$

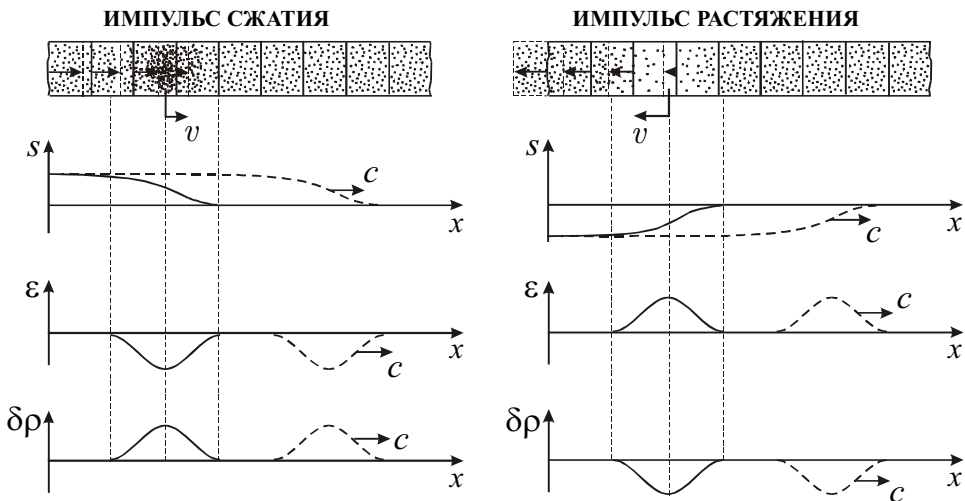


Рис. 4.25.

Спустя некоторое время  $t$  после удара по торцу стержня (или после резкого оттягивания этого торца) распределение смещений  $s$ , деформаций  $\epsilon$  и возмущений плотности  $\delta\rho$  в бегущих импульсах сжатия и растяжения будут иметь вид, показанный на рис. 4.25. Пунктиром показаны распределения всех величин в один из последующих моментов времени.

Уравнение волны, бегущей вдоль оси  $Ox$ , в обоих случаях имеет вид  $s(x,t) = s(t - x/c)$ . По аналогии с (4.54) деформация  $\epsilon = \partial s / \partial x$  и колебательная скорость  $v = \partial s / \partial t$  элемента связаны соотношением

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t}, \text{ или } \epsilon = -\frac{v}{c}. \quad (4.73)$$

Подчеркнем, что в импульсе сжатия ( $\epsilon < 0$ ) скорость  $v$  совпадает по направлению со скоростью  $c$ , а в импульсе растяжения они имеют противоположные направления.

Рассчитаем скорость распространения продольных волн. На рис. 4.26 изображен фрагмент стержня и показан его элемент  $dx$ , к концам которого приложены нормальные напряжения  $\sigma_n$ . Уравнение движения элемента с поперечным сечением равным  $S$  имеет вид:

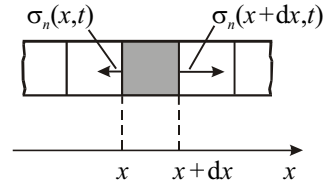


Рис. 4.26.

$$dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = S[\sigma_n(x + dx, t) - \sigma_n(x, t)], \quad (4.74)$$

где  $dm = \rho_0 S dx$ . Чтобы (4.74) преобразовать к волновому уравнению, необходимо связать напряжения  $\sigma_n$  с деформациями элементов стержня. Наиболее просто это можно сделать для тонкого стержня.

**Скорость волн в тонком стержне.** Если стержень тонкий, то деформации и напряжения вдоль координаты  $x$  связаны известным законом Гука:

$$\sigma_n(x, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x; \quad \sigma_n(x + dx, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+dx}, \quad (4.75)$$

где  $E$  — модуль Юнга.

Подставляя (4.75) в (4.74) и производя деление на  $\rho_0 S dx$ , получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.76)$$

Скорость продольных волн получается равной

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (4.77)$$

Эта скорость превышает скорость поперечных волн (см. формулу (4.49)), поскольку  $E > G$ . По порядку величины обе скорости совпадают и для различных материалов преимущественно лежат в диапазоне  $c \sim (10^3 \div 10^4)$  м/с.

**Скорость волн в толстом стержне.** Пусть вдоль оси толстого стержня (оси  $x$ ) распространяется продольная волна, при этом колеблются элементы стержня, находящиеся вблизи его оси.

Один из таких элементов показан на рис. 4.27. Под действием нормального напряжения  $\sigma_1$  относительное удлинение  $\varepsilon_1$  определяется первым уравнением (1.27), приведенным в лекции по механике упругих тел:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)\mu}{E}. \quad (4.78)$$

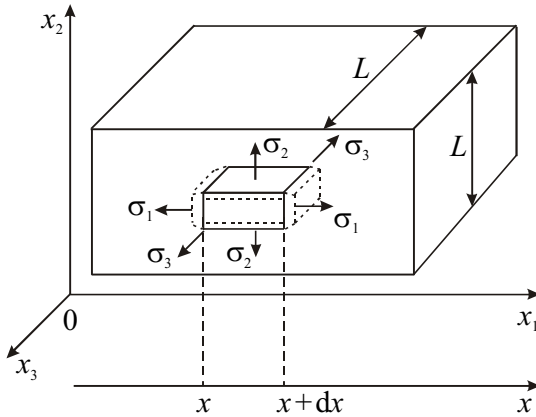


Рис. 4.27.

Это уравнение отражает тот факт, что при удлинении элемента  $dx$ , изображенного на рис. 4.27, площадь его поперечного сечения уменьшается (связь продольной и поперечной деформаций определяется коэффициентом Пуассона  $0 < \mu < 1/2$ ). Этот элемент потянет к оси стержня окружающие его элементы, развивая напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Эти элементы (лежащие между плоскостями  $x = \text{const}$  и  $x + dx = \text{const}$ ) начнут приходить в движение: сначала — находящиеся вблизи оси стерж-

ня, а затем и элементы, близкие к поверхности. Через время  $\Delta t = \frac{L/2}{c}$  ( $L$  — поперечный размер стержня,  $c$  — скорость распространения возмущения) все элементы сместятся, и напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  исчезнут.

Если длительность  $\tau_{\text{и}}$  импульса, распространяющегося вдоль оси стержня, велика, так что  $\tau_{\text{и}} \gg \Delta t = \frac{L}{2c}$ , то в (4.78) можно не учитывать  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Скорость такого длинного импульса будет определяться формулой (4.77). Такой режим можно реализовать, если

$$L \ll c\tau_{\text{и}}. \quad (4.79)$$

Условие (4.79) означает, что поперечный размер стержня  $L$  значительно меньше длины импульса. Такой стержень можно считать тонким. Если речь идет о гармонической волне, распространяющейся вдоль стержня, то условие (4.79) имеет вид

$$L \ll \lambda, \quad (4.80)$$

где  $\lambda = cT$  — длина волны,  $T$  — период колебаний. Так, например, для стального стержня  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sim 5000$  м/с. При частоте  $\nu = 5000$  Гц,  $\lambda = c/\nu \sim 1$  м, поэтому стержни с поперечным размером  $L \sim 1$  см могут считаться тонкими.

Если длительности импульса  $\tau_i \ll \Delta t = \frac{L}{2c}$  (стержень толстый), то в (4.78) следует учесть  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Чтобы найти связь  $\varepsilon_1$  и  $\sigma_1$ , вместе с уравнением (4.78) запишем аналогичные для  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  и сложим все три уравнения:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\mu)}{E}. \quad (4.81)$$

Для краткости выкладок введем средние значения

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Тогда (4.81) переписывается в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma(1 - 2\mu)}{E}. \quad (4.82)$$

С учетом (4.82) уравнение (4.78) видоизменяется:

$$\varepsilon_1 + \frac{3\mu\varepsilon}{1 - 2\mu} = \frac{1 + \mu}{E}\sigma_1. \quad (4.83)$$

Если положить в толстом стержне  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ , то  $\varepsilon = \varepsilon_1/3$ , и искомая связь получится в виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{Ef(\mu)} = \frac{\sigma_1(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 - \mu)}. \quad (4.84)$$

В этом случае связь деформации и напряжения определяется как модулем Юнга  $E$ , так и следующей функцией коэффициента Пуассона

$$f(\mu) = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (4.85)$$

Легко убедиться, что при любых возможных значениях коэффициента Пуассона  $f(\mu) > 1$ . Поэтому скорость продольной волны в этом случае

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} f(\mu)} \quad (4.86)$$

превышает скорость волны в тонком стержне. Величину  $E \cdot f(\mu)$  обычно называют «модулем одностороннего растяжения».

Отметим, что наиболее сложен анализ для промежуточного случая, когда  $L \sim \lambda$ . Для волн с такой длиной волны имеет место дисперсия (фазовая скорость гармонической волны зависит от ее частоты). Распределение амплитуды волны в поперечном сечении стержня вдоль осей  $x_2$  и  $x_3$  аналогично распределению амплитуды для шнура длиной  $L$  со свободными концами при нормальном колебании. Стержень в этом случае выполняет роль волновода. При его плавном изгибании волна распространяется вдоль его оси.

Продольные волны переносят энергию, и для них справедливы все рассуждения и выводы, полученные для поперечных волн. Формально во все выражения для плотности энергии  $w$ , вектора Умова  $\mathbf{J}$  и др. следует вместо модуля сдвига  $G$  подставить модуль Юнга  $E$  или  $E \cdot f(\mu)$ . Предоставляем читателю проделать это самостоятельно.



**Явления на границе раздела двух сред.** Рассмотрим подробнее прохождения продольной волны через границу раздела двух упругих сред при нормальном падении волны на эту границу.

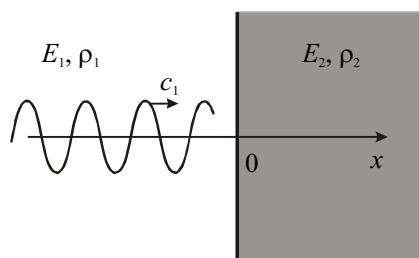


Рис. 4.28.

Пусть продольная волна распространяется со скоростью  $c_1 = \sqrt{E_1 / \rho_1}$  в среде с модулем Юнга  $E_1$  и равновесной плотностью  $\rho_1$  (рис. 4.28). Опыт показывает, что эта волна на границе раздела двух сред ( $x = 0$  на рисунке) частично отражается и частично проходит во вторую среду, которая характеризуется параметрами  $E_2$  и  $\rho_2$ . Следовательно, можем записать

<p>1-я среда (падающая + отраженная волна)</p> $s_1(x, t) = s_{01} \sin(\omega t - k_1 x) + s'_{01} \sin(\omega t + k_1 x)$	<p>2-я среда (прошедшая волна)</p> $s_2(x, t) = s_{02} \sin(\omega t - k_2 x) \quad (4.87)$
---	---

Здесь  $\omega$  — частота,  $s_{01}$ ,  $s'_{01}$  и  $s_{02}$  — амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн соответственно,  $k_1 = \omega / c_1$  и  $k_2 = \omega / c_2$  — соответствующие волновые числа.

Чтобы найти соотношения между амплитудами трех волн, определяющие отражательную и пропускательную способность («прозрачность») границы раздела, запишем два условия, которые должны выполняться на границе раздела при  $x = 0$ .

Первое — это условие неразрывности вещества:

$$s_1(0, t) = s_2(0, t). \quad (4.88)$$

Второе — равенство напряжений:

$$\sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t), \text{ или } E_1 \varepsilon_1(0, t) = E_2 \varepsilon_2(0, t). \quad (4.89)$$

С учетом (4.87) из этих условий получаем:

$$\begin{aligned} s_{01} + s'_{01} &= s_{02}, \\ -s_{01} E_1 k_1 + s'_{01} E_1 k_1 &= -s_{02} E_2 k_2. \end{aligned} \quad (4.90)$$

В акустике фундаментальным является понятие импеданса, или удельного волнового (акустического) сопротивления материала. Эта величина  $z$  определяется как:

$$z = \frac{\text{сжимающее напряжение}}{\text{колебательная скорость}} = \frac{-\sigma}{v}. \quad (4.91)$$

Импеданс легко можно выразить через характеристики материала, воспользовавшись формулой (4.73):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{v}{c}. \quad (4.92)$$

Отсюда

$$z = \frac{-\sigma}{v} = \frac{E}{c} = \rho c. \quad (4.93)$$

С использованием этой величины и выражений для  $k_1$  и  $k_2$  условия (4.90) примут вид:

$$\begin{aligned} s_{01} + s'_{01} &= s_{02} \\ -s_{01}z_1 + s'_{01}z_1 &= -s_{02}z_2. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Отсюда получаем искомую связь между амплитудами волн:

$$s'_{01} = \frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} s_{01}, \quad s_{02} = \frac{2}{1 + z_2/z_1} s_{01}. \quad (4.95)$$

Для практических целей пользуются коэффициентами отражения  $R$  и пропускания  $T$ , характеризующими отношение интенсивностей отраженной и прошедшей волн к интенсивности падающей волны. Эти коэффициенты получаются из (4.95) с учетом (4.65):

$$R = \frac{I'}{I_1} = \left( \frac{s'_{01}}{s_{01}} \right)^2 = \left( \frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} \right)^2; \quad T = \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_2}{z_1} \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)^2 = \frac{4(z_2/z_1)}{(1 + z_2/z_1)^2}, \quad (4.96)$$

где использовано то обстоятельство, что интенсивность бегущей волны (см. формулу (4.65))

$$I = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 s_0^2 = \frac{1}{2} z \omega^2 s_0^2 \quad (4.97)$$

зависит не только от амплитуды  $s_0$  и частоты  $\omega$ , но и пропорциональна акустическому сопротивлению  $z$ . Следует отметить, что формулы (4.96) справедливы и для поперечных колебаний.

Из рисунка 4.29, на котором изображены зависимости (4.96), видно, что если  $z_1 = z_2$ , отражения не происходит. Поэтому на практике, когда надо уменьшить отражение, стараются согласовать (сделать практически одинаковыми) волновые сопротивления двух сред.

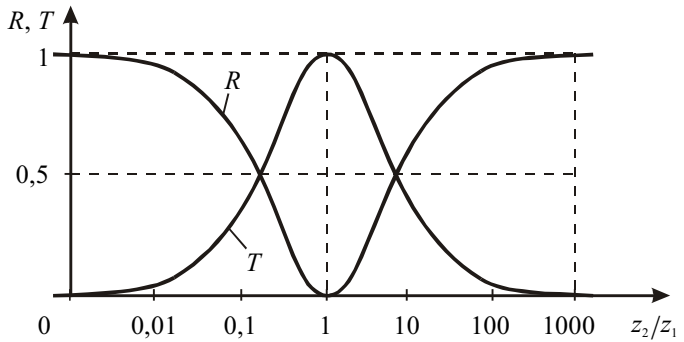


Рис. 4.29.

Заметим также, что при  $z_2 \ll z_1$ , как в случае свободного конца стержня ( $z_2$  — сопротивление воздуха), или  $z_2 \gg z_1$  (закрепленный конец),  $R \approx 1$ , т.е. происходит практически полное отражение волны, что мы и использовали выше при рассмотрении отражения в этих предельных случаях.



## ЛЕКЦИЯ 5

*Акустические фононы. Объемные сейсмические волны. Современная модель Земли. Волны Рэлея и Лява. Волны в жидкостях и газах. Звук. Интенсивность звука. Поглощение звука. Излучатели звука. Применение акустических методов. Основные характеристики звука. Закон Вебера–Фехнера. Диаграмма слуха. Акустические резонаторы. Музыкальные инструменты. Эффект Доплера и бинауральный эффект. Интерференция и дифракция волн.*

**Тепловые колебания кристаллической решетки твердых тел. Акустические фононы.** В твердом теле ионы совершают тепловые колебания около положений равновесия в узлах кристаллической решетки. Поскольку они взаимодействуют друг с другом, то система ионов должна рассматриваться как совокупность связанных осцилляторов. Такие тепловые колебания ионов можно представить в виде суперпозиции стоячих звуковых волн, частоты которых  $\omega$  лежат в диапазоне  $0 < \omega \leq \omega_N$ , где  $\omega_N$  — максимальная частота колебаний, обусловленная дискретностью среды (см. предыдущую лекцию).

При нагревании кристалла энергия тепловых колебаний увеличивается. Естественно, что информацию об этих колебаниях можно получить, измеряя теплоемкость кристаллов.

Если каждый ион рассматривать как классический осциллятор, колеблющийся в трех взаимно перпендикулярных направлениях, то, в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы, он обладал бы энергией  $\epsilon_1 = 6kT/2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — абсолютная температура. Здесь учтено, что колеблющийся ион обладает средней кинетической и равной ей средней потенциальной энергией  $kT/2$  по каждой из трех степеней свободы. Поскольку энергия кристалла, состоящего из  $N$  атомов,  $U = N\epsilon_1 = 3NkT$ , то его теплоемкость при постоянном объеме равна:

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3Nk \quad (5.1)$$

и не зависит от температуры (закон Дюлонга и Пти).

Между тем, формула (5.1) согласуется с экспериментом лишь при высоких температурах, а при приближении температуры к абсолютному нулю, как показывает опыт,  $c_V \sim T^3$ .

Чтобы объяснить такое поведение теплоемкости, А. Эйнштейн предложил рассматривать ионы как независимые осцилляторы, обладающие дискретным набором значений энергии. Ранее подобная идея была высказана М. Планком при выводе формулы для теплового излучения твердого тела. Однако, А. Эйнштейну не удалось получить закон  $T^3$ .

На самом деле, как уже говорилось, тепловые колебания ионов могут быть представлены как суперпозиция нормальных колебаний, или мод системы связанных осцилляторов. Каждая мода частоты  $\omega$  обладает энергией, кратной  $\hbar\omega$ , где  $\hbar = h/2\pi$  ( $h = 6,67 \cdot 10^{-34}$  Дж/с — постоянная Планка).

Если принять во внимание, что в твердом теле возможно распространение продольной волны частоты  $\omega$  и двух поперечных волн той же частоты, имеющих два раз-

личных взаимно перпендикулярных направления смещения атомов (две различные поляризации), то с учетом размеров кристалла и его дискретной структуры можно подсчитать число мод в кристалле. Такой подсчет был впервые выполнен П. Дебаем, и поэтому эти волны получили название дебаевских.

Следует подчеркнуть, что, в отличие от классического представления, при вычислении энергии кристалла мода представляется как квантовый объект, обладающий дискретным набором значений энергии (набором энергетических уровней)

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega, \quad (5.2)$$

где  $n$  — целое число.

При термодинамическом равновесии вероятность  $\rho_n$  возбуждения моды убывает по мере увеличения её энергии  $\varepsilon_n$  (или числа  $n$ ) в соответствии с распределением Больцмана:  $\rho_n \sim e^{-n\hbar\omega/kT}$ . При нагревании кристалла вероятность  $\rho_n$  растет, а значит увеличивается и запасенная кристаллом энергия. При подсчете последней Дебаем была введена характерная температура (температура Дебая)  $\theta_D$  с помощью равенства

$$k\theta_D = \hbar\omega_N. \quad (5.3)$$

Обычно  $\theta_D$  лежит в интервале  $(10^2 \div 10^3)$  К. При  $T \gg \theta_D$  справедлив закон Дюлонга и Пти, а при  $T \ll \theta_D$  теплоемкость  $c_V \sim T^3$ .

Соотношение (5.2) для энергии колебаний в моде частоты  $\omega$  аналогично выражению для энергии фотонов (квантов света). Это позволяет рассматривать моду как квазичастицу, называемую тепловым фононом. Введение этого нового понятия является весьма плодотворным и, с математической точки зрения, значительно облегчает анализ тепловых колебаний кристаллической решетки. Представление о фононном газе в твердом теле широко используется при описании таких свойств, как теплоемкость, теплопроводность, тепловое расширение, электрическое сопротивление и др. В физике используются и другие квазичастицы: плазмон (волна электронной плотности), магنون (волна перемагничивания), полярон (электрон + упругая деформация), экситон (волна поляризации среды). Эти квазичастицы являются модами соответствующих колебаний.

**Объемные сейсмические волны.** Чрезвычайно важным примером волн в упругом твердом теле являются сейсмические волны, возникающие в ограниченной области пространства (очаге) размером в несколько километров и распространяющиеся на огромные расстояния под поверхностью Земли. Эти волны бывают поперечными (волны сдвига) и продольными (сжатия и разрежения) и могут пронизывать всю нашу планету. Это позволяет (подобно рентгеновскому анализу) исследовать внутреннее строение Земли. Этим занимается отдельная наука, называемая сейсмологией. Долгое время сейсмология, одним из основателей которой является русский физик Б.Б. Голицын, была наукой о землетрясениях и сейсмических волнах. В настоящее время сейсмология занимается анализом разнообразных движений в земной толще.

Скорость продольных волн приблизительно в 1,7 раза больше скорости поперечных, поэтому эти волны регистрируются на сейсмограммах последовательно: вначале приходят более быстрые продольные (первичные), которые называются р-волнами, а потом поперечные (вторичные), называемые s-волнами. Кроме того, сейсмографы регистрируют и заметный фон, или шумы, связанные как с работой промышленных установок и транспорта, так и с сейсмическими волнами (микросейсмами), генерируемыми штормами и волнением в океанах.

Если бы скорости р- и s-волн в Земле не менялись бы с глубиной, то волны распространялись бы по прямым линиям (прямым сейсмическим лучам). В действительности скорости продольной  $c_p$  и поперечной  $c_s$  волн возрастают с погружением в недра Земли, за исключением небольшой зоны на глубинах 50–250 км. Поэтому сейсмические лучи искривляются. В сейсмологии экспериментально определяют годограф — время  $\tau$  пробега сейсмических волн как функцию эпицентрального расстояния  $\Delta$  (расстояния в градусах или километрах по дуге большого круга между эпицентром и приемником волн;  $1^\circ = 111$  км). Ясно, что функция  $\tau = \tau(\Delta)$  связана с распределением скорости волны  $c(\ell)$  ( $\ell$  — глубина), и поиск этого распределения представляет интерес при исследовании внутреннего строения Земли.

На рис. 5.1 показаны пути р-волн и указано время их распространения в недрах Земли от эпицентра Э до установленного на поверхности приемника. Прерывистые линии (изохроны) указывают время прихода р-волн в различные точки земной поверхности. Из-за искривления лучей волны не попадают в обширную зону тени.

Исследование зависимости скоростей  $c_p(\ell)$  и  $c_s(\ell)$  от глубины позволило сделать вывод, что Земля разделяется на три основные части: кору, мантию и ядро. Кора отделена от мантии резкой сейсмической границей, на которой скачкообразно возрастают плотность  $\rho$  и скорости  $c_p$  и  $c_s$ . Эта граница была открыта в 1909 г. югославским сейсмологом Мохоровичичем и носит название границы М. Толщина лежащей выше границы М земной коры меняется от величины  $\approx 10$  км (под слоем воды в океанических областях) до нескольких десятков километров в горных районах континентальных областей. Ниже коры в интервале до глубин  $\sim 2900$  км расположена силикатная оболочка, или мантия Земли. Существование ядра с плотностью, превосходящей среднюю плотность Земли  $\sim 5,5$  г/см<sup>3</sup>, следует из того факта, что плотность земной коры (от  $\sim 2,8$  г/см<sup>3</sup> у гранитов до  $\sim 3,0$  г/см<sup>3</sup> у базальтов) существенно меньше этой средней плотности.

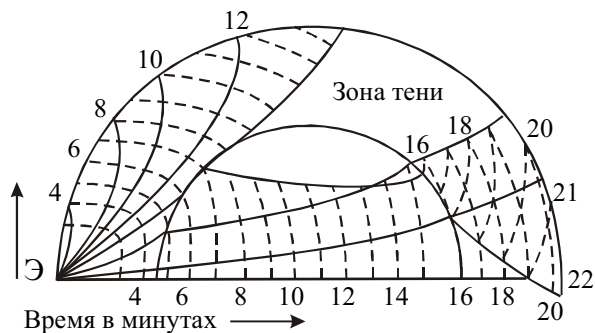


Рис. 5.1.

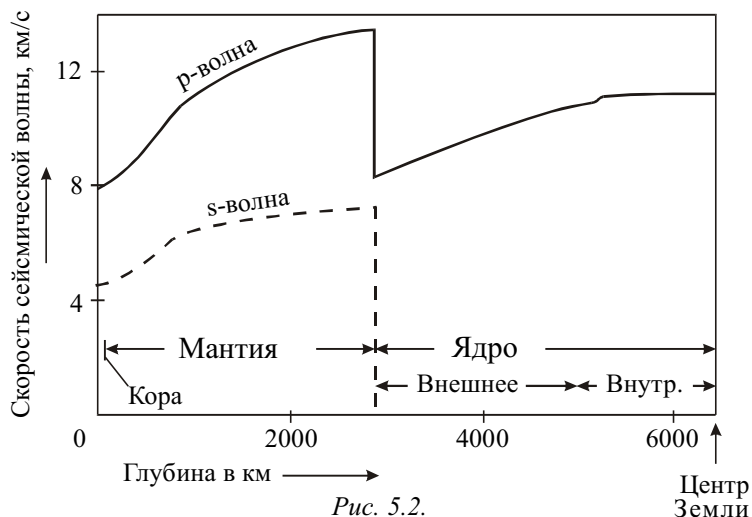


Рис. 5.2.

На рис. 5.2 показаны глубинные зависимости скоростей  $p$ - и  $s$ -волн и на базе этих зависимостей проведено разбиение Земли на три области. Такая модель Земли называется классической моделью Джеффриса–Гутенберга. Она оставалась неизменной

до конца 60-х годов XX века. Особенности изменения скоростей волн с глубиной связаны с изменением структуры земных пород. При переходе от коры (граниты, базальты) к мантии (ультраосновные горные породы) скорости возрастают. Увеличение скоростей при приближении к ядру связано с наличием фазовых переходов минералов в более плотные и жесткие в механическом отношении кристаллические модификации. Падение скорости  $p$ -волн при переходе из мантии в ядро есть следствие того, что внешняя часть ядра жидкая. Ядро состоит в основном из железа и небольшой примеси легких элементов. Во внешнем ядре плавное возрастание скорости  $c_p$  связано с нарастанием давления к центру Земли. Во внутреннем ядре скорость  $p$ -волн не меняется, так как давление к центру Земли возрастает незначительно. Естественно, что поперечные  $s$ -волны во внешней (жидкой) части ядра распространяться не могут.

В последние годы была выявлена детальная структура мантии Земли. На рис. 5.3 показано распределение скорости  $c_s(\ell)$  в мантии, из которого можно сделать заключение о её структуре. Земная кора и верхний слой мантии до глубины  $\ell \approx 70$  км образуют наружную зону — литосферу, или литосферную плиту. Эта жесткая плита расколота примерно на 10 больших плит, по границам которых расположено подавляющее число очагов землетрясений. Под жесткой литосферной плитой на глубинах  $70 < \ell < 250$  км расположен слой повышенной текучести, называемый астеносферой. Из-за её малой вязкости ( $\mu \sim 10^{20} \div 10^{21}$  Пуаз) литосферные плиты как бы плавают в «астеносферном океане» Земли. В астеносфере, где температура вещества близка к температуре плавления, скорости волн понижены. Начиная с  $\ell \approx 250$  км скорости возрастают из-за увеличения давления. При  $\ell \approx 400$  км возрастание скорости есть результат фазовых переходов (минералы оливины переходят в шпинелевую модификацию), а на глубинах  $400 < \ell < 650$  км скорость возрастает из-за роста давления. На глубинах  $650 < \ell < 700$  км расположена вторая зона фазовых переходов, однако остается открытым вопрос о том, какие конкретно переходы ответственны за быстрый рост скорости.

На рис. 5.4 изображен разрез Земли, построенный в соответствии с современными сейсмическими данными.

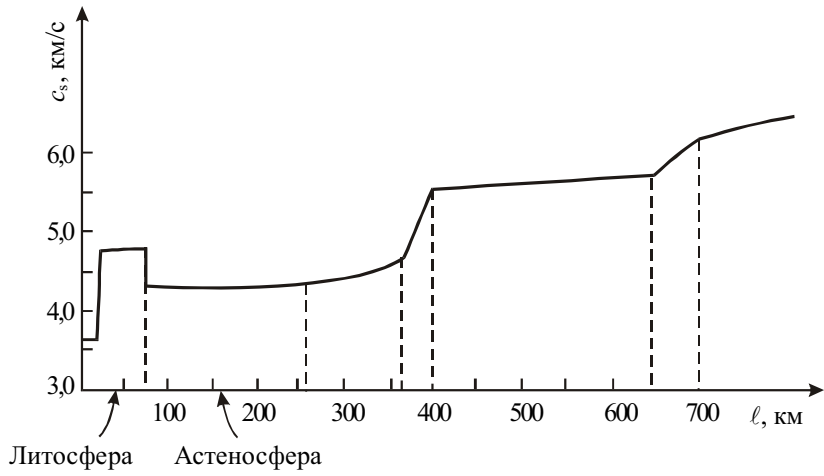


Рис. 5.3.

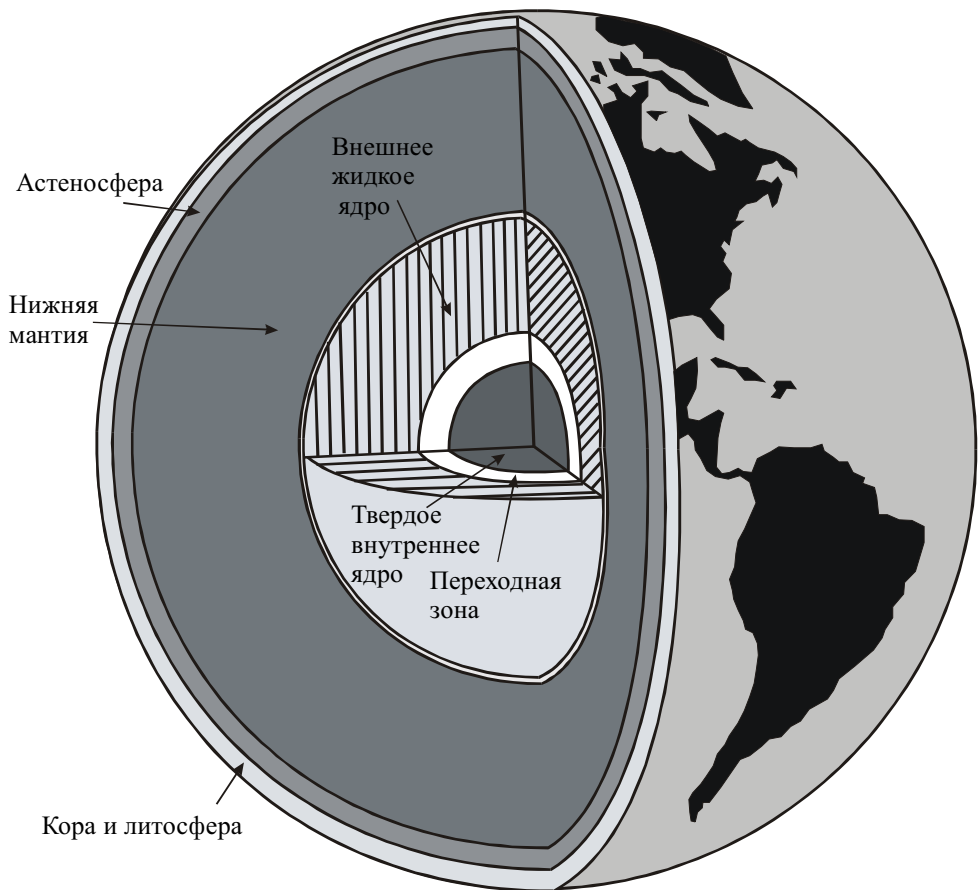


Рис. 5.4.



При распространении объемной сейсмической волны в трехмерном случае амплитуда уменьшается с расстоянием  $r$ , пройденным волной от точечного источника. Уравнение такой волны, называемой сферической, имеет вид:

$$s(r, t) = \frac{s_0}{r} e^{-\alpha r} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (5.4)$$

Из этого уравнения видно, что амплитуда волны убывает, во-первых, из-за ее геометрического расхождения во все стороны от эпицентра; это убывание происходит обратно пропорционально пройденному волной расстоянию  $r$ . Во-вторых, амплитуда волны убывает из-за перехода части энергии волны в тепло вследствие неидеальной упругости земных недр. Это ослабление характеризуется коэффициентом затухания  $\alpha$ . Коэффициент  $\alpha$  пропорционален частоте сейсмической волны, поэтому короткие волны затухают быстрее длинных. Расчет показывает, что для коэффициентов затухания  $s$ - и  $p$ -волн могут быть записаны соотношения

$$\alpha_s \text{ (км}^{-1}\text{)} \sim 1 \cdot 10^{-3} \nu \text{ (Гц)}; \quad \alpha_p \text{ (км}^{-1}\text{)} \sim 0,25 \cdot 10^{-3} \nu \text{ (Гц)}$$

Частоты объемных сейсмических волн лежат в инфразвуковом диапазоне  $0,1 \text{ Гц} < \nu < 10 \text{ Гц}$ . Следовательно, для волн с частотой  $\nu \sim 1 \text{ Гц}$  уменьшение амплитуды в  $e$  раз у поперечной волны происходит на пути  $\sim 1000 \text{ км}$ , а у продольной волны — на пути  $\sim 4000 \text{ км}$ .

Помимо бегущих волн, в объеме Земли могут наблюдаться и стоячие волны, когда вся Земля колеблется, как целое, с различными частотами, соответствующими различным модам колебаний. Конфигурации этих мод относятся к двум основным типам: сферидальные колебания (наибольший период  $\sim 55 \text{ мин.}$ , частота  $\sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ ) и торсионные (крутильные) колебания (наибольший период  $\sim 44 \text{ мин.}$ , частота  $\sim 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ ). В настоящее время спектр этих колебаний насчитывает несколько тысяч экспериментально обнаруженных частот.

**Поверхностные сейсмические волны.** Наряду с объемными, по Земле могут распространяться и поверхностные волны. Эти волны бывают двух типов и называются волнами Рэлея и Лява. Они были теоретически предсказаны Дж. Рэлеем в 1855 г. и Лявом в 1911 г. В Рэлеевской волне частицы грунта смещаются в вертикальной плоскости, ориентированной вдоль направления распространения волн, а траектории их движения представляют собой эллипсы (см. далее гравитационные волны на поверхности жидкости). В волне Лява частицы движутся в горизонтальной плоскости поперек направления распространения волны.

Длины поверхностных волн  $\lambda$ , возбуждаемых при землетрясении, лежат в интервале от десятков до многих сотен километров. В поверхностных волнах амплитуда убывает с глубиной, и на глубине  $\ell > \lambda$  колебания мантии малы. Поэтому с помощью таких волн можно исследовать лишь наружные слои Земли.

Из-за двумерного распространения амплитуда поверхностных волн убывает медленнее (обратно пропорционально  $\sqrt{r}$ ), чем у объемных волн. Поэтому такие волны могут по несколько раз обегать вокруг земного шара. Скорость поверхностных волн зависит от частоты, т. е. они обладают дисперсией.

На рисунке 5.5 показаны зависимости групповых скоростей волн Рэля  $c_R$  и Лява  $c_L$  от периода колебания волны. Легко видеть, что волны Лява распространяются быстрее волн Рэля. Отметим, что на рис. 5.5 показаны  $c_R$  и  $c_L$  лишь для волн, амплитуды которых определенным образом убывают с глубиной. Возможны поверхностные волны и с другими распределениями амплитуд по глубине.

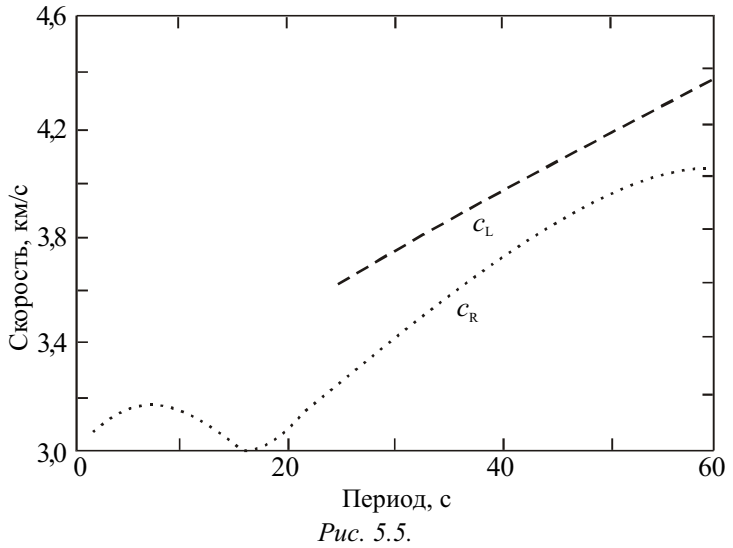


Рис. 5.5.

Сейсмические волны можно вызвать при помощи взрыва. Небольшие взрывы используются в инженерной сейсмологии для проведения разведки полезных ископаемых (нефти, руды, газа и т. д.). Подземные ядерные взрывы создают интенсивные волны, которые можно регистрировать на любых расстояниях. Это дает возможность надежно проводить контроль над подземными ядерными испытаниями.

**Волны в жидкостях и газах.** В жидкостях и газах возможны лишь деформации сжатия и растяжения, поэтому в них могут распространяться только продольные волны. Хотя мы ранее и рассчитывали скорость распространения возмущений в газе, тем не менее вычислим скорость распространения продольных волн с использованием волнового уравнения. Последнее может быть получено из (4.74), в котором  $\sigma_n$  следует заменить величиной  $-\delta p = p_0 - p$ , где  $p$  — давление в волне,  $p_0$  — равновесное давление в среде,  $\delta p$  — возмущение давления. Тогда мы можем записать

$$dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = [-\delta p(x + dx, t) + \delta p(x, t)]S. \tag{5.5}$$

Чтобы из (5.5) получить волновое уравнение, необходимо знать материальное уравнение среды

$$p = p(\rho). \tag{5.6}$$

Качественно эта зависимость изображена на рис. 5.6. При очень малых возмущениях плотности  $|\delta \rho| \ll \rho_0$  и давления  $|\delta p| \ll p_0$  из (5.6) получаем:

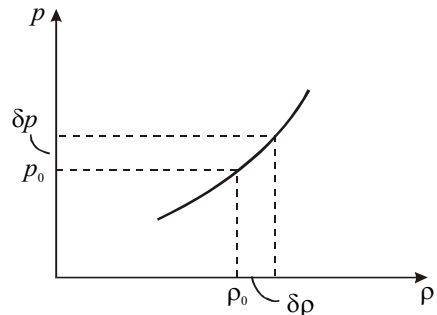


Рис. 5.6.

$$\delta p = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0} \cdot \delta \rho = c^2 \delta \rho, \quad (5.7)$$

где введено обозначение

$$c = \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0}}. \quad (5.8)$$

С учетом (4.69) и (4.72) возмущения плотности  $\delta \rho$  в (5.7) связаны со смещением  $s$  соотношением:

$$\delta \rho = -\varepsilon \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (5.9)$$

Следовательно, (5.7) примет вид:

$$\delta p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в (5.5), записывая  $dm = \rho_0 S dx$  и переходя к пределу при  $dx \rightarrow 0$ , получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (5.11)$$

из которого сразу видно, что скорость волны задается выражением (5.8) и не зависит от частоты (дисперсия отсутствует). Естественно, что с такой скоростью распространяются волны с длиной волны  $\lambda$ , превосходящей длину свободного пробега молекул в газе или межатомные расстояния в жидкостях  $\ell$ . В этом случае жидкость и газ могут рассматриваться как сплошные среды. Для волн высоких частот, когда  $\lambda \sim \ell$ , возникает дисперсия, а волны с длиной  $\lambda < \ell$  распространяться вообще не могут.

Упругие волны в жидкостях и газах, как, впрочем, и в твердых телах, называются акустическими, а раздел физики, который их изучает — акустикой. Частоты этих волн лежат в диапазоне от долей герца (инфразвук) до  $10^{13}$  Гц (гиперзвук). Этим частотам соответствуют длины волн  $\lambda$  от десятков километров до нескольких ангстрем. Значения скоростей (фазовых и групповых) для разных сред лежат в диапазоне от долей до десятков км/с.

Для воздуха материальное уравнение (5.6) является уравнением адиабаты и в акустике обычно записывается в виде (см. также предыдущие лекции):

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (5.12)$$

где  $\gamma = c_p / c_v$  — показатель адиабаты.

Тогда из (5.8) скорость волны (в акустике употребляют термин «скорость звука») в газе получается равной

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (5.13)$$

где  $\mu$  — молярная масса газа.

Скорость звука зависит, таким образом, от рода газа и по порядку величины совпадает со средней скоростью теплового движения молекул.

Для жидкости материальным уравнением является полуэмпирическое уравнение Тета:

$$p = p_{\text{вн}} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma - 1 \right], \quad (5.14)$$

где  $p_{\text{вн}}$  — характерное внутреннее давление, обусловленное межмолекулярным взаимодействием (оно составляет для большинства жидкостей без пузырьков и различных включений несколько тысяч атмосфер). Параметр  $\Gamma$  имеет порядок нескольких единиц (например, для воды  $\Gamma \approx 7$ ).

В таблице приведены значения скорости звука, измеренные в некоторых газах (при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ) и жидкостях.

Газы	Скорость звука, м/с	Жидкости	Скорость звука, м/с
Водород	1265	Вода ( $t = 20^\circ\text{C}$ )	1490
Гелий	965	Этил. спирт ( $t = 20^\circ\text{C}$ )	1180
Азот	334	Водород ( $t = -252^\circ\text{C}$ )	1127
Воздух	331	Кислород ( $t = -183^\circ\text{C}$ )	911
Кислород	316	Азот ( $t = -196^\circ\text{C}$ )	867
Углекислота	216	Гелий ( $t = -269^\circ\text{C}$ )	180

**Энергия, переносимая звуковой волной.** Интенсивность звука задается формулой (4.65)

$$I = \frac{1}{2} c \rho_0 \omega^2 s_0^2 \quad (5.15)$$

и пропорциональна квадрату частоты. Поэтому при переходе в область высоких частот облегчается задача получения больших интенсивностей, необходимых, например, для наблюдения нелинейных эффектов (см. следующую лекцию). В зависимости от решаемой задачи в акустике используются волны с интенсивностью от  $10^{-8}$  Вт/см<sup>2</sup> до  $10^6$  Вт/см<sup>2</sup>.

Для практических целей интенсивность  $I$  выражают через возмущение давления  $\delta p$ , которое называют также «звуковым давлением». Наиболее просто такую зависимость можно получить из (5.15) при учете, что амплитуда скорости колебаний частиц  $v_0 = \omega s_0$ . С другой стороны, в соответствии с акустическим законом Ома (формула (3.53) в лекциях по механике сплошных сред) эта скорость равна

$$v_0 = \frac{(\delta p)_0}{\rho_0 c}, \quad (5.16)$$

где  $(\delta p)_0$  — амплитуда колебаний возмущений давления  $\delta p$ . Поэтому

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c}. \quad (5.17)$$

Выполним некоторые простые оценки.

1. Вблизи струи газа, вытекающей из сопла реактивного двигателя самолета, амплитуда колебаний звукового давления  $(\delta p)_0 = 300$  Па (вспомним, что  $p_0 = 10^5$  Па и  $(\delta p)_0 \ll p_0$ ). Такое давление находится на пороге болевого ощущения (см. далее). Поскольку акустическое волновое сопротивление воздуха  $z = \rho_0 c = 41 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , то  $v_0 = 73 \text{ см/с}$ . Если принять, что частота  $\nu = 10^3$  Гц (хотя из турбины исходит многочастотный шум), то амплитуда смещения  $s_0 = v_0 / 2\pi\nu = 0,01 \text{ см}$ . Таким образом, смещение частиц воздуха даже при таком сильном звуке оказывается малым.

2. Звуки на пределе слышимости на частоте  $\nu = 10^3$  Гц (ухо человека весьма чувствительно к этой частоте) имеют амплитуду звукового давления  $(\delta p)_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па, а смещение частиц воздуха  $s_0 = 0,8 \cdot 10^{-9} \text{ см}$ . Уместно заметить, что современные методы измерения смещений в принципе дают возможность зарегистрировать колебания с амплитудой  $s_0 \sim 10^{-16} \text{ см}$ .

3. В ультразвуковых волнах с частотами порядка нескольких мегагерц интенсивности могут достигать нескольких сотен Вт/см<sup>2</sup>, а с использованием фокусирующих устройств — даже более десятка кВт/см<sup>2</sup>. Это приводит к появлению огромных ускорений частиц среды, в которой распространяется ультразвуковая волна. Например, при распространении в воде волны с частотой  $\nu = 10^6$  Гц и интенсивностью  $I = 100 \text{ Вт/см}^2$  амплитуда ускорения  $a_0 = \omega^2 s_0$ , согласно (5.15), получается равной

$$a_0 = \omega \sqrt{\frac{2I}{c\rho_0}} = 6,3 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \sim 10^5 g, \quad (5.18)$$

что на пять порядков превосходит ускорение свободного падения  $g$ . Учет появления таких громадных ускорений особенно важен в биологических исследованиях с применением ультразвука.

**Поглощение звука.** Наличие вязкости и теплопроводности среды приводит к потере энергии звуковой волны, и эта энергия расходуется на нагревание среды. Волна давления  $\delta p(\mathbf{r}, t)$ , а также волны смещения  $s(\mathbf{r}, t)$  и скорости  $v(\mathbf{r}, t) = \partial s / \partial t$  по мере распространения затухают. Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, задающий положение точки в трехмерном пространстве, в которой фиксируются возмущения давления, смещение частиц и их скорость. В случае гармонической волны, распространяющейся по одному направлению (вдоль оси  $Ox$ ), возмущения давления записываются в виде

$$\delta p(x, t) = (\delta p)_0 e^{-\alpha x} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right], \quad (5.19)$$

где  $\alpha$  — коэффициент затухания. Это уравнение характеризует плоскую волну (возмущение  $\delta p$  в плоскости  $x = \text{const}$  одинаково). В этом случае отсутствует геометрическое расхождение волны. Амплитуда этой волны  $(\delta p)_0 e^{-\alpha x}$  экспоненциально убывает с пройденным расстоянием. В соответствии с (5.17) интенсивность волны равна

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c} e^{-2\alpha x} = I_0 e^{-2\alpha x}, \quad (5.20)$$

где  $I_0 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c}$  — начальная интенсивность волны. Если пренебречь потерями, связанными с теплопроводностью, то коэффициент  $\alpha$ , согласно гидродинамике, оказывается равным

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3} \mu, \quad (5.21)$$

где  $\mu$  — вязкость жидкости или газа. Важно отметить, что  $\alpha \sim \omega^2$ . Этим объясняется тот факт, что резкий звук выстрела или щелчка кнута, в спектре которого присутствует широкий набор частот, по мере распространения трансформируется в более мягкий, поскольку в спектре остаются преимущественно низкие частоты. Заметим, что поглощение звука в воде существенно меньше, чем в воздухе, а в твердых телах еще меньше, чем в воде. Очень низким поглощением звука отличаются такие кристаллы, как сапфир, топаз, берилл, ниобат лития и другие.

В заключение отметим, что поглощение звука является главным препятствием, ограничивающим применение многих материалов на высоких частотах.

**Излучатели звука.** Применяемые в акустике излучатели упругих волн можно подразделить на две большие группы.

К первой относятся излучатели-генераторы; колебания в них возбуждаются из-за наличия препятствия на пути постоянного потока газа или жидкости (сирены, свистки, генераторы Гартмана). Такие генераторы применяются в основном в диапазоне частот до  $30 \div 40$  кГц. Они отличаются высоким коэффициентом преобразования кинетической энергии струи в акустическую (до 50%), простотой конструкции и эксплуатации, дешевизной. Интенсивность звука в непосредственной близости от излучателя может достигать  $10 \text{ Вт/см}^2$ . К недостаткам этих излучателей относятся широкий спектр излучаемых частот, нестабильность излучаемой мощности, невозможность получения звуковых колебаний заданной формы.

Вторую группу излучателей составляют электроакустические преобразователи. Свое название они получили оттого, что преобразуют электрические колебания в механические колебания какого-либо твердого тела, которое и излучает в окружающую среду акустические волны. Наиболее распространенные электроакустические преобразователи, такие, как электродинамические излучатели, магнитострикционные и пьезоэлектрические преобразователи, представляют собой линейные устройства, благодаря чему они возбуждают акустическую волну той же формы, что и электрический сигнал. Кроме того, эти устройства обратимы, то есть могут работать и как излучатели, и как приемники звука.

В диапазоне слышимых частот широкое распространение получили электродинамические излучатели, принцип действия которых основан на взаимодействии пере-

менного электрического тока с магнитным полем (телефоны, громкоговорители). В магнитострикционных преобразователях используется эффект магнитострикции — деформации твердого тела в магнитном поле.

В ультразвуковом и гиперзвуковом диапазонах (до  $10^{10}$  Гц) наиболее широко применяются пьезоэлектрические преобразователи, принцип действия которых основан на обратном пьезоэффекте — деформации тела под действием электрического поля.

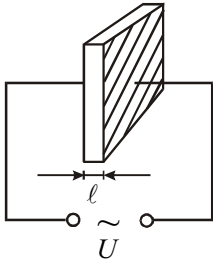


Рис. 5.7.

На рис. 5.7 схематично показан простейший преобразователь, основу которого составляет пьезопластинка, вырезанная специальным образом из монокристалла кварца, ниобата лития ( $\text{LiNbO}_3$ ) или другого пьезоматериала. К противоположным поверхностям пластинки (обычно металлизированным или покрытым металлическими электродами) прикладывается переменное напряжение  $U$  с частотой  $\nu$ . Толщина пластинки  $\ell$  будет при этом периодически изменяться с той же частотой, причем это изменение не

превосходит нескольких микрон. Вибрирующие поверхности пластинки приводят в движение соприкасающийся с ними воздух. Наибольшая амплитуда колебаний будет при резонансе, когда на толщине  $\ell$  укладывается нечетное число полувольт:

$$\ell = n \frac{\lambda_n}{2}; \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (5.22)$$

Отметим, что при четном  $n$  на электродах возникли бы электрические заряды одного знака, что невозможно. Резонансные частоты получаются равными

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2\ell}. \quad (5.23)$$

Например, для пьезокварца при скорости продольных волн  $c = 5700$  м/с и толщине пластинки  $\ell = 1$  мм резонансные частоты равны

$$\nu_n = n \cdot 2850 \text{ кГц}. \quad (5.24)$$

Наибольшую амплитуду колебаний имеет волна основной частоты ( $n = 1$ ), поэтому пьезоизлучатели применяются, как правило, на основной частоте.

На частотах до нескольких мегагерц широкое распространение получили преобразователи из пьезокерамики. Пьезокерамика представляет собой поликристаллический сегнетоэлектрический материал (твердые растворы на основе  $\text{BaTiO}_3$ – $\text{CaTiO}_3$ ,  $\text{PbTiO}_3$ – $\text{PbZnO}_3$  и другие), обладающий после поляризации в электрическом поле устойчивыми и сильными пьезоэлектрическими свойствами. Из пьезокерамики можно изготавливать излучатели самой разной формы (в виде пластин, стержней, колец и так далее). С помощью преобразователей сферической или цилиндрической формы получают сфокусированный ультразвуковой пучок, в фокусе которого интенсивность звука достигает  $10^5$ – $10^6$  Вт/см<sup>2</sup>.

На частотах порядка десятков и сотен мегагерц толщина  $\ell$  становится настолько малой, что изготовить преобразователь можно лишь в жестком соединении со звукопроводом — массивным куском звукопроводящего материала. В этом случае на хорошо отполированную по-

верхность звукопровода напыляется металлическая пленка (один электрод), к которой приваривается толстая (порядка 1 мм) пластинка пьезоэлектрика. Затем эта пластинка сошлифовывается до нужной толщины  $\ell$ , после чего на неё наносится второй электрод.

На частотах порядка 1 ГГц толщина пьезопреобразователя составляет  $\ell \sim 1$  мкм. Изготовление таких преобразователей представляет серьезную технологическую проблему. В этом частотном диапазоне применяются пленочные преобразователи, получаемые напылением на торец звукопровода пьезоэлектрических пленок из таких материалов, как CdS, ZnS, ZnO и другие. Современные технологии позволяют создавать преобразователи с коэффициентом преобразования электрической энергии в акустическую до 90% и мощностью волны, достигающей нескольких ватт.

**Применение акустических методов.** Для современного уровня развития акустики характерно чрезвычайно широкое применение акустических методов для решения разнообразных задач не только в физике, но также и в информационной и измерительной технике, промышленности, медицине, биологии, военном деле и т. д.

Первое (в порядке исторического становления) важное прикладное направление в акустике связано с получением при помощи акустических волн информации о свойствах и строении веществ, о происходящих в них процессах. Применяемые в этих случаях методы основаны на измерении скорости распространения и коэффициента поглощения ультразвука на разных частотах ( $10^4 \div 10^5$  Гц в газах и  $10^5 \div 10^{10}$  Гц в жидкостях и твердых телах). Такие исследования позволяют получать информацию об упругих и прочностных характеристиках материалов, о степени их чистоты и наличии примесей, о размерах неоднородностей, вызывающих рассеяние и поглощение волн, и т. д. Большая группа методов базируется на эффектах отражения и рассеяния упругих волн на границе между различными средами, что позволяет обнаруживать присутствие инородных тел и их местоположение. Эти методы лежат в основе таких направлений, как гидролокация, неразрушающий контроль изделий и материалов, медицинская диагностика. Применение акустической локации в гидроакустике имеет исключительное значение, поскольку звуковые волны являются единственным видом волн, распространяющихся на большие расстояния в естественной водной среде. Как разновидность дефектоскопии, широко применяемой в промышленности, можно рассматривать ультразвуковую диагностику в медицине. Даже при небольшом различии в плотности биологических тканей происходит отражение ультразвука на их границах. Поэтому ультразвуковая диагностика позволяет выявлять образования, не обнаруживаемые с помощью рентгеновских лучей. В такой диагностике используются частоты ультразвука порядка  $10^7$  Гц; интенсивность звука при этом не превышает  $0,5$  мВт/см<sup>2</sup>, что считается вполне безопасным для организма. В настоящее время развитие дефектоскопии привело к созданию акустической томографии. В этом методе с помощью набора приемников ультразвука или одного сканирующего приемника регистрируются упругие волны, рассеи-

---



ваемые в разных направлениях, а затем с использованием компьютерной обработки сигналов на экране дисплея формируется объемное изображение внутренней структуры исследуемого объекта.

Другим важным прикладным направлением акустики является активное воздействие ультразвуком на вещество. Такое воздействие широко используется в промышленной технологии для поверхностной обработки деталей, сварки, интенсификации химических процессов и т. д. В жидкостях основную роль при таком воздействии играет кавитация — образование в интенсивной звуковой волне пульсирующих пузырьков. Схлопывание пузырьков сопровождается мощным гидродинамическим возмущением и сильным локальным разогревом вещества, в результате чего разрушается поверхность твердого тела, находящегося в области кавитации. Применение ультразвука для воздействия на живой организм в медицине основывается на эффектах, возникающих в биологических тканях при прохождении через них акустических волн. При умеренной интенсивности звука (до  $1 \text{ Вт/см}^2$ ) колебания частиц среды вызывают микромассаж тканей, а поглощение звука — локальный разогрев, что применяется в ультразвуковой терапии. При больших интенсивностях сильное нагревание и кавитация вызывают разрушение тканей. Для хирургических операций используется сфокусированный ультразвуковой пучок, который позволяет производить локальные разрушения в глубинных структурах (например, мозга или почки) без повреждения окружающих тканей. В хирургии применяется ультразвук с частотами  $0,5 \div 5 \text{ МГц}$ , интенсивность которого в фокусе достигает  $10^3 \text{ Вт/см}^2$ .

**Основные характеристики звука.** Упругие волны в воздухе, имеющие частоты в пределах от 20 Гц до 20 кГц, вызывают у человека ощущение звука. В узком смысле упругие волны в любой среде, имеющие частоту в этом интервале, называются слышимыми звуковыми волнами, или просто звуком. Волны с частотами  $\nu < 20 \text{ Гц}$  называются инфразвуком, а с частотами  $\nu > 20 \text{ кГц}$  — ультразвуком. Инфразвук и ультразвук человеческим ухом не воспринимаются.

В действительности, самые низкие и самые высокие частоты интервала слышимых звуков доступны, как правило, лишь очень молодым людям. С возрастом этот интервал сужается, причем мужчины начинают утрачивать чувствительность к высоким частотам раньше, чем женщины. После 50 лет люди чаще всего утрачивают способность к восприятию звуков с частотами  $\nu > 12 \text{ кГц}$ .

Звуки различаются по высоте, тембру и громкости.

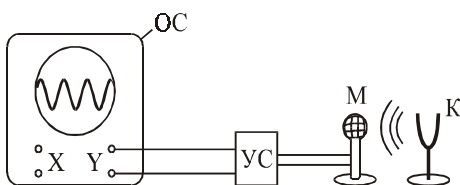


Рис. 5.8.

Всякий реальный звук, как правило, представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением колебаний с определенным набором частот. Чтобы убедиться в этом, подключим микрофон М через усилитель УС ко входу Y ос-

циллографа ОС (рис. 5.8) и будем регистрировать осциллограммы различных источников звука. Наиболее близким к гармоническому является звук камертона К — осциллограмма по своему виду очень близка к синусоиде.

Из произносимых звуков более всего подходят на гармонические гласные звуки. Однако уже здесь заметно отличие осциллограммы от синусоиды, что указывает на сложный состав гласных звуков. Гораздо более сложный вид характерен для осциллограмм согласных звуков. Принципиально возможно, используя набор резонаторов (см. ниже) или компьютерную обработку осциллограмм, произвести гармонический анализ звука, то есть установить тот набор частот, который присутствует в данном звуке. Измеряя интенсивность каждой из гармоник, можно получить акустический спектр.

Если в результате такого анализа окажется, что звук состоит из колебаний с дискретными частотами  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  и так далее, то спектр называется линейчатым. На рис. 5.9а показан пример такого спектра, где по оси ординат отложены интенсивности  $I$  простых (гармонических) звуков.

Может быть и другая ситуация, когда в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале  $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$ . Такой спектр, изображенный на рис. 5.9б, называется сплошным. По оси ординат здесь отложена так называемая спектральная плотность интенсивности звука  $f(\nu) = dI / d\nu$ . В этом случае можно говорить об интенсивности  $dI = f(\nu)d\nu$  звука, занимающего узкий частотный интервал  $d\nu$ . Эта интенсивность численно равна заштрихованной на рисунке площади. Естественно, что полная интенсивность  $I$  сложного звука со сплошным спектром будет равна площади под кривой  $f(\nu)$ . Сплошным спектром обычно обладают шумы.

Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется тональным. Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой  $\nu_1$ . Колебания с частотами  $\nu_2, \nu_3$  и так далее называются обертонами. Соотношения интенсивностей основного тона  $I_1$  и обертонов  $I_2, I_3, \dots$  определяют тембр звука, придают ему определенную окраску. Фазы гармоник на тембр звука не влияют. В отсутствие обертонов тональный звук называют чистым тоном. Камертоны дают чистый тон и используются при настройке музыкальных инструментов.

Из каждого музыкального инструмента извлекают звуки с характерным набором гармоник. Это позволяет на слух различать звуки одного тона (с одинаковой основной частотой  $\nu_1$ ), извлекаемые из флейты, трубы, фортепьяно и др. На рис. 5.10 показана

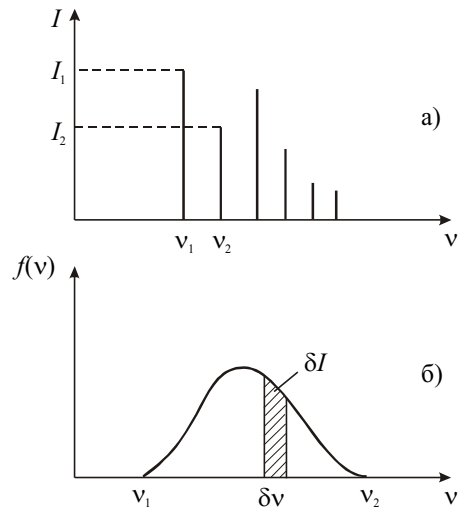


Рис. 5.9.

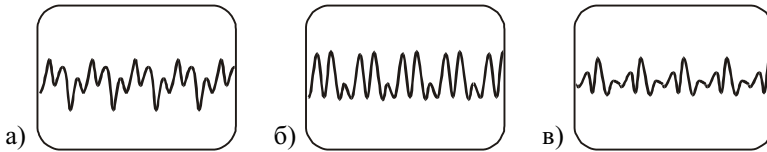


Рис. 5.10.

ны осциллограммы для тональных звуков с частотой  $\nu_1 = 440$  Гц (нота «ля» первой октавы) флейты (а), голоса (б) и трубы (в). Все осциллограммы имеют одинаковый период повторения  $T = 1/440$  с, однако сильно разнятся своим видом. Это указывает на то, что основные частоты  $\nu_1 = 1/T$  у всех звуков совпадают, однако звуки отличаются своим спектральным составом.

На рис. 5.11 изображена клавиатура рояля с указанием основных частот клавиш, а также приближенные диапазоны основных частот для других инструментов и голосов.

**Закон Вебера–Фехнера. Диаграмма слуха.** Определение громкости звука основано на психофизическом законе, установленном в 1846 году Э.–Г. Вебером, который заложил основы «психометрии», т.е. количественных измерений ощущений. Поскольку ощущение является субъективным процессом, то абсолютные измерения силы ощущений невозможны, и Вебер перенес проблему в область измерения относительных величин и искал минимальные различия в ощущениях, которые можно зафиксировать.

Суть закона Вебера заключается в том, что минимальное изменение интенсивности звука  $\Delta I$ , которое различает человеческое ухо, не зависит от интенсивности  $I$  слышимого звука и составляет приблизительно 10% от ее величины:

$$\frac{\Delta I}{I} = 10^{-1}. \quad (5.25)$$

Помимо слуховых ощущений, Вебер изучал также осязание и зрение и установил, что для осязания минимальное различие в ощущении тяжести груза не зависит от величины этого груза и составляет  $\sim 1/30$ , а для зрения минимальная воспринимаемая разница в интенсивности света также не зависит от величины интенсивности и составляет  $\sim 1/100$ .

Исходя из закона Вебера, можно построить шкалу уровня ощущения звука, или шкалу громкости  $\beta$ , записав следующее соотношение:

$$\frac{dI}{I} = A d\beta, \quad (5.26)$$

где  $d\beta$  — прирост громкости, обусловленный приростом интенсивности,  $A$  — коэффициент, определяющий масштаб шкалы. Интегрируя (5.26), получаем:

$$\ln \frac{I}{I_{\text{пор}}} = A\beta. \quad (5.27)$$

Для того, чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью  $I_{\text{пор}}$  и соответственно, некоторым минимальным звуковым давлением  $\delta p_{\text{пор}}$ , которое называется порогом слышимости. Естественно, что при  $I = I_{\text{пор}}$  громкость  $\beta = 0$ . Следовательно,

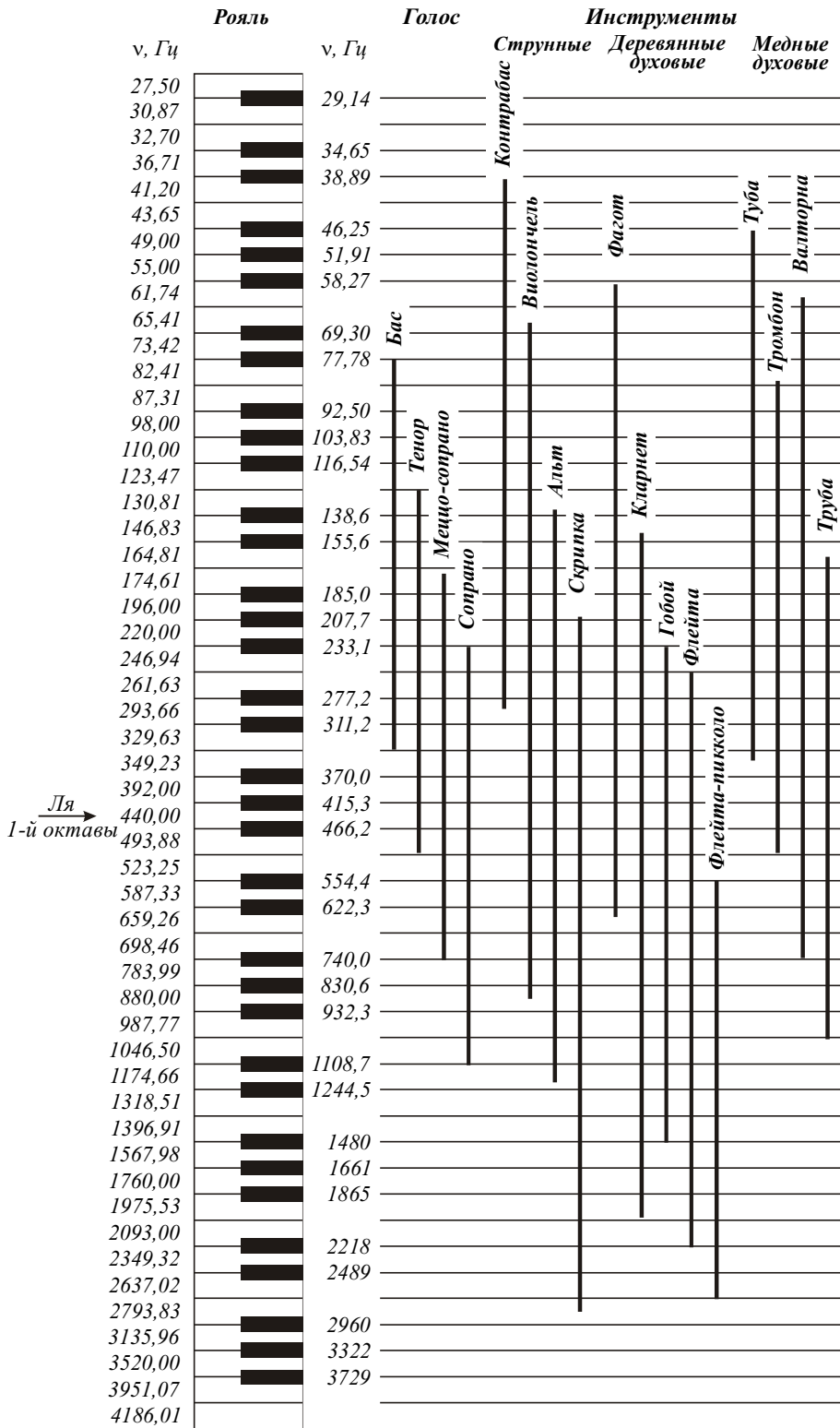


Рис. 5.11.

$$\beta = \frac{1}{A} \ln \frac{I}{I_{\text{пор}}} \quad (5.28)$$

Если выбрать  $A = \ln 10 \approx 2,301$ , то (5.28) переписывается в виде

$$\beta = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}} \quad (5.29)$$

Это соотношение называется законом Вебера–Фехнера и отражает тот факт, что чувствительность уха человека к звуку меняется, как логарифм интенсивности звука. Аналогичные (5.29) соотношения были установлены Э.–Г. Вебером и Г.–Т. Фехнером и для других ощущений, даваемых органами чувств человека, — осязания и зрения (Фехнеру принадлежит большое количество работ по «психофизике», которую он определял, как «точную науку о функциональных зависимостях между телом и душой, общее — между материальным и духовным, физическим и психическим миром»).

На рис. 5.12 изображена «диаграмма слуха», на которой показаны области частот и звуковых давлений, а также уровни интенсивности звуков, воспринимаемых человеческим ухом. Нормальное ухо слышит только те звуки, которые лежат внутри этой области. Нижняя граница области характеризует зависимость порога слышимости от частоты, а верхняя — порог болевого ощущения, когда волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе ощущение боли и давления. Отметим, что человеческое ухо является уникальным приемником акустических волн, воспринимающим звуки, различающиеся по интенсивности на 12–15 порядков в области частот около 1 кГц, где диаграмма слуха имеет наибольшее вертикальное сечение. Из диаграммы видно, что при одинаковом звуковом давлении и одинаковой интенсивности звуки различной частоты могут восприниматься, как звуки разной громкости  $\beta$ . Поэтому в акустике, помимо субъективной величины — громкости звука  $\beta$ , оцениваемой на слух, используются и объективные характеристики звука, которые могут быть непосредственно измерены, — уровень звукового давления  $L_p$  и равный ему уро-

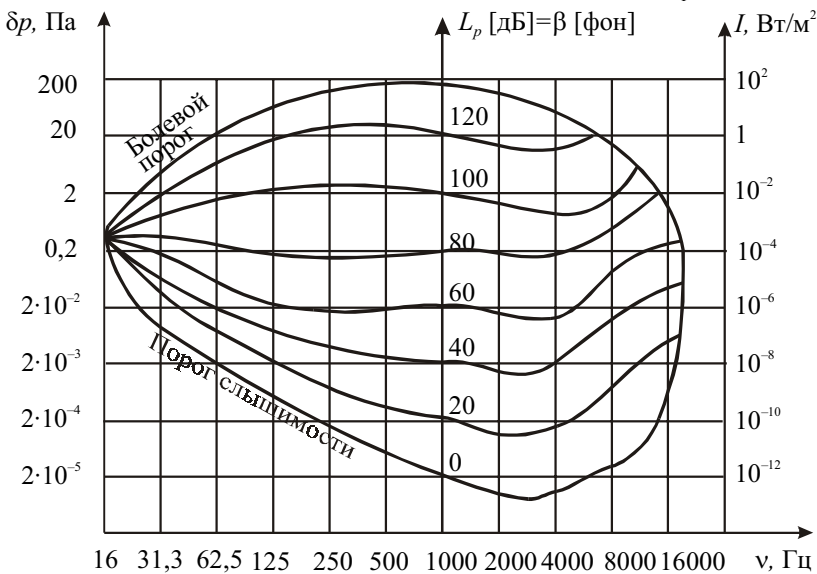


Рис. 5.12.

вень интенсивности. Поскольку согласно (5.17) интенсивность пропорциональна квадрату звукового давления, обе эти характеристики определяются формулой:

$$L_p = 2 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}} = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (5.30)$$

В принципе,  $L_p$  — величина безразмерная, но для численного значения логарифма используют название «бел» (в честь изобретателя телефона Г. Белла). На практике обычно используют в 10 раз меньшую единицу — «децибел», так что (5.30) принимает вид:

$$L_p [\text{дБ}] = 20 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}} = 10 \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (5.30a)$$

В определении  $L_p$  принято использовать стандартный порог слышимости  $\delta p_{\text{пор}} = 2 \cdot 10^{-5}$  Па, а соответствующее ему значение минимальной интенсивности  $I_{\text{пор}}$  зависит, согласно (5.17), от среды, в которой распространяется звук, и для воздуха при нормальных условиях составляет  $I_{\text{пор}} = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>.

Для громкости звука  $\beta$  используют единицу под названием «фон». Громкость тона в фонах для любой частоты равна уровню звукового давления в децибелах для тона с частотой  $\nu = 1$  кГц, воспринимаемого как звук той же громкости.

На рис. 5.12 изображены также кривые для уровней равной громкости при различных уровнях звукового давления и интенсивности, из которых видно, что при  $\nu = 1$  кГц  $\beta = L_p$ , а для других слышимых ухом частот  $\beta$  и  $L_p$  могут заметно отличаться.

**Акустические резонаторы.** В ряде случаев возникает необходимость выделения гармонических составляющих из сложных звуковых колебаний. С такой задачей приходится сталкиваться при упомянутом выше спектральном анализе сложных звуков, при создании узкополосных приемников звука, чувствительных к определенной частоте, музыкальных инструментов и др. Для таких целей используется акустический резонатор — устройство, обладающее одной или множеством собственных частот.

Типичным примером акустической системы, реагирующей лишь на одну частоту, является сосуд сферической формы с открытой горловиной (рис. 5.13), который называется резонатором Гельмгольца. В задней части резонатора имеется еще одно маленькое отверстие в виде сопла, служащее для обнаружения колебаний. Воздух в горловине является колеблющейся массой. При смещении этой массы, например, в сторону сферического объема  $V$  воздух в этом объеме слегка сжимается, и возникающие силы избыточного давления выполняют роль возвращающей силы. Если площадь горловины равна  $S$ , а ее длина —  $\ell$ , то масса колеблющегося столба равна  $m = \rho_0 \ell S$ , где  $\rho_0$  — плотность невозмущенного воздуха. При смещении массы  $m$  на расстояние  $\xi \ll \ell$  (положительное направление оси  $O\xi$  показано на рисунке) плотность воздуха изменяется на величину  $\delta\rho$ , удовлетворяющую равенству

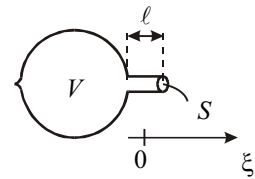


Рис. 5.13.

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{S \cdot \xi}{V}. \quad (5.31)$$

Согласно (5.7), избыточное давление оказывается равным

$$\delta p = c^2 \delta \rho = -\frac{\rho_0 c^2 S}{V} \xi. \quad (5.32)$$

Следовательно, уравнение движения столба воздуха принимает вид

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \delta p \cdot S,$$

или

$$\rho_0 S \ell \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{\rho_0 c^2 S^2}{V} \xi. \quad (5.33)$$

Отсюда находим, что собственная частота колебаний столба воздуха в горловине, или частота резонатора Гельмгольца, равна

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{S}{V \ell}}. \quad (5.34)$$

При объеме резонатора  $V = 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, площади отверстия горловины  $S = 1$  см<sup>2</sup> и её длине  $\ell = 1$  см, скорости звука  $c = 334$  м/с для частоты  $\nu_0$  получим величину

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{334}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}} \approx 168 \text{ Гц}, \quad (5.35)$$

соответствующую слышимому диапазону звуковых частот.

Зависимость собственной частоты колебаний резонатора от его параметров и прежде всего от объема  $V$  эффектно демонстрируется в следующем опыте (рис. 5.14). Перед динамиком Д, подключенным к генератору звуковой частоты Г устанавливаются несколько резонаторов, отличающихся своими размерами. Около заднего отверстия каждого из резонаторов помещается легкий бумажный пропеллер-вертушка, который может вращаться вокруг вертикальной оси. При плавном увеличении частоты звукового генератора будет возрастать частота акустической волны, испускаемой динамиком в направлении резонаторов и играющей роль гармонической вынуждающей силы. При последовательном совпадении частоты этой волны  $\nu$  с собственными частотами  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$  резонаторов давление воздуха в их объемах будет колебаться с максимальной (резонансной) амплитудой. Из задних отверстий резонаторов будут бить сильные струи воздуха, что фиксируется по началу вращения вертушек сначала у большого, затем у среднего и, наконец, у самого маленького резонатора, имеющего самую высокую собственную частоту  $\nu_3$ .

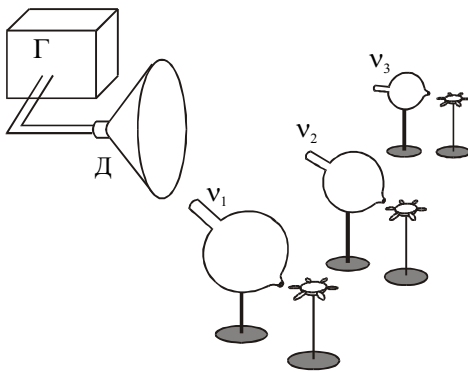


Рис. 5.14.

Уместно отметить, что при частоте резонатора  $\nu_0 \sim 10^2$  Гц длина возбуждающей его волны  $\lambda = c/\nu_0 \approx 3,3$  м. Эта длина значительно больше характерных размеров резонатора:  $\lambda \gg V^{1/3}$ . Следовательно, не может быть и речи о стоячей акустической волне частоты  $\nu_0$  в самой сферической полости.

Однако и в самой полости можно возбудить стоячие волны с длиной  $\lambda \leq V^{1/3}$  и частотой  $\nu = c/\lambda \geq c/V^{1/3}$ . Если характерный размер резонатора  $V^{1/3} \sim 10$  см, то частоты этих волн  $\nu > 3000$  Гц. Такой резонатор будет обладать множеством собственных частот в килогерцовом диапазоне.

Наиболее простым в изготовлении акустическим резонатором является деревянный ящик или труба, открытые либо с одной, либо с двух противоположных сторон.

Прделаем следующий опыт. Заполним водой нижнюю часть вертикальной трубки Т, используя систему сообщающихся сосудов, и поднесем к ее верхнему концу звучащий на частоте  $\nu$  камертон К (рис. 5.15). Перемещая воронку В вверх, можно добиться усиления тонального звука, создаваемого системой «камертон + часть трубы, заполненная воздухом». Это усиление будет наблюдаться при совпадении частоты  $\nu$  с одной из собственных частот  $\nu_p$  резонатора — трубы с воздухом длиной  $\ell$ , «закрытой» у нижнего конца. Собственные частоты стоячих волн в таком резонаторе легко подсчитать, если учесть, что на нижнем конце должен быть узел смещений, а на верхнем — пучность. Это возможно лишь для длин волн  $\lambda_p$ , удовлетворяющих изложенному в предыдущей лекции условию (4.40):

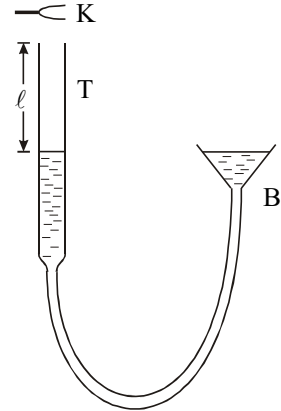


Рис. 5.15.

$$\ell = (2p - 1) \frac{\lambda_p}{4}, p = I, II, III, \dots,$$

когда на длине трубы укладывается нечетное число четвертей длин волн. Соответственно, частоты колебаний будут равны

$$\nu_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{4\ell} (2p - 1). \tag{5.36}$$

Хотя усиление звука возможно при нескольких длинах воздушного столба  $\ell$ , однако самым эффективным оно будет при  $\nu = \nu_I$  или  $\ell = \frac{c}{4\nu}$ .

Особо подчеркнем, что резонатор создает более благоприятные условия для звучания камертона, позволяя перераспределить, а стало быть и усилить звук по определенным направлениям. Именно поэтому в опытах камертоны устанавливают на деревянный ящик, открытый с одного конца и настроенный на частоту камертона (рис. 5.16).

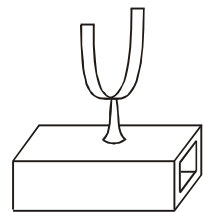


Рис. 5.16.

**Некоторые сведения о музыкальных инструментах.** Деревянные деки музыкальных инструментов выполняют функции резонаторов, обеспечивая хорошие условия звучания. Частоты струнных инструментов не зависят от резонатора. Основная частота звука  $\nu_I$  и частоты обертонов зависят только от массы, натяжения и длины струны. Однако тембр звука зависит от способа возбуждения и от реакции резонатора и эффективности, с которой резонатор «поддерживает» эти частоты и посылает соответствующие волны в окружающее пространство.



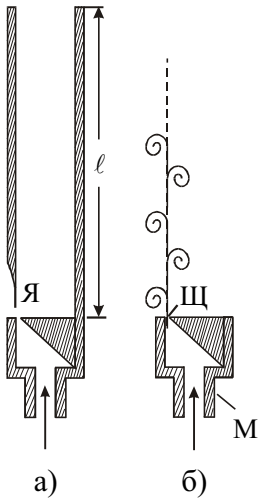


Рис. 5.17.

В духовых инструментах формирование звука связано с наличием автоколебаний и зависит как от конструкции инструмента, так и от способа, с помощью которого воздух вдвухается в инструмент. В качестве иллюстрации рассмотрим качественно процесс возникновения автоколебаний в органной трубе, разрез которой изображен на рис. 5.17а.

При равномерном поступлении в мундштук М (рис. 5.17б) воздух проходит через узкую щель Щ, за которой образуется турбулентный поток. Образующаяся при таком течении вихревая дорожка является источником «щелевого» тона, основная частота которого обратно пропорциональна периоду следования вихрей  $T_v$ . По существу система «мундштук + щель» представляет собой сложную автоколебательную систему, теоретическое описание которой — серьезная проблема.

Вихри, выходящие из щели, поочередно проходят слева и справа от язычка Я, вызывая его вибрацию. Язычок оказывает периодическое воздействие на столб воздуха в трубе. Возникающие в столбе импульсы сжатия, добрав до открытого конца трубы, отражаются в виде импульсов разрежения и возвращаются к щели через время  $T = 2\ell/c$  ( $\ell$  — длина трубы,  $c$  — скорость звука в воздухе), управляя поступлением воздуха через щель. Таким образом, основная частота  $\nu_1 = 1/T$  формируется резонаторной системой. Однако можно вдвухать воздух так, чтобы в трубе одновременно существовали два импульса сжатия, и мы услышим звучание трубы на частоте первого обертона (удвоенной частоте).

Органые трубы обычно конструируются для звучания на основной частоте. В духовых инструментах возбуждающим вибратором (аналогом язычка Я в органной трубе)

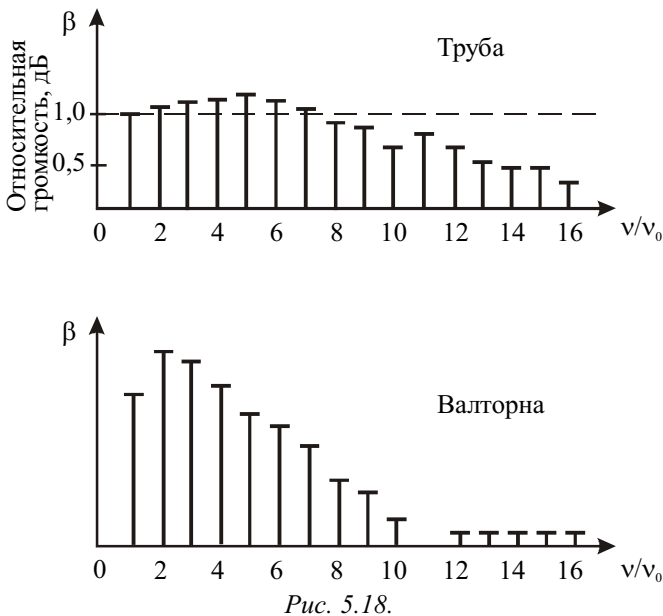


Рис. 5.18.

можно управлять, чтобы посылать в трубу один или более импульсов, прежде чем первый отразится от открытого конца. Высота звука инструмента определяется количеством импульсов в секунду, отраженных от открытого конца духового инструмента.

Произносимые человеком звуки связаны с тем, что голосовые связки гортани вибрируют под напором движущегося воздуха, а гортань является

объемным резонатором. Как правило, у мужчин объем гортани больше, чем у женщин, поэтому в соответствии с формулой (5.34) мужские голоса более низкие.

На рис. 5.18 показаны спектры звуков, извлекаемых на трубе и валторне с одинаковой основной частотой  $\nu_0 = 440$  Гц. По оси ординат отложена громкость  $\beta$  (нормирована на громкость волны основной частоты). В спектре звука валторны отсутствуют частоты  $\nu > 10$  кГц, поэтому её звук более приглушенный, нежели звук трубы.

Завершая описание основных принципов действия источников звука и музыкальных инструментов, уместно упомянуть о двух акустических эффектах, с проявлениями которых мы практически ежедневно встречаемся.

**Эффект Доплера.** Наблюдая за проходящим мимо поездом или движущимся автомобилем, мы замечаем, что высота тона подаваемого ими звукового сигнала постоянно изменяется. Это и есть одно из проявлений эффекта Доплера, состоящего в изменении частоты звука при относительном движении источника и приемника. Рассмотрим это явление несколько подробнее.

Пусть источник И (рис. 5.19а) излучает монохроматическую (т.е. гармоническую) акустическую волну частоты  $\nu_0$ . Тогда длина этой волны, распространяющейся в воздухе со скоростью  $c$ , будет равна:

$$\lambda_0 = c / \nu_0. \tag{5.37}$$

Если теперь источник будет двигаться со скоростью  $v < c$  в направлении распространения волны, то волна будет «отрываться» от источника со скоростью  $c - v$ , и её длина уменьшится (рис. 5.19б):

$$\lambda = \frac{c - v}{\nu_0}. \tag{5.38}$$

Достигнув неподвижного приемника П, эта волна будет воздействовать на него с частотой

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \nu_0 \frac{c}{c - v} = \nu_0 \frac{1}{1 - v/c}, \tag{5.39}$$

которая будет больше исходной частоты  $\nu_0$ . При движении источника в противоположном направлении эта частота уменьшится. Именно это изменение частоты тона сигнала мы фиксируем при приближении и последующем удалении поезда или автомобиля.

Изменение частоты будет также и при движении приемника П, однако физическая причина этого изменения состоит в том, что волна с длиной  $\lambda_0 = c / \nu_0$  будет поступать в приемник со скоростью  $v + c$  (если приемник движется навстречу волне). Следовательно, частота воздействия на приемник будет равна

$$\nu = \frac{c + v}{\lambda_0} = \nu_0 \frac{c + v}{c} = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \tag{5.40}$$

и превысит исходную частоту.

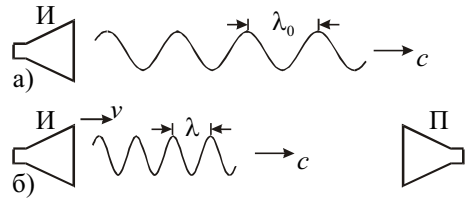


Рис. 5.19.

В силу различия физических причин, приводящих к изменению частоты при движении источника и приемника, разнятся и формулы (5.39) и (5.40). Однако при  $v \ll c$ , как нетрудно убедиться, с точностью до членов порядка  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  формула (5.39) может быть записана в виде (5.40).

При одновременном движении навстречу друг другу источника со скоростью  $v_{\text{и}}$  и приемника со скоростью  $v_{\text{п}}$  обе формулы можно объединить в одну

$$v = v_0 \frac{1 + v_{\text{п}} / c}{1 - v_{\text{и}} / c}. \quad (5.41)$$

При удалении источника или приемника в формуле (5.41) следует изменить знак при соответствующей скорости.

При скоростях  $v > c$  формируются ударные волны, и формулы, описывающие изменение частоты, становятся несправедливыми.

**Бинауральный эффект.** Этот эффект представляет собой психофизиологическое явление, заключающееся в слитном восприятии звуков, принимаемых правым и левым ухом. Он дает возможность определить направление на источник звука и играет существенную роль в музыкальной акустике (стереофония).

Рисунок 5.20 иллюстрирует этот эффект. Если волна падает под углом к линии, соединяющей оба уха (пунктиром изображен контур радиуса  $R$ , имитирующий голову человека), то волна достигнет левого уха позднее правого, а время задержки составит величину

$$\Delta t = \frac{R \sin \alpha + R\alpha}{c}, \quad (5.42)$$

где  $R\alpha$  — криволинейный путь, проходимый звуковой волной при огибании ею головы человека за счет дифракции (см. ниже).

Кроме того, поскольку голова частично экранирует звук, то амплитуда волны, достигающей левого уха, несколько уменьшается. Совместное действие этих двух факторов дает человеку возможность определить направление на источник звука. Если период колебаний звуковой волны сравним со временем задержки:

$$\Delta t \leq T / 2, \quad (5.43)$$

то волны, падающие под углом, вызывают колебания барабанных перепонок левого и правого уха со сдвигом фаз  $0 \leq \Delta\phi \leq \pi$ , по которому человек и определяет направление прихода волны.

Если положить  $R = 10$  см,  $\sin \alpha \approx 1$ , то для волн с периодом  $T < 10^{-3}$  с ( $\nu \geq 1$  кГц) условие (5.43) не выполняется, и определить направление по сдвигу фазы становится затрудни-

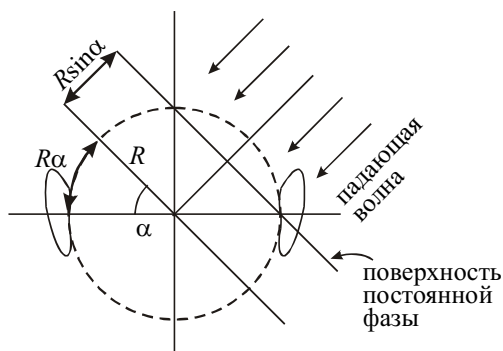


Рис. 5.20.

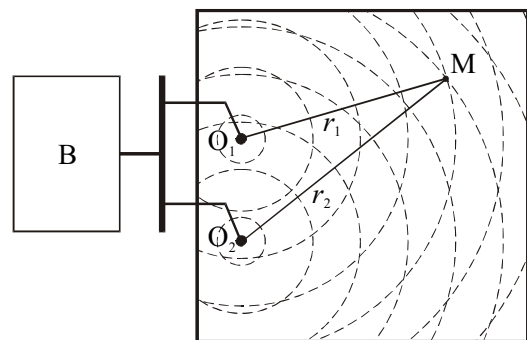
тельно. Однако остается возможность сравнить амплитуды волн, достигающих обеих ушей, и тем самым определить угол  $\alpha$ .

**Интерференция волн.** В предыдущей лекции мы получили уравнение стоячей волны (4.34), описывающее колебания шнура (или иной среды), по которому навстречу друг другу распространяются две гармонические волны одинаковой частоты  $\omega$  и амплитуды  $s_0$ . В результате наложения волн происходит перераспределение в пространстве объемной плотности энергии колебаний. В узлах, где волны встречаются в противофазе, эта энергия равна нулю. В пучностях, напротив, волны складываются в фазе, и энергия максимальна. Явление наложения волн, приводящее к перераспределению в пространстве объемной плотности энергии колебаний, носит название интерференции.

Интерференция является одним из фундаментальных явлений, присущих волнам различной природы (акустическим, электромагнитным, волнам на поверхности жидкости, плазменным волнам и др.). Она была хорошо известна еще во времена Ньютона, который осуществил замечательный опыт, приведший к открытию закономерностей интерференционной картины и получивший название «кольца Ньютона». Эти закономерности легко прослеживаются в опытах по интерференции капиллярных волн на поверхности жидкости. В следующей лекции дается описание характера движения частиц жидкости в таких волнах и устанавливается связь между частотой, длиной волны и скоростью ее распространения.

Один из таких опытов выглядит следующим образом (рис. 5.21). В неглубокую чашку К с большой площадью основания наливают воду. Волны на ее поверхности возбуждают с помощью вибратора В, приводящего в периодическое движение два маленьких шарика  $O_1$  и  $O_2$ , которые являются точечными источниками волн. Эти шарики слегка погружены в воду и совершают синхронные колебания с частотой  $\nu \sim 10^2$  Гц в направлении, перпендикулярном поверхности воды. От каждого из точечных источников распространяется волна с длиной  $\lambda \sim 3$  мм и скоростью  $c \sim 40$  см/с. Гребни этих волн в фиксированный момент времени изображены на рисунке пунктиром. В результате наложения волн образуется интерференционная картина, которую удобно наблюдать в стробоскопическом освещении (освещающая ее вспышками света, следующими также с частотой  $\nu \sim 10^2$  Гц). При таком освещении волны будут казаться практически неподвижными.

Наиболее сильные возмущения поверхности будут наблюдаться в тех местах, где волны складываются в фазе. Говорят, что здесь располагаются интерференционные максимумы.



К  
Рис. 5.21.

В местах, куда волны приходят в противофазе, поверхность будет практически не возмущена: здесь располагаются интерференционные минимумы. Возмущение поверхности в произвольной точке М зависит от разности хода  $\Delta r = r_2 - r_1$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точки М до соответствующего точечного источника. Действительно, смещение  $s$  поверхности жидкости в точке М можно рассматривать как результат наложения двух синусоидальных (т.е. монохроматических) волн, прошедших расстояния  $r_1$  и  $r_2$ :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t - kr_1 - \varphi_1) + s_0 \sin(\omega t - kr_2 - \varphi_2). \quad (5.44)$$

Здесь предполагается, что обе волны в точке М имеют одинаковые амплитуды (хотя это и не совсем верно), и постоянные фазовые добавки  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , так что их разность  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  не зависит от времени.

Выполняя в (5.44) суммирование, получаем:

$$s(t) = 2s_0 \cos\left(\frac{k\Delta r}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (5.45)$$

Если положить для простоты  $\Delta\varphi = 0$ , то положение интерференционных максимумов определяется из условия

$$\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right) = \pm 1. \quad (5.46)$$

Поскольку  $k = 2\pi/\lambda$ , то последнему условию соответствует разность хода

$$\Delta r = r_2 - r_1 = m\lambda, \quad (5.47)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Каждому максимуму принято присваивать порядковый номер, определяемый соответствующим числом  $m$  (максимум нулевого, первого, минус первого и т.д. порядка). Интерференционные минимумы располагаются в тех местах, где

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (5.48)$$

и так же нумеруются ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Рассмотренная интерференционная картина соответствует идеализированной ситуации. Реальные волны даже в лучшем случае являются квазимонохроматическими. Для таких волн амплитуды  $s_0$  и фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются медленно меняющимися функциями времени (заметные изменения этих функций происходят за время  $\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$ ). Однако, если оба шарика приводятся в колебательное движение одним вибратором, разность фаз  $\Delta\varphi$  в (5.45) остается постоянной, положение интерференционных максимумов задается формулой (5.47) и не зависит от времени.

В практически важных случаях источники интерферирующих волн могут быть независимы. В нашем опыте это можно осуществить, если использовать два вибратора, к каждому из которых присоединен маленький шарик. Тогда разность фаз  $\Delta\varphi$  будет также изменяться на масштабе времени  $\tau$ , и ее можно записать в виде

$$\Delta\varphi(t) = \overline{\Delta\varphi} + \delta(t), \quad (5.49)$$

где  $\overline{\Delta\phi}$  — среднее по времени значение разности фаз,  $\delta(t)$  — знакопеременная функция. Считая для простоты в (5.45)  $s_0 = \text{const}$ , приходим к выводу, что интерференционная картина, как целое, будет достаточно хаотично смещаться в разные стороны. Если такую картину снимать на кинолентку со временем экспозиции кадра  $\Delta t > \tau$ , то на каждом кадре будет отпечатана усредненная за время  $\Delta t$  «размазанная» картина. Она может стать совсем неразличимой, если интерференционные максимумы будут смещаться на величины, равные или превышающие расстояния между соседними максимумами. Такая ситуация достаточно часто встречается при интерференции световых волн. Чтобы полного «смазывания» картины не произошло, очевидно, необходимо выполнение следующего условия:

$$|\delta(t)| \ll 2\pi. \tag{5.50}$$

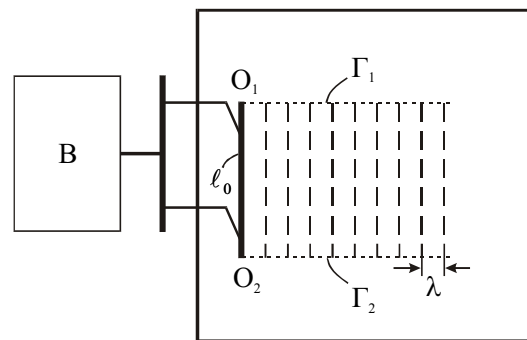
Чем лучше выполняется это неравенство, тем выше качество картины. Так, например, для световых волн  $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-12}$  с, и при визуальном наблюдении (для органов зрения  $\Delta t \sim 0,1$  с) мы всегда регистрируем «размазанную» интерференционную картину.

С качеством картины напрямую связано понятие когерентности интерферирующих волн. Когерентность характеризуется безразмерным коэффициентом  $\gamma$  (степенью когерентности), который может меняться в интервале  $0 < \gamma < 1$ . Чем выше качество картины, тем больше степень когерентности. Для монохроматических волн, конечно,  $\gamma = 1$ .

Этим замечанием о когерентности волн мы здесь и ограничимся, а детальное описание понятия будет дано в курсе «Оптика».

**Дифракция волн.** В упрощенном смысле под дифракцией понимают круг явлений, в которых проявляется отступление от прямолинейного распространения волн. Такое понимание дифракции, вообще говоря, неверно, поскольку прямолинейное распространение волн является лишь определенным приближением. Действительно, специфика любого волнового движения проявляется в том, что это движение, возникнув вначале в ограниченной области, стремится распространиться в равной степени во все стороны. Выбором специальной формы этой области можно добиться того, что волна побежит преимущественно в некоторых направлениях. Вдоль одного из таких направлений побежит фрагмент волны, который с определенной точностью можно считать движущимся прямолинейно.

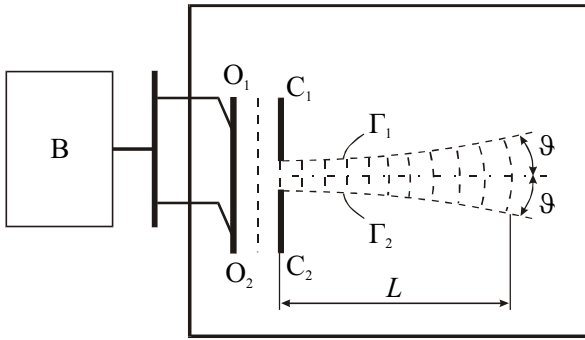
Для наблюдения основных закономерностей дифракции видоизменим характер возбуждения волн на поверхности воды в описанном ранее опыте. В качестве источника волны вместо шариков будем использовать пластину  $O_1O_2$ , длина которой  $\ell_0 = (3 \div 5)$  см, т.е. заметно превышает длину волны  $\lambda \sim 3$  мм (рис. 5.22). В результате по поверхности воды побежит «плоская» волна в направ-



К  
Рис. 5.22.

лении, перпендикулярном пластине. Отчетливо наблюдаются две прямолинейные границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , отделяющие возмущенную волной и гладкую части поверхности воды. Для этой последней части можно употребить заимствованный из оптики термин: «область геометрической тени». Саму волну часто называют волновым пучком, или лучом. В этом эксперименте можно считать, что волна распространяется прямолинейно и не заходит в область тени. Это связано с тем, что размер ее волнового фронта  $\ell_0 \gg \lambda$ .

Уменьшим теперь этот размер. Это наиболее просто осуществить, если параллельно пластине  $O_1O_2$  установить две вертикальные стенки  $C_1$  и  $C_2$ , расстояние  $\ell$  между которыми можно изменять (рис. 5.23).



К Рис. 5.23.

Если сделать  $\ell \leq 5\lambda \approx 15$  мм, то волна начнет постепенно заходить в область тени, а ее фронт будет искривляться. На некотором характерном расстоянии  $L$  волновой пучок приобретет заметную угловую расходимость и далее будет распространяться по части поверхности, ограниченной углом  $2\vartheta$ . При

уменьшении зазора  $\ell$  между стенками угол  $2\vartheta$  возрастает, а расстояние  $L$  уменьшается. Это отступление от прямолинейного распространения является результатом дифракции и существенно тогда, когда  $\ell \sim \lambda$ .

Не составляет труда оценить величины  $\vartheta$  и  $L$ , используя подход, предложенный французским ученым О. Френелем в XIX столетии для объяснения дифракции световых волн. Следуя Френелю, участок фронта падающей волны в зазоре между стенками можно рассматривать как цепочку из  $N \gg 1$  близко расположенных одинаковых точечных источников  $O_1, O_2, \dots, O_N$  (рис. 5.24).

Возмущение в любой точке М поверхности воды есть результат интерференции  $N$  волн от этих, так называемых «вторичных» источников, и зависит от разности хода всех интерферирующих волн. В практически важных случаях расстояния  $r_1, r_2, \dots, r_N \gg \ell$ , поэтому отрезки  $O_1M, O_2M, \dots, O_NM$  можно считать параллельными. Понятно, что в точку Р, лежащую на оси волнового пучка, интерферирующие волны приходят в

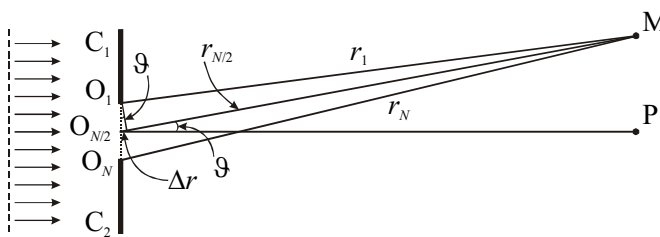


Рис. 5.24.

фазе и возмущение поверхности в ней будет максимальным. Напротив, в точке М волны могут погасить друг друга, если разность хода  $\Delta r = r_{N/2} - r_1$  между волнами от крайнего ис-

точника  $O_1$  и среднего источника  $O_{N/2}$  будет равна  $\lambda/2$ . Поскольку эта разность, как видно из рис. 5.24, равна  $\frac{\ell}{2} \sin \vartheta$ , то

$$\Delta r = \frac{\ell}{2} \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}. \tag{5.51}$$

Аналогично, в противофазе будут приходить волны и от других пар источников ( $O_2, O_{N/2+1}; O_3, O_{N/2+2}; \dots; O_{N/2-1}, O_N$ ). Говорят, что в точке М будет наблюдаться первый минимум дифракционной картины. Не составляет труда написать условие, подобное (5.51), и для других минимумов. Однако, как показывает строгий анализ, более 90% всей энергии переносится волной в пределах угла  $2\vartheta$ . Поэтому на рисунке (5.23) границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  весьма условны и очерчивают лишь основную, наиболее энергоемкую часть пучка.

Для оценки дифракционной расходимости волновых пучков используется угол  $\vartheta$ , который при  $\ell \gg \lambda$  оценивается согласно (5.51) по формуле

$$\vartheta \approx \frac{\lambda}{L}. \tag{5.52}$$

Такую расходимость пучок приобретает на некотором характерном расстоянии  $L$ . Его можно легко оценить из рисунка 5.25, на котором пунктиром изображены асимптоты к границам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Будем условно считать, что на расстоянии  $L$  поперечный размер пучка удвоился и стал равным  $2\ell$ .

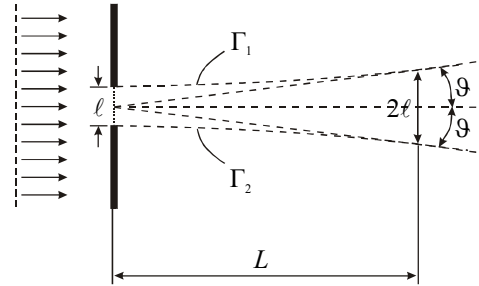


Рис. 5.25.

Тогда с учетом (5.52) мы можем записать:

$$\vartheta = \frac{\ell}{L} = \frac{\lambda}{\ell}. \tag{5.53}$$

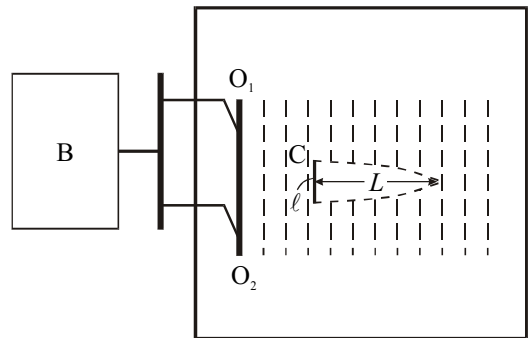
Отсюда

$$L = \frac{\ell^2}{\lambda}. \tag{5.54}$$

Величина  $L$  называется дифракционной длиной пучка с длиной волны  $\lambda$  и поперечным размером  $\ell$ . Она определяет масштаб расстояний, на которых развивается заметная дифракция пучка.

Сделаем некоторые оценки.

В опыте, изображенном на рисунке 5.22,  $\ell = 5$  см,  $\lambda = 3$  мм, и  $L \sim 80$  см. Это означает, что в кювете дифракция просто не успевает заметно развиваться. При уменьшении  $\ell$  (рис. 5.23) до величины  $\ell = 5\lambda = 15$  мм, дифракционная длина пучка  $L = 7,5$  см, и дифракция становится отчетливо видна.



К  
Рис. 5.26.



Если на пути волнового пучка поставить препятствие — стенку С (рис. 5.26), то сразу за стенкой будет тень, однако волна, пройдя расстояние  $\sim L = \ell^2 / \lambda$ , обогнет препятствие. Иллюстрацией к сказанному является, например, возможность услышать звуковой сигнал автомобиля, находясь позади небольшого строения. Однако за многоэтажный дом звук практически не проникает.

---

## ЛЕКЦИЯ 6

*Волны на поверхности жидкости. Гравитационные волны. Капиллярные волны. Цунами. Внутренние волны. Акустические волны большой амплитуды. Линейный и нелинейный режимы распространения. Уединенные волны (солитоны).*

**Волны на поверхности жидкости. Гравитационные волны.** Многие из нас могут долго любоваться поверхностью моря или реки, по которой перекатываются волны. Рожденные ветром, они распространяются затем за счет силы тяжести. Такие волны называются гравитационными. Частицы воды совершают в них движение по круговым и эллиптическим траекториям («вверх–вниз» и «вперед–назад» одновременно), поэтому такие волны (как и волны Лява) нельзя отнести ни к продольным, ни к поперечным. Гравитационные волны обладают рядом удивительных свойств, к анализу которых мы и приступим.

Пусть по поверхности водоема глубиной  $H$  распространяется вдоль оси  $Ox$  поверхностная гармоническая волна

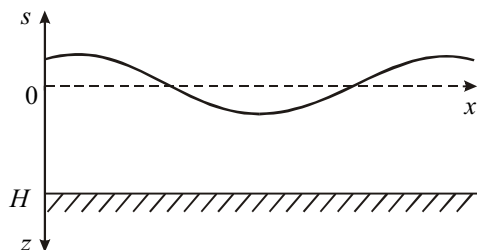


Рис. 6.1.

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx), \quad (6.1)$$

где  $s$  — смещение поверхности воды вверх от равновесного горизонтального положения, отмеченного на рис. 6.1 пунктиром. Будем считать, что  $|s| \ll H$ .

Предположим, что давление жидкости на глубине  $z$  равно:

$$p(z, x, t) = \rho g z + \delta p(z, x, t), \quad (6.2)$$

где  $\delta p$  — добавка к гидростатическому давлению  $\rho g z$ , обусловленная волновым движением поверхности. Сделаем также предположение, что

$$\delta p(z, x, t) = f(z) \rho g s(x, t). \quad (6.3)$$

Выражение (6.3) записано в приближении, что возмущение давления вблизи поверхности ( $z \rightarrow 0$ ) определяется дополнительным гидростатическим давлением  $\rho g s$ , связанным с изменением уровня жидкости при распространении волны:

$$\delta p(0, x, t) = \rho g s(x, t), \quad (6.4)$$

причем с глубиной это возмущение должно убывать. Следовательно, функция  $f(z)$  с ростом  $z$  также должна убывать, при этом  $f(0) = 1$ . Позже мы докажем, что представление возмущения давления в виде (6.3) оправданно.

Для описания волнового движения жидкости нам необходимо, во-первых, для заданной частоты  $\omega$  найти  $k$ , то есть установить дисперсионную зависимость  $\omega = \omega(k)$  и, во-вторых, определить вид функции  $f(z)$ . Это можно сделать, если с учетом (6.2) записать уравнения Эйлера для движения несжимаемой и невязкой жидкости в плоскости  $XOZ$  (см. уравнение (3.30) в лекции по гидродинамике):

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

При записи (6.5) мы предполагаем, что движение частиц по оси  $Oy$  отсутствует. Учтем далее, что членами  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ ,  $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ,  $v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}$  и  $v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$  в силу их малости можно пренебречь. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Эти уравнения дополним условием несжимаемости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (6.7)$$

Уравнения (6.6) и (6.7) при заданных граничных условиях дают возможность рассчитать  $v_z$ ,  $v_x$  и  $\delta p$  и, тем самым, получить решение задачи о движении жидкости, включая движение ее поверхности.

Продифференцируем первое из уравнений (6.6) по  $x$ , а второе — по  $z$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2}; \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В левых частях этой системы уравнений изменен порядок дифференцирования.

Сложим теперь уравнения (6.8). Тогда с учетом (6.7) можем записать:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left( \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Уравнение

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} = 0 \quad (6.10)$$

является знаменитым уравнением Лапласа, используемым во многих разделах физики. Поэтому его решение хорошо известно.

На поверхности водоема при  $z = 0$  граничным условием является равенство (6.4), а на дне при  $z = H$  должно выполняться условие  $v_z = 0$ , из которого с учетом второго уравнения (6.6) получаем:

$$\left. \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (6.11)$$

Подставим далее (6.3) в (6.10) и учтем, что  $\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = -k^2 \delta p$ .

Тогда (6.10) примет вид:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0. \quad (6.12)$$

С методом решения таких уравнений мы познакомились в лекциях по колебаниям. Используя подстановку  $f(z) = Ae^{\lambda z}$ , получаем характеристическое уравнение  $\lambda^2 - k^2 = 0$ , откуда  $\lambda_{1,2} = \pm k$ , и общее решение (6.12) может быть записано в виде функции:

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (6.13)$$

при этом граничные условия для  $f(z)$  следующие:

$$f(0) = 1; \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=H} = 0. \quad (6.14)$$

Подставляя (6.13) в (6.14), получаем:

$$\begin{aligned} A + B &= 1; \\ Ae^{kH} - Be^{-kH} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Отсюда

$$f(z) = \frac{\text{ch}[k(z-H)]}{\text{ch}(kH)}, \quad (6.16)$$

где функция  $\text{ch}\alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$  — гиперболический косинус.

График функции  $f(z)$  изображен на рис. 6.2. Теперь осталось только определить волновое число  $k$ , входящее в (6.1) и (6.3). Это можно сделать, если сначала из (6.1) найти вертикальное ускорение частицы на поверхности жидкости. При этом надо учесть, что положительные значения  $v_z$  соответствуют уменьшению  $s$ :

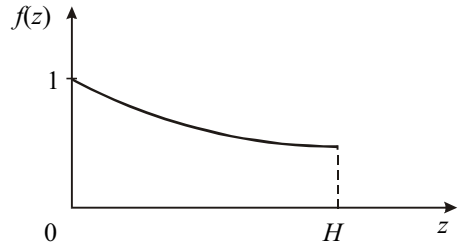


Рис. 6.2.

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = s_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx) = \omega^2 s(x, t). \quad (6.17)$$

Подставим (6.17) в левую часть второго уравнения (6.6), а правую часть этого уравнения запишем, используя представление (6.3). Тогда получим

$$\rho \omega^2 s = -\rho g s \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \rho g s k \text{th}(kH). \quad (6.18)$$

В (6.18) учтено, что  $(\text{ch}\alpha)' = \text{sh}\alpha$ ,  $\text{th}\alpha = \text{sh}\alpha / \text{ch}\alpha$ . Поэтому дисперсионное соотношение получается в виде:

$$\omega = \sqrt{gH} \cdot k \cdot \left( \frac{\text{th}(kH)}{kH} \right)^{1/2}. \quad (6.19)$$

Обозначим  $c_0 = \sqrt{gH}$ . Тогда

$$\omega = c_0 \cdot k \cdot \left( \frac{\text{th}(kH)}{kH} \right)^{1/2}. \quad (6.20)$$

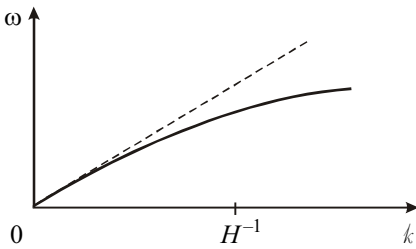


Рис. 6.3.

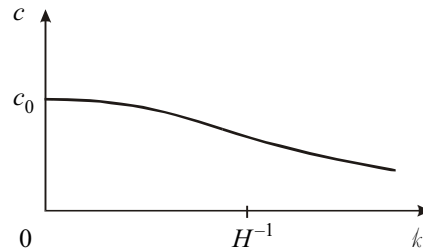


Рис. 6.4.

На рис. 6.3 эта зависимость изображена сплошной линией, а пунктиром показана прямая  $\omega = c_0 k$ . Фазовая скорость волны  $c = \omega/k$  как функция волнового числа показана на рис. 6.4.

Таким образом, поверхностные гравитационные волны подвержены сильной дисперсии. Эффект дисперсии ярко выражен у океанских волн, зарождающихся в удаленных штормовых районах. Поскольку длинные волны (с меньшим  $k$ ) движутся быстрее, чем короткие, то они приходят к берегам раньше коротких на 1–2 дня.

Эффект дисперсии может использоваться при определении места возникновения волн, прошедших до точки наблюдения чрезвычайно большие расстояния. Расстояние от штормового района до места, где волны фиксируют, подсчитывается по разности времен прибытия волн разной длины волны и, следовательно, разной частоты. Преобладающая частота прибывающих волн растет во времени, а длина пройденного пути находится по скорости изменения частоты. Так, по оценке, один из пакетов волн, наблюдавшихся в северной части Тихого океана, прошел половину окружности земного шара от Индийского океана по дуге большого круга, проходящей южнее Австралии.

Реальные волны, как уже говорилось раньше, представляют собой суперпозицию волн, или волновые пакеты, которые движутся с групповой скоростью  $u = d\omega/dk$ . Скорость  $u$  группы меньше, чем скорости  $c = \omega/k$  каждой из волн в группе. Если рассматривать отдельную волну, то можно видеть, что она перемещается быстрее, чем группа. При достижении фронта группы она затухает, а ее место занимают волны, догоняющие группу с тыла.

Фазовая скорость волны  $c$ , как следует из (6.20), зависит от параметра  $kH = 2\pi H/\lambda$ . Поэтому различают волны глубокой и мелкой воды.

**Волны глубокой воды.** Если  $kH \gg 1$  ( $H \gg \lambda$ ), то такие волны называют волнами глубокой воды. Возмущения  $\delta p$  сосредоточены в приповерхностном слое толщиной  $\sim \lambda$  и не «чувствуют» присутствия дна. Для таких волн, с учетом приближения  $\text{th}(kH) \approx 1$ , дисперсионное соотношение (6.19) примет вид:

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (6.21)$$

Таким образом, эти волны обладают сильной дисперсией.

Сделаем некоторые оценки. В океане преобладают волны с периодом колебаний  $T \sim 10$  с. Согласно (6.21) длина волны  $\lambda = 2\pi/k \sim 150$  м, а фазовая скорость  $c \sim 15$  м/с. Такая скорость является типичной, так как она совпадает с характерной скоростью ветра вблизи поверхности, генерирующего волны глубокой воды.

Если проанализировать распределение возмущений давления с глубиной, описываемое функцией  $f(z)$  (см. (6.16)), то можно показать, что  $f = e^{-1}$  при  $z = \lambda/6 = 25$  м. Таким образом, приближение глубокой воды справедливо в тех местах, где глубина  $H \geq 25$  м.

**Волны мелкой воды.** При приближении к берегу глубина  $H$  уменьшается, и реализуется условие  $kH < 1$  ( $2\pi H < \lambda$ ). Хотя частота волны остается прежней, однако дисперсионное соотношение примет иной вид:

$$\omega = k\sqrt{gH} = kc_0, \quad (6.22)$$

из которого следует, что на мелкой воде дисперсия волн отсутствует. Скорость волн  $c_0 = \sqrt{gH}$  уменьшается с глубиной, и на глубине  $H = 1$  м скорость  $c_0 \sim 3$  м/с, а длина волны при  $T \sim 10$  с равна  $\lambda = c_0 T \sim 30$  м.

В непосредственной близости к берегу, где глубина  $H$  сравнима с амплитудой волны  $s_0$ , волна искажается — появляются крутые гребни, которые движутся быстрее самой волны и затем опрокидываются. Это происходит потому, что глубина под гребнем равна  $H + s_0$  и превосходит глубину под впадиной  $H - s_0$ . В результате колебания частиц волны приобретают сложный характер. По аналогии со звуками музыкальных инструментов, осциллограммы которых показаны в предыдущей лекции, можно сказать, что колебания частиц воды являются суперпозицией колебаний многих частот, причем по мере приближения к берегу ширина частотного спектра увеличивается. С подобным искажением акустических волн мы встретимся несколько позднее, когда будем изучать нелинейное распространение волн конечной амплитуды.

Из приведенной выше классификации гравитационных волн следует, что для океана с глубиной  $H = 5$  км волны глубокой воды должны иметь  $\lambda < 2\pi H \sim 30$  км. Согласно (6.21) их период колебаний  $T = 2\pi/\omega \geq 2$  мин, а скорость  $c = \lambda/T \leq 250$  м/с. Для континентального шельфа  $H \sim 50$  м, поэтому волнами глубокой воды будут волны с  $\lambda \leq 300$  м,  $T \leq 15$  с и  $c \leq 20$  м/с.

С другой стороны, на глубине  $H \sim 5$  км волны с длинами волн  $\lambda \geq 30$  км будут волнами мелкой воды. Эти волны имеют период колебаний  $T \geq 2$  мин, а их скорость  $c \geq 250$  м/с. Такие волны двигаются со скоростью реактивного самолета и могут пересечь Атлантический океан примерно за 7 часов.

**Характер движения частиц жидкости.** Рассчитаем скорости частиц  $v_x$  и  $v_z$ , как функции координат  $x$ ,  $z$  и времени  $t$ . Это легко сделать из уравнений (6.6) с учетом (6.3), (6.1) и (6.16):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \delta p = f(z) \rho g k s_0 \cos(\omega t - kx), \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \delta p = -\frac{df}{dz} \rho g s_0 \sin(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Отсюда

$$v_x = f(z)g \frac{k}{\omega} s_0 \sin(\omega t - kx),$$

$$v_z = \frac{df}{dz} \frac{g}{\omega} s_0 \cos(\omega t - kx). \tag{6.24}$$

На рис. 6.5 показаны векторы скорости частиц на глубине  $z$  и на поверхности в фиксированный момент времени. Пунктиром изображено положение волны через малый промежуток времени. Под гребнем волны частицы имеют составляющую скорости  $v_x > 0$ , а под впадиной  $v_x < 0$ . Скорость некоторой частицы А направлена вниз, и с течением времени будет изменяться. Легко понять, что в последующий момент скорость частицы А будет такой, как у частицы В в настоящий момент, затем — как у частицы С в настоящий момент, и так далее. Поэтому траектория частицы А будет эллиптической. По мере увеличения координаты  $z$  (глубины погружения)  $v_z \rightarrow 0$ , эллипсы сплющиваются, и при  $z \gg \lambda$  частицы жидкости колеблются практически вдоль оси  $Ox$ .

Размер  $\ell$  большой полуоси эллипса можно оценить из условия

$$\ell \approx (v_x)_{\max} T = g \frac{k}{\omega} s_0 T. \tag{6.25}$$

Сравним  $\ell$  с длиной волны  $\lambda$ :

$$\frac{\ell}{\lambda} \approx \frac{g}{\lambda} \frac{k}{\omega} s_0 T. \tag{6.26}$$

Учтем, что  $\omega/k = c$ ,  $\lambda = cT$ ,  $c_0 = \sqrt{gH}$  — скорость волн мелкой воды. Тогда

$$\frac{\ell}{\lambda} \approx \frac{c_0^2}{c^2} \frac{s_0}{H}. \tag{6.27}$$

Для мелкой воды  $c = c_0$ , и

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{s_0}{H} \ll 1. \tag{6.28}$$

Поскольку в этом случае  $\lambda \sim H$ , то  $\ell \sim s_0$ , т.е. возрастает с ростом амплитуды волны  $s_0$ . Но так как  $s_0 \ll H$ , то амплитуда горизонтальных колебаний  $\ell \ll \lambda$ .

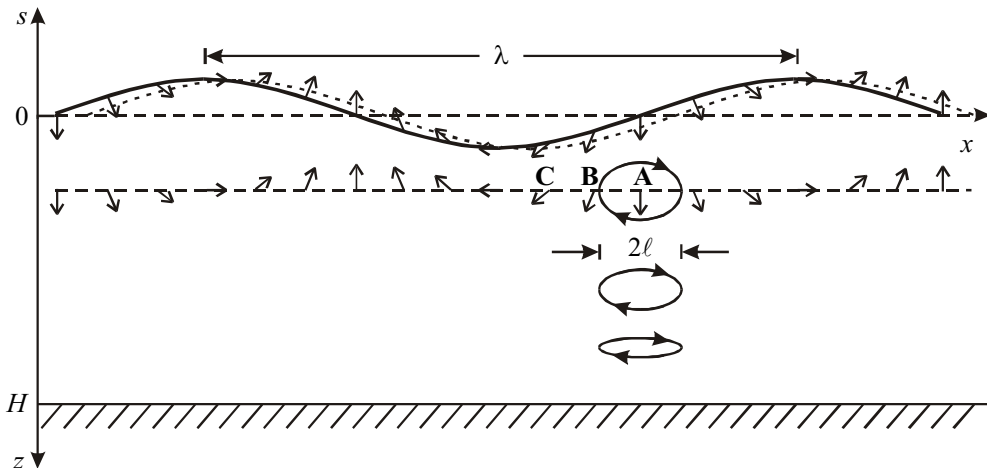


Рис. 6.5.

Частицы на поверхности глубокой жидкости движутся по траекториям, близким к круговым. По таким же траекториям будет двигаться и плавающее на поверхности небольшое тело, например, притопленный поплавок.

До сих пор мы предполагали, что профиль волны является синусоидальным, что возможно только в том случае, если амплитуда волны очень мала по сравнению с ее длиной. В природе таким профилем реально обладают только приливные волны, длина которых чрезвычайно велика по сравнению с их высотой. Обычные ветровые волны имеют более сложный вид. Как показывают расчеты, частицы жидкости в них движутся по окружностям, радиус которых экспоненциально убывает с глубиной (см. рис. 6.6). Сплошными линиями на рисунке показаны линии равного давления, любая из которых может соответствовать поверхности воды при определенной амплитуде волны. Эти линии являются трохоидами — траекториями точек, расположенных на радиусе между центром и ободом колеса, катящегося под горизонтальной прямой, расположенной на высоте  $\frac{\lambda}{2\pi}$  над уровнем невозмущенной поверхности воды. Поэтому такая волна называется трохоидальной и отличается от синусоидальной гармонической волны, задаваемой формулой (6.1). Очень близкими к трохоидальным являются волны после наступления на море штиля. Это так называемая мертвая зыбь. В частном случае, когда радиус орбиты частицы, находящейся на поверхности воды, равен  $\frac{\lambda}{2\pi}$ , профиль волны имеет вид циклоиды (верхняя кривая на рис. 6.6). Однако, опыт показывает, что циклоидальная форма поверхности воды может наблюдаться только у стоячих волн.

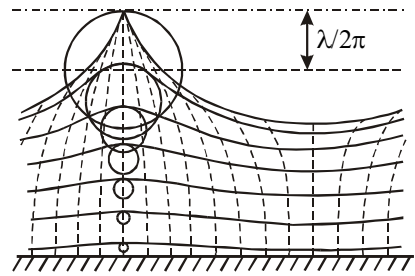


Рис. 6.6.

Опытным путем также установлено, что у бегущих трохоидальных волн угол между касательной к поверхности воды и горизонтом не превышает  $\sim 30^\circ$ . Если угол ската у гребня волны превышает это значение, которое соответствует отношению амплитуды трохоидальной волны к ее длине  $\frac{s_0}{\lambda} \approx \frac{1}{4\pi} \approx 0,08$ , то волна теряет устойчивость. Это явление играет большую роль в процессе зарождения и развития волн, что можно заметить, наблюдая за ними в присутствии ветра. Высокие волны с острыми гребешками не могут продолжать свой бег, так как их гребни опрокидываются и разрушаются, и волны уменьшаются по высоте.

Опытным путем также установлено, что у бегущих трохоидальных волн угол между касательной к поверхности воды и горизонтом не превышает  $\sim 30^\circ$ . Если угол ската у гребня волны превышает это значение, которое соответствует отношению амплитуды трохоидальной волны к ее длине  $\frac{s_0}{\lambda} \approx \frac{1}{4\pi} \approx 0,08$ , то волна теряет устойчивость. Это явление играет большую роль в процессе зарождения и развития волн, что можно заметить, наблюдая за ними в присутствии ветра. Высокие волны с острыми гребешками не могут продолжать свой бег, так как их гребни опрокидываются и разрушаются, и волны уменьшаются по высоте.

**Капиллярные волны.** При анализе зависимости скорости от волнового числа, изображенной на рис. 6.4, возникает вопрос: до какой величины падает скорость  $c$  при увеличении волнового числа  $k$  (или уменьшении длины волны). Опыт показывает, что с уменьшением длины волны скорость достигает минимума, а затем начинает возрастать. Это связано с тем, что при малом радиусе  $R$  кривизны поверхности ( $R \sim \lambda$ ) начинают



играть заметную роль силы поверхностного натяжения. Под их действием поверхность воды стремится уменьшить свою площадь. Ситуация напоминает рассмотренную ранее, в случае с натянутым резиновым шнуром. Такие волны называются капиллярными.

Если при увеличении натяжения шнура скорость распространения по нему волн возрастала, то при усилении роли поверхностного натяжения (уменьшении  $\lambda \sim R$ ) скорость капиллярных волн должна также увеличиваться. Известно, что давление под искривленной цилиндрической поверхностью  $p \sim \frac{\sigma}{R}$ , где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Если приближенно считать, что  $\lambda = 2\pi R$ , то по аналогии с формулой для скорости звука в газе (при  $\gamma = 1$ ) можно оценить фазовую скорость таких волн:

$$c_k = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k. \quad (6.29)$$

Расчет показывает, что формула (6.29) для капиллярных волн глубокой воды оказывается точной. Учет конечности глубины водоема дает для этих волн результат, аналогичный полученному выше для гравитационных волн: в формуле (6.29) под корнем дополнительно появляется множитель  $\text{th}(kH)$ .

Капиллярные волны также испытывают дисперсию, однако, в отличие от гравитационных, их фазовая скорость возрастает с увеличением волнового числа  $k$ , т.е. с уменьшением  $\lambda$ . Полезно записать дисперсионное соотношение (6.29) в виде:

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3. \quad (6.30)$$

Как следует из этого соотношения, групповая скорость  $u_k$  капиллярных волн глубокой воды больше их фазовой скорости  $c_k$  в полтора раза:  $u_{\text{кап}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k = \frac{3}{2} c_{\text{кап}}$ , тогда как для гравитационных волн (см. (6.21))  $u_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_{\text{гр}}$ , т.е. групповая скорость вдвое меньше фазовой. Различие групповой и фазовой скоростей капиллярных волн хорошо заметно на поверхности воды при порывах ветра: видно, что мелкая рябь внутри группы волн движется медленнее, чем весь волновой пакет.

Если бы мы с самого начала при рассмотрении поверхностных волн учли как действие силы тяжести, так и поверхностное натяжение, мы бы получили для волн глубокой воды одно дисперсионное соотношение, из которого формулы (6.21) и (6.30) получились бы предельными переходами в области малых и больших  $k$ .

Для волновых чисел  $k \gg H^{-1}$  мы можем объединить (6.21) и (6.30) следующим образом:

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}. \quad (6.31)$$

Отсюда скорость гравитационно-капиллярных волн глубокой воды получается равной

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho}} k. \quad (6.32)$$

Для волновых чисел  $k \ll H^{-1}$  (волны мелкой воды) в соответствии с (6.22) скорость стремится к значению  $c_0 = \sqrt{gH}$ , а для произвольных значений  $k$  в соответствии с (6.20) можно записать выражение для скорости волн следующим образом:

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k\right) \text{th}(kH)}. \quad (6.33)$$

Зависимость (6.33) скорости  $c$  от волнового числа  $k$  показана на рис. 6.7. Видно, что скорость достигает минимальной величины. В соответствии с (6.32) это происходит

при  $g/k_{\text{мин}} = s/k_{\text{мин}}/\rho$ , откуда  $k_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}$ . Следовательно,

$$c_{\text{мин}} = 4\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}} \cdot \sqrt{2}. \quad (6.34)$$

Для воды  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $c_{\text{мин}} \approx 23,2$  см/с,  $\lambda_{\text{мин}} = 2\pi/k_{\text{мин}} \approx 1,73$  см.

Таким образом, на поверхности воды не могут существовать волны, распространяющиеся со скоростью меньше 23 см/с!

Капиллярные волны часто используются для определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей.

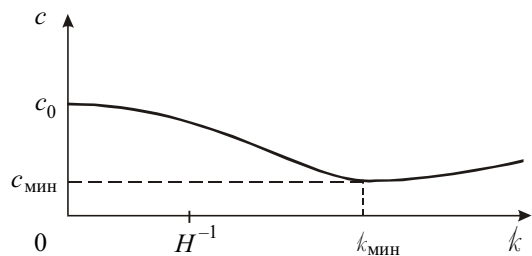


Рис. 6.7.

**Волны цунами.** Кроме волн, генерируемых ветром, существуют очень длинные волны, возникающие во время подводных землетрясений, или моретрясений. Наиболее часто такие землетрясения происходят на дне Тихого океана, вдоль длинных цепей Курильских и Японских островов. Громадные волны, возникающие при мощном толчке, имеют высоту  $s_0 \sim 10-15$  м и  $\lambda \sim 10^3$  км. Достигая берега, они смывают не только города и деревни, но и растительность вместе с почвой. Большие бедствия они причиняют населению Японии, которое дало им название «цунами» (по-японски — «большая волна в гавани»).

Интересны сведения о величинах деформаций дна океана во время землетрясений. В 1922 году японские гидрографы сделали промеры глубин в заливе Сагами, недалеко от Токио, а через год — 1 сентября 1923 года — там произошло катастрофическое землетрясение. Повторный промер глубин после землетрясения показал, что изменения рельефа дна произошли на площади около  $150$  км<sup>2</sup>, при этом одни части дна поднялись местами на  $230$  м, а другие опустились до  $400$  м. Поднявшаяся часть дна вытолкнула громадный объем воды, который по оценкам составил величину  $V \sim 23$  км<sup>3</sup>. В результате такого толчка образовался огромный водяной холм (уединенная волна), который при распространении вызвал подъем уровня воды у берегов Японии в разных местах от  $3,3$  до  $10$  м.

**Внутренние гравитационные и иные волны.** Наряду с поверхностными гравитационными и капиллярными волнами в океане существует множество других видов волн, которые играют важную роль в динамике океана. Океан, в отличие от идеальной жидкости, стратифицирован — то есть его воды не являются однородными, а изменяются по плотности с глубиной. Это распределение обусловлено потоками энергии (тепла) и вещества. В упрощенном виде океан можно представить состоящим из двух слоев воды: сверху лежит более легкая (теплая или менее соленая), снизу — более плотная (более соленая или холодная). Подобно тому как поверхностные волны существуют на границе вода–воздух, на границе раздела вод разной плотности будут существовать внутренние гравитационные волны. Амплитуда волн этого типа в океане может достигать сотни метров, длина волны — многих километров, но колебания водной поверхности при этом ничтожны. Внутренние волны проявляются на поверхности океана, воздействуя на характеристики поверхностных волн, перераспределяя поверхностно-активные вещества. По этим проявлениям они и могут быть обнаружены на поверхности океана. Так как поверхностные гравитационно-капиллярные волны и поверхностно-активные вещества сильно влияют на коэффициент отражения электромагнитных, в том числе световых волн, внутренние волны хорошо обнаруживаются дистанционными методами, например, они видны из космоса. Внутренние волны по сравнению с обычными поверхностными гравитационными волнами обладают рядом удивительных свойств. Например, групповая скорость внутренних волн перпендикулярна фазовой, угол отражения внутренних волн от откоса не равен углу падения.

При рассмотрении крупномасштабных явлений в Мировом океане необходимо учитывать эффекты вращения Земли, изменение глубины и наличие боковых границ. Сила Кориолиса является причиной возникновения инерционных, или гироскопических волн. Изменения потенциальной завихренности вследствие изменения географической широты и глубины океана обуславливают возникновение планетарных волн Россби. Боковые границы и изменение глубины на шельфе приводят к существованию нескольких типов береговых захваченных волн — шельфовых, краевых, Кельвина, топографических волн Россби.

Крупномасштабные волны типа волн Россби, Кельвина и др. оказывают существенное влияние на термогидродинамику океана, взаимодействие атмосферы и океана, климат и погоду. Свойства многих из этих волн существенно отличаются от свойств поверхностных гравитационных волн. Например, волны Кельвина локализованы в узкой шельфовой зоне, распространяются в северном полушарии вдоль берега против часовой стрелки. Экваториальные волны Россби, имея пространственные масштабы в сотни километров, локализуются вдоль экватора и проявляются не в изменении уровня, а прежде всего в форме вихревых течений.

**Распространение акустических волн конечной амплитуды.** Если возмущения плотности  $\delta\rho$  и давления  $\delta p$  в акустической волне не являются исчезающе малыми по сравнению с равновесными значениями  $\rho_0$  и  $p_0$ , то говорят, что волна имеет конечную амплитуду. Обычно такие волны обладают высокой интенсивностью, и для опи-

сания их распространения необходимо решать нелинейные уравнения гидродинамики. Анализом распространения волн конечной амплитуды занимается отдельная наука, называемая нелинейной акустикой. В наших лекциях мы ограничимся лишь небольшим объемом сведений из нелинейной акустики.

Пусть в газе вдоль оси  $Ox$  распространяется мощная акустическая волна. Если пренебречь вязкостью газа, то одномерное движение частиц вдоль этой оси будет описываться уравнением Эйлера и уравнением непрерывности:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Сложность решения этой системы уравнений состоит в том, что в их левых частях содержатся нелинейные члены. Обычно эту нелинейность называют кинематической нелинейностью. Поскольку уравнения (6.35) содержат три неизвестные функции  $\rho(x,t)$ ,  $p(x,t)$  и  $v(x,t)$ , то необходимо их дополнить третьим уравнением, связывающим  $p$  и  $\rho$ . Для газа оно, как уже отмечалось ранее, является уравнением адиабаты:

$$p = p(\rho) = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (6.36)$$

Представим  $p$  и  $\rho$  в виде:

$$p = p_0 + \delta p; \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho. \quad (6.37)$$

Затем подставим (6.37) в (6.36):

$$p_0 + \delta p = p_0 \left( 1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (6.38)$$

Полагая, что  $|\delta \rho / \rho_0| < 1$ , разложим правую часть (6.38) в ряд:

$$p_0 + \delta p = p_0 \left[ 1 + \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^2 + \dots \right]. \quad (6.39)$$

Пренебрегая членами, имеющими порядок малости  $(\delta \rho / \rho_0)^3$  и выше, окончательно запишем уравнение адиабаты в виде:

$$\delta p = c_0^2 \delta \rho + c_0^2 \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\delta \rho)^2}{\rho_0}, \quad (6.40)$$

где  $c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ .

Второй член в правой части (6.40) начинает давать заметный вклад при сильном сжатии (разрежении), поэтому связь между возмущениями давления  $\delta p$  и плотности  $\delta \rho$  становится нелинейной. Эта нелинейность обусловлена нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия и называется физической нелинейностью. Она вместе с кинематической нелинейностью может кардинально повлиять на характер распространения интенсивных акустических волн.

Перейдем теперь к установлению основных закономерностей такого распространения. Для этого подставим (6.37) в уравнения (6.35). Тогда получим:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \delta\rho)v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho_0 + \delta\rho)v] &= 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Чтобы помочь читателю преодолеть психологический барьер, связанный с анализом системы нелинейных уравнений (6.40)–(6.41), мы покажем вначале, как из этих уравнений можно легко получить волновое уравнение, описывающее линейный режим распространения волн, изученный подробно ранее.

**Линейный режим** ( $|\delta\rho| \ll \rho_0$ ,  $|\delta p| \ll p_0$ ). Удержим в уравнениях (6.41) только линейные члены. Тогда получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \delta p &= c_0^2 \delta\rho. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Исключим две неизвестные функции, например,  $\delta\rho$  и  $\delta p$ . Для этого продифференцируем первое уравнение по времени  $t$ , а второе — домножим на  $c_0^2$  и продифференцируем по координате  $x$ , а затем вычтем одно уравнение из другого. С учетом третьего уравнения члены, содержащие  $\delta\rho$  и  $\delta p$ , сократятся, и мы получим известное нам волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (6.43)$$

описывающее распространение без искажений вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $c_0$  волны гидродинамической скорости.

Аналогичным образом можно получить волновые уравнения для возмущений давления  $\delta p$  и плотности  $\delta\rho$ . Не останавливаясь далее на решениях таких уравнений (мы это сделали детально в предыдущих лекциях) перейдем теперь к нелинейному режиму распространения волн конечной амплитуды.

**Нелинейный режим** ( $|\delta\rho| < \rho_0$ ,  $|\delta p| < p_0$ ). Вначале попытаемся качественно описать основные черты нелинейного распространения волн, не прибегая к математике. Наиболее просто это сделать, если обратиться к влиянию физической нелинейности (формула 6.36). Если вспомнить, что скорость звука  $c = \sqrt{dp/d\rho}$ , то легко понять, что различные части волны могут двигаться с разными скоростями.

На рис. 6.8 изображена зависимость (6.36) и для трех значений плотности  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  проведены касательные к графику функции  $p = p(\rho)$ , угловые коэффициенты которых равны квадрату скорости распространения волны. Из этого графика

ка можно сделать качественный вывод о том, что чем выше плотность участка волны, тем больше его скорость.

Если, например, гармоническая волна (волна плотности) распространяется вдоль оси  $Ox$  (рис. 6.9), то из-за различия скоростей ее разных частей она будет постепенно менять свою форму. На рисунке для простоты показаны лишь три скорости  $c_1 = \sqrt{(dp/d\rho)}_{\rho_1}$ ,  $c_0 = \sqrt{(dp/d\rho)}_{\rho_0}$  и

$$c_2 = \sqrt{(dp/d\rho)}_{\rho_2}.$$

Как показывает опыт, распространение волны можно охарактеризовать тремя этапами.

На I этапе волна трансформируется в пилообразную, обладающую скачком плотности  $\rho$  (а также давления  $p$  и скорости  $v$ ). Эта пилообразная волна приобретает ударный фронт, ширина которого  $\Delta x_\phi$  по мере распространения уменьшается и достигает величины порядка длины свободного пробега молекул газа.

На II этапе происходит нелинейное затухание волны даже при очень малой вязкости и теплопроводности среды. Этот, на первый взгляд, неожиданный эффект связан с переходом в тепло части кинетической энергии молекул, обладающих гидродинамическими скоростями  $v$ . Эти молекулы под действием перепадов давления на длине свободного пробега приобретают кинетическую энергию, которая затем переходит в тепло при неупругих столкновениях. Простейший расчет показывает, что энергия, перешедшая в тепло, будет существенно больше, чем на I этапе, когда на ширине  $\Delta x_\phi$  происходили многочисленные столкновения. Естественно, что эта тепловая энергия заимствуется у распространяющейся волны.

III этап связан с возрастающим влиянием вязкости и теплопроводности, которые особенно сильны в областях больших перепадов скорости и температуры (вследствие локального адиабатического нагрева или охлаждения при колебаниях газа). Резкие перепады скорости приводят к возрастанию сил вязкости, а перепады температуры на масштабах порядка длины волны влекут отток тепла из более нагретых областей в менее нагретые. Из-за этих причин часть энергии волны переходит в тепло, и ее амплитуда уменьшается. Поскольку поглощение звука пропорционально квадрату частоты, быстрее затухают волны высших частот, и волна трансформируется в гармоническую волну с исходной (начальной) частотой.

Рассуждения, приведенные выше, носят качественный характер. Для количественного описания нели-

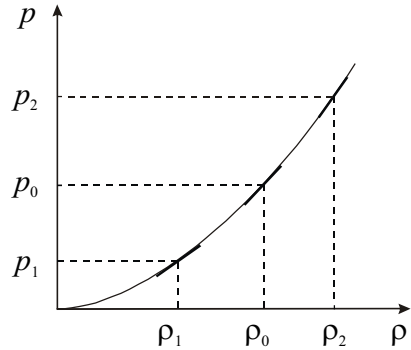


Рис. 6.8.

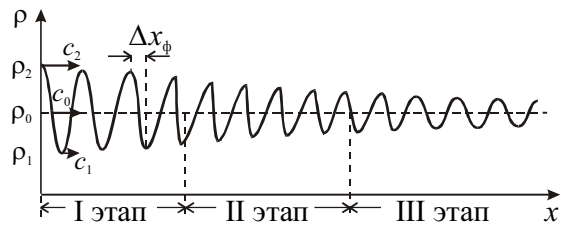


Рис. 6.9.

нейного распространения волн мы используем наиболее упрощенный подход к анализу системы нелинейных уравнений (6.40)–(6.41). Оговоримся сразу, что поскольку уравнения Эйлера описывают поведение невязкой среды, то мы сможем проанализировать распространение волны лишь на первых двух этапах.

Перепишем уравнения в (6.41) в виде:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= -\delta p \frac{dv}{dt} - \rho_0 v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \delta p \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}(v \cdot \delta p), \end{aligned} \quad (6.44)$$

где все нелинейные члены, по порядку величины меньшие линейных, перенесены в правые части уравнений.

С учетом малости нелинейных членов для этих уравнений в нелинейной акустике разработаны приближенные методы решения, смысл которых состоит в получении значительно более простых уравнений, имеющих в ряде случаев несложные аналитические решения. Одно из таких уравнений мы сейчас и получим, однако сделаем это предельно просто. Для этого, во-первых, мы ограничимся вначале лишь кинематической нелинейностью, а, во-вторых, будем предполагать, что между скоростью  $v$  и возмущением  $\delta p$  существует такая же связь, как и в линейном режиме:

$$-\varepsilon = \frac{\delta p}{p_0} = \frac{\delta p}{\rho_0} = \frac{v}{c_0}, \quad (6.45)$$

где  $\varepsilon$  — относительная деформация элементарного объема газа ( $\varepsilon < 0$  при сжатии и  $\varepsilon > 0$  при разрежении). Эта связь позволяет нам ограничиться одним из двух уравнений гидродинамики. Предпочтительнее, например, воспользоваться более простым уравнением непрерывности. При подстановке во второе уравнение (6.44) возмущения плотности  $\delta p$ , пропорционального, согласно (6.45), гидродинамической скорости  $v$ , получаем нелинейное уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -2v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.46)$$

Заметим, что в линейном режиме, когда правая часть уравнения равна нулю, его решением является любая функция вида:

$$v(x, t) = f(t - x/c_0), \quad (6.47)$$

описывающая бегущую со скоростью  $c_0$  без искажения вдоль оси  $Ox$  акустическую волну.

В нелинейном режиме ситуация усложняется. В самом деле, перепишем уравнение (6.46) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + 2v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6.48)$$

Отсюда видно, что скорость участка волны равна

$$c = c_0 + 2v \quad (6.49)$$

и зависит от гидродинамической скорости частиц.

Для фрагмента гармонической волны гидродинамической скорости, изображенного на рис. 6.10, это означает, что синусоидальное распределение скорости вдоль оси  $Ox$  трансформируется в пилообразное. Следовательно, оба механизма нелинейности способствуют трансформации гармонической волны в пилообразную.

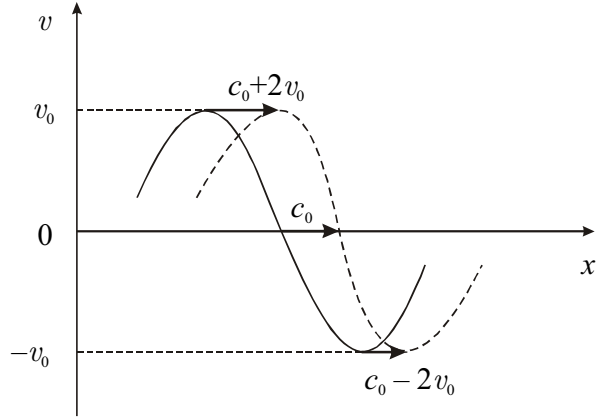


Рис. 6.10.

Если бы мы с самого начала учли действие обоих механизмов нелинейности, то из уравнений (6.44) и (6.40) мы бы получили уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \beta v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{6.50}$$

где  $\beta = (\gamma + 1)/2$  — нелинейный параметр, отражающий действие обоих механизмов нелинейности. Справедливости ради отметим, что формула (6.49) не является точной, поскольку в отсутствие физической нелинейности ( $\gamma = 1$ ) нелинейный параметр  $\beta = 1$ , и на самом деле  $c = c_0 + v$ . Это связано с тем, что мы использовали связь в виде (6.45), которая для волн конечной амплитуды не является верной.

По аналогии с (6.47) мы можем записать решение уравнения (6.50) в виде:

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_0 + \beta v}\right). \tag{6.51}$$

Это решение описывает эволюцию простых (римановых) волн. Теперь не составляет труда количественно описать трансформацию гармонической волны в пилообразную.

Пусть на входе в среду (при  $x = 0$ )

$$v(0, t) = f(t) = v_0 \sin \omega t. \tag{6.52}$$

Тогда на расстоянии  $x$

$$v = v_0 \sin \left[ \omega \left( \tau + \frac{\beta}{c_0^2} x \cdot v \right) \right]. \tag{6.53}$$

Здесь  $\tau = t - x/c_0$  — так называемое локальное время, отсчитываемое наблюдателем, находящимся на расстоянии  $x$  от начала координат, от момента времени  $x/c_0$ .

Для построения графика зависимости (6.53) перепишем ее в явном виде

$$\omega \tau = \arcsin \frac{v}{v_0} - \frac{x}{\ell_{нл}} \cdot \frac{v}{v_0}, \tag{6.54}$$

где

$$\ell_{нл} = \frac{c_0^2}{\omega v_0 \beta} \tag{6.55}$$



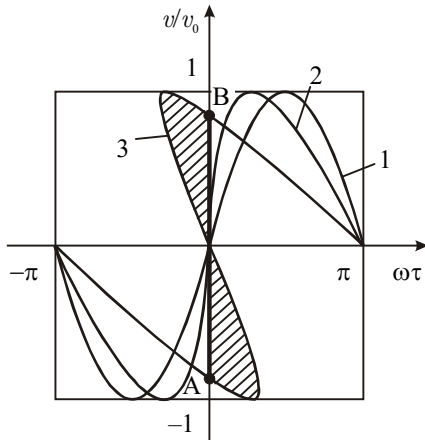


Рис. 6.11.

характерное расстояние, на котором развивается значительное нелинейное искажение волны. Это расстояние сокращается с ростом амплитуды  $v_0$  исходной волны и нелинейного параметра.

На рис. 6.11 изображены распределения скорости в пределах одного периода колебаний для волны на расстояниях  $x = 0$  (1);  $x < \ell_{\text{нл}}$  (2);  $x > \ell_{\text{нл}}$  (3). Из этих кривых видно, что синусоидальная волна превращается постепенно в пилообразную, а при  $x > \ell_{\text{нл}}$  в профиле волны появляется неоднозначность. Эта неоднознач-

ность не имеет физического смысла и возникла лишь из-за пренебрежения вязкостью газа. В действительности при  $\omega\tau = 0$  скорость испытывает скачок, или разрыв (от величины скорости в точке А до величины скорости в точке В). Положение ударного фронта задается линией АВ, которую проводят так, чтобы заштрихованные площади сверху и снизу от АВ были бы одинаковы (в рассматриваемом случае АВ совпадает с осью Оу). Таким построением автоматически учитывается нелинейное затухание волны. Расстояние  $\ell_{\text{нл}}$ , как нетрудно теперь понять, является расстоянием, на котором у волны появляются разрывы скорости  $v$ , плотности  $\rho$  и давления  $\delta p$ . К сожалению, без учета вязкости ширина ударного фронта получилась равной нулю. В реальной ситуации она конечна и возрастает с увеличением вязкости.

Учет вязкости позволяет описать III этап распространения, однако это выходит за рамки нашего курса.

Говоря об образовании ударного фронта в конце I этапа и последующем нелинейном затухании на II этапе, мы не должны забывать о наличии обычного (линейного) поглощения волны вследствие вязкости среды. Это поглощение характеризуется коэффициентом  $\alpha$  (см. формулу (5.19)) и зависит от частоты. Амплитуда волны при линейном поглощении уменьшается по экспоненциальному закону уже на I этапе:  $v_0(x) = v_0 e^{-x/\ell_3}$ , где  $\ell_3 = \alpha^{-1}$  характерное расстояние, характеризующее поглощение звука. Естественно, что уменьшение амплитуды  $v_0$  «притормаживает» процесс искажения профиля волны. Если поглощение таково, что  $\ell_3 < \ell_{\text{нл}}$ , то нелинейное искажение может и не проявляться вовсе.

В акустике отношение

$$\text{Re} = \ell_3 / \ell_{\text{нл}} \quad (6.56)$$

называют акустическим числом Рейнольдса. Если  $\text{Re} > 10$ , то волна считается мощной, и для нее имеет место нелинейное искажение. При  $\text{Re} < 1$  волна слабая, и нелинейное искажение подавлено обычным линейным поглощением.

Если учесть далее, что амплитуда скорости  $v_0$  связана с амплитудой возмуще-

ния давления  $(\delta p)_0$  акустическим законом Ома, то нелинейная длина будет обратно пропорциональна величине  $(\delta p)_0$ :

$$\ell_{\text{нл}} = \frac{\rho c_0^3}{2\pi\beta v(\delta p)_0}. \quad (6.57)$$

Следовательно, выражение для акустического числа Рейнольдса примет вид:

$$\text{Re} = \frac{\ell_3}{\ell_{\text{нл}}} = \frac{2\pi\ell_3\beta v(\delta p)_0}{\rho c_0^3} = \frac{D(\delta p)_0}{v}. \quad (6.58)$$

Здесь учтено, что в соответствии с формулой (5.21)  $\ell_3 = \alpha^{-1} \sim v^{-2}$ ,  $D$  — константа, характеризующая нелинейные и вязкостные свойства среды.

В качестве примера выполним некоторые оценки, иллюстрирующие количественные характеристики распространения звуковой волны в воде, где  $D = 300 \text{ (Па}\cdot\text{с)}^{-1}$ . При частоте ультразвука  $v = 1 \text{ МГц}$  расстояние  $\ell_3 = 50 \text{ м}$ , и условие  $\text{Re} > 10$  выполняется, согласно (6.58), для волн с амплитудой звукового давления  $(\delta p)_0 > 3 \cdot 10^4 \text{ Па}$ , или интенсивностью

$$I > \frac{(\delta p)_0^2}{2\rho c_0} = 300 \text{ Вт/м}^2. \quad (6.59)$$

Соответствующий уровень звукового давления  $L_p > 180 \text{ дБ}$ . Для волн с такими интенсивностями  $\ell_{\text{нл}} < \ell_3 / 10 = 5 \text{ м}$ , поэтому уже на первых метрах своего распространения ультразвуковая волна будет превращаться в пилообразную, и затем при  $x > \ell_{\text{нл}}$  начнется ее нелинейное затухание.

Как показывает анализ формулы (6.54) с учетом построения положения ударного фронта, изображенного на рис. 6.11, амплитуда пилообразной волны при  $\text{Re} \gg 1$  убывает с пройденным расстоянием  $x$  по закону

$$\delta p(x > \ell_{\text{нл}}) = \frac{(\delta p)_0}{1 + x/\ell_{\text{нл}}}. \quad (6.60)$$

С помощью этой формулы сразу можно сделать важный вывод о том, что величина  $\delta p$  не может превзойти некоторое предельное значение, как бы мы ни увеличивали амплитуду гармонической волны  $(\delta p)_0$ . Действительно, при увеличении  $(\delta p)_0$  величина  $\ell_{\text{нл}} \sim 1/(\delta p)_0$  уменьшается, и  $\delta p$  стремится к  $\delta p_{\text{max}}$ . Величина  $\delta p_{\text{max}}$  может быть корректно подсчитана при одновременном учете линейного поглощения и нелинейного затухания (это выходит за рамки нашего курса) и оказывается равной

$$\delta p_{\text{max}} = \frac{4v}{D} e^{-x/\ell_3}. \quad (6.61)$$

Оценим максимальное значение интенсивности  $I_{\text{max}}$ , которая может быть передана в воде ультразвуковым лучом с частотой  $v = 1 \text{ МГц}$  на расстояние  $x = 2\ell_3 = 100 \text{ м}$ :

$$I_{\text{max}} = \frac{\delta p_{\text{max}}^2}{2\rho c_0} = \frac{8v^2}{\rho c_0 D^2} e^{-2x/\ell_3} = 1 \text{ Вт/м}^2. \quad (6.62)$$

Таким образом, в условиях, наилучших для возбуждения мощных ультразвуковых волн в воде, на расстояние  $x = 100 \text{ м}$  через площадь сечения  $1 \text{ м}^2$  можно передать энергию, достаточную лишь для свечения лампочки от карманного фонарика. Это ни в

какое сравнение не идет с той энергией, которую посылают ультразвуковые пушки, используемые героями научно-фантастического романа Г. Адамова «Тайна двух океанов», где ультразвуковым лучом якобы повреждают корабли и ракеты.

В связи с вышеизложенным возникает естественный вопрос — а как же объяснить разрушающее действие взрывных ударных волн на большом расстоянии от места взрыва? Ответ на этот вопрос кроется в том, что взрывная ударная волна представляет собой одиночный импульс, и его амплитуда  $\delta p$  убывает с расстоянием  $x$  более медленно, чем у гармонической волны:

$$\delta p(x > \ell_{\text{нл}}) = \frac{(\delta p)_0}{(1 + x/\ell_{\text{нл}})^{1/2}}. \quad (6.63)$$

При возрастании в эпицентре взрыва амплитуды импульса  $(\delta p)_0$  будет неограниченно увеличиваться и величина  $\delta p$ , которая при большой мощности заряда окажется достаточной для разрушения препятствия.

Надо отметить, что тем не менее нелинейное затухание не ограничивает широкое применение ультразвука в лабораторных условиях, поскольку  $\ell_{\text{нл}}$  обычно сравнима с размерами лабораторных акустических систем или превосходит их.

До сих пор мы говорили о распространении только одной волны. Однако если распространяются, например, две волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то нелинейное взаимодействие между ними приводит к появлению волн с другими частотами. Среди них волны с кратными частотами  $n_1\omega_1$  и  $n_2\omega_2$  (гармоники) и волны с комбинационными частотами  $n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2$  ( $n_1$  и  $n_2$  — целые числа). В акустике, где дисперсия отсутствует, все эти волны движутся с одинаковой скоростью, поэтому они могут эффективно взаимодействовать между собой, проходя большие расстояния.

Генерация гармоник и волн с комбинационными частотами имеет многочисленные применения. Проиллюстрируем сказанное на двух примерах.

1. При изучении упругих и прочностных свойств твердых материалов их обычно подвергают большим нагрузкам с помощью специальных прессов, развивающих давления, близкие к пределам прочности этих материалов или превосходящие их, т.е. десятки тысяч атмосфер. Вместо этой громоздкой и дорогостоящей аппаратуры используют методы нелинейной акустики. Для этого к одному торцу образца исследуемого материала приклеивают пьезоэлектрический излучатель мощной акустической волны частоты  $\omega$ . На другом конце образца помещают такой же пьезоэлектрический преобразователь (приемник звука), на выходе которого регистрируют и затем обрабатывают электрический сигнал. Последний представляет собой суперпозицию колебаний на частотах  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  и т.д. Говорят, что сигнал состоит из основной, второй, третьей и т.д. гармоник. Сигнал на основной частоте несет информацию о линейном модуле Юнга, так как согласно закону Гука деформации пропорциональны приложенным напряжениям. В области больших напряжений вследствие пластичности и текучести материала связь деформаций и напряжений описывают с использованием нелинейных модулей. Информацию

о таких модулях несет уже амплитуда сигнала с частотой  $2\omega$  (вторая гармоника), и т.д.

2. Другим ярким примером использования методов нелинейной акустики является генерация в воде узконаправленных пучков акустических волн с длиной  $\lambda$ . Это осуществляется с помощью так называемых параметрических антенн. При знакомстве с явлением дифракции волн мы отмечали, что угловая расходимость  $\vartheta$  звукового пучка тем меньше, чем больше размер  $\ell$  передающего излучателя (антенны). Проблему изготовления огромных излучающих антенн с размерами в десятки метров можно обойти, используя нелинейное взаимодействие в воде двух параллельно распространяющихся мощных звуковых волн с близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Эти волны излучаются горизонтально погруженным в воду одним пьезоизлучателем размером  $\ell \sim 10$  см. Обе волны до их затухания пройдут расстояние  $L \sim 10^3$  м. В этой протяженной области рождается волна низкой (разностной) частоты  $\omega = \omega_2 - \omega_1$ , которая затухает гораздо слабее и может пройти очень большие расстояния. Таким образом, вытянутый объем воды с малым поперечным размером  $\ell$  и большим продольным размером  $L$  представляет собой гигантскую естественную антенну, излучающую звуковой пучок разностной частоты вдоль самой вытянутой антенны. Однако, расходимость  $\vartheta$  этого пучка уже будет задаваться выражением

$$\vartheta = (\lambda / L)^{1/2}. \quad (6.64)$$

При частоте  $\nu = \omega / 2\pi \sim 1$  кГц,  $\lambda \sim 1$  м и при  $L \sim 10^3$  м получаем  $\vartheta \sim 3 \cdot 10^{-2}$  рад =  $1,8^\circ$ . Такая чрезвычайно малая расходимость пучка разностной частоты позволяет с большой точностью проводить морские исследования: изучать рельеф дна, заниматься археологическими изысканиями в придонных слоях грунта, в заиленных озерах, обнаруживать скопления рыбы у поверхности и дна моря, на мелководье — там, где обычные гидролокаторы неэффективны, и т.д.

**Уединенные волны (солитоны).** В 1834 году шотландский инженер-кораблестроитель и ученый Дж. Рассел, наблюдая за движением баржи по каналу, которую тащила пара лошадей, обратил внимание на удивительное явление. При внезапной остановке судна масса воды вокруг баржи в узком канале не остановилась, а собралась около носа судна, и затем оторвалась от него и в виде большого уединенного водного холма стала двигаться со скоростью около 8 миль в час. Удивительно, что форма холма в процессе его движения практически не менялась. Рассел назвал это движущееся по поверхности воды образование «great solitary wave», что в переводе означает «большая уединенная волна».

Теоретическое объяснение уединенные волны получили впоследствии в работах французского ученого Ж. В. де Буссинеска и английского физика Дж. Рэлея. Они обосновали математически возможность существования уединенных волн в мелководных каналах.

После смерти Рассела в 1895 году голландский физик Д. Кортевег и его ученик

Г. де Фрис вывели уравнение, описывающее уединенные волны. Это уравнение получило название уравнения Кортевега–де Фриса (уравнение КДФ) и имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c_0 \left( \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3}{2H} s \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \right) = 0. \quad (6.65)$$

Оно описывает распространение поверхностных гравитационных волн на мелкой воде. Здесь  $c_0 = \sqrt{gH}$  — скорость волн мелкой воды,  $H$  — глубина водоема. Отметим сразу, что по виду уравнение КДФ отличается от нелинейного уравнения (6.50) наличием дополнительного члена  $\frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3}$ , ответственного за дисперсию гравитационных волн (хотя и небольшую на мелкой воде).

Рассмотрим несколько подробнее влияние нелинейности и дисперсии на распространение поверхностных гравитационных волн. По аналогии с нелинейными акустическими волнами сразу можем сказать, что скорость различных участков поверхностной волны будет различна:

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{3s}{2H} \right). \quad (6.66)$$

Из-за различия скоростей (гребень волны движется быстрее впадины) происходит превращение гармонической волны в пилообразную. Крутой фронт под действием силы тяжести опрокидывается, и на поверхности воды появляются пенистые гребешки. Опрокидывание фронта легко наблюдать при движении волны по мелководью вблизи берега (рис. 6.12). Однако в ряде случаев нелинейное искажение волны может компенсироваться

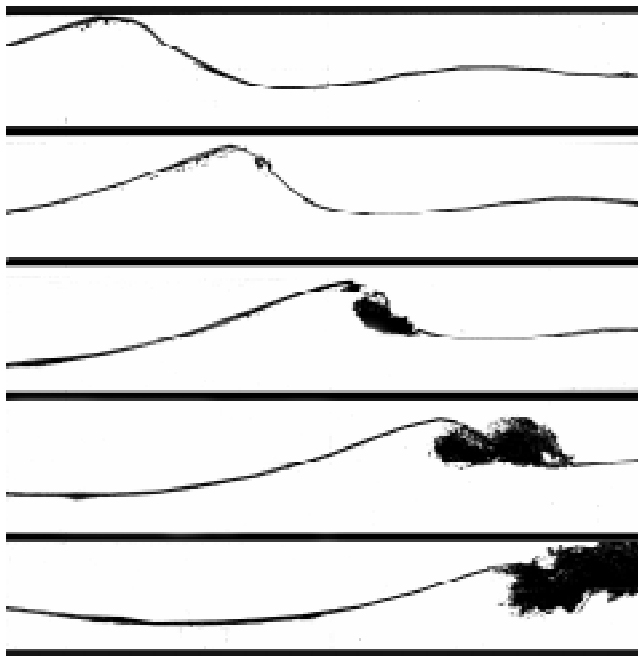


Рис. 6.12.

дисперсией. В самом деле, пилообразная волна представляет собой набор гармонических волн с разными частотами. Из-за дисперсии эти волны движутся с разными скоростями, и поэтому пилообразный фрагмент волны, подобно импульсу, стремится расширяться. При определенной форме фрагмента оба конкурирующих механизма могут компенсировать друг друга, и тогда по поверхности воды победит устойчивая структура в виде уединенной волны (солитона). Выясним некоторые свойства этой уединенной волны.

Предположим, что солитон имеет амплитуду  $s_0$ , протяженность вдоль оси  $Ox$ , равную  $\ell$ , и представляет собой некоторый холмик, изображенный на рисунке 6.13. Оценим величины нелинейного и дисперсионного членов в уравнении КДФ:

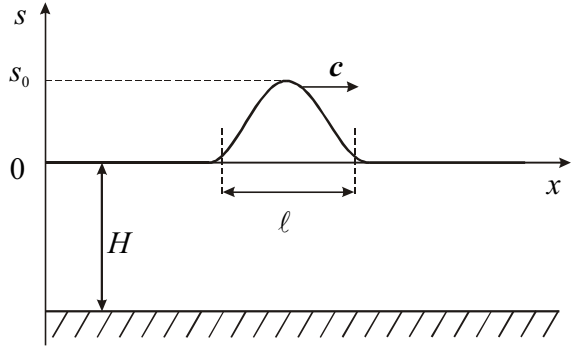


Рис. 6.13.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2H} s \frac{\partial s}{\partial x} &\sim \frac{1}{H} s_0 \frac{s_0}{\ell}; \\ \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} &\sim -H^2 \frac{s_0}{\ell^3}. \end{aligned} \tag{6.67}$$

В (6.67) учтено, что на переднем и заднем фронтах холмика  $\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} < 0$ . Естественно, что оба механизма будут компенсировать друг друга при условии

$$\frac{1}{H} s_0 \frac{s_0}{\ell} - H^2 \frac{s_0}{\ell^3} \approx 0. \tag{6.68}$$

Последнее накладывает связь на амплитуду  $s_0$  и длину  $\ell$  солитона:

$$\ell^2 \approx \frac{H^3}{s_0}. \tag{6.69}$$

Таким образом, чем больше амплитуда солитона  $s_0$ , тем меньше должна быть его длина  $\ell$ . Скорость солитона  $c$  возрастает с ростом амплитуды, что характерно для нелинейного распространения волн.

Точное решение уравнения КДФ, описывающее солитон, имеет вид

$$s(t, x) = \frac{s_0}{\text{ch}^2\left(\frac{x - ct}{\ell}\right)}. \tag{6.70}$$

При этом длина солитона  $\ell$  связана с амплитудой  $s_0$  соотношением

$$\ell^2 = \frac{4H^3}{3s_0}, \tag{6.71}$$

а скорость

$$c = c_0 \left(1 + \frac{s_0}{2H}\right). \tag{6.72}$$

Если  $s_0 \ll H$ , то последнее выражение можно переписать в виде

$$c = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s_0}{H}\right) \approx \sqrt{g(H + s_0)}. \tag{6.73}$$

Эту формулу мы уже записывали при качественном обсуждении поведения гравитационных волн по мере их приближения к берегу.

Важно подчеркнуть, что солитон является устойчивой структурой. Если первоначально соотношение (6.71) не выполняется и амплитуда  $s_0$  слишком велика, то водяной холм распадается на несколько меньших холмиков, из которых сформируются солитоны. Напротив, если  $s_0$  слишком мала, то такой низкий холм расплывется вследствие дисперсии.

По современным представлениям большинство волн цунами образуются, когда достаточно крупный, но безвредный в океане солитон выбрасывается на берег. При подходе к берегу он становится выше и короче, и его высота становится сравнима с глубиной океана вблизи берега.

В заключение этой темы отметим, что в настоящее время обнаружены солитоны для волн различной природы. Так, например, существуют солитоны при распространении акустических волн в кристаллах, световых импульсов в волоконных световодах, ионно-звуковых волн в плазме и др. Во всех случаях существование солитонов обусловлено взаимной компенсацией нелинейных и дисперсионных эффектов. Естественно, что энергия, переносимая уединенной волной любой природы, будет диссипировать в тепло, поэтому по мере распространения амплитуда солитона будет стремиться уменьшиться, что, естественно, рано или поздно приведет к его исчезновению.

---

## Содержание

<b>Предисловие</b> .....	<b>3</b>
<b>Лекция 1</b> .....	<b>5</b>
<p>Незатухающие гармонические колебания систем с одной степенью свободы (6). Метод векторных диаграмм (10). Сложение взаимно перпендикулярных колебаний (11). Фазовый портрет колебательной системы (14). Негармонические колебания математического маятника (18). Свободные колебания в диссипативных системах с вязким трением (20). Затухание колебаний в системах с сухим трением (24).</p>	
<b>Лекция 2</b> .....	<b>27</b>
<p>Вынужденные колебания под действием гармонической силы (28). Медленные колебания (29). Быстрые колебания (29). Резонансный режим (30). Метод комплексных амплитуд (31). Вынужденные колебания с произвольной частотой (31). Баллистический режим колебаний (35). Установление колебаний (36). Характеристики различных колебательных систем (осцилляторов) (37). Параметрические колебания (39). Автоколебания (41). Маятник на вращающемся валу (маятник Фруда) (42).</p>	
<b>Лекция 3</b> .....	<b>47</b>
<p>Свободные незатухающие колебания в системах с двумя степенями свободы (47). Методика анализа колебаний связанных осцилляторов (53). Соотношение между парциальными и нормальными частотами (55). Затухание колебаний (56). Энергия колебательной системы и ее диссипация (56). Вынужденные колебания (57). Колебания систем со многими степенями свободы (58).</p>	
<b>Лекция 4</b> .....	<b>63</b>
<p>Распространение возмущений в системе с большим числом степеней свободы (63). Возбуждение волн (65). Группа волн и ее скорость (68). Волновое уравнение (71). Отражение волны на конце шнура (73). Возбуждение стоячих волн в шнуре. Моды колебаний (75). Волны в упругих телах. Поперечные волны (79). Энергия, переносимая волной (80). Продольные волны (83). Скорость волн в тонком стержне (85). Скорость волн в толстом стержне (86). Явления на границе раздела двух сред (88).</p>	
<b>Лекция 5</b> .....	<b>91</b>
<p>Тепловые колебания кристаллической решетки твердых тел. Акустические фононы (91). Объемные сейсмические волны (92). Поверхностные сейсмические волны (96). Волны в жидкостях и газах (97). Энергия, переносимая звуковой волной (99). Поглощение звука (100). Излучатели звука (101). Применение акустических методов (103). Основные характеристики звука (104). Закон Вебера–Фехнера. Диаграмма слуха (106). Акустические резонаторы (109). Некоторые сведения о музыкальных инструментах (111). Эффект Доплера (113). Бинауральный эффект (114). Интерференция волн (115). Дифракция волн (117).</p>	
<b>Лекция 6</b> .....	<b>121</b>
<p>Волны на поверхности жидкости. Гравитационные волны (121). Волны глубокой воды (124). Волны мелкой воды (125). Характер движения частиц жидкости (125). Капиллярные волны (127). Волны цунами (129). Внутренние гравитационные и иные волны (130). Распространение акустических волн конечной амплитуды (130). Линейный режим (132). Нелинейный режим (132). Уединенные волны (солитоны) (139).</p>	



Учебное издание

АЛЕШКЕВИЧ Виктор Александрович  
ДЕДЕНКО Леонид Григорьевич  
КАРАВАЕВ Владимир Александрович

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ЛЕКЦИИ  
(Университетский курс общей физики)

ЛР №021293 от 18.06.98

Физический факультет МГУ.  
119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет.  
Тел. (095) 939–5494

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ.  
140010, Люберцы, Октябрьский пр-т, 403.  
Тел. (095) 554–2186