

Редакционный совет:

Главный редактор К. С. Басниев

Ответственный редактор А. В. Борисов

А. И. Владимиров (РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина)

В. И. Грайфер (РИТЭК)

С. С. Григорян (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Н. Дмитриевский (ИПНГ РАН)

Р. Д. Каневская (РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина)

В. И. Кудинов (Удмуртский государственный университет)

Н. Н. Лисовский (Минпромэнерго России)

Р. М. Тер-Саркисов (ВНИИГАЗ)

М. М. Хасанов (НК «Роснефть»)

С. Холдич (Техасский университет, США)

Вышли в свет:

Х. Азиз, Э. Сеттари

Математическое моделирование пластовых систем

К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг

Нефтегазовая гидромеханика

К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Р. Д. Каневская, В. М. Максимов

Подземная гидромеханика

Дж. Брилл, Х. Мукерджи

Многофазный поток в скважинах

В. А. Казарян

Подземное хранение газов и жидкостей

В. А. Казарян

Подземное хранение углеводородов в солевых отложениях

А. Г. Калинин, В. В. Кульчицкий

Естественное и искусственное искривление скважин

А. Х. Мирзаджанзаде, И. М. Аметов, А. Г. Ковалев

Физика нефтяного и газового пласта

А. Х. Мирзаджанзаде, В. А. Байков

Парадоксы нефтяной физики

А. Х. Мирзаджанзаде, З. Г. Керимов, М. Г. Копейкис

Теория колебаний в нефтепромысловом деле

А. Х. Мирзаджанзаде, М. М. Хасанов, Р. Н. Бахтизин

Моделирование процессов нефтегазодобычи

Ю. М. Молокович

Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике

М. М. Хасанов, Г. Т. Булгакова

Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах

Р. Эрлагер мл.

Гидродинамические методы исследования скважин

Готовятся к публикации:

Л. П. Дейк

Практическая разработка месторождений

Л. Лейк, М. Уоли

Первичные методы разработки месторождений углеводородов

Н. Н. Михайлов

Физико-технологические свойства пластовых систем

А. Н. Папуша

Проектирование морской бурильной колонны и райзера. Расчет на прочность, изгиб и устойчивость морской бурильной колонны и райзера в среде *Mathematica*

О. Г. Сорохтин

Жизнь Земли

М. Экономидес, Р. Олли, П. Валько

Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике

Т. Эртекин, Дж. Абу-Кассем, Г. Кинг

Основы прикладного моделирования природных резервуаров

Б. А. Сулейманов

ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ



Москва ♦ Ижевск

2006

Сулейманов Б. А.

Особенности фильтрации гетерогенных систем. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006 – 356 с.

В монографии рассмотрены вопросы течения пластовых и применяемых в нефтедобыче гетерогенных систем в однородных и неоднородных пористых средах. Приведены экспериментальные и теоретические исследования фильтрации полимерных растворов, нефтяных дисперсных систем и газированных жидкостей в докритической области. Предложен механизм наблюдаемых явлений, модели стационарной и нестационарной фильтрации гетерогенных систем, дано сравнение результатов моделирования с экспериментом и промышленными данными. Подробно описано образование докритических нанопузырьков-зародышей в газожидкостных смесях, сопутствующий эффект проскальзывания, условия его возникновения и влияние на процесс псевдооживления и фильтрации газированных ньютоновских и неньютоновских жидкостей. Приведены исследования образования фрактальных структур и течения фрактально-неоднородных систем, а также фильтрации во фрактально-неоднородных пористых средах. Рассмотрены волновые процессы при вибровоздействии на пластовые системы, а также вопросы применения вейвлет преобразования для решения задач подземной гидродинамики.

Книга предназначена научным работникам, инженерам-нефтяникам, аспирантам и студентам соответствующих вузов.

ISBN 5-93972-592-9

© Б. А. Сулейманов, 2006

© Институт компьютерных исследований, 2006

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	9
Введение	11
Глава 1. Исследование фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородных пористых средах	20
1.1. Фильтрация разбавленных полимерных растворов.....	20
1.2. Фильтрация водонефтяных эмульсий.....	39
1.3. Анализ результатов экспериментальных исследований и механизм наблюдаемых явлений	43
1.4. Моделирование стационарной фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородной пористой среде.....	48
1.5. Вытеснение нефти полимерными композициями	57
Литература к главе 1	60
Глава 2. Исследование течения газированных жидкостей в докритической области	65
2.1. Стационарные исследования	68
2.2. Нестационарные исследования	95
2.3. Анализ результатов экспериментальных исследований и механизм наблюдаемых явлений	102
2.4. Моделирование фильтрации газированной жидкости в докритической области	137
2.5. Вытеснение нефти газированной жидкостью	200
2.6. Исследование псевдооживления газированными жидкостями.....	207
Литература к главе 2	221
Глава 3. Исследование фрактальных структур и реологии фрактально-неоднородных систем	231
3.1. Исследование образования фрактальных структур при вытеснении нефти	232
3.2. Стационарная фильтрация во фрактально-неоднородной пористой среде	240

3.3. Реология фрактально-неоднородных систем с учетом взаимодействия частиц дисперсной фазы.....	242
3.4. Особенности течения суспензий и нефтяных дисперсных систем.....	255
Литература к главе 3	261
Глава 4. Исследование волновых процессов при вибровоздействии на пластовую систему	269
4.1. Экспериментальные исследования виброволнового воздействия на процесс восстановления фильтрационных характеристик пористых сред	269
4.2. Виброволновое воздействие на систему пласт–скважина	272
4.3. Виброволновое воздействие в процессе фильтрации газированной жидкости.....	278
Литература к главе 4	292
Глава 5. Применение вейвлет–преобразования для решения задач подземной гидродинамики	296
5.1. Решение задачи нестационарной фильтрации с разрывными коэффициентами и неточными входными данными	303
5.2. Метод решения обратной коэффициентной задачи	323
Литература к главе 5	349

Предисловие

Предлагаемая вниманию специалистов монография д.т.н. Б. А. Сулейманова является результатом многолетних исследований автора, посвященных различным аспектам фильтрации пластовых и применяемых в нефтедобыче гетерогенных систем. Она может рассматриваться как развитие круга задач и методов, впервые предложенных академиком А. Х. Мирзаджанзаде.

В монографии рассмотрены вопросы фильтрации полимерных растворов, нефтяных дисперсных систем и газированных жидкостей в однородных и неоднородных пористых средах, образования фрактальных структур в процессе вытеснения несмешивающихся жидкостей, влияния упругих волн на процесс фильтрации, решения задач нестационарной фильтрации с применением вейвлет-преобразования.

Результаты, приведенные в монографии, вносят существенный вклад в развитие теории фильтрации и создают основу для создания новых ресурсо- и энергосберегающих технологий в нефтедобыче.

Директор по науке ОАО «НК «Роснефть»,
д.т.н., профессор

М. М. Хасанов

Введение

Светлой памяти моего отца
Почетного Нефтяника
Алекпера Багировича Сулейманова
посвящается

Большинство природных и технологических жидкостей в нефтедобыче представляет собой многофазные неоднородные системы, содержащие различные включения и характеризующиеся нелинейным поведением в пористых средах. Эффекты, наблюдаемые при фильтрации гетерогенных систем, отличаются большим разнообразием, что предопределяет качественно различный вид законов фильтрации для них.

При изучении фильтрации некоторых видов нефтей через пористую среду в определенных условиях исследователи наблюдали поведение, характерное для вязкопластичных сред, основной особенностью которых является наличие начального градиента давления. Закон фильтрации с начальным градиентом давления был введен Мирзаджанзаде А.Х. в 1953 году в следующей форме (для одномерного течения):

$$v = \begin{cases} -\frac{k}{\eta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - q_0 \right), & \frac{\partial P}{\partial x} > q_0 \\ 0, & \frac{\partial P}{\partial x} < q_0 \end{cases}.$$

Некоторые жидкости (растворы полимеров, неньютоновские нефти и др.) при исследовании на вискозиметрах проявляют псевдопластичные или дилатантные свойства, при этом в первом случае в процессе движения происходит уменьшение эффективной вязкости, а во втором – увеличение. В ряде случаев указанные закономерности проявляются и при их фильтрации в пористой среде. Течение таких жидкостей в пористой среде обычно описывается степенным законом фильтрации в виде (для одномерного случая):

$$v = -B \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (n > 0).$$

При $n > 1$ – жидкость псевдопластичная, при $n < 1$ – дилатантная (B – постоянный коэффициент).

Одной из причин нелинейности закона фильтрации может быть разделение фаз гетерогенной системы, объясняемое действием принципа диссипации энергии (Сейвинс Дж., 1974). В результате дисперсная фаза концентрируется в центре потока, а дисперсионная среда – у стенок, или наоборот.

К следующему широкому классу неньютоновских систем относятся технологические и реальные жидкости, которые при фильтрации в пористой среде проявляют вязкоупругие свойства. При этом эти жидкости в вискозиметрическом эксперименте проявляют сдвиговое разжижение (уменьшение эффективной вязкости), а при фильтрации – сдвиговое загущение (увеличение эффективной вязкости), т. е. имеет место аномальный рост сопротивления течению в пористой среде (Marshall R. I., Metzner A. B., 1967). В ряде случаев наблюдается переходной режим, при котором имеет место переход от псевдопластического течения к дилатантному (Abdo M. K., 1968).

Указанные явления (Баренблатт Г. И., Мамедов Ю. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Швецов И. А., 1973) объясняются вязкоупругими эффектами (релаксационными явлениями в стационарном потоке жидкости). При этом вязкие силы, обуславливающие сопротивление, являются решающим фактором лишь в области малых скоростей фильтрации и заметно снижаются с ее увеличением. При этом преобладающую роль начинают играть упругие силы, т. к. жидкость не успевает релаксировать при переходе из одной поры в другую. Это приводит к увеличению эффективной вязкости. Рост относительного сопротивления при увеличении скорости фильтрации пропорционален величине:

$$1 + A \left(\frac{\tau v}{r} \right)^2,$$

где τ – время релаксации, r – характерный размер пор, A – постоянный коэффициент (Wisler E. M., 1970).

Закон фильтрации при проявлении вязкоупругих эффектов записывают в виде:

$$v = - \frac{k}{\eta_0 \left[1 + A \left(\frac{\tau v}{r} \right)^2 \right]} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Указанное соотношение можно записать и так (Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Ковалев А. Г., 1992):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = a_1 v + a_3 v^3.$$

Отсюда следует, что введение кубического слагаемого связано с учетом неравновесных вязкоупругих свойств.

При фильтрации релаксирующей жидкости в неоднородной пористой среде при прочих равных условиях эффективная вязкость в высокопроницаемом пропластке будет выше (Вахитов Г. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Рыжик В. М. и др., 1977). Вследствие этого будет происходить выравнивание профиля фильтрации релаксирующей жидкости. Этот эффект широко применяют в технологических процессах нефтедобычи. Следует отметить, что в ряде работ отмечается большое влияние адсорбции (Сейвинс Дж., 1974; Григоращенко В. И., Зайцев Ю. В., Мирзаджанзаде А. Х. и др., 1978), а также масштабного эффекта (эффект Фарреуса–Линдквиста) на фильтрацию вязкоупругих жидкостей.

Шавету (Chauveteau, 1982) рассмотрел влияние размера пор на фильтрацию полимерных растворов, в частности, ксантанового полисахарида с добавкой NaCl. Им проведены эксперименты в щели с пористой средой, составленной сферическими стеклянными шариками. На основании экспериментальных исследований он ввел зависимость вязкости от скорости сдвига и предложил записывать закон фильтрации релаксирующих жидкостей в следующем виде:

$$v = -A \frac{k}{\eta(\gamma)} \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\gamma = \frac{4\alpha v}{FA\sqrt{8km}}.$$

Здесь α , A – постоянные коэффициенты, F – площадь поперечного сечения образца.

В работах Де Жена (De Gennes P.G., 1979) на основе представления макромолекул полимеров в виде гибкой цепи вводится скейлинговое соотношение для вязкости гетерогенной системы

$$\eta(\gamma) = \eta(0) \cdot f(\gamma\theta_0),$$

где θ_0 – максимальное время релаксации в отсутствие потока.

Очевидно, что данный подход также приводит к двух- или трехчленному закону фильтрации.

Анализ приведенных выражений показывает, что они описывают только те случаи фильтрации гетерогенных жидкостей, когда имеет место монотонное увеличение или снижение фильтрационных сопротивлений, т. е. псевдопластичное или дилатантное течения. Вместе с тем в ряде случаев наблюдается, как отмечено выше, переходный (комбинированный)

режим. В первой главе монографии на основе экспериментальных исследований показано, что ряд гетерогенных систем в однородной пористой среде проявляет псевдопластичное течение, а в неоднородной S -образное, при котором имеет место переход от дилатантного течения к псевдопластичному. Очевидно, что приведенные законы фильтрации не описывают переходные или комбинированные режимы течения (в частности, S -образные).

В монографии показано, что S -образное течение может быть описано в рамках нелинейного, трехчленного закона фильтрации Форхгеймера

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3$$

при $a_1 = 0$ и $a_3 < 0$. При этом квадратичный член отражает неравновесные свойства фильтрационного потока, а кубичный – неоднородность пористой среды.

В монографии также предложен более простой подход. Он основан на модификации линейного закона фильтрации Дарси, введением экспериментальной зависимости эффективной вязкости гетерогенной системы от перепада давления:

$$v = -\frac{\kappa}{\eta(P)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \eta(P) = b_1(P - P_0)^2 + b_2(P - P_0) + b_3.$$

Указанный подход позволяет описать как течения с монотонным увеличением или снижением фильтрационных сопротивлений, так и переходные или комбинированные режимы.

Де Жен показал, что полимерные растворы, состоящие из спутанных в клубки макромолекул, протекая вблизи гладкой пассивной поверхности, должны характеризоваться высокой степенью проскальзывания (скорость потока на стенке отлична от нуля). Физически можно сказать, что выгодней сконцентрировать сдвиги вблизи межфазной поверхности полимер – твердое тело, чем распределить их по объему жидкости (где переплетение цепочек сильно препятствует сдвигу). Эффективная вязкость для таких систем будет определяться из выражения (De Gennes P. G., 1979)

$$\eta = \frac{b}{a} \eta_0,$$

где b – коэффициент проскальзывания, a – молекулярный размер, η – вязкость жидкости, состоящей из мономеров (с тем же взаимодействием, но без клубков). Эффектом проскальзывания объясняются также аномалии вязкости полимерных растворов.

Закон фильтрации с проскальзыванием записывают в виде:

$$v = -\left(1 + \frac{4b}{R}\right) k \frac{\partial P}{\eta_0 \partial x},$$

где R – средний радиус капилляров пористой среды.

Эффект проскальзывания может наблюдаться при течении различных жидкостей (в том числе вязкопластичных (Бельков В. М., Урьев Н. Б., 1995)) в лиофобных и лиофильных средах. Кроме того, в ряде работ отмечено, что при фильтрации жидкостей в лиофильных средах проявляется эффект торможения. В работе Школьников Е. И., Ковтунова С. Н., Волкова В. В. (1996) предложено уточнение закона Дарси введением коэффициента сопротивления скольжению β . При этом эффективная проницаемость определяется из выражения

$$k = \frac{1}{8\tau^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left[r^2 + \frac{r\eta}{\beta} + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 + \frac{(\eta/\beta)^3}{(r - \eta/\beta)} \right] \varphi(r) dr,$$

где τ – извилистость, $\varphi(r)$ – функция распределения пор по размерам.

Важнейшим классом гетерогенных систем являются также газированные жидкости. В классической теории исследование фильтрации газированных жидкостей базируется на экспериментах Вико-Ботсета. При этом обычно считается, что для жидкости и газа можно записать уравнение Дарси в виде:

$$m S_i v_i = -\frac{k_0 K_i}{\eta_i} \nabla P,$$

здесь k_0 , K_i , S_i , m , η_i – соответственно абсолютная проницаемость пористой среды, относительная проницаемость, насыщенность, пористость и динамическая вязкость флюида. Последнее уравнение соответствует такому течению в пористой среде, когда жидкость и газ совершенно равноправны. Можно представить, что движение жидкости или газа происходит в некоей системе непрерывных каналов, заполненных либо жидкостью, либо газом.

Согласно классической теории относительных фазовых проницаемостей, они не могут быть больше единицы, однако исследования, проведенные академиком Мирзаджанзаде и его школой (1983), показали, что при давлении выше (вблизи) давления насыщения имеет место аномальный рост расхода жидкости (в 2–3 раза). Это объясняется образованием докритических зародышей газовой фазы, в результате чего происходит уменьшение кажущейся вязкости системы. При этом кажущаяся вязкость газиро-

рованной жидкости может быть определена из выражения (Мирзаджанзаде А. Х., Болотов А. А., Меликов Г. Х., 1986)

$$\eta = \eta_0 \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{4\pi\sigma(r^2 - 2/3 \cdot r^3/r_k)}{kT} \right] \right\},$$

где η_0 – вязкость жидкости, σ – поверхностное натяжение, r – радиус зародыша, r_k – критический радиус зародыша, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Как видно из последнего выражения, при давлении выше давления насыщения, когда $r < r_k$, вязкость уменьшается при приближении к давлению насыщения, а при $r > r_k$, когда в системе появляются пузырьки газа, увеличивается.

Во второй главе монографии приведены экспериментальные и теоретические исследования стационарной и нестационарной фильтрации газированных жидкостей в предпереходном фазовом состоянии. Экспериментально изучено изменение сжимаемости вблизи давления насыщения, влияние проницаемости, смачиваемости пористой среды, газонасыщенности и неньютоновских свойств жидкости на процесс фильтрации, а также вытеснение газированными жидкостями в однородных и неоднородных пористых средах. Предложен механизм обнаруженных эффектов, при этом рассмотрены вопросы стабильности зародышей (нанопузырьков) с учетом их возможной морфологии и поверхностного электрического заряда. Показано, что объяснение аномального увеличения расхода жидкости при фильтрации газированной жидкости в предпереходном фазовом состоянии возможно с привлечением кольцевой схемы Аверьянова С. Ф. (1949) и эффекта проскальзывания жидкости относительно поверхности порового канала.

В связи с этим в монографии предложен новый подход к анализу фильтрации газированных жидкостей, позволяющий описать все имеющиеся экспериментальные результаты. Он основан на модификации линейного закона фильтрации с проскальзыванием, введением экспериментальной зависимости коэффициента проскальзывания от давления.

В развитие указанного подхода в монографии на основе вывода степенного закона фильтрации с проскальзыванием и его модификации путем использования введенной экспериментальной зависимости коэффициента проскальзывания гетерогенной системы от давления получено, что для неньютоновских жидкостей при наличии проскальзывания возможна полная модификация характера течения. В монографии показано, что при фильтрации гетерогенных систем с проскальзыванием в неоднородной по-

ристой среде при прочих равных условиях будет происходить выравнивание профиля фильтрации.

Во второй главе рассмотрена также нестационарная фильтрация газированных жидкостей, получены решения для восстановления давления с учетом эффекта проскальзывания.

После пионерской работы Мандельброта появился ряд исследований влияния фрактальных структур на фильтрацию жидкостей. Это влияние может осуществляться за счет фрактальной структуры пористой среды или самой гетерогенной системы. Переход от линейного закона фильтрации к нелинейному в сильной степени зависит от распределения пор по размерам или фрактальности структуры пористой среды (Гийон Э., Митеску К. Д., Юлен Ж. П., Ру С., 1991). Вместе с тем гетерогенные жидкости, в частности эмульсии, обладают динамической фрактальной структурой, которая определяется взаимодействием между частицами дисперсной фазы (Зосимов В. В., Тарасов Д. Н., 1997). При уменьшении взаимодействия между частицами, что происходит со снижением концентрации дисперсной фазы, фрактальная структура системы исчезает. Важность этих результатов для теории фильтрации очевидна. В связи с этим **в третьей главе монографии** рассмотрены вопросы образования фрактальных структур в процессе вытеснения несмешивающихся жидкостей, фильтрации во фрактально-неоднородной среде, течения жидкостей с фрактально-неоднородной структурой.

Одним из эффективных методов увеличения производительности скважин является физическое, в частности волновое, воздействие на процесс фильтрации. Механизм виброволнового воздействия на процесс сложен и малоизучен. Ясное понимание механизма воздействия и факторов, определяющих его эффективность, отсутствует. В ряде случаев виброволновое воздействие на призабойную зону и пласт приводит к улучшению фильтрационных свойств. Наибольший эффект достигается, когда упругие волны генерируются устройством, работающим под действием потока нефти и газа, притекающего из пласта. **В четвертой главе монографии** строится модель и определяется влияние упругих волн на процесс фильтрации газированной жидкости при давлении выше и ниже давления насыщения. Рассматриваются различные виды колебаний расхода жидкости создаваемых генератором упругих волн. Кроме того, в данной главе рассмотрено виброволновое воздействие с учетом гидродинамических процессов в системе пласт–скважина. Учет этого фактора приобретает особое значение, когда виброволновое воздействие оказывается с устья скважины.

Распространено несколько подходов к анализу нестационарных сигналов, характеризующих динамику сложных систем, период колебаний

которых может изменяться в очень широких пределах. Первый подход – локальное преобразование Фурье, позволяющее получить спектр сигнала. Значительное распространение получила методика Прони и различные ее модификации, позволяющая с высокой точностью выделять из сигнала характерные частоты и соответствующие им амплитуды, коэффициенты затухания и фазы. Третий подход – вейвлет-преобразование, применяемое тогда, когда результат анализа некоего сигнала должен содержать в себе не только простое перечисление его характерных частот (масштабов), но и сведения об определенных локальных координатах, при которых эти частоты проявляют себя.

Преобразование Фурье и метод Прони дают хорошее представление о спектральной структуре сигнала, однако не позволяют определить эволюцию этой структуры во времени. В случае когда речь идет об анализе отклика системы на некоторые динамические воздействия, сведения о времени возникновения и затухания колебаний на тех или иных частотах могут иметь немаловажное значение. Поэтому методы вейвлет-анализа стали в последнее время основным инструментом исследования нестационарных сигналов в информационно-измерительных системах.

В настоящее время вейвлетный анализ приобрел характер самостоятельного аналитического средства, позволяющего вычислить параметры глобального самоподобия (фрактальности) объекта на основе исследования его локального самоподобия. Именно возможность локализации сингулярностей вероятностной меры объекта делает вейвлетный анализ незаменимым средством для выявления мультифрактальной структуры, а также нарушений регулярности временных рядов.

В связи с этим в **пятой главе монографии** приводится решение задачи нестационарной фильтрации с разрывными коэффициентами и неточными входными данными, а также метод решения обратной коэффициентной задачи подземной гидромеханики с применением вейвлет-преобразования.

Исследования представленные в монографии во многом основаны на развитии идей впервые предложенных Учителем автора, выдающимся ученым академиком А. Х. Мирзаджанзаде.

Часть результатов, относительно виброволнового воздействия и применения вейвлет преобразования, получены в тесном сотрудничестве с сотрудниками ГосНИПИ «Гипроморнефтегаз» к.т.н. Э. М. Аббасовым и к.ф.-м.н. О. А. Дышиным. Автор глубоко благодарен им, а также своим близким, чья постоянная поддержка позволила написать эту книгу.

Автор признателен ныне покойному профессору Артуру В. Метцнеру (Arthur V. Metzner) за ценное обсуждение особенностей фильтрации по-

лимерных растворов в слоисто-неоднородной пористой среде, а также считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору Юргену Цирепу (Jürgen Zierer) за плодотворную дискуссию по фильтрации газированных жидкостей в докритической области, доктору Джеймсу Г. Спайту (James G. Speight) за активное сотрудничество в рамках журнала «Energy Sources», сотрудникам ГосНИПИ «Гипроморнефтегаз» к.т.н. Р. Д. Бабаеву и к.т.н. В. Д. Абдуллаеву за помощь и поддержку.

Глава 1

Исследование фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородных пористых средах

Как известно, при разработке нефтяного месторождения для поддержания нефтеотдачи на достаточно высоком уровне необходимо проведение мероприятий по воздействию на пласт и призабойную зону, что требует закачки больших объемов воды. Вместе с тем закачка больших объемов воды приводит к нарушению устойчивости фронта вытеснения и снижению охвата воздействием. Преодоление этого технического противоречия [1], присущего технологическим процессам воздействия на пласт и призабойную зону, возможно при использовании неньютоновских, гетерогенных систем, которые обладают регулируемыми реологическими свойствами. В связи с этим создание перспективных, конкурентоспособных технологий возможно только при исследовании неустановленных закономерностей фильтрации модельных гетерогенных систем в неоднородных пористых средах. В данной главе представлены исследования фильтрации разбавленных полимерных растворов, водонефтяных эмульсий в однородных и неоднородных пористых средах.

1.1. Фильтрация разбавленных полимерных растворов

В последнее время усилился интерес к полимерным растворам и получен ряд новых результатов, открывающих путь к созданию систем с заданными свойствами [2–4]. Интерес этот обусловлен тем, что одновременное наличие кулоновских и гидрофобных взаимодействий в водных растворах полиэлектролитов приводит к самоорганизации с образованием упорядоченных микронеоднородностей масштаба 1–100 нм, причем указанные наноструктуры имеют различные морфологии (сферические мицеллы, цилиндры, ламеллы), которые регулируются небольшим изменением внешних параметров (добавление низкомолекулярной соли, изменение pH и др.) [4]. Очевидно, указанные закономерности будут отражаться и на реологии водных растворов полимеров.

Вместе с тем в нефтепромышленной практике все большее применение находят разбавленные полимерные растворы [5–11], а также полимерсодержащие композиции ПАВ (в дальнейшем именуются как полимерные композиции или композитные системы) [12–14]. Причем для усиления поверхностно-активных свойств водорастворимых полимеров в них добав-

ляют неионогенные ПАВ [15, 16]. При этом образующийся комплекс молекул полимера и ПАВ имеет молекулярную массу выше молекулярной массы полимера, что обуславливает более сильные релаксационные свойства композиции [14, 15]. Вместе с тем влияние анионного ПАВ на реологию водорастворимых полимеров мало изучено.

В данном параграфе приведены реологические характеристики разбавленных полимерных растворов с добавкой анионного ПАВ.

а) Реовискозиметрия разбавленных полимерных растворов с добавкой анионного ПАВ

Исследования проводились на ротационном вискозиметре “Rheotest – 2.1” при температуре 303 °К. При этом использовались водные растворы полиакриламида (ПАА) японской фирмы KOGIO (молекулярная масса $2 \cdot 10^6$, степень гидролиза 32 %) с массовой концентрацией 0,01 – 0,05 %. В качестве анионоактивного ПАВ использовали сульфанол в массовых концентрациях 0,002 – 0,05 %.

Зависимость вязкости от скорости сдвига для полимерных композиций различного состава показана на рис. 1.1. Как видно из рисунка, исследуемые системы в интервале скоростей сдвига $\dot{\gamma} = 220 - 900 \text{ с}^{-1}$ (и соответствующих напряжениях сдвига $\tau = 0,7 - 1,8 \text{ Па}$) имеют псевдопластический характер течения (т. е. характеризуются сдвиговым разжижением). При этом малая добавка анионного ПАВ приводит к загущению системы.

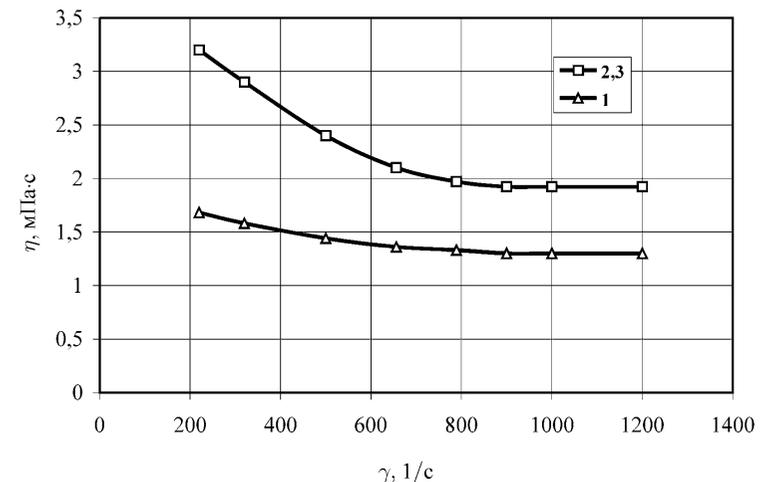


Рис. 1.1. Зависимость эффективной вязкости полимерных композиций от скорости сдвига по результатам ротационной вискозиметрии: 1 – концентрация ПАА 0,02 %; 2 – концентрация ПАА 0,03 %; 3 – концентрация ПАА 0,02 % ПАВ 0,005 %

Раствор с концентрацией ПАА 0,02 % и ПАВ 0,005 % по реологическим характеристикам практически не отличается от раствора ПАА с концентрацией 0,03 %.

На рис. 1.2 приведены кривые зависимости максимальной ньютоновской вязкости (η_{\max} , мПа·с) ПАА, определяемой путем экстраполяции зависимости $\lg \eta - \tau$ к $\tau = 0$ [17], от его концентрации в водном растворе (C , %) [18] в логарифмических координатах. Как видно из полученных данных, зависимость $\lg \eta_{\max} - \lg C$ выражается прямыми с переменным наклоном, описываемыми эмпирической формулой [17]:

$$\eta_{\max} = AC^{\beta},$$

где A – постоянный коэффициент, β – параметр, зависящий от концентрации [18]. Из указанного уравнения может быть определена критическая концентрация, отвечающая формированию в растворе развитой системы водородных связей [18], при этом макромолекулы полимера образуют сплошную сетчатую структуру с плотной упаковкой полимерных клубков [6]. При концентрации выше критической коэффициент β становится существенно больше 1. Приведенные данные показывают, что критической концентрации ПАА соответствуют значения 0,02 – 0,03 %.

Это подтверждают результаты оптических исследований на фотоэлектронном колориметре ФЭК-52. На рис. 1.3 показана зависимость логарифма прозрачности (U , %) от концентрации ПАА (C), из которой видно, что при концентрации больше 0,02 % прозрачность системы резко падает.

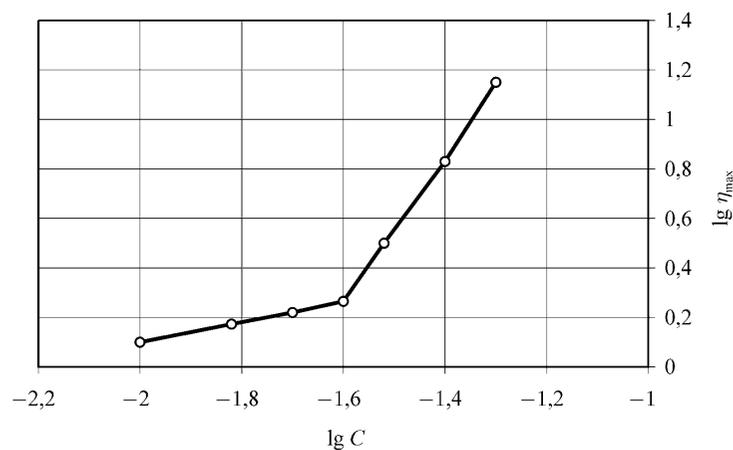


Рис. 1.2. Зависимость максимальной ньютоновской вязкости от концентрации полимера в логарифмических координатах

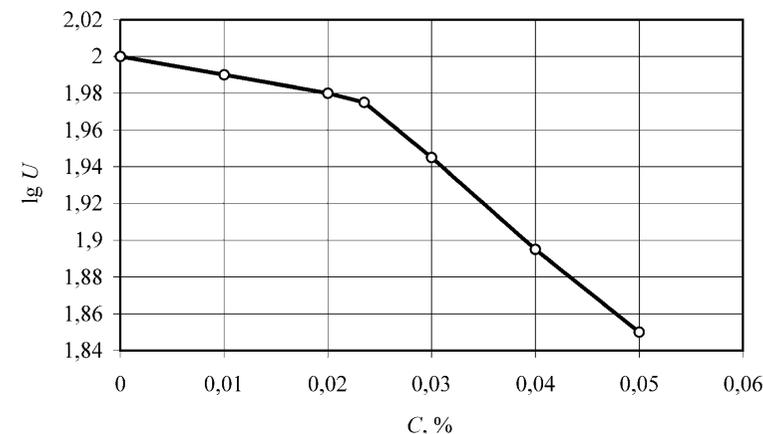


Рис. 1.3 Зависимость прозрачности от концентрации полимера в полулогарифмических координатах

На рис. 1.4 показана зависимость $\lg \eta_{\max}$ от концентрации ПАВ в 0,03 % водном растворе ПАА. Как видно из рисунка, в указанных координатах зависимость выражается прямыми с переменным наклоном, причем при концентрации ПАВ более 0,007 % максимальная ньютоновская вязкость изменяется незначительно.

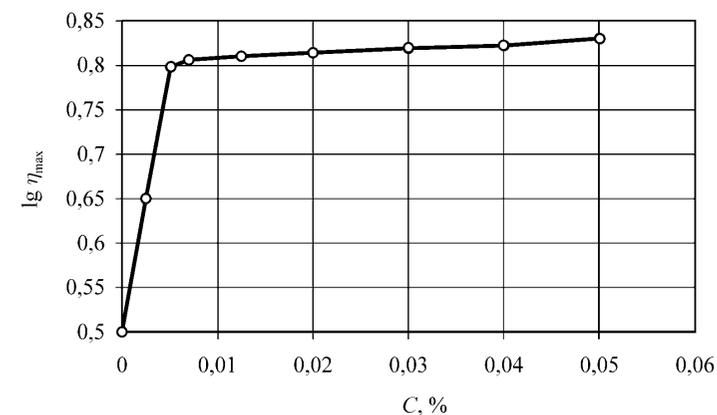


Рис. 1.4 Зависимость максимальной ньютоновской вязкости 0,03 % водного раствора ПАА от концентрации анионного ПАВ в полулогарифмических координатах

Для определения поверхностных свойств водных растворов ПАА с добавкой ПАВ по известной методике определялось поверхностное натяжение на границе с воздухом. Результаты приведены на рис. 1.5, из которого видно, что с добавкой ПАВ в водный раствор ПАА поверхностное натяжение снижается более чем на 30 %, причем при концентрации ПАВ более 0,005 % поверхностное натяжение изменяется незначительно.

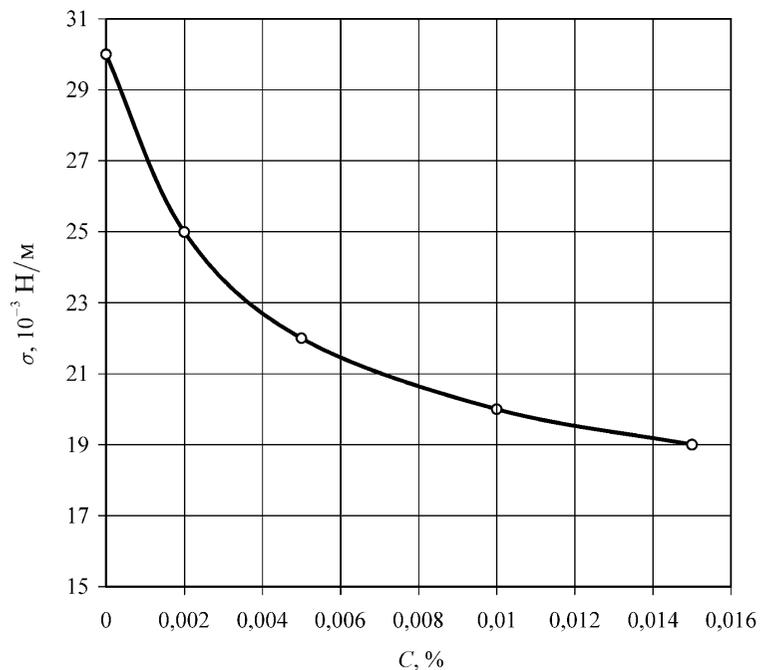


Рис. 1.5. Зависимость поверхностного натяжения 0,02 % водного раствора ПАА от концентрации ПАВ

На основании проведенных исследований можно определить оптимальные концентрации ПАА и ПАВ. Оптимальная концентрация ПАА может быть принята равной 0,02–0,03 %, т. к. дальнейшее повышение концентрации приводит к резкому увеличению вязкости, что может привести к значительному повышению давления нагнетания системы в пласт (особенно низкопроницаемый) и соответственно к деструкции полимера [11, 19]. Оптимальная концентрация ПАВ в полимерном растворе может быть принята равной 0,005–0,007 %, т. к. дальнейшее повышение концентрации не приводит к заметному изменению поверхностного натяжения и реологических характеристик.

Таким образом, относительно малые добавки анионного ПАВ способствуют неаддитивному изменению реологических характеристик разбавленных водных растворов ПАА и улучшению их поверхностных свойств, что позволяет оптимизировать свойства композиций применительно к технологическим требованиям. Помимо этого, добавки анионного ПАВ позволяют значительно сократить расход дорогостоящего полимера, что обуславливает экономичность композиции.

б) Фильтрация разбавленных полимерных растворов с добавкой анионного ПАВ

Для проведения лабораторных опытов [20] по фильтрации полимерных композиций была собрана экспериментальная установка, схема которой приведена на рис. 1.6. Установка включала следующие элементы: 1 – самописец; 2 – источник питания; 3 – образцовые манометры; 4 – колонка с пористой средой (модель пласта); 5 – тензодатчик давления «Сапфир»; 6 – бомба PVT; 7 – компенсатор; 8 – ультратермостат; 9 – распределительный манифольд и регулятор давления; 10 – дозаторный насос; 11 – запорные вентили; 12 – магазин сопротивлений.

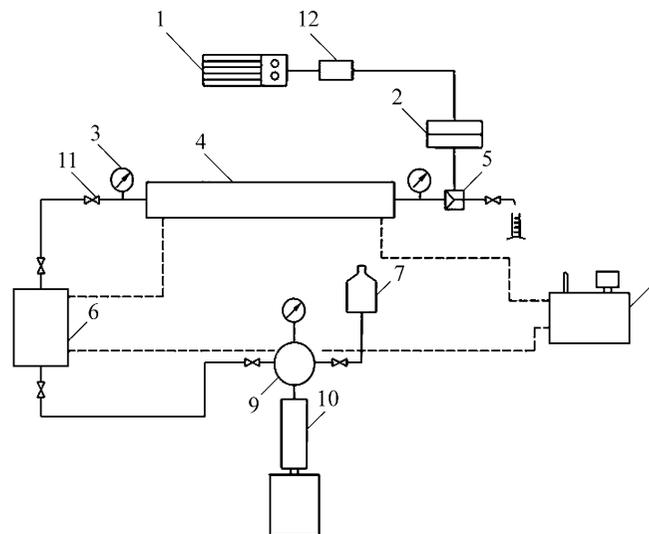


Рис. 1.6. Схема экспериментальной установки

Эксперименты проводились по следующему плану:

- колонка высокого давления, представляющая собой полый стальной цилиндр, обклеенный изнутри кварцевым песком, с длиной рабочей

части 1,1 м и внутренним диаметром 0,032 м, путем вертикальной вибрационной трамбовки заполнялась кварцевым песком;

- после обвязки экспериментальной установки согласно схеме (рис. 1.6) по известной методике определяли объем пор и проницаемость по воздуху;
- при непрерывном термостатировании ($T = 303 \text{ }^\circ\text{K}$) производилось вакуумирование установки;
- в бомбу PVT, объем которой составлял $3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, подавали заранее приготовленную полимерную композицию;
- посредством дозаторного насоса рабочая жидкость под вакуумом подавалась в модель пласта;
- производилась фильтрация исследуемой системы в модели пласта, в процессе которой определялся расход жидкости при различных перепадах давления, при этом контроль давления на входе и выходе колонки осуществлялся при помощи датчиков давления и образцовых манометров, а поддержание давления на заданном уровне обеспечивал регулятор давления (контактный манометр), установленный после дозаторного насоса.

Для исключения влияния окклюдированного газа (который имеется в пористой среде даже после тщательного вакуумирования [21]) на результаты экспериментов на выходе колонки поддерживалось постоянное давление, которое в различных опытах изменялось в интервале 2,0–5,0 МПа.

Эксперимент проводился в следующих пористых средах:

- однородной, сложенной кварцевым песком фракции $0,314\text{--}0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;
- микронеоднородной, сложенной смесью фракций $0,314\text{--}0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и $0,14\text{--}0,005 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;
- слоисто-неоднородной с контактирующими однородными слоями (с соотношением проницаемостей слоев, равным 10), что достигалось использованием разделительной перегородки, постепенно удаляемой в процессе заполнения колонки.

Эксперименты по фильтрации гетерогенных систем в основном проводятся в однородной, слоисто-неоднородной с неконтактирующими слоями или зонально-неоднородной модели пласта, а в промышленных условиях перемишка между слоями неоднородного пласта в той или иной степени проницаема [22, 23]. Выбор слоисто-неоднородной пористой среды с контактирующими слоями в качестве объекта исследования обусловлен необходимостью учета массообмена между двумя системами пор внутри образца.

Проницаемость пористых сред в различных опытах изменялась в интервале $0,03\text{--}3 \text{ мкм}^2$, причем для возможности сравнения результатов средняя проницаемость неоднородных сред подбиралась равной проницаемости од-

нородной среды. Исследования проводились в широком диапазоне перепадов давления ($\Delta P = 0\text{--}25 \text{ МПа}$) и скоростей фильтрации ($v = 0\text{--}100 \text{ м/сут}$).

В качестве исследуемых жидкостей использовались: вода, полимерные растворы с концентрацией ПАА 0,01–0,05 % и полимерные композиции с концентрацией ПАА 0,02 % и ПАВ 0–0,01 %.

Результаты оформлялись в виде зависимостей $\Delta P - Q$ (индикаторных диаграмм), которые показаны на рис. 1.7–1.10. Как видно из рисунков, при течении полимерных композиций в однородной пористой среде в широком интервале скоростей фильтрации имеет место псевдопластический характер фильтрации. В неоднородной (микронеоднородной и слоисто-неоднородной) пористой среде наблюдается комбинированный, S-образный характер индикаторных диаграмм. При этом наблюдается переход от дилатантного режима фильтрации к псевдопластическому (т. е. от сдвигового загущения к сдвиговому разжижению). Следует отметить, что во всех рассмотренных случаях начальный участок зависимости $\Delta P - Q$ имеет линейный, а заключительный – дилатантный (см. рис. 1.7–1.10) характер.

Далее определялось соответствие экспериментов в пористой среде ранее проведенным ротавискозиметрическим исследованиям. Определялись напряжение и скорость сдвига, соответствующие ньютоновскому течению с минимальной ($\tau_{\min}, \gamma_{\min}$) и максимальной ($\tau_{\max}, \gamma_{\max}$) ньютоновской вязкостью.

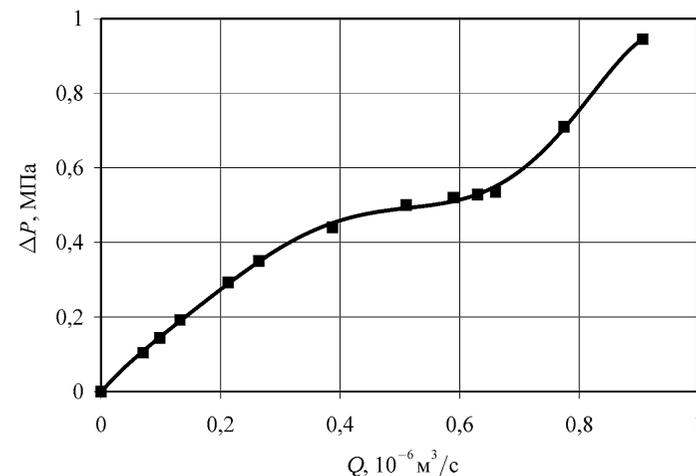
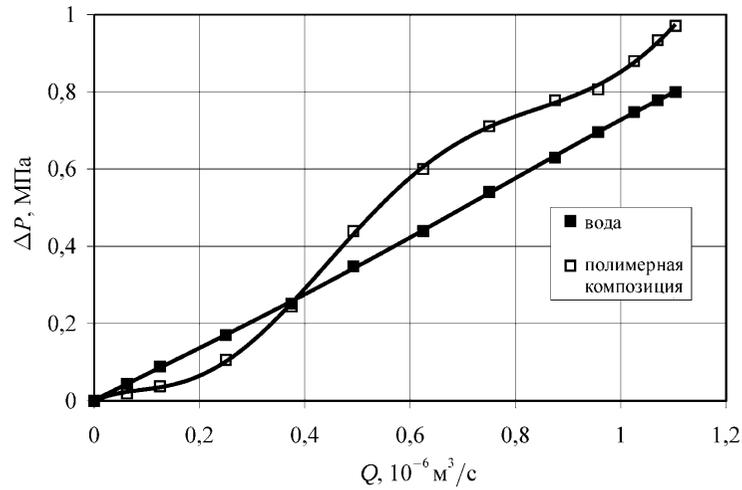
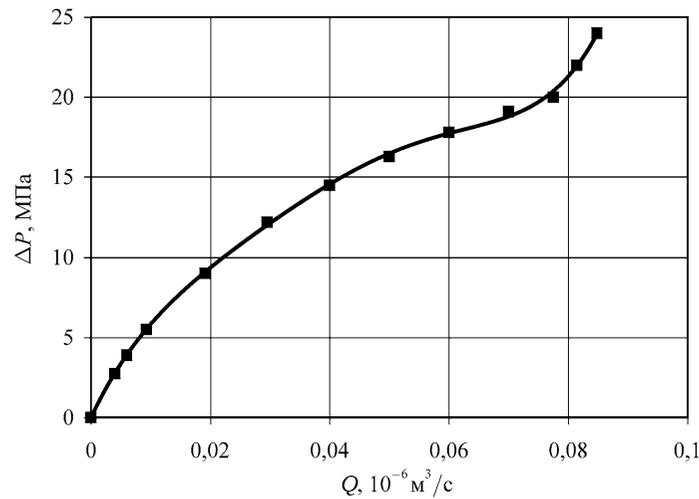
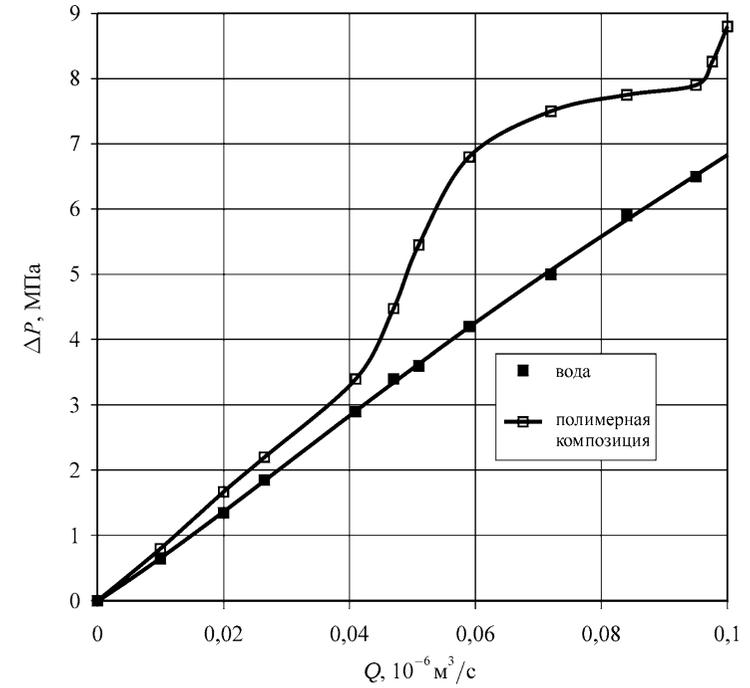


Рис. 1.7. Зависимость $\Delta P - Q$ в однородной пористой среде для полимерной композиции (проницаемость $3,0 \text{ мкм}^2$)

Рис. 1.8. Зависимость $\Delta P - Q$ в слоисто-неоднородной пористой средеРис. 1.9. Зависимость $\Delta P - Q$ в однородной пористой среде для полимерной композиции (проницаемость $0,05 \text{ мкм}^2$)Рис. 1.10. Зависимость $\Delta P - Q$ в микронеоднородной пористой среде

Напряжение и скорость сдвига для течения в пористой среде определялись из следующих выражений [24,25]:

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{2k}{mc'}} \frac{\Delta P}{l}; \quad \bar{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{kmc'}} v,$$

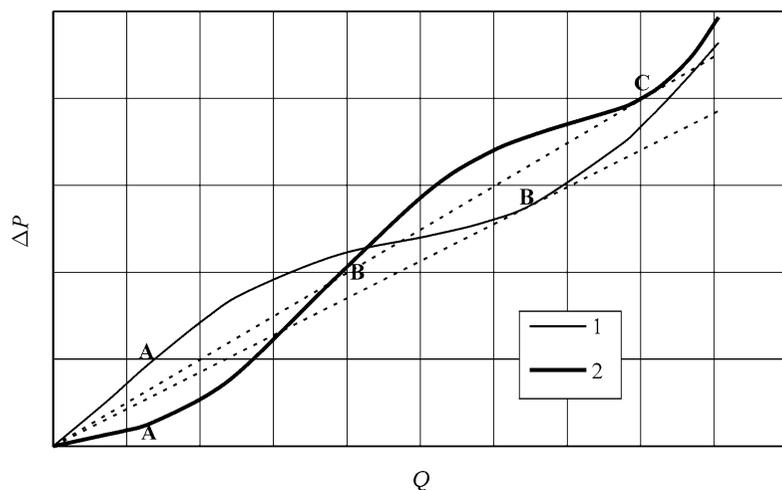
где k – проницаемость; m – пористость; c' – извилистость (обычно принимается равной 2,5); ΔP – перепад давления; l – длина образца пористой среды; v – скорость фильтрации.

Сравнение результатов ротавискозиметрических исследований (см. рис. 1.1) с расчетами по вышеуказанным формулам показано в таблице 1.1, из которой видно, что линейность кривых фильтрации на начальном и дилатантность на заключительном участке соответствует ньютоновскому течению полимерной композиции. При этом при $\tau < 0,7 \text{ Па}$ и $\gamma < 220 \text{ с}^{-1}$ имеет место течение с максимальной, а при $\tau > 1,8 \text{ Па}$ и $\gamma > 900 \text{ с}^{-1}$ – с минимальной ньютоновской вязкостью.

Таблица 1.1

Сравнение основных параметров ротавискозиметрических исследований и фильтрации полимерных композиций

Параметры	Пористая среда		
	однородная	слоисто-неоднородная	микро-неоднородная
k , мкм ²	3,0	3,0	0,05
τ_{\min} , Па	0,7	0,7	0,7
ΔP_{\min} , 10 ⁵ Па	2,8	1,5	32,0
$\bar{\tau}_{\min}$, Па	0,7	0,4	1,0
τ_{\max} , Па	1,8	1,8	1,8
ΔP_{\max} , 10 ⁵ Па	5,4	8,0	80,0
$\bar{\tau}_{\max}$, Па	1,4	2,1	2,7
γ_{\min} , с ⁻¹	220	220	220
Q_{\min} , 10 ⁻⁶ м ³ /с	0,2	0,25	0,04
$\bar{\gamma}_{\min}$, с ⁻¹	222	276	341
γ_{\max} , с ⁻¹	900	900	900
Q_{\max} , 10 ⁻⁶ м ³ /с	0,66	0,95	0,095
$\bar{\gamma}_{\max}$, с ⁻¹	732	1053	852

Рис 1.11. Зависимость $\Delta P - Q$ в однородной (1) и неоднородной (2) пористых средах

Рассмотрим подробнее характер полученных кривых в однородной и неоднородной пористой среде. Как видно из рисунка 1.11, на кривых, полученных в однородной пористой среде (рис. 1.11, кривая 1), имеются две характерные точки *A* и *B*. До точки *A* происходит фильтрация с постоянной максимальной ньютоновской вязкостью. После точки *A* до точки *B* происходит фильтрация при скоростях сдвига, соответствующих неньютоновскому поведению полимерной композиции, причем эффективная вязкость полимерной композиции, как и при ротавискозиметрических исследованиях, убывает (псевдопластический режим фильтрации). После точки *B* происходит течение с постоянной минимальной ньютоновской вязкостью.

При фильтрации полимерной композиции в неоднородной пористой среде (рис. 1.11, кривая 2) на кривых течения имеются уже три характерные точки *A*, *B* и *C*. До точки *A* происходит фильтрация с постоянной максимальной ньютоновской вязкостью. После точки *A* до точки *C* происходит фильтрация при скоростях сдвига, соответствующих неньютоновскому поведению, причем до точки *B* (точка перегиба) происходит увеличение эффективной вязкости полимерной композиции (дилатантный режим фильтрации), а после точки перегиба до точки *C* уменьшение (псевдопластический режим фильтрации). После точки *C* происходит течение с постоянной минимальной ньютоновской вязкостью.

Следует отметить, что конечный участок кривых в обоих случаях не образует единой прямой с началом координат (пунктирная линия на рис. 1.11), отклоняясь влево от нее, что свидетельствует об увеличении фильтрационных сопротивлений, т. е. о дилатантном режиме фильтрации. Указанный эффект может быть объяснен действием поверхностных молекулярных сил, в частности адсорбцией, на контакте порода–жидкость (см. пункт «в» настоящего параграфа). Площадь этого контакта с жидкостью благодаря развитой поверхности велика, и глубина зоны действия сил перекрывает существенную часть живого гидравлического сечения капилляров, что приводит к снижению проницаемости пористой среды. Вместе с тем, согласно данным работы [6], даже вода, закачиваемая после фильтрации полимерного раствора, течет как дилатантная жидкость, что объясняется деформацией адсорбированных надмолекулярных структур полимерного раствора с повышением скорости течения.

На рис. 1.12, 1.13 показана зависимость эффективной вязкости (η_a) полимерной композиции от перепада давления в однородной и неоднородной пористой среде. Как видно из рисунка 1.12, при фильтрации полимерной композиции в однородной пористой среде на первом этапе (до точки *A*) имеет место течение с постоянной вязкостью, далее происходит снижение эффективной вязкости до минимального значения (точка *B*). При течении полимерной композиции в неоднородной (слоисто- и микро-) пористой среде на первом этапе также имеет место фильтрация с постоянной вязкостью (до точки *A*), далее происходит увеличение эффективной вязкости

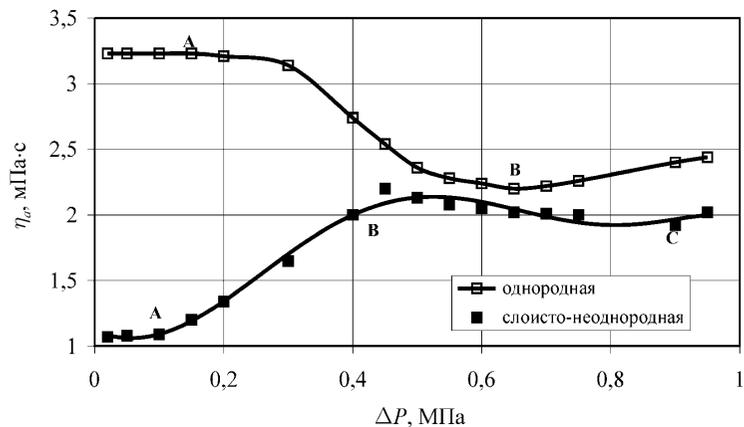


Рис. 1.12. Зависимость эффективной вязкости от перепада давления

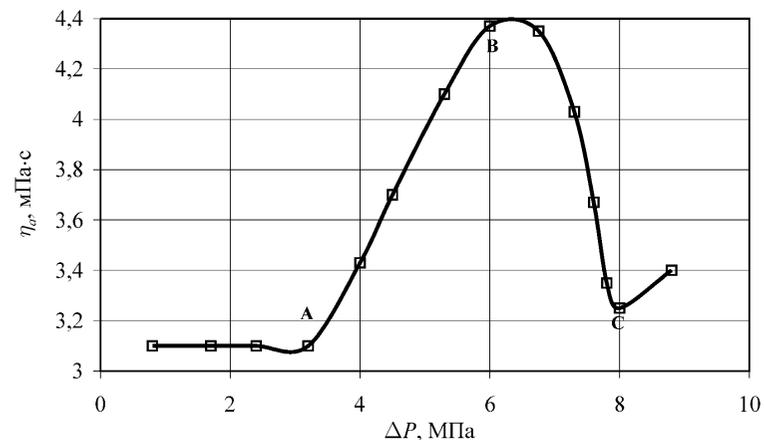


Рис. 1.13. Зависимость эффективной вязкости от перепада давления в микронеоднородной пористой среде

до максимального значения (точка *B*) с последующим снижением (точка *C*). После точки *B* в первом случае и после точки *C* во втором происходит некоторое увеличение эффективной вязкости.

На рис. 1.14 показана зависимость эффективной проницаемости (k_{eff}) однородной, слоисто-неоднородной, а на рис. 1.15 микронеоднородной пористых сред от перепада давления (при расчетах принималось среднее зна-

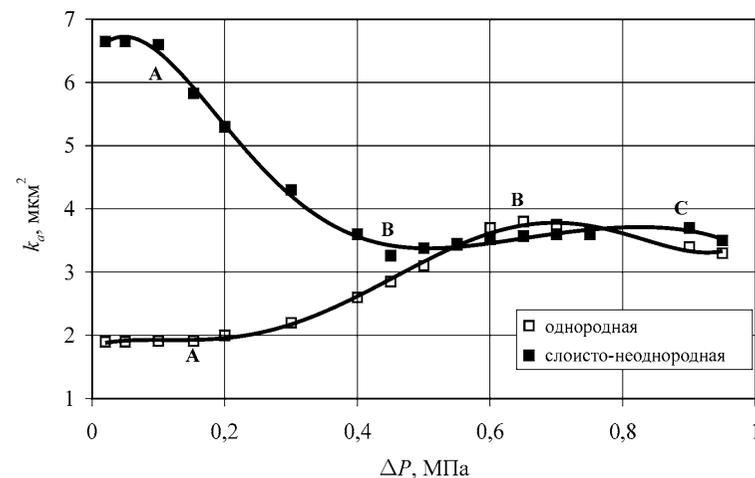


Рис. 1.14 Зависимость эффективной проницаемости от перепада давления

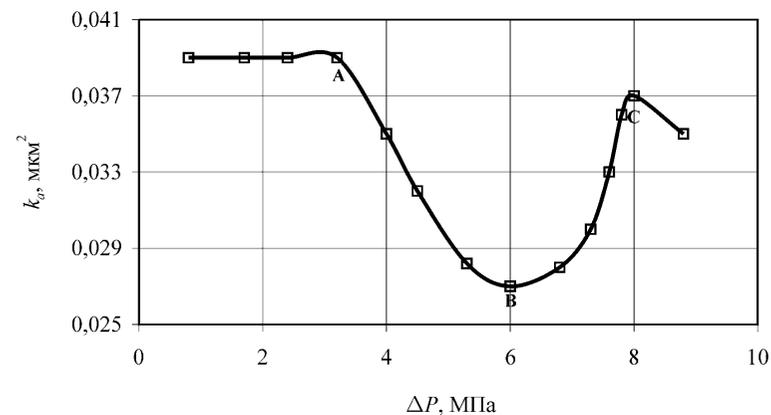


Рис. 1.15 Зависимость эффективной проницаемости от перепада давления в микронеоднородной пористой среде

чение вязкости полимерной композиции, равное 2.4 мПа·с) при фильтрации полимерной композиции.

Как видно из рисунков, при фильтрации полимерной композиции в однородной пористой среде на первом этапе (до точки *A*) проницаемость постоянна, далее происходит ее увеличение до максимального значения (точка *B*). При течении полимерной композиции в неоднородной (слоисто-

и микро-) пористой среде на первом этапе проницаемость также постоянна (до точки *A*), далее происходит снижение проницаемости до минимального значения (точка *B*) с последующим увеличением (точка *C*). После точки *B* в первом случае и после точки *C* во втором происходит некоторое снижение эффективной проницаемости.

Следует отметить, что на начальном этапе проницаемость слоисто-неоднородной пористой среды равна (см. рис. 1.14) $6,6 \text{ мкм}^2$, в то время как средняя проницаемость пористой среды всего $3,0 \text{ мкм}^2$. Можно предположить, что на первоначальном этапе (до точки *A*) полимерная композиция фильтруется в основном по высокопроницаемому пропластку, сложенному кварцевым песком фракции $0,25\text{--}0,314 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Для подтверждения оценим проницаемость пропластка по формуле [26]:

$$k = \frac{D^2 m^3}{72c'(1-m)^2},$$

где D – средний диаметр частицы кварцевого песка (в рассматриваемом случае $0,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}$). Расчет по вышеуказанной формуле при пористости 0,3 дает проницаемость $6,0 \text{ мкм}^2$, что подтверждает наши рассуждения).

Приведенные выше результаты получены при фильтрации полимерных композиций без остаточной нефте- и водонасыщенности. Вместе с тем с практической точки зрения важно определить, как влияет присутствие нефти и минерализованной воды на фильтрационные свойства полимерных композиций. Для этого были проведены опыты при остаточной нефте- и водонасыщенности 25–30%. В качестве модели нефти использовали смесь нефти Калининской свиты и керосина, а в качестве минерализованной воды 1%-ный водный раствор хлористого натрия. При этом первоначально пористая среда насыщалась моделью нефти или минерализованной водой, затем после их полного вытеснения полимерной композицией снималась зависимость $\Delta P - Q$. Анализ полученных кривых показал, что присутствие в пористой среде нефти и минерализованной воды качественно не изменило характер указанных зависимостей.

в) Влияние адсорбции на фильтрацию разбавленных полимерных растворов

Согласно [14, 27, 28] добавки ПАВ в полимерный раствор значительно снижают адсорбцию, однако определение степени ее влияния на процесс фильтрации полимерных растворов требует специального исследования.

Для изучения влияния адсорбции на закон фильтрации полимерных композиций в слоисто-неоднородной пористой среде (с контактирующими слоями) на установке, показанной на рис. 1.6, была проведена серия экспериментальных исследований.

Первая серия экспериментов проводилась по следующей схеме:

- по вышеописанной методике (пункт «б» настоящего параграфа) определялась зависимость $\Delta P - Q$ при повышении перепада давления от нуля до его значения, соответствующего характерной точке *C* (см. рис. 1.11);
- определялась зависимость $\Delta P - Q$ при понижении перепада давления от значения, соответствующего характерной точке *C* до нуля;
- эксперимент продолжался до полного совпадения зависимостей, снятых в прямом и обратном направлении (т. е. до наступления адсорбционного равновесия).

Результаты показаны на рис. 1.16–1.18, из которых видно, что после прокачки первого порового объема полимерной композиции (рис. 1.16) имеет место значительный гистерезис между кривыми, снятыми при повышении и снижении давления. После прокачки второго порового объема полимерной композиции (рис. 1.17) гистерезис становится меньше. После прокачки третьего порового объема полимерной композиции (рис. 1.18) гистерезис не наблюдается при сохранении *S*-образного закона фильтрации (до характерной точки *C* на рис. 1.11), причем конечный линейный участок кривой (после точки *C*) образует единую прямую с началом координат, что подтверждает приведенные ранее (в пункте «б» настоящего параграфа) предположения.

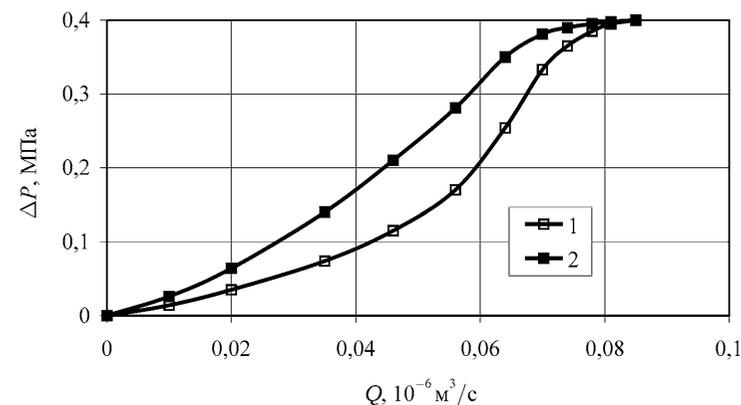


Рис. 1.16. Зависимости $\Delta P - Q$, снятые при повышении (1) и снижении (2) перепада давления после прокачки одного порового объема полимерной композиции

Вторая серия экспериментов проводилась по следующей схеме:

- устанавливался перепад давления, соответствующий точке перегиба (точка *B* на рис. 1.11, кривая 2), после чего перепад повышался до значения, соответствующего точке *C*;

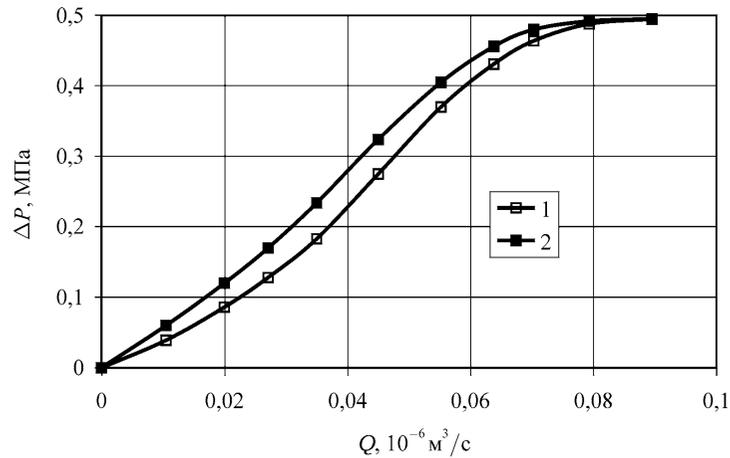


Рис. 1.17. Зависимости $\Delta P - Q$, снятые при повышении (1) и снижении (2) перепада давления после прокачки двух поровых объемов полимерной композиции

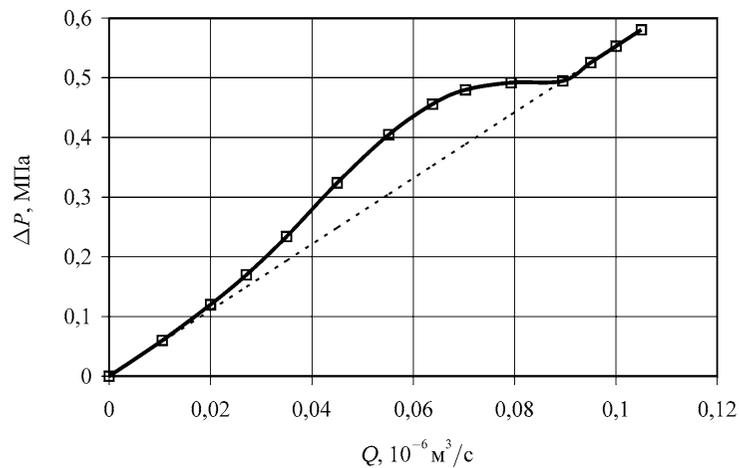


Рис. 1.18 Зависимость $\Delta P - Q$, снятая при повышении и снижении перепада давления после прокачки трех поровых объемов полимерной композиции

– далее замеры продолжались при повышении перепада давления от нуля до значения, соответствующего точке перегиба.

Результаты показаны на рис. 1.19, из которого видно, что ввиду адсорбции (до наступления адсорбционного равновесия) наблюдается значи-

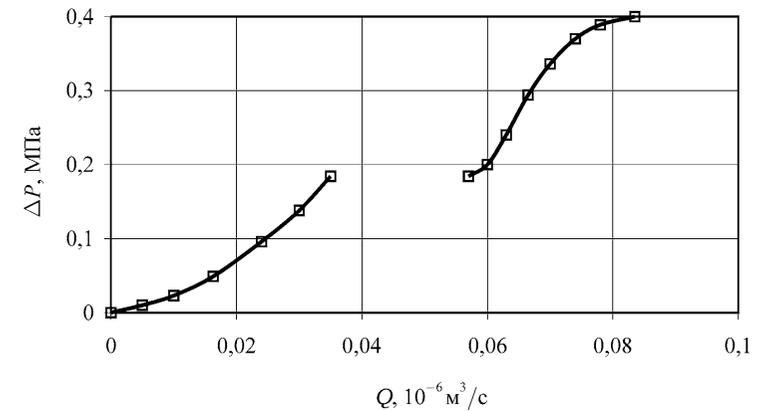


Рис. 1.19. Зависимость $\Delta P - Q$ при смене сценария изменения перепада давления

тельный гистерезис при смене направления изменения давления, однако S-образный характер кривой не изменяется.

2) Влияние соотношения проницаемости слоев слоисто-неоднородного пласта на фильтрацию разбавленных полимерных растворов

Для изучения влияния соотношения проницаемости слоев слоисто-неоднородного пласта на закон фильтрации полимерных композиций на установке, показанной на рис. 1.6, была проведена серия экспериментальных исследований.

Эксперименты проводились по вышеописанной методике (пункт «б» настоящего параграфа) при различных соотношениях проницаемостей слоев $K_0 = k_1/k_2 = 1-50$ (k_1, k_2 – соответственно проницаемость высокопроницаемого и низкопроницаемого слоев), при этом регулирование значения K_0 достигалось за счет изменения проницаемости высокопроницаемого слоя. Исследования проводились до перепадов давления, соответствующих течению с минимальной ньютоновской вязкостью (до характерной точки C на рис. 1.11, кривая 2). Полученные зависимости $\Delta P - Q$ перестраивались в безразмерных координатах $\Delta P_0 - Q_0$, где $\Delta P_0 = \Delta P/\Delta P_\infty$; $Q_0 = Q/Q_\infty$ ($\Delta P, Q$ – соответственно текущий перепад давления и расход жидкости; $\Delta P_\infty, Q_\infty$ – соответственно конечный перепад давления и расход жидкости). Результаты показаны на рис. 1.20. На рис. 1.21 показана зависимость безразмерного расхода жидкости Q_0 при безразмерном перепаде давления $\Delta P_0 = 0,5$ (точка перегиба) от соотношения проницаемостей слоев.

Как видно из указанных рисунков, зависимость безразмерного расхода жидкости Q_0 при безразмерном перепаде давления $\Delta P_0 = 0,5$ от соотно-

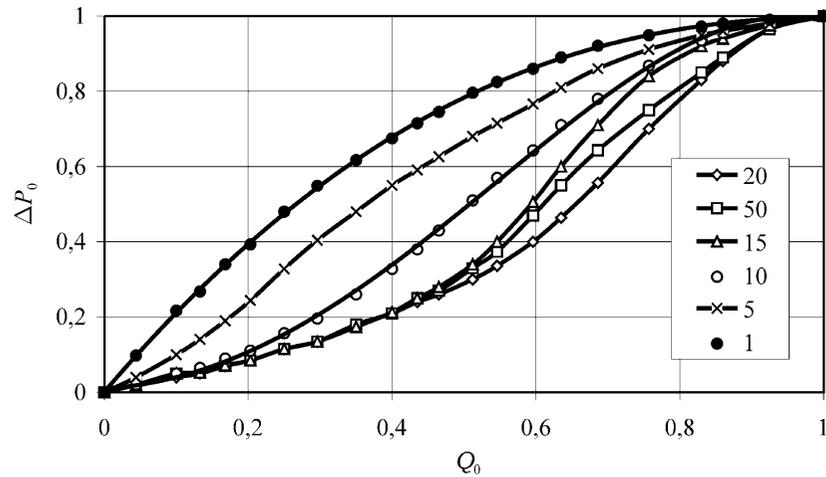


Рис. 1.20. Зависимости $\Delta P_0 - Q_0$ при различных соотношениях проницаемостей слоев

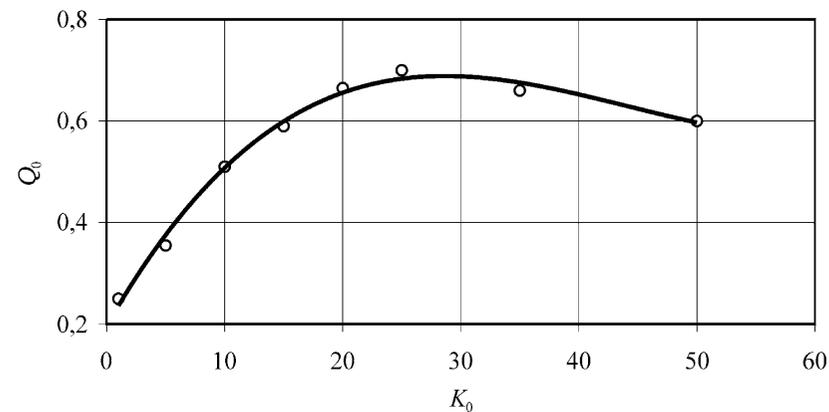


Рис. 1.21. Зависимость безразмерного расхода полимерной композиции Q_0 от соотношения проницаемостей слоев при $\Delta P_0=0,5$

шения проницаемостей слоев имеет немонотонный характер, причем до $K_0 = 25$ безразмерный расход возрастает с увеличением соотношения проницаемости слоев (объяснение см. в 1.3), а после этого убывает. Это, возможно, объясняется тем, что при указанном критическом соотношении слоев профиль фильтрации полимерной композиции становится менее равномерным и в пределе при более высоких соотношениях проницаемости слоев низкопроницаемый пропласток будет практически непроницае-

мым для полимерной композиции, а закон фильтрации будет приближаться к закону фильтрации в однородной пористой среде.

д) Фильтрация нефтерастворимых полимеров

С целью проверки полученных результатов и выявления широты действия полученных для водорастворимых полимеров закономерностей были проведены эксперименты по выявлению характера фильтрации углеводородной неньютоновской жидкости в слоисто-неоднородной пористой среде.

В экспериментах, проведенных по вышеуказанной схеме, в качестве рабочей жидкости использовался 5%-ный раствор полиизобутилена (ПИБ) в керосине (реологическая кривая в ротавискозиметрических исследованиях имела псевдопластический характер). Результаты приведены на рис. 1.22, из которых видно, что при течении в однородной пористой среде имеет место псевдопластический характер фильтрации, а в неоднородной S-образной, при этом наблюдается переход от дилатантного режима фильтрации к псевдопластическому. Следует отметить, что в обоих случаях начальный участок зависимости $\Delta P - Q$ имеет линейный, а заключительный – дилатантный характер.

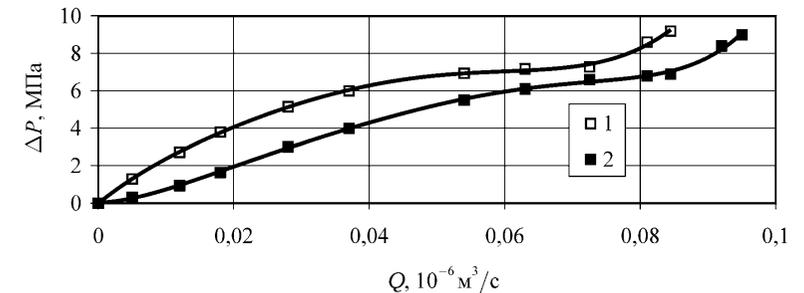


Рис. 1.22. Зависимости $\Delta P - Q$, снятые при фильтрации 5%-го раствора ПИБ в керосине в однородной (1) и слоисто-неоднородной (2) пористых средах

1.2. Фильтрация водонефтяных эмульсий

Как известно, реальные и технологические жидкости нефтедобычи часто представляют собой водонефтяные смеси. Поэтому важным представляется изучение фильтрационных характеристик водонефтяных эмульсий.

Для изучения характера фильтрации водонефтяных эмульсий в пористой среде на лабораторной установке, показанной на рис. 1.6, были проведены экспериментальные исследования. Опыты проводились на од-

нородной и слоисто-неоднородной (с контактирующими слоями) моделях пласта по описанной в 1.1 методике. В качестве объекта исследований использовалась водонефтяная эмульсия типа масло в воде, приготовленная из нефти Калининской свиты и промысловой воды Балаханского месторождения с добавкой щелочного компонента.

Исследования проводились в следующей последовательности:

- проводилась ротавискозиметрия исследуемой эмульсии на вискозиметре «Rheotest – 2.1» при различной температуре: 323–363 °К;
- производилась фильтрация эмульсии в однородной и слоисто-неоднородной пористой среде и снималась зависимость $\Delta P - Q$ при температуре опытов 323–363 °К;

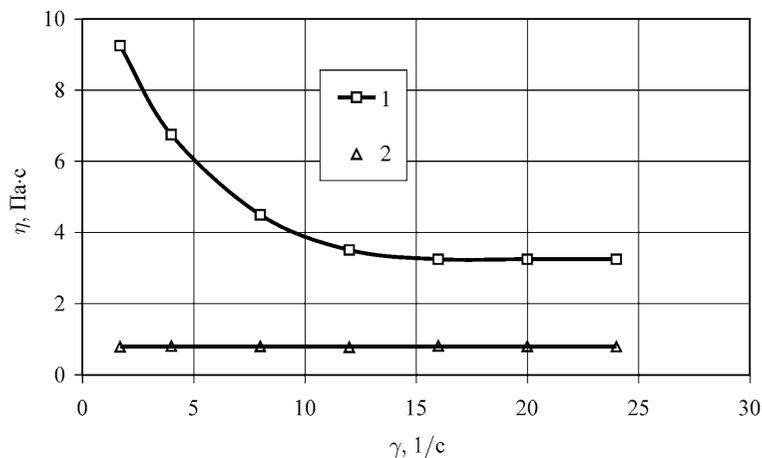


Рис. 1.23. Зависимость кажущейся вязкости водонефтяной эмульсии от скорости сдвига по результатам ротационной вискозиметрии при различных температурах: 1– 323 °К, 2 – 363°К

На рис. 1.23 приведены результаты ротационной вискозиметрии, оформленные в виде зависимости эффективной вязкости от скорости сдвига при температурах опыта 323 °К и 363 °К. Как видно из рисунка, при температуре 323 °К характер течения в интервале скоростей сдвига 1.7 – 16 $1/c$ псевдопластический, а при температуре 363 °К – ньютоновский, что объясняется разложением эмульсии при этой температуре.

На рис. 1.24 и 1.25 показаны зависимости $\Delta P - Q$ для фильтрации водонефтяной эмульсии в слоисто-неоднородной пористой среде ($K_0 = 10$) при температуре соответственно 323 °К и 363 °К. Как видно из рисунков, зависимость $\Delta P - Q$ в слоисто-неоднородной пористой среде при темпера-

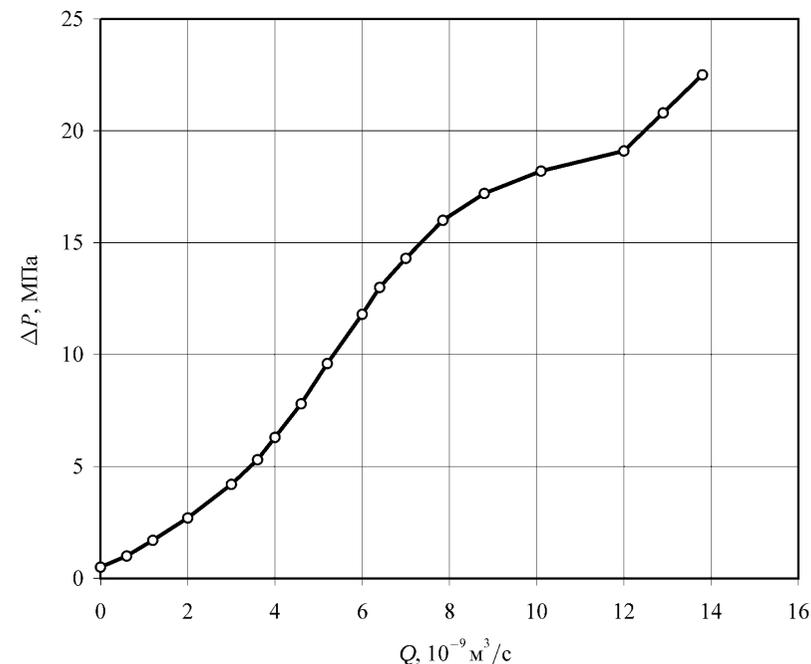


Рис. 1.24. Зависимость $\Delta P - Q$ при фильтрации водонефтяной эмульсии в слоисто-неоднородной пористой среде при температуре 323 °К

туре 323 °К имеет S-образный характер, а при температуре 363 °К (после разложения эмульсии) линейный характер.

Следует отметить, что при фильтрации водонефтяной эмульсии в однородной пористой среде при температуре 323 °К имеет место псевдопластический характер течения.

Полученные результаты подтверждаются визуальным анализом проб, отбираемых на выходе пористой среды. При температуре опыта 323 °К отобранная проба содержала 80–100% эмульсии, а при температуре 363 °К практически не содержала.

Сравнение результатов ротавискозиметрических исследований (см. рис. 1.23) с расчетами по вышеуказанным формулам показано в таблице 1.2, из которой видно, что линейность начального и конечного участка кривой фильтрации обусловлена ньютоновским поведением эмульсии. При этом при $\tau < 15$ Па и $\gamma < 1,7 \text{ c}^{-1}$ имеет место течение с максимальной, а при $\tau > 52$ Па и $\gamma > 16 \text{ c}^{-1}$ – с минимальной ньютоновской вязкостью.

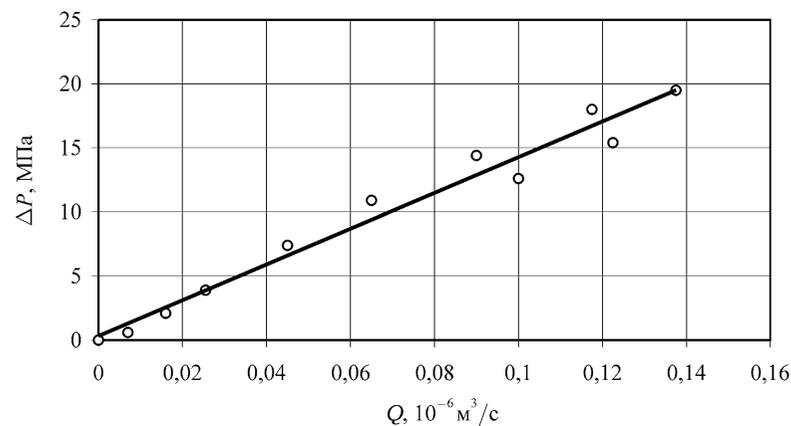


Рис. 1.25. Зависимость $\Delta P - Q$ при фильтрации водонефтяной эмульсии в слоисто-неоднородной пористой среде при температуре 363 °К

Таблица 1.2

Сравнение основных параметров ротавискозиметрических исследований и фильтрации водонефтяной эмульсии

Параметры	Слоисто-неоднородная пористая среда
k , мкм ²	3,0
τ_{\min} , Па	15,0
ΔP_{\min} , 10 ⁵ Па	30,0
$\bar{\tau}_{\min}$, Па	9,0
τ_{\max} , Па	52,0
ΔP_{\max} , 10 ⁵ Па	180,0
$\bar{\tau}_{\max}$, Па	51,0
γ_{\min} , с ⁻¹	1,7
Q_{\min} , 10 ⁻⁸ м ³ /с	0,2
$\bar{\gamma}_{\min}$, с ⁻¹	2,0
γ_{\max} , с ⁻¹	16,0
Q_{\max} , 10 ⁻⁸ м ³ /с	1,2
$\bar{\gamma}_{\max}$, с ⁻¹	13,0

1.3. Анализ результатов экспериментальных исследований и механизм наблюдаемых явлений

Как было отмечено выше, в определенном интервале перепада давления зависимости $\Delta P - Q$ имеют линейный (ньютоновский) характер, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать интервал скоростей фильтрации, соответствующий неньютоновскому поведению рассматриваемых жидкостей.

Для объяснения полученных результатов экспериментальные кривые $\Delta P - Q$ перестраивались в асимптотических координатах [29]. Новые координаты определялись следующим образом: $Y = (\Delta P_0 - \Delta P)/(\Delta P_0 - \Delta P_\infty)$; $X = Q/Q_\infty$, где ΔP , ΔP_0 , ΔP_∞ – соответственно текущее, начальное и конечное значения перепада давления; Q , Q_∞ – соответственно текущее и конечное значения расхода жидкости. Результаты приведены на рис. 1.26–1.29. Как видно из рис. 1.26 (обработка данных, показанных на рис. 1.7, 1.9 и 1.22) и 1.27 (обработка данных, показанных на рис. 1.8, 1.22 и 1.24) зависимости $\Delta P - Q$, снятые для различных неньютоновских жидкостей в однородной и слоисто-неоднородной (с контактирующими слоями) пористых средах (близких по фильтрационным параметрам) составляют единую кривую. На рис. 1.28 показаны результаты перестройки в асимптотических координатах (учитывающих различие соотношения проницаемостей слоев) $\Delta P - Z$ ($Z = Q/Q(K_0)$, где $Q(K_0)$ – значение расхода жидкости при $\Delta P_\infty(K_0)/2$) зависимостей $\Delta P - Q$, снятых при фильтрации полимерных композиций

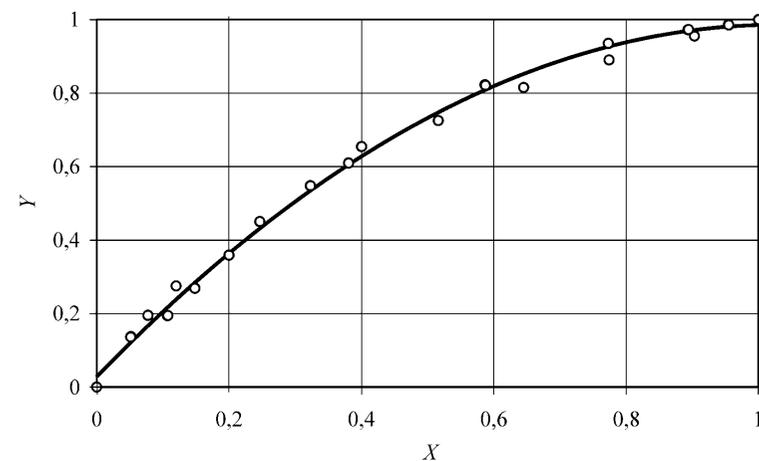


Рис. 1.26. Зависимости $\Delta P - Q$ для фильтрации полимерных композиций в однородных пористых средах с различной проницаемостью, перестроенные в асимптотических координатах

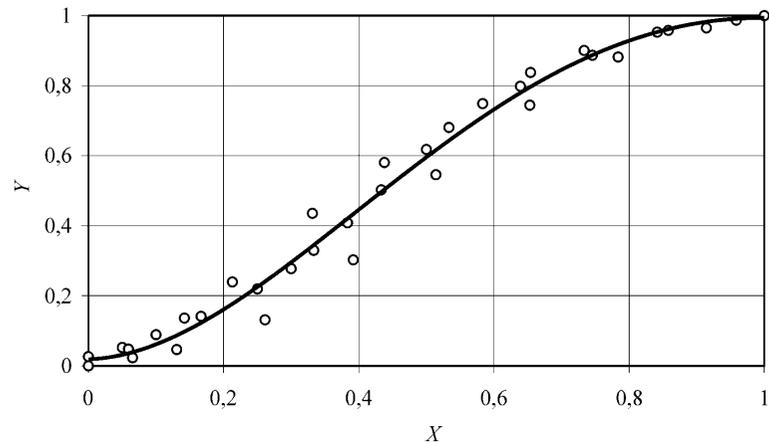


Рис. 1.27. Зависимости $\Delta P - Q$ для фильтрации неньютоновских жидкостей в слоисто-неоднородной пористой среде, перестроенные в асимптотических координатах

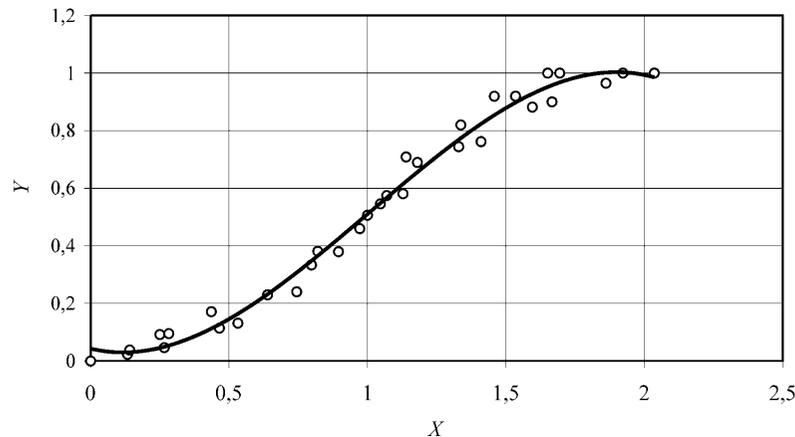


Рис. 1.28. Зависимости $\Delta P - Q$, снятые при фильтрации полимерной композиции в слоисто-неоднородной пористой среде с различным соотношением слоев, перестроенные в асимптотических координатах

в слоисто-неоднородной пористой среде с различным соотношением проницаемостей K_0 . Как видно из рис. 1.28, и в данном случае исходные кривые в асимптотических координатах составляют единую кривую.

Полученные результаты свидетельствуют о едином механизме, обуславливающем закон фильтрации исследуемых гетерогенных систем.

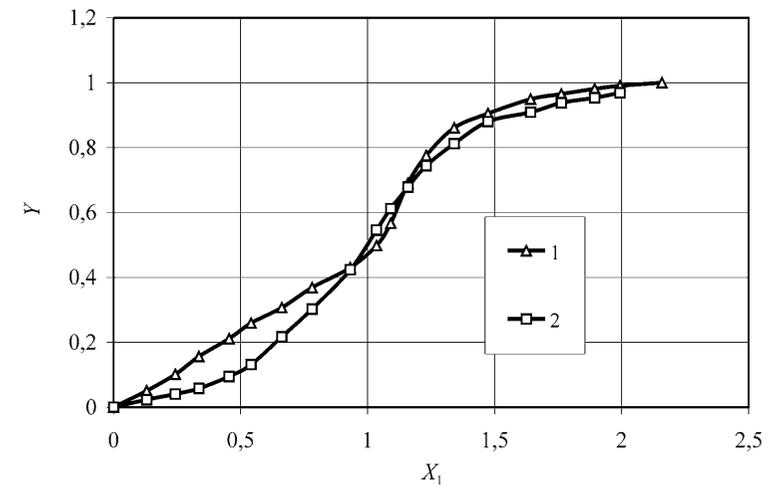


Рис. 1.29. Зависимости $\Delta P - Q$ при фильтрации полимерной композиции в микро-неоднородной (1) и слоисто-неоднородной (2) пористых средах, перестроенные в асимптотических координатах

Механизм псевдопластического режима фильтрации, характерного для течения рассмотренных систем в однородной пористой среде, достаточно исследован [6, 30], поэтому остановимся на объяснении S -образных кривых фильтрации.

Как известно, надмолекулярные структуры полимеров и эмульсий [6, 31] имеют близкие размеры (10^{-7} – 10^{-6} м) и являются упругими. Кроме того, известно, что при фильтрации в слоисто-неоднородном пласте происходит переток из высокопроницаемого пласта в низкопроницаемый, причем чем выше перепад давления в высокопроницаемом слое, тем больше переток [22].

Поэтому результаты для фильтрации исследуемых неньютоновских жидкостей в слоисто-неоднородной пористой среде могут быть объяснены следующим кинетическим механизмом. При относительно низких перепадах давления и скоростях фильтрации происходит ньютоновское течение с максимальной ньютоновской вязкостью, в основном по высокопроницаемому слою (см. 1.1 пункт «б»), упругие эффекты практически не проявляются (время релаксации меньше времени переходного процесса [6, 32, 33]). После преодоления определенного значения перепада давления и скорости фильтрации вместе с увеличением массообмена между слоями развивается неньютоновское течение. При этом при перетоке жидкости из высокопроницаемого слоя в низкопроницаемый происходит увеличение фильтрационных сопротивлений как за счет самого перетока [22], так и за счет про-

явления упругих свойств надмолекулярных структур неньютоновских жидкостей (соизмеримых со средним радиусом пор) при переходе из пор большего радиуса в поры меньшего радиуса. Далее, ввиду ослабления межмолекулярных связей в надмолекулярных структурах и ориентационных эффектов [34, 35], фильтрационные сопротивления уменьшаются.

На основании предложенного механизма можно объяснить увеличение до определенного предела ($K_0 = 25$) безразмерного расхода Q_0 при постоянном ΔP_0 с ростом K_0 (см. 1.1 пункт «з» и рис. 1.20, 1.21). Действительно, с увеличением проницаемости высокопроницаемого слоя и соотношения проницаемостей массообмен между слоями происходит при более низких значениях перепада внешнего давления, что выражается в увеличении отношения $Q_0/\Delta P_0$ или Q_0 при постоянном ΔP_0 . Дальнейшее снижение Q_0 с ростом K_0 объясняется тем, что необходимый для перетока поперечный перепад давления достигается при более высоких значениях перепада внешнего давления, а в пределе жидкость движется только по высокопроницаемому слою, не охватывая низкопроницаемый. При этом, как отмечено выше, характер кривых $\Delta P - Q$ качественно не изменяется.

Как видно из рис. 1.29 (обработка данных, показанных на рис. 1.8 и рис. 1.10), зависимости $\Delta P - Q$, снятые для полимерных композиций в слоисто-неоднородной (с контактирующими слоями) и микронеоднородной пористых средах, перестроенные в асимптотических координатах, учитывающих различие средних проницаемостей (на рисунке 1.29 координата $Z_1 = Q/Q(k)$, где k – средняя проницаемость пористой среды, а $Q(k)$ – значение расхода при $\Delta P_{\infty}(k)/2$), качественно близки, однако не описываются одной кривой. Поэтому механизм, обуславливающий S -образный закон фильтрации в микронеоднородной пористой среде несколько иной.

Имеется ряд моделей микронеоднородной среды [36, 37], однако основной ее характеристикой является наличие сужений и расширений пор [38], обусловленной наличием зерен с сильно отличающимися размерами (в рассматриваемом случае $0,005-0,314 \cdot 10^{-3}$ м). Поэтому увеличение фильтрационных сопротивлений после преодоления определенного перепада давления связано с преобладанием упругих сил над силами вязкого сопротивления при переходе надмолекулярных структур жидкости (соизмеримых с радиусом пор) из крупных пор в мелкие. Действительно, согласно данным работы [12], при течении неньютоновской жидкости в капилляре с постоянным диаметром зависимость $\Delta P - Q$ линейна, а при течении в капилляре с периодически изменяющимся диаметром режим течения в исследуемом интервале перепадов давления дилатантный. Дальнейшее снижение фильтрационных сопротивлений при фильтрации в микронеоднородной пористой среде также можно объяснить ориентационными эффектами.

Расчеты критического значения безразмерного параметра Kch [12, 34] (время релаксации определялось согласно [39–41]), при превышении кото-

рого упругие силы преобладают над силами вязкого сопротивления, показали, что для слоисто-неоднородной пористой среды $Kch = 0,33$, а для микронеоднородной $Kch = 0,55$. Это хорошо согласуется с данными работы [6], где критическое значение параметра составило 0,25.

В подтверждение полученных результатов был проведен эксперимент по фильтрации 5 % раствора асфальтенов в керосине с надмолекулярными структурами размером $10^{-9}-10^{-8}$ м [42, 43] при среднем размере пор $10^{-6}-10^{-5}$ м. Несмотря на то что результаты вискозиметрии и фильтрации в однородной пористой среде качественно аналогичны полимерным композициям, в неоднородной пористой среде для них имел место псевдопластический режим фильтрации.

Далее для обоснования влияния массообмена между слоями слоисто-неоднородного пласта был проведен эксперимент по фильтрации полимерной композиции с описанными выше физико-химическими и реологическими свойствами (см. 1.1 пункт «б») в слоисто-неоднородном пласте с неконтактирующими слоями. Эксперимент проводился на модернизированной согласно [44] установке, показанной на рис. 1.6. Фильтрация осуществлялась в двух колонках с однородной пористой средой, составленной кварцевым песком, при этом проницаемость низкопроницаемого пласта составляла $0,51 \text{ мкм}^2$, а высокопроницаемого $4,1 \text{ мкм}^2$ (соотношение проницаемостей слоев $K_0 \approx 8$). Экспериментальная зависимость $\Delta P - Q$ приведена на рис. 1.30, из которого видно, что в обоих слоях имеет место псевдопластический характер течения.

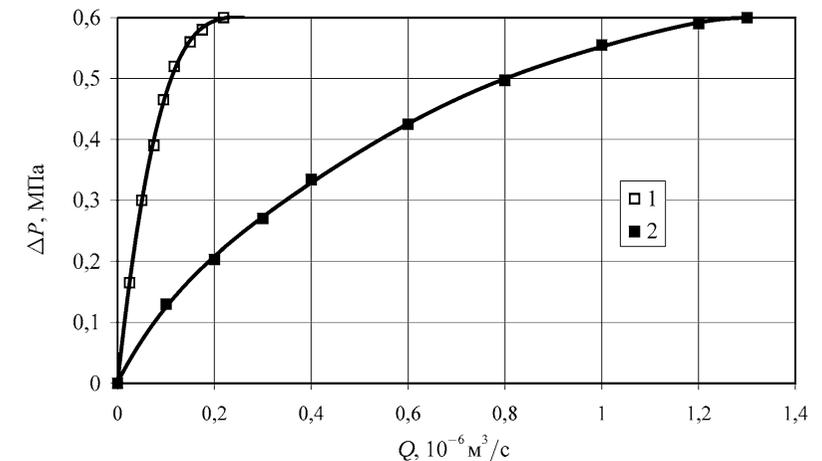


Рис. 1.30 Зависимости $\Delta P - Q$ при фильтрации полимерной композиции в слоисто-неоднородной пористой среде с неконтактирующими слоями: 1 – низкопроницаемый слой; 2 – высокопроницаемый слой

Таким образом, на основании экспериментальных исследований можно заключить, что при фильтрации гетерогенных систем в слоисто-неоднородном с контактирующими слоями и микронеоднородном пласте в результате массообмена и эффектов вязкоупругости имеет место *S*-образный закон фильтрации.

1.4. Моделирование стационарной фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородной пористой среде

Как известно, для неньютоновских жидкостей обычно принимается степенной закон фильтрации, однако в рамках степенного закона описать полученные *S*-образные кривые не удастся [20, 45, 46]. Строго говоря, эта задача должна решаться с учетом массообмена между слоями различной проницаемости, однако получить простые аналитические решения для практических расчетов даже при линейном законе фильтрации в каждом слое слоисто-неоднородного пласта достаточно сложно [22]. Вместе с тем в теории фильтрации нелинейные эффекты (связанные с неоднородностью среды или жидкости) учитываются квазигомогенизацией [47–49], например, введением эффективной проницаемости.

В данном параграфе показана возможность описания стационарной фильтрации неньютоновской жидкости в неоднородных пористых средах введением эффективных проницаемости или вязкости.

а) Введение эффективной проницаемости

Для описания экспериментальных результатов рассмотрим фильтрацию в цилиндрической трубке длиной l , заполненной пористой средой, обусловленной перепадом давления $\Delta P = P_1 - P_0$. Тогда, согласно закону Дарси:

$$v = -\frac{k}{\eta} \frac{dP}{dx}, \quad (1.1)$$

где k – проницаемость пористой среды, η – вязкость жидкости. Как было показано выше, в экспериментах по фильтрации неньютоновских жидкостей в однородной и неоднородной пористых средах эффективная проницаемость при постоянной вязкости ($\eta = (\eta_{\max} + \eta_{\min})/2$) в сильной степени зависит от перепада давления. Как видно из рис. 1.31 и 1.32, зависимость эффективной проницаемости от перепада давления (рассматривается участок неньютоновского течения) в однородной пористой среде описывается прямой, а в слоисто-неоднородной и микронеоднородной квадратным трехчленом (очевидно, более сложные зависимости могут быть описаны полиномами более высоких степеней).

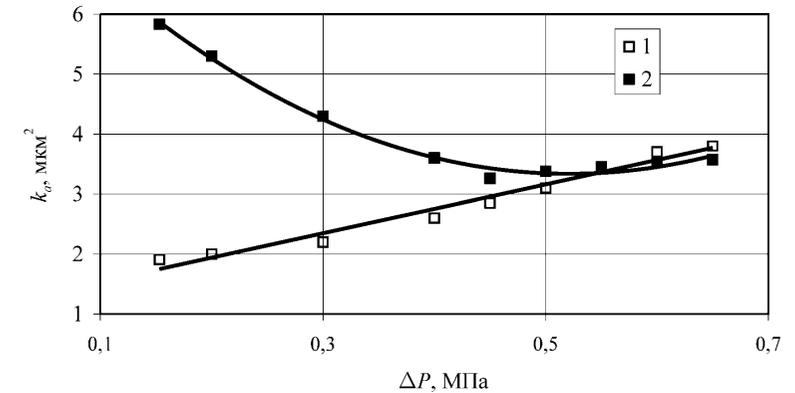


Рис. 1.31. Описание экспериментальных зависимостей эффективной проницаемости от перепада давления в однородной (1) и слоисто-неоднородной (2) пористых средах соответственно прямой ($k_a = 0,4061\Delta P + 1,1296$) и квадратным трехчленом ($k_a = 0,1869\Delta P^2 - 1,948\Delta P + 8,4096$)

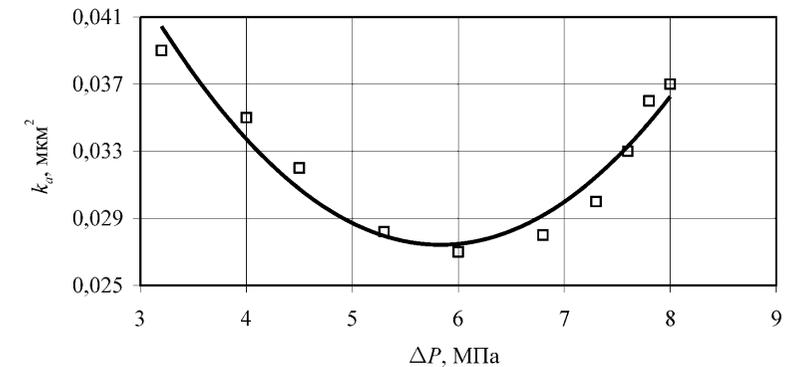


Рис. 1.32. Описание экспериментальной зависимости эффективной проницаемости от перепада давления в микронеоднородной пористой среде квадратным трехчленом ($k_a = 2 \cdot 10^{-5}\Delta P^2 - 0,0022\Delta P + 0,0914$)

Тогда, принимая, например, давление на выходе образца (как и в экспериментах) постоянным, можем представить эффективную проницаемость как функцию давления в виде

$$k_a = a_1(P - P_0)^2 + a_2(P - P_0) + a_3, \quad (1.2)$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные коэффициенты.

Уравнение сохранения массы для стационарного течения при допущении постоянства пористости представим в виде

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0. \quad (1.3)$$

Сжимаемость жидкости будем считать малой, в линейном (акустическом) приближении. Таким образом, принимаем

$$P - P_0 = c^2 (\rho - \rho_0), \quad (1.4)$$

где c – скорость звука в жидкости; ρ – плотность жидкости.

В соответствии с (1.3) объемный расход Q через площадь поперечного сечения F согласно системе уравнений (1.1)–(1.4) определится из соотношения

$$\frac{Ql}{F} = \int_0^{\Delta P} \left(1 - \frac{P_0}{c^2 r_0} + \frac{P}{c^2 r_0}\right) \frac{k_a(P - P_0)}{h} d(P - P_0). \quad (1.5)$$

Принимая следующие безразмерные параметры:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{F} \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}}; \quad \bar{k}(\bar{P}) = k_a \sqrt{\frac{\rho_0 P_0}{l \eta}} = k_2 \bar{P}^2 + k_1 \bar{P} + k_0; \quad \bar{P} = \frac{P - P_0}{P_0}; \quad \bar{m} = \frac{\rho_0 c^2}{P_0}, \quad (1.6)$$

где k_0, k_1, k_2 – постоянные коэффициенты, и, подставляя (1.6) в (1.5), получим

$$\bar{Q} = \int_0^{\Delta \bar{P}} \left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{m}}\right) \bar{k}(\bar{P}) d\bar{P}, \quad (1.7)$$

где $\Delta \bar{P} = \frac{\Delta P}{P_0}$. Учитывая, что $\bar{m} \approx 10^4$, приведем (1.7) к виду:

$$\bar{Q} = \frac{k_2}{3} \Delta \bar{P}^3 + \frac{k_1}{2} \Delta \bar{P}^2 + k_0 \Delta \bar{P}. \quad (1.8)$$

Кривая, описываемая (1.8), имеет точку перегиба с координатами \bar{Q}_0 и $\Delta \bar{P}_0$. При этом $\Delta \bar{P}_0 = -k_1/2k_2$; $\bar{Q}_0 = \frac{k_1}{2k_2} \left(\frac{k_1^2}{6k_2} - k_0\right)$, т. е. при $k_2 > 0, k_1 < 0$

и $k_0 > \frac{k_1^2}{6k_2}$ зависимость $\Delta \bar{P} - \bar{Q}$ имеет S-образный характер с положительными координатами точки перегиба. Обозначая $n_0 = \frac{k_0}{k_2}$, из (1.8) получим:

$$\frac{\bar{Q}}{k_2} = \frac{\Delta \bar{P}^3}{3} - \Delta \bar{P}_0 \Delta \bar{P}^2 + n_0 \Delta \bar{P}. \quad (1.9)$$

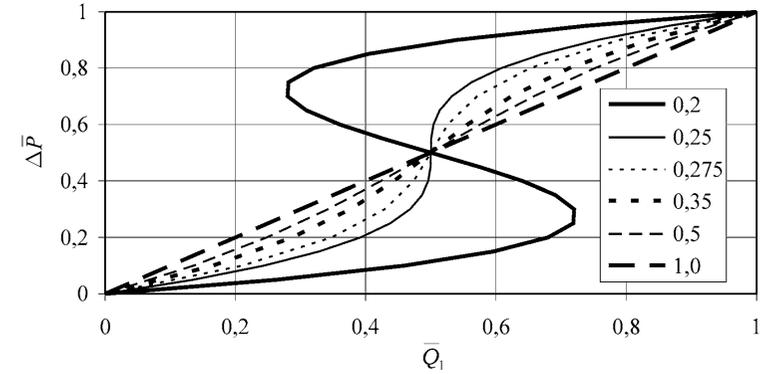


Рис. 1.33. Расчетные зависимости $\Delta P - Q$ в безразмерных координатах при различных n_0

На рис. 1.33 при $\Delta \bar{P}_0 = 0,5$ и различных n_0 приведены зависимости $\Delta \bar{P} - \bar{Q}_1$, где $\bar{Q}_1 = \left(\frac{\bar{Q}}{k_2}\right) : \left(\frac{\bar{Q}}{k_2}\right)_{\max}$, рассчитанные по (1.9), которые при $n_0 = 0,275 - 0,5$ хорошо описывают экспериментальные данные по фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородных пористых средах. Следует отметить, что при $k_2 < 0$ и $k_1 > 0$ S-образный характер будут иметь уже зависимости $\bar{Q} - \Delta \bar{P}$.

Принимая в (1.6) $k_2 = 0$ (т. е. не учитывая квадратичного члена) из (1.7) получим

$$\frac{\bar{Q}}{k_1} = \frac{\Delta \bar{P}^2}{2} + n_1 \Delta \bar{P}, \quad (1.10)$$

где $n_1 = \frac{k_0}{k_1}$.

На рис. 1.34 при различных n_1 приведены зависимости $\Delta \bar{P} - \bar{Q}_2$, где $\bar{Q}_2 = \left(\frac{\bar{Q}}{k_1}\right) : \left(\frac{\bar{Q}}{k_1}\right)_{\max}$, рассчитанные по (1.10), которые описывают экспериментальные данные по фильтрации неньютоновских жидкостей в однородной пористой среде при $n_1 = -0,04 - 0,5$ ($k_1 > 0$). Следует отметить, что при $k_1 < 0$ зависимость $\Delta \bar{P} - \bar{Q}$ имеет характер роста без насыщения.

б) Введение эффективной вязкости

Полученные выше решения имеют тот недостаток, что они описывают экспериментальные данные в ограниченном интервале значений оп-

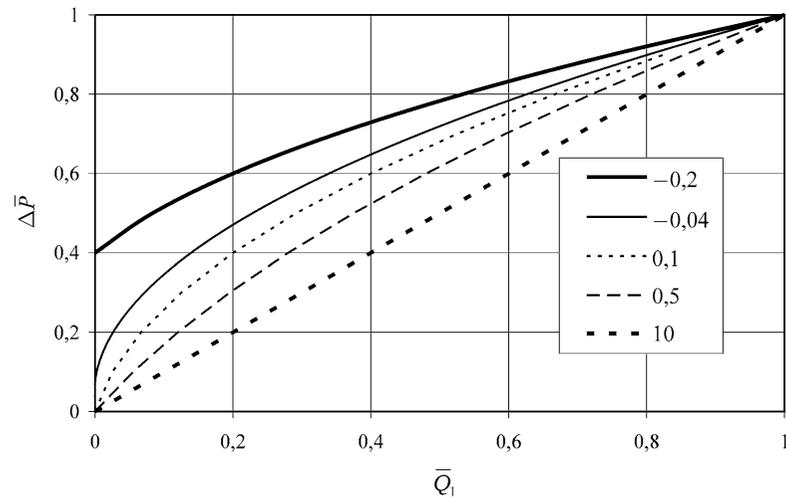


Рис. 1.34. Расчетные зависимости $\Delta P - Q$, перестроенные в безразмерных координатах при различных n_1

ределяющих параметров, что свойственно уравнениям в полиномиальной форме (см. рис. 1.33 и 1.34). В ряде относительно новых работ [50, 51] для описания законов фильтрации неньютоновских жидкостей вводится зависимость вязкости от скорости сдвига и соответственно от скорости фильтрации при постоянной проницаемости пористой среды. Очевидно, что полученные решения приводят к ранее рассмотренным случаям [6, 34].

Для преодоления этих недостатков в уравнении (1.1) примем проницаемость k постоянной, а вязкость – зависящей от перепада давления. Как видно из рис. 1.35 и 1.36, экспериментальная зависимость эффективной вязкости от перепада давления (рассматривается участок неньютоновского течения) в однородной пористой среде описывается прямой, а в слоисто-неоднородной и микронеоднородной квадратным трехчленом (очевидно, более сложные зависимости могут быть описаны полиномами более высоких степеней).

Тогда, принимая, например, давление на выходе образца (как и в экспериментах) постоянным, можем представить эффективную вязкость как функцию давления [159] в виде

$$\eta_a = b_1(P - P_0)^2 + b_2(P - P_0) + b_3, \quad (1.11)$$

где b_1, b_2, b_3 – постоянные коэффициенты.

Принимая уравнение сохранения массы для стационарного течения в виде (1.3) и считая жидкость малосжимаемой в линейном (акустическом)

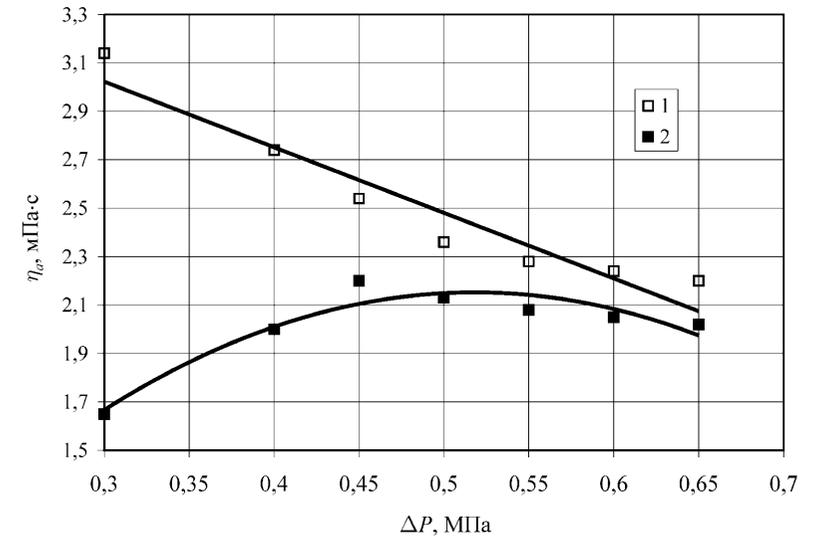


Рис. 1.35. Описание экспериментальных зависимостей эффективной вязкости от перепада давления в однородной (1) и слоисто-неоднородной (2) пористых средах соответственно прямой ($\eta_a = -0,2708\Delta P + 3,8348$) и квадратным трехчленом ($\eta_a = -0,1021\Delta P^2 + 1,0573\Delta P - 0,5867$)

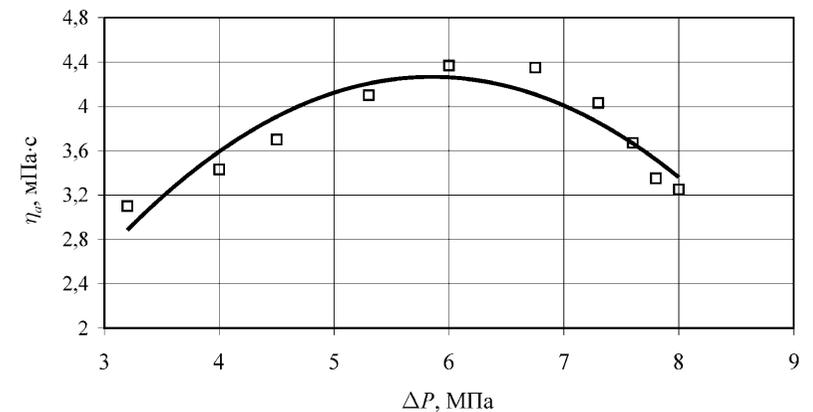


Рис. 1.36. Описание экспериментальной зависимости эффективной вязкости от перепада давления в микронеоднородной пористой среде квадратным трехчленом ($\eta_a = -0,002\Delta P^2 + 0,2299\Delta P - 2,4619$)

приближении, используем уравнение (1.4). Решая совместно уравнения (1.1), (1.3) и (1.4) при условии (1.11), для объемного расхода жидкости получим

$$\frac{Ql}{F} = \int_0^{\Delta P} \left(1 - \frac{P_0}{c^2 \rho_0} + \frac{P}{c^2 \rho_0}\right) \frac{k}{\eta_a(P - P_0)} d(P - P_0), \quad (1.12)$$

где k – абсолютная проницаемость пористой среды.

Принимая следующие безразмерные параметры:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{F} \sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}}; \quad \bar{\eta}(\bar{P}) = \frac{\eta_a l}{k \sqrt{\rho_0 P_0}} = a \bar{P}^2 + b \bar{P} + c; \quad \bar{P} = \frac{P - P_0}{P_0}; \quad \bar{m} = \frac{\rho_0 c^2}{P_0}, \quad (1.13)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты, из (1.12) получим

$$\bar{Q} = \int_0^{\Delta \bar{P}} \left(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{m}}\right) \frac{d\bar{P}}{\bar{\eta}(\bar{P})}. \quad (1.14)$$

После несложных преобразований и учитывая, что $\bar{m} \approx 10^4$, при $b^2 - 4ac > 0$ из (1.14) получим

$$\Delta \bar{P} = \frac{2c \left[\exp\left(\bar{Q} \sqrt{b^2 - 4ac}\right) - 1 \right]}{\sqrt{b^2 - 4ac} \left[1 + \exp\left(\bar{Q} \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \right] + b \left[1 - \exp\left(\bar{Q} \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \right]}. \quad (1.15)$$

Кривая, описываемая (1.15), имеет точку перегиба с координатами \bar{Q}_0 и $\Delta \bar{P}_0$. При этом $\bar{Q}_0 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left[\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{b^2 - 4ac} - b} \right]$; $\Delta \bar{P}_0 = -b/2a$, т.е. при $c > 0$, $b > 0$ и $a < 0$ зависимость $\Delta \bar{P} - \bar{Q}$ имеет S-образный характер с положительными координатами точки перегиба.

Принимая в (1.13) $a = 0$ (т. е. без учета квадратичного члена), из (1.14) получим

$$\Delta \bar{P} = \frac{c \left[\exp(b \bar{Q}) - 1 \right]}{b}. \quad (1.16)$$

Анализ уравнения (1.16) показывает, что при $b < 0$, $c > 0$ зависимость $\Delta \bar{P} - \bar{Q}$ имеет характер роста с насыщением.

На рис. 1.37 при $\Delta \bar{P}_0 = 0,5$ и различных c ($a = -6,6$, $b = 6,6$) приведены зависимости $\Delta \bar{P}_1 - \bar{Q}$ ($\Delta \bar{P}_1 = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta \bar{P}_{\max}}$), рассчитанные по (1.15), которые при $c = 0,1$ хорошо описывают экспериментальные данные по фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородных пористых средах.

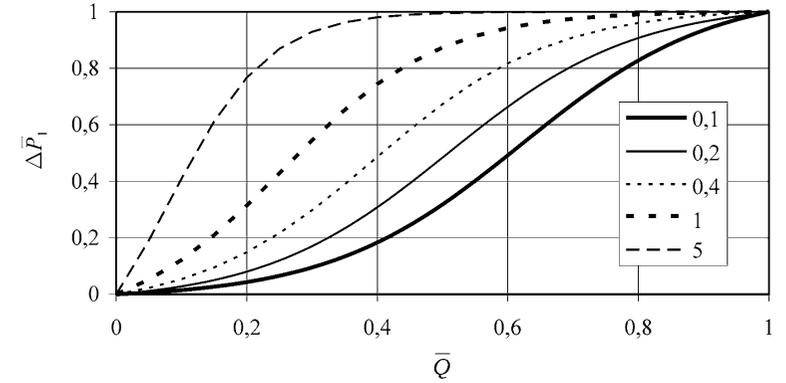


Рис. 1.37 Расчетные зависимости $\Delta P - Q$ в безразмерных координатах при различных значениях c ($a = -6,6$; $b = 6,6$)

На рис. 1.38 при различных b ($c = 2$) приведены зависимости $\Delta \bar{P}_1 - \bar{Q}$, рассчитанные по (1.16), которые хорошо описывают экспериментальные данные по фильтрации неньютоновских жидкостей в однородных пористых средах.

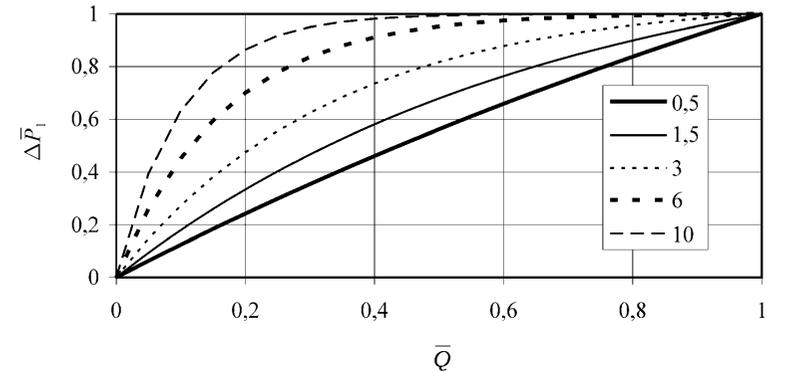


Рис. 1.38 Расчетные зависимости $\Delta P - Q$, перестроенные в безразмерных координатах при различных b ($c = 2$)

Экспериментальные исследования по фильтрации неньютоновских жидкостей в неоднородной пористой среде (см. рис. 1.27) с погрешностью менее 5% описываются моделью (1.15) при следующих значениях постоянных коэффициентов: $a = -6,6$, $b = 6,6$ и $c = 0,2$ (т. е. при $\Delta \bar{P}_0 = 0,5$). Экс-

перименты в однородной пористой среде (см. рис. 1.26) с погрешностью менее 5% описываются моделью (1.16) при следующих значениях постоянных коэффициентов: $b = -1,5$ и $c = 2$. Очевидно, что ввод переменной вязкости имеет физический смысл, а не является лишь вводом дополнительных эмпирических коэффициентов по аналогии с логистической зависимостью, характеризующей эволюцию биологических систем [52, 53]. При этом линейный член отражает эволюцию популяции без внешних воздействий и внутреннего взаимодействия, а в данном случае процесс фильтрации определяется только нелинейными свойствами жидкости (однородная пористая среда), то квадратичный, парные взаимодействия или кооперативные явления, а в данном случае массообмен между низко- и высокопроницаемыми слоями. Следует отметить, что при $b^2 - 4ac < 0$ (1.14) имеет решение

$$\Delta\bar{P} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{Q}}{2} \sqrt{4ac - b^2} + \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) - \frac{b}{2a} \quad (1.17)$$

или, определяя из (1.17) \bar{Q} :

$$\bar{Q} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2a\Delta\bar{P} + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right). \quad (1.18)$$

Анализ выражения (1.18) показывает, что при $b < 0$ и $a > 0$ зависимость $\bar{Q} - \Delta\bar{P}$ носит S-образный характер, описывая фильтрацию с монотонной эффективной вязкостью, имеющей минимум при определенном перепаде давления. Такой закон фильтрации, согласно [6], наблюдается для некоторых полимерных композиций (псевдопластичный режим фильтрации сменяется дилатантным). Следует отметить, что, если в уравнении (1.16) $b > 0$ и $c > 0$, зависимость $\Delta\bar{P} - \bar{Q}$ имеет характер роста без насыщения. Эта модель хорошо описывает результаты работы [26], в которой для фильтрации ряда полимерных композиций (негидролизованый ПАА и гидролизованый ПАА с добавкой 2% NaCl) получен неограниченный рост фильтрационных сопротивлений.

Таким образом, введение эффективных проницаемости и вязкости позволяет учесть нелинейные эффекты при стационарной фильтрации неньютоновских жидкостей в однородных и неоднородных пористых средах.

в) S-образный закон фильтрации

Как было показано выше, S-образные зависимости $\Delta P - Q$ описываются в рамках модифицированного, вводом эффективных проницаемости или вязкости, линейного закона фильтрации Дарси. Однако описание возможно также и в рамках модификации нелинейного закона фильтрации

Форхгеймера:

$$-\frac{dP}{dx} = av + bv^2 + cv^3.$$

Анализ этого уравнения показывает (при решении его совместно с (1.3)), что при $a = 0$ и $c < 0$ оно имеет S-образное решение для $\Delta P - v$ и $\Delta P - Q$, причем приведенные выше экспериментальные результаты (рис. 1.27) описываются указанной моделью с погрешностью до 5% [20].

В связи с этим закон фильтрации, имеющий S-образное решение для $\Delta P - v$ и $\Delta P - Q$ или S-образный закон фильтрации для одномерного случая, может быть записан в виде:

$$-\frac{dP}{dx} = av^2 + bv^3; \quad a > 0, \quad b < 0.$$

Следует отметить, что добавление квадратичного и кубического слагаемых в закон фильтрации обусловлено не только улучшением аппроксимации зависимости $\Delta P - v$ за счет увеличения числа эмпирических коэффициентов [54], но и физическими особенностями фильтрации. Линейный член отражает определяющее влияние сил вязкости, квадратичный – неравновесных свойств фильтрационного потока, а кубичный – массообмена между низко- и высокопроницаемыми участками (т. е. свойств пористой среды).

1.5. Вытеснение нефти полимерными композициями

В процессе воздействия на пласт и призабойную зону решающее значение имеет полнота вытеснения нефти. При заводнении нефтяного месторождения большее соотношение подвижностей нефти и воды приводит к нарушению устойчивости фронта вытеснения. Исходя из этого методы увеличения нефтеотдачи предполагают, что полнота вытеснения достигается как за счет улучшения физико-химических свойств нефти, так и за счет выравнивания подвижностей нефти и вытесняющей системы в пористой среде [55–61]. Как показали проведенные исследования, в частности и в данной работе, при вытеснении вязкоупругих и вязкоупругими системами в пористой среде, картина оказывается иной. Здесь определяющим фактором является наличие изменения кажущейся вязкости от скорости сдвига, что приводит к совершенно иным закономерностям процесса вытеснения [61–63]. И это необходимо учитывать при проведении различных технологических мероприятий. В имеющихся исследованиях влияние скорости на вытеснение полимерсодержащими композициями, особенно в слоисто-неоднородном пласте (с контактирующими пропластками), не учитывается [14].

С этой целью исследовали процесс вытеснения (условия моделирования соблюдались [64]) ньютоновской нефти (моделью нефти служило трансформаторное масло), в однородной и слоисто-неоднородной (с контактирующими слоями) пористых средах при различных скоростях фильтрации. Эксперименты проводились на установке, схема которой приведена на рис.1.6, по следующему плану:

- колонка высокого давления заполнялась кварцевым песком необходимой фракции, установка обвязывалась согласно рис. 1.6, определялась проницаемость по воздуху, и при постоянном термостатировании производилось вакуумирование всей установки;
- модель пласта насыщалась трансформаторным маслом до полного насыщения с одновременным замером объема пор пласта;
- на входе и выходе колонки создавалось необходимое давление, и трансформаторное масло фильтровалось до установления постоянного расхода, после чего определялась проницаемость пористой среды по жидкости;
- бомба PVT в зависимости от цели опыта заполнялась водой или полимерной композицией с концентрацией ПАА 0,02 % и ПАВ 0,005 %;
- трансформаторное масло вытеснялось рабочей жидкостью при постоянном перепаде давления, причем в процессе вытеснения определялось количество вытесненного трансформаторного масла.

Вытеснение продолжалось до выхода чистой воды (полимерной композиции). Опыты проводились при температуре 303 °К. Результаты оформлялись в виде зависимости коэффициента вытеснения от скорости фильтрации.

В первой серии экспериментов опыты проводились в однородной пористой среде с проницаемостью по воздуху 3 мкм^2 , при различных скоростях фильтрации. Результаты приведены на рис. 1.39, из которого видно, что и для воды, и для полимерной композиции наблюдается снижение безводного коэффициента вытеснения с ростом скорости фильтрации, при этом для полимерной композиции он выше на 10–20 %. Следует отметить, что аналогичные результаты получены и для конечного коэффициента вытеснения.

Во второй серии экспериментов опыты проводились в слоисто-неоднородной пористой среде с проницаемостью по воздуху 3 мкм^2 , при различных скоростях фильтрации полимерной композиции. Результаты приведены на рис. 1.40 (для возможности сравнения на рисунке также приведена индикаторная диаграмма). Как видно из рисунка, зависимость безводного коэффициента вытеснения от скорости фильтрации имеет немотонный характер. При этом максимальный коэффициент вытеснения достигается в области дилатантного течения полимерной композиции (до точки перегиба В S-образной индикаторной диаграммы).

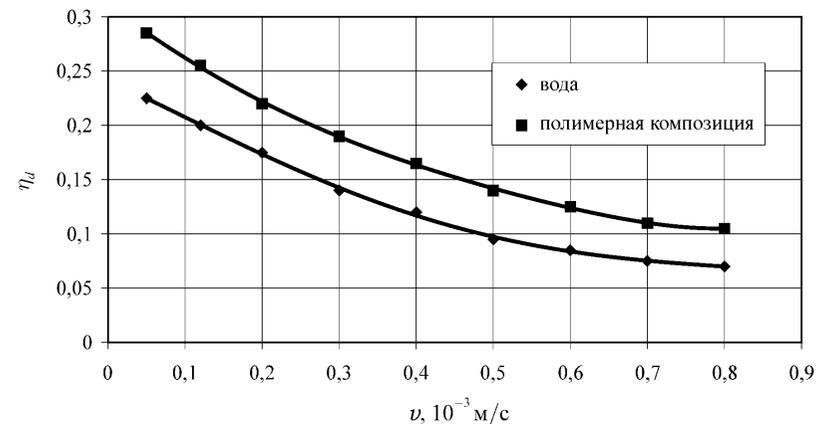


Рис. 1.39. Зависимость безводного коэффициента вытеснения от скорости фильтрации жидкости для однородной пористой среды

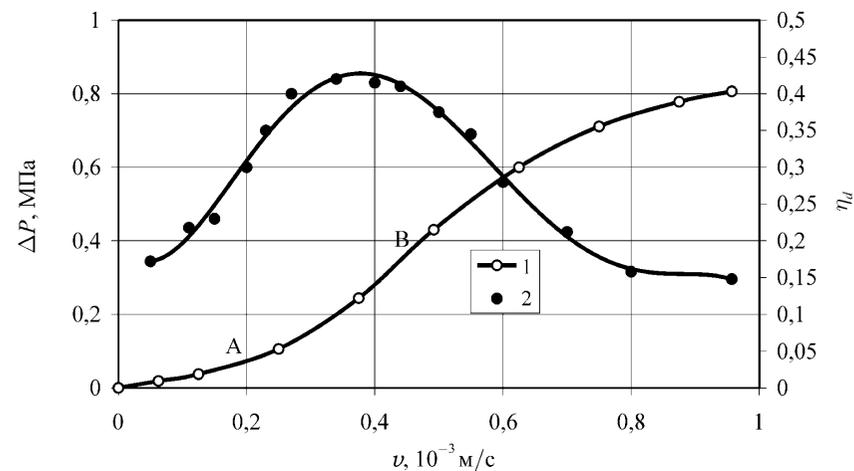


Рис. 1.40. Индикаторная диаграмма (1) и зависимость безводного коэффициента вытеснения (2) в слоисто-неоднородной пористой среде от скорости фильтрации

В области скоростей, соответствующих ньютоновскому (до точки А) и псевдопластическому течению (после точки перегиба) полимерной композиции, коэффициент вытеснения имеет более низкие значения. Аналогичные результаты получены и для конечного коэффициента вытеснения.

Низкие значения безводного коэффициента вытеснения в области скоростей, соответствующих ньютоновскому течению (до точки A), объясняются тем, что в данном случае полимерная композиция фильтруется в основном по высокопроницаемому слою.

Для объяснения полученных результатов рассмотрим упрощенную схему течения полимерной композиции в слоисто-неоднородном пласте [26]. Действительно, пусть фильтрация полимерной композиции происходит в двух параллельных слоях с проницаемостью k_1 и k_2 (при прочих равных условиях), причем $k_1 \gg k_2$ и соответствует степенному закону. Тогда согласно (2.72) при $B = B_0$ получим $Q_1/Q_2 = (k_1/k_2)(k_1/k_2)^{(1-n)/2n}$.

Как видно из полученного выражения для ньютоновской жидкости ($n = 1$), отношение расходов равно отношению проницаемостей; для дилатантной жидкости ($n > 1$) отношение расходов уменьшается, т. е. профиль фильтрации выравнивается, а для псевдопластической жидкости ($n < 1$) различия проницаемостей усиливаются. Следует отметить, что, согласно [61], выравнивание профиля фильтрации при вытеснении дилатантными жидкостями тем выше, чем больше мощность малопроницаемого пропластка.

Аналогичные результаты получены также для вытеснения неньютоновской нефти (моделью которых служил раствор ПИБ) водой.

Таким образом, имеется область скоростей фильтрации, при которых коэффициент нефтеотдачи резко возрастает. Регулированием скорости фильтрации можно добиться подачи рабочей жидкости, обладающей неньютоновскими свойствами, в заданную область пласта (высоко- или низкопроницаемую), обеспечивая тем самым селективность воздействия.

Литература к главе 1

1. Альтшуллер Г. С. Найти идею. – Новосибирск: Наука, 1991. – 225 с.
2. Гросберг А. Ю. Неупорядоченные полимеры // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 2. – С. 129–166.
3. Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Статистическая физика макромолекул. – М.: Наука, 1989. – 520 с.
4. Хохлов А. Р., Дормидонтова Е. Е. Самоорганизация в ион-содержащих полимерных системах // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 2. – С. 113–128.
5. Lake L.W. Enhanced oil recovery. – NJ: Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989. – 551 p.
6. Применение полимеров в добыче нефти / Григоращенко В. И., Зайцев Ю. В., Мирзаджанзаде А. Х. и др. – М.: Недра, 1978. – 213 с.

7. Применение растворов полиакриламида для ограничения притока вод в нефтяные скважины / Нефтепромысловое дело. Обзор. информ. – М.: ВНИИОЭНГ, 1976. – 100 с.
8. Сургучев М. Л. Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи. – М.: Недра, 1985. – 308 с.
9. Хасанов М. М., Булгакова Г. Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. – 288 с.
10. Мирзаджанзаде А. Х., Хасанов М. М., Бахтизин Р. Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2004. – 368 с.
11. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Каневская Р. Д., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2005. – 496 с.
12. Аметов И. М., Шерстнев Н. М. Применение композитных систем в технологических операциях эксплуатации скважин. – М.: Недра, 1989. – 213 с.
13. Панахов Г. М. Разработка и внедрение новых композитных систем в нефтегазодобыче. Дисс. ... доктора техн. наук. – Баку, 1995. – 270 с.
14. Шерстнев Н. М., Бушин Н. Г., Уголева А. В. и др. Экспериментальная оценка эффективности полимерсодержащих композиций ПАВ при добыче нефти // Сборник научных трудов ВНИИ. – 1993, вып. 117. – С. 224–236.
15. Состав для добычи нефти / Городнов В. П., Волков В. А., Калинин Е. С. и др. // А.с. СССР № 1544958. – М., 1990.
16. Состав для добычи нефти / Городнов В. П., Рыскин А. Ю., Маляренко А. В. и др. // А.с. СССР № 1680958. – М., 1991.
17. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. – М.: Химия, 1977. – 440 с.
18. Милованов А. Д., Харитонов Н. А., Прусов А. Н., Крестов Г. А. Реологические свойства водных растворов смесей эфиров целлюлозы с акриловым сополимером // Изв. ВУЗов. Химия и химическая технология. – 1996. – Т. 39, вып. 4–5. – С. 121.
19. Аскарлов А. И. Влияние добавок водорастворимых химических реагентов на устойчивость упругих свойств полимерных растворов к механической деструкции // Нефтяное хозяйство. – 1990, №7. – С. 42–45.
20. Сулейманов Б. А., Аббасов Э. М., Алиев Н. С. Экспериментальные исследования фильтрации релаксирующих жидкостей в неоднородных пористых средах // Инженерно-физический журнал. – 1996. – Т. 69, № 1. – С. 9–15.

21. Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Механика физических процессов. – М.: Наука, 1976. – 370 с.
22. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. – Москва: Гостоптехиздат, 1962. – 275 с.
23. Ентов В. М., Турецкая Ф. Д. Гидродинамическое моделирование разработки неоднородных нефтяных пластов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1995, № 6. – С. 87–94.
24. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. – М.: Наука, 1975. – 200 с.
25. Мирзаджанзаде А. Х., Ентов В. М. Гидродинамика в бурении. – М.: Недра, 1985. – 196 с.
26. Сейвинс Дж. Неньютоновское течение в пористой среде // Механика. – 1974, № 2. – С. 54–115.
27. Плетнев М. Ю. Косметико-гигиенические моющие средства. – М.: Химия, 1990. – 269 с.
28. Позднышев Г. Н. Стабилизация и разрушение нефтяных эмульсий. – М.: Недра, 1982. – 223 с.
29. Дильман В. В., Полянин А. Д. Методы модельных уравнений и аналогий. – М.: Химия, 1988. – 304 с.
30. Байков Р. А. Исследование влияния неоднородных свойств среды на гидродинамические характеристики процессов движения в трубах и пористых средах // Автореферат дис. ... канд. техн. наук. – Баку, 1986. – 14 с.
31. Левченко Д. Н., Бергштейн Н. В., Худяков А. Д., Николаева Н. М. Эмульсии нефти с водой и методы их разрушения. – М.: Химия, 1967. – 200 с.
32. Мирзаджанзаде А. Х., Максудов Ф. Г., Нигматулин Р. И. и др. Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
33. Мирзаджанзаде А. Х., Султанов Ч. А. Диакоптика процессов нефтеотдачи пластов. – Баку: Азербайджан, 1995. – 366 с.
34. Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Ковалев А. Г. Физика нефтяного и газового пласта. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2005. – 280 с.
35. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964. – 351 с.
36. Дыхне А. М., Зосимов В. В., Рыбак С. А. Аномальный избыточный шум в неоднородных упругих телах // ДАН России. – 1995. – Т. 345, № 4. – С. 467–471.

37. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
38. Чураев Н. В. Физикохимия процессов массопереноса в пористых телах. – М.: Химия, 1990. – 272 с.
39. Виноградов Г. В., Малкин А. Я., Бережная Г. В. и др. Нормальные напряжения при течении аномально вязких полимерных систем. 2. Эксперимент и сопоставление с расчетом // Механика полимеров. – 1971, № 4. – С. 714–721.
40. Леонов А. И., Малкин А. Я. Об эффекте нормальных напряжений в установившихся одномерных течениях расплавов полимеров // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968, № 3. – С. 184–189.
41. Малкин А. Я. Нормальные напряжения при течении аномально вязких полимерных систем. Ч. 1. Расчет нормальных напряжений // Механика полимеров. – 1971, № 3. – С. 506–514.
42. Сюняев З. И., Сюняев Р. З., Сафиева Р. З. Нефтяные дисперсные системы. – М.: Химия, 1990 с.
43. Химия нефти / Дияров Н. Н., Батуева И. Ю., Садыков А. Н. и др. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
44. Меликов Г. Х., Азизов М. Г. Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах // Изв. ВУЗов СССР. Нефть и Газ. – 1988, № 10. – С. 35–38.
45. Сулейманов Б. А. О фильтрации дисперсных систем в неоднородной пористой среде // Коллоидный журнал. – 1995. – Т. 57, № 5. – С. 743–746.
46. Сулейманов Б. А., Нагиев Ф. Б. Особенности фильтрации неньютоновских систем в неоднородных пористых средах // Нефтяное хозяйство. – 1995, № 7. – С. 47–49.
47. Panfilov M. Homogenized model with capillary nonequilibrium for two – phase flow through highly heterogeneous porous media// C. R. Acad. Sci. Paris. – 1996. – V. 322 (2). – P. 195–202.
48. Quintard M., Whitaker S. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging// Transport in porous media. – 1988, № 3. – P. 357–413.
49. Saez A., Otero C. J., Rusinek I. The effective homogeneous behavior of heterogeneous porous media // Transport in porous media. – 1989, № 4. – P. 212–238.
50. Chauveteau G. Rodlike Polymer Solution Flow Through Fines Pores: Influence of Pore Size on Rheological Behavior // Journal of the Rheology. – 1982. – V. 26(2). – P. 111–142.

51. Enevoldsen J., Rasmusen H. K. and Seasen A. Pressure Drop Through Gravel Packs // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. – 1995. – V.3. – P. 45–47.
52. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983. – 397 с.
53. Николис Дж. Динамика иерархических систем: эволюционное представление. – М.: Мир, 1989. – 488 с.
54. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
55. Мархасин И. Л. Физико-химическая механика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1977. – 214 с.
56. Мелик-Асланов Л. С. Нефтеотдача при вытеснении нефти из пласта водой. – Баку: Азернешр, 1979. – 108 с.
57. Сургучев М. Л., Желтов Ю. В., Симкин Э. М. Физико-химические микропроцессы в нефтегазоносных пластах. – М.: Недра, 1984. – 215 с.
58. Сучков Б. М., Ким М. Б., Васильев А. А. Повышение эффективности охвата пласта заводнением // Нефтяное хозяйство. – 1988, № 3. – С. 37–40.
59. Шейнин Б. Е. Регулирование молекулярно-поверхностных свойств пластовых систем с целью повышения нефтеотдачи // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1986, № 2. – С. 14–18.
60. Эрлогер Р. С. Оптимальная скорость движения контура воды при методе заводнения / В кн.: Методы интенсификации нефтегазодобычи. М. –Л.: ГосНТИ нефтяной и горно-топливной литературы, 1948. – С. 159–167.
61. Вахитов Г. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Рыжик В. М. и др. Особенности вытеснения водой нефтей с вязкоупругими свойствами // Нефтяное хозяйство. – 1977, № 4. – С. 38–41.
62. Добыча тяжелых и высоковязких нефтей / Аметов И. М., Байдилов Ю. Н., Рузин Л. М., Спиридонов Ю. А. – М.: Недра, 1985. – 205 с.
63. Махмуд Эль-Батануни. Влияние скорости вытеснения на коэффициент нефтеотдачи высоковязкой нефти в неоднородной среде // Изв. ВУЗов СССР. Нефть и Газ. – 1982, № 8. – С. 39–41.
64. Эфрос Д. А., Оноприенко В. П. Моделирование линейного вытеснения нефти водой // Труды ВНИИ. – 1958, вып. 12. – С. 331–360.

Глава 2

Исследование течения газированных жидкостей в докритической области

Важнейшим классом гетерогенных систем являются газированные жидкости. Газированные жидкости при давлении выше давления насыщения, как правило, исследуются как гомогенные, так как классическая теория фазовых переходов предполагает закритическое образование зародышей новой фазы. Однако исследования, проведенные А. Х. Мирзаджанзаде и его школой [1–3], показали, что при давлении выше давления насыщения газированные системы, составленные на основе ньютоновских жидкостей при стационарной фильтрации, качественно меняют реологию (в частности расход жидкости возрастает в 2–3 раза), а при нестационарных исследованиях проявляют неравновесные свойства. Накопленный экспериментальный материал объясняется интенсивным докритическим зародышеобразованием. Впервые подобное явление для фазового перехода твердое тело – жидкость обнаружено Уббелоде [4, 5] сравнительно давно и названо предплавлением.

Физические причины и соответствующий механизм докритического образования зародышей новой фазы исследованы в ряде известных работ. Так, в работе [5] Я. И. Френкелем была выдвинута теория гетерофазных флуктуаций, на основе которой им объяснены полученные к тому времени экспериментальные факты. В работе [6] Я. Б. Зельдович показал, что гетерофазные флуктуации велики там, где поверхностное натяжение между фазами стремится к нулю, а «предпереходные явления» обязаны поверхностным эффектам. Это предположение находит подтверждение в ряде более поздних работ [7, 8], согласно которым стабилизация докритических зародышей новой фазы происходит из-за выделения на их поверхности ПАВ, следы которых всегда присутствуют в реальных системах, не подвергнутых специальной обработке [8]. Согласно [9] наличие в жидкостях ПАВ не снимает вопрос о стабильности докритических зародышей, т. к. примесь ПАВ может лишь уменьшить скорость их растворения, но не предотвратить полного исчезновения. Вместе с тем в работах [9, 10] показано, что стабилизация может происходить за счет электрических зарядов на поверхности зародышей. При этом важно учесть совместное действие поверхностного натяжения и электрического заряда.

С этой целью рассмотрим зародышеобразование в газожидкостной смеси с учетом зависимости поверхностного натяжения от радиуса кри-

визны поверхности разрыва и электрического заряда, равномерно распределенного по поверхности сферического микропузырька идеального газа.

Энергия, необходимая для образования одной молекулы газа из жидкости с учетом равномерно распределенного по поверхности зародыша электрического заряда, может быть найдена [5, 11] из уравнения

$$\Delta u = 4\pi \frac{d(\sigma(r)r^2)}{dN} + \frac{d}{dN} \left[\frac{(ze)^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \right], \quad (2.1)$$

где r – радиус зародыша; N – число молекул газа в зародыше; ze – электрический заряд на поверхности зародыша; e – элементарный заряд; ϵ – диэлектрическая проницаемость; ϵ_0 – электрическая постоянная; $\sigma(r)$ – поверхностное натяжение.

Обозначая объем молекулы газа через v_B , получим

$$N = \frac{4\pi r^3}{3v_B}. \quad (2.2)$$

Поверхностное натяжение зародыша на основе уравнения Толмена [4, 12], без учета квадратичных членов, будет иметь вид $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{1 + \frac{2\delta}{r}}$

или после упрощения:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{2\delta}{r} \right), \quad (2.3)$$

где σ_0 – поверхностное натяжение плоской границы раздела; δ – толщина приповерхностной прослойки зародыша. Формула (2.3) справедлива только при $r \gg \delta$.

При $r \sim \delta$ зависимость $\sigma = f(r)$ будет линейной [4]:

$$\sigma(r) = k_0 r, \quad (2.4)$$

где k_0 – коэффициент пропорциональности.

Тогда в начале зародышеобразования, когда радиус зародыша еще мал, с учетом (2.2) и (2.4) в формуле (2.1) будем иметь

$$\Delta u = 3k_0 v_B - \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \epsilon \epsilon_0 r^4}. \quad (2.5)$$

Согласно закону Больцмана $P = P_c \exp\left(-\frac{\Delta u}{kT}\right)$.

Тогда из (2.5) будем иметь

$$\ln\left(\frac{P}{P_c}\right) = -\frac{3k_0 v_B}{kT} + \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \epsilon \epsilon_0 r^4 kT}, \quad (2.6)$$

где P – давление над зародышем; P_c – равновесное давление над плоской поверхностью (или давление насыщения); k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Второй член в уравнении (2.6) существенно меняет характер зависимости и при $\ln\left(\frac{P}{P_c}\right) = 0$ имеет ненулевое значение.

При $r \gg \delta$ из (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) получим

$$\ln\left(\frac{P}{P_c}\right) = -\frac{2v_B \sigma_0}{kTr} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right) + \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \epsilon \epsilon_0 r^4 kT}. \quad (2.7)$$

Если учесть, что $\frac{\delta}{r} \ll 1$, то из (2.7) получим

$$\ln\left(\frac{P}{P_c}\right) = -\frac{2v_B \sigma_0}{kTr} + \frac{v_B (ze)^2}{16\pi^2 \epsilon \epsilon_0 r^4 kT}. \quad (2.8)$$

Механическое равновесие зародыша с учетом влияния электрического заряда определяется следующим уравнением:

$$P_c = P + \frac{2\sigma(r)}{r} - \frac{(ze)^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right). \quad (2.9)$$

Зависимости $\ln(P/P_c)$ от (r/δ) , рассчитанные по формуле (2.7), представлены на рис. 2.1.

Из рис. 2.1 видно, что при давлении P выше давления насыщения P_c газа в жидкости начинают образовываться микрзародыши (бабстоны, микропузырьки), и основной вклад в это вносит поверхностный электрический заряд.

Пороговый радиус газового пузырька, при котором начинается устойчивое зародышеобразование в случае $r \sim \delta$, может быть найден из выражения (2.6)

$$r^* = \sqrt[4]{\frac{(ze)^2}{48k_0 \pi^2 \epsilon \epsilon_0}}. \quad (2.10)$$

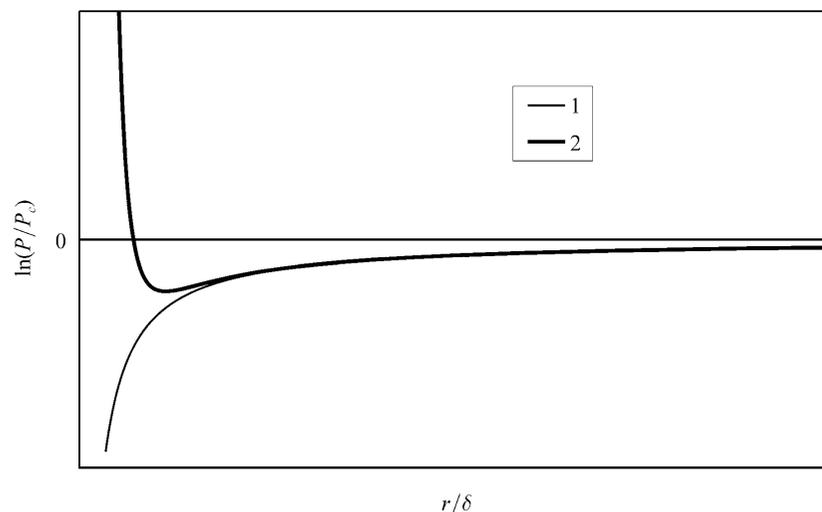


Рис. 2.1. Зависимость $\ln(P/P_c)$ от (r/δ) : 1 – без учета электрического заряда; 2 – с учетом электрического заряда

При $r \gg \delta$ пороговый радиус может быть определен из выражения (2.8)

$$r^* = \sqrt[3]{\frac{(ze)^2}{32\sigma_0\pi^2\epsilon\epsilon_0}}. \quad (2.11)$$

Размеры стабильных докритических зародышей составляют в среднем согласно [8, 9] 1–100 нм.

Из (2.6), (2.8) и (2.9) также видно, что наличие электрического заряда на поверхности зародыша практически соответствует уменьшению поверхностного натяжения σ и, таким образом, образованию зародышей газовой фазы при давлении P выше давления насыщения жидкости газом P_c , что согласуется с экспериментальными исследованиями автора [10].

В данной главе рассматривается влияние физических свойств жидкостей и пористых сред на стационарную и нестационарную изотермическую фильтрацию газированных жидкостей в докритической области, а также предлагаются возможные модели для описания наблюдаемых явлений.

2.1. Стационарные исследования

В работах [1, 2, 13, 14] приводятся экспериментальные результаты по стационарной фильтрации газированной жидкости в докритической области,

согласно которым в определенной области выше давления насыщения расход жидкости возрастает в 2–3 раза. В цитируемых работах этот факт объясняется уменьшением объемной вязкости газированной жидкости вблизи давления насыщения (это отмечено еще в [15]). Однако объемная вязкость согласно указанным работам уменьшается всего на 10–15%, что не может привести к столь большому увеличению расхода жидкости.

Действительно, принимая по данным [1] $\eta = \eta_0 \{1 - d \exp[-\alpha(P - P_c)]\}$ (где $P \geq P_c$, $d \approx 0,1$ и $\alpha = 0,37 \cdot 10^{-6}$ 1/Па – постоянные коэффициенты, η и η_0 – соответственно вязкость газированной жидкости и растворителя) и решая уравнение Дарси с учетом указанного уравнения и уравнения неразрывности несжимаемой жидкости для относительного расхода $Q_1 = Q/Q_0$ (где Q_0 – расход по Дарси), получим

$$Q_1 = 1 + \frac{1}{\alpha \Delta P} \ln \left[\frac{1 - d \exp[-\alpha(P_0 - P_c)]}{1 - d \exp[-\alpha(P_e - P_c)]} \right],$$

где P_0 и P_e соответственно давление на входе и выходе из пористой среды. Подставляя в полученное выражение значения параметров, которые согласно [1] дают максимальное увеличение расхода ($P_e = P_c$, $P_0 - P_c = 8$ МПа), получим, $Q_1 = 1,02$. Таким образом, изменение вязкости на 10–15% (без учета сжимаемости системы) не объясняет столь значительное увеличение расхода жидкости.

2.1.1. Влияние сжимаемости

В процессе экспериментов исследовалась сжимаемость газированной жидкости в бомбе PVT [16–20]. Эксперименты были проведены на установке, схема которой показана на рис. 2.2. Установка включала следующие элементы: 1 – самописец; 2 – магазин сопротивлений; 3 – тензодатчик давления «Сапфир»; 4 – источник постоянного тока; 5 – бачок для продавочной жидкости; 6 – запорные вентили; 7 – измерительный пресс; 8 – манифольд; 9 – образцовый манометр; 10 – ультратермостат; 11 – бомба PVT; 12 – кожух бомбы; 13 – разделительный поршень; 14 – вакуумная линия.

Опыты проводились по следующей схеме:

- в бомбе PVT при непрерывном термостатировании ($T = 303$ °К) готовилась водогазовая смесь (в качестве газовой фазы использовался метан) с газоводяным отношением $1 \text{ м}^3/\text{м}^3$;
- объемным методом определялось давление насыщения P_c , которое составило 3,0 МПа;
- определялась сжимаемость газированной жидкости на разных уровнях давления выше давления насыщения ($P = 1,1\text{--}2,5 P_c$) по извест-

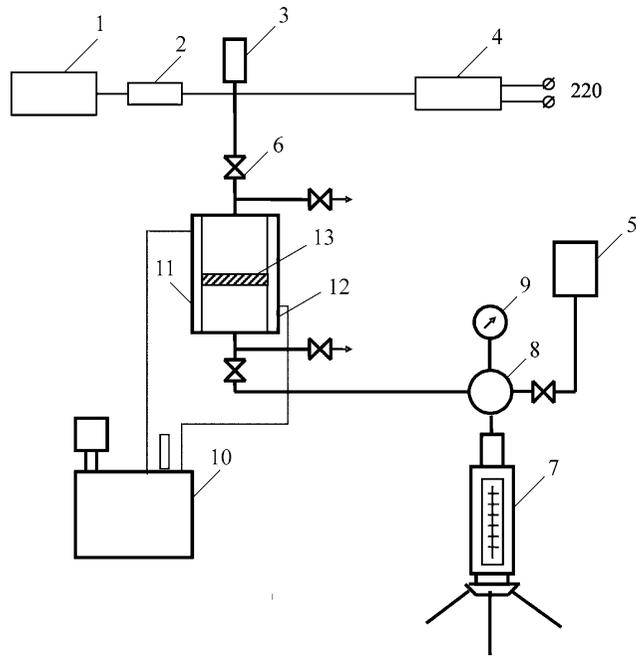


Рис. 2.2. Схема экспериментальной установки

ной методике [21], заключающейся в том, что определенный объем пробы подвергается сжатию и при этом ведется наблюдение за изменением объема и повышением давления, а коэффициент сжимаемости определяется по формуле

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V\Delta P},$$

где V – объем пробы, находящейся в бомбе при давлении P ; ΔV – изменение объема пробы вследствие изменения давления на величину ΔP при постоянной температуре;

- аналогичным образом исследовались водогазовые смеси с добавками анионоактивного ПАВ (сульфанол) с массовыми концентрациями, изменявшимися в интервале $C = 0-0,4\%$.

Результаты первой серии экспериментов оформлялись в виде зависимости коэффициента сжимаемости системы от давления, которые показаны на рис. 2.3.

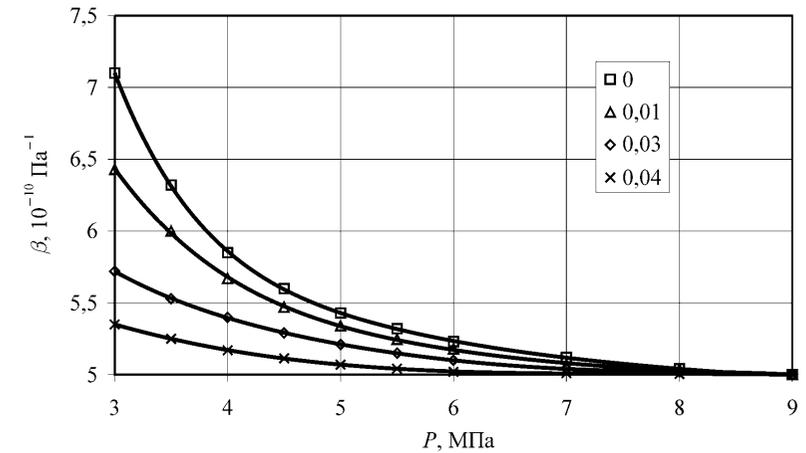


Рис. 2.3. Зависимость коэффициента сжимаемости газированной жидкости от давления при различной концентрации ПАВ (%)

Как видно из рисунка, исследуемые газированные жидкости обладают нелинейной сжимаемостью (что согласуется с данными [1], полученными в пористой среде). Кроме того, добавки ПАВ снижают сжимаемость газированной жидкости при давлении выше давления насыщения. Полученная зависимость коэффициента сжимаемости от давления описывается уравнением

$$\beta(P) = \beta_1 + (\beta_c - \beta_1) \exp[-\alpha(P - P_c)], \quad (2.12)$$

где β_1 и β_c – соответственно минимальное (при $P \gg P_c$) и максимальное (при $P = P_c$) значения коэффициента сжимаемости.

2.1.2. Влияние проницаемости пористой среды

Эксперименты были проведены на установке, схема которой показана на рис. 2.4. Установка включала следующие элементы: 1 – самописец; 2 – источник питания; 3 – образцовые манометры; 4 – колонка с пористой средой (модель пласта); 5 – тензодатчик давления «Сапфир»; 6 – бомба РВТ; 7 – компенсатор; 8 – ультратермостат; 9 – распределительный манифольд и регулятор давления; 10 – дозаторный насос; 11 – запорные вентили; 12 – магазин сопротивлений; 13 – регулятор давления; 14 – расходомер; 15 – газовый счетчик.

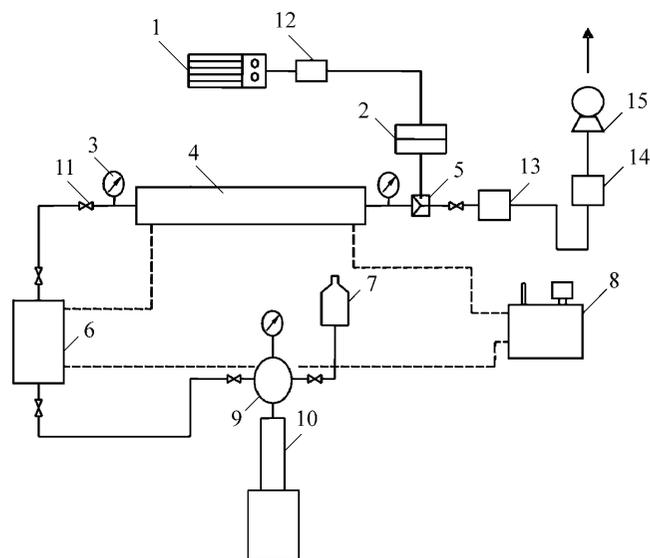


Рис. 2.4. Схема экспериментальной установки

Эксперименты проводились по следующей схеме:

- колонка высокого давления, представляющая собой полый стальной цилиндр, обклеенный изнутри кварцевым песком, с длиной рабочей части 1,1 м и внутренним диаметром 0,032 м, путем вертикальной вибрационной трамбовки заполнялась кварцевым песком смеси фракций $0,314\text{--}0,25\cdot 10^{-3}$ м и $0,14\text{--}0,005\cdot 10^{-3}$ м;
- после обвязки экспериментальной установки согласно схеме (рис. 2.4) по известной методике определяли пористость и проницаемость по воздуху;
- в бомбе PVT объемом $3,4\cdot 10^{-3}$ м³ готовилась водогазовая смесь (в качестве воды использовалась водопроводная питьевая вода, в качестве газа – метан) с газодляным отношением $1\text{ м}^3/\text{м}^3$ и по вышеописанной методике определялось давление насыщения;
- при постоянном вакуумировании и термостатировании ($T = 308\text{ °K}$) модель пласта насыщалась водой, при этом после насыщения продолжалась фильтрация воды под постоянным перепадом давления до установления постоянного расхода воды на выходе колонки. Определялась водопроницаемость пористой среды;
- при непрерывном термостатировании ($T = 308\text{ °K}$) вода вытеснялась исследуемой водогазовой смесью при давлении намного выше дав-

ления насыщения ($P = 3P_c$), при этом вытеснение продолжалось до выхода водогазовой смеси с исходным газодляным отношением на выходе колонки;

- на входе и выходе колонки с пористой средой устанавливалось различное давление, и исследуемая водогазовая смесь фильтровалась под постоянным перепадом давления 0,1 МПа до установления постоянного расхода жидкости. Определялась зависимость расхода жидкости от среднего давления в модели пласта $P = (P_0 + P_c)/2$;
- готовилась новая модель пласта с другой проницаемостью, после чего весь комплекс исследований повторялся.

Исследования были проведены при различных водопроницаемостях – 1; 0,71; 0,52; 0,21; 0,11; 0,052; 0,01Д.

На рис. 2.5, 2.6 показана зависимость расхода жидкости от уровня давления, а на рис. 2.7, 2.8 – зависимость подвижности жидкости от давления.

Результаты эксперимента оформлялись также в виде зависимости безразмерного расхода жидкости $Q_1 = Q/Q_0$ (Q – расход жидкости на определенном уровне среднего давления, Q_0 – расход жидкости при $P \gg P_c$, т. е. соответствующий закону Дарси) от уровня среднего давления (P/P_c), которые показаны на рис. 2.9. Как видно из рисунка, во всех случаях зависимость расхода жидкости от уровня давления имеет немонотонный харак-

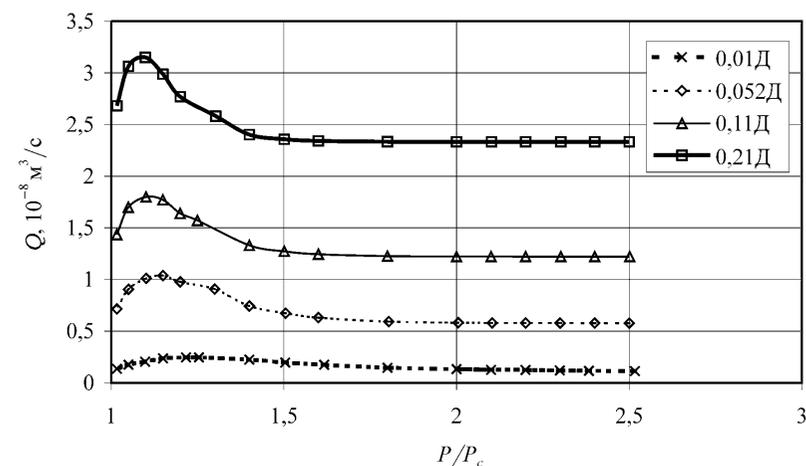


Рис. 2.5. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

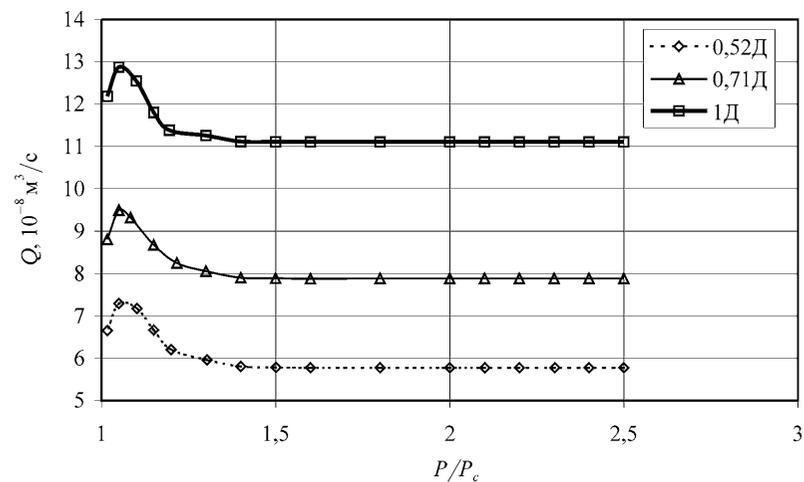


Рис. 2.6. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

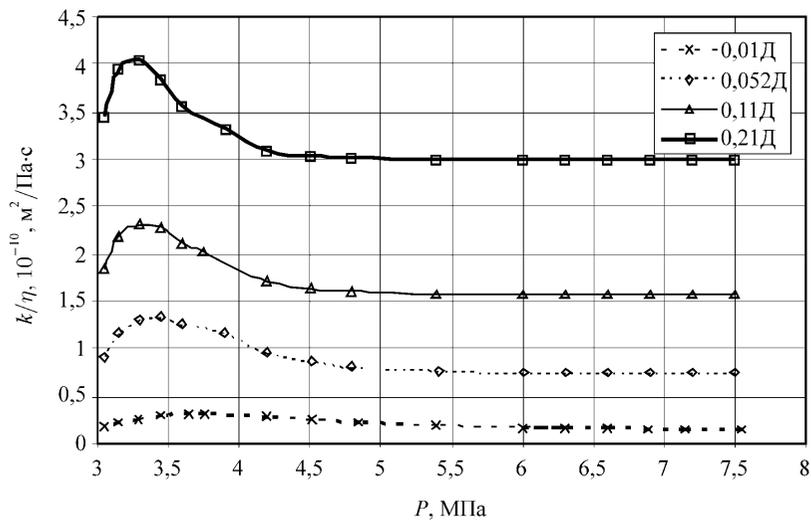


Рис. 2.7. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной проницаемости пористой среды

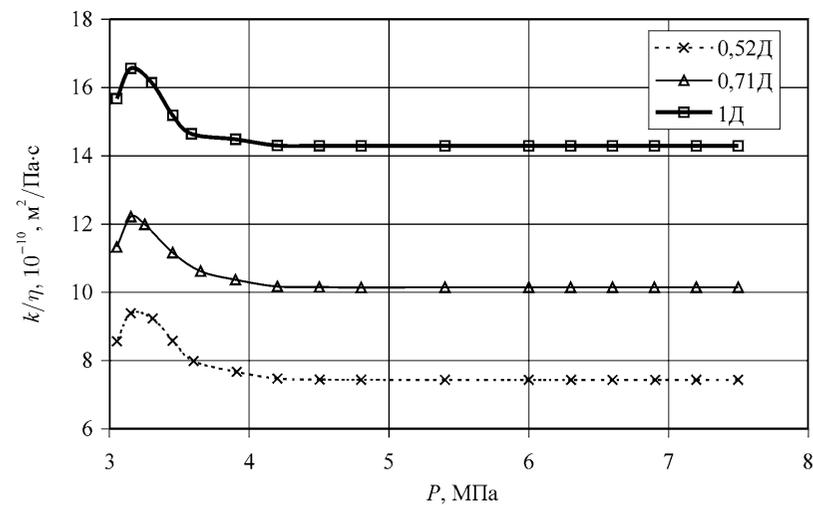


Рис. 2.8. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной проницаемости пористой среды

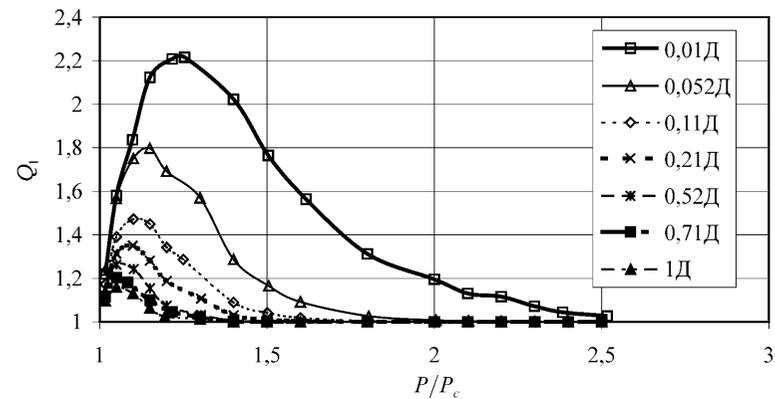


Рис. 2.9. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

тер, причем наблюдается увеличение расхода жидкости вблизи давления насыщения.

На рис 2.10 показана зависимость давления начала роста расхода жидкости (P_s) от проницаемости пористой среды, из которого видно, что

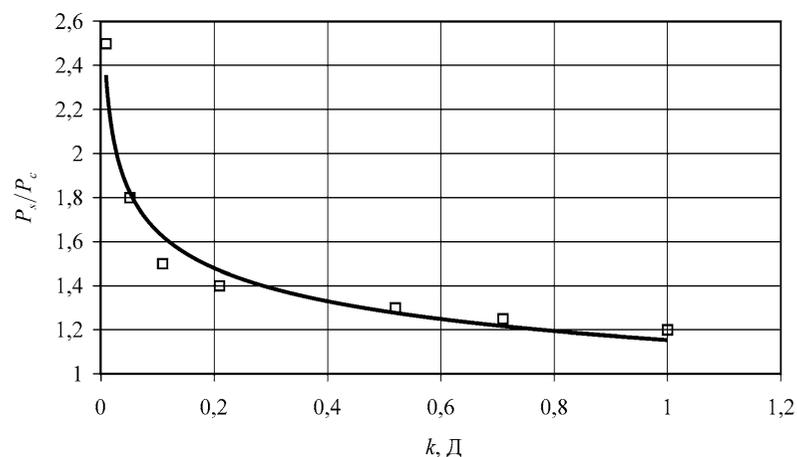


Рис. 2.10. Зависимость давления начала роста расхода жидкости от проницаемости пористой среды

с ростом проницаемости P_s/P_c уменьшается, достигая при проницаемости 1Д значения 1.2.

На рис. 2.11 показана зависимость максимума относительного расхода Q_m от проницаемости пористой среды, из которого видно, что если при проницаемости 10 мД расход возрастает более чем в 2 раза, то по мере роста проницаемости максимальное значение относительного расхода уменьшается, достигая при проницаемости 1Д значения 1.16. Следует

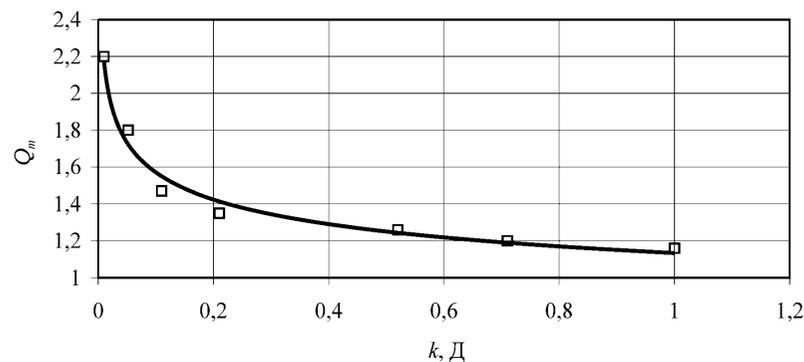


Рис. 2.11. Зависимость максимума относительного расхода жидкости Q_m от проницаемости пористой среды

отметить, что пик расхода и подвижности жидкости с увеличением проницаемости смещается к давлению насыщения, причем при проницаемости 10 мД пик достигается при $P/P_c = 1,25$, а при проницаемости 1Д – при $P/P_c = 1,05$ (рис. 2.12).

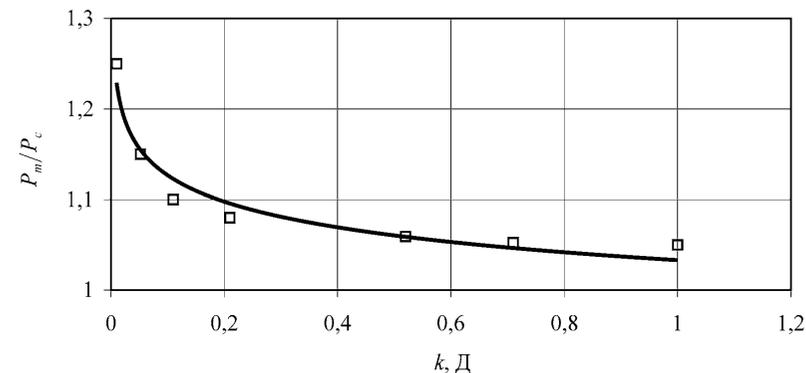


Рис. 2.12. Зависимость давления, при котором достигается максимум относительного расхода жидкости Q_m от проницаемости пористой среды

2.1.3. Влияние смачиваемости пористой среды

Эксперименты проводились на установке, схема которой показана на рис. 2.4.

Эксперименты проводились по следующей схеме:

- колонка высокого давления, представляющая собой полый стальной цилиндр, обклеенный изнутри кварцевым песком, с длиной рабочей части 1,1 м и внутренним диаметром 0,032 м, путем вертикальной вибрационной трамбовки заполнялась кварцевым песком, состоящим из смеси фракций $0,314-0,25 \cdot 10^{-3}$ м и $0,14-0,005 \cdot 10^{-3}$ м;
- после обвязки экспериментальной установки согласно схеме (рис. 2.4) по известной методике определяли пористость и проницаемость по воздуху, которые составили соответственно 0,256 и $0,3 \text{ мкм}^2$;
- с целью гидрофобизации поверхности пористой среды модель пласта насыщалась трансформаторным маслом при постоянном вакуумировании и термостатировании ($T = 308 \text{ °K}$);
- в бомбе PVT объемом $3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ готовилась водогазовая смесь (в качестве воды использовалась водопроводная питьевая вода, в качестве газа – метан) с газоводяным отношением $1 \text{ м}^3/\text{м}^3$ и по вышеописанной методике определялось давление насыщения, которое составило 3,0 МПа;

- при непрерывном термостатировании ($T = 308 \text{ °K}$) трансформаторное масло вытеснялось исследуемой водогазовой смесью при давлении намного выше давления насыщения ($P = 3P_c$), при этом вытеснение продолжалось до выхода чистой водогазовой смеси на выходе колонки. Остаточная насыщенность трансформаторным маслом составила 32% (прокачено 8 поровых объемов модели пласта);
- на входе и выходе колонки с пористой средой устанавливалось различное давление (выше давления насыщения) и исследуемая водогазовая смесь фильтровалась под постоянным перепадом давления 0,1 МПа до установления постоянного расхода жидкости. Определялась зависимость расхода жидкости от среднего давления в модели пласта $P = (P_0 + P_e)/2$;
- давление в модели пласта вновь поднималось до $P = 3P_c$, вход и выход колонки перекрывался, и она выдерживалась в этом состоянии в течение суток;
- вновь производилась фильтрация исследуемой системы в модели пласта, в процессе которой определялся расход жидкости при различных перепадах давления (при давлении выше давления насыщения);
- давление в модели пласта вновь поднималось до $P = 3P_c$, вход и выход колонки перекрывался, и она выдерживалась в этом состоянии в течение суток;
- готовилась новая водогазовая смесь с добавкой анионоактивного ПАВ (сульфанол), для которой повторялся весь комплекс исследований.

Все исследования были проведены на различных уровнях давления ($P_0 = 1,2-3,1P_c$, $P_e = 1,1-3,0P_c$, где P_0 , P_e – соответственно давления на входе и выходе колонки с пористой средой), а также при различных массовых концентрациях ПАВ ($C = 0-0,4 \%$). При этом остаточная насыщенность трансформаторным маслом достигла своего минимального значения – 20 % при концентрации ПАВ 0,05 %.

Следует отметить, что методом пропитки [22] определялся краевой угол смачивания при различных концентрациях ПАВ. При этом при $C = 0 \%$ краевой угол смачивания составил 83° , а при $C = 0,035 \%$ – 8° . Минимального значения 0° краевой угол смачивания достиг при $C = 0,05 \%$.

На рис. 2.13 показана зависимость поверхностного натяжения на границе с воздухом от концентрации ПАВ ($T = 293 \text{ °K}$). Как видно из рисунка, при концентрации ПАВ (сульфанол) более 0,05 % поверхностное натяжение практически не изменяется.

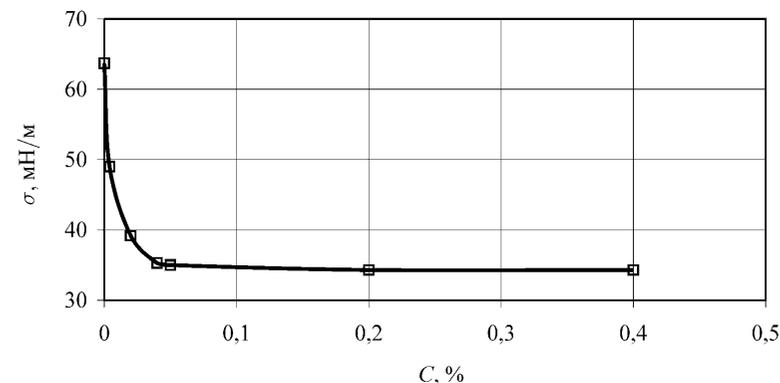


Рис. 2.13. Зависимость поверхностного натяжения воды на границе с воздухом от массовой концентрации ПАВ

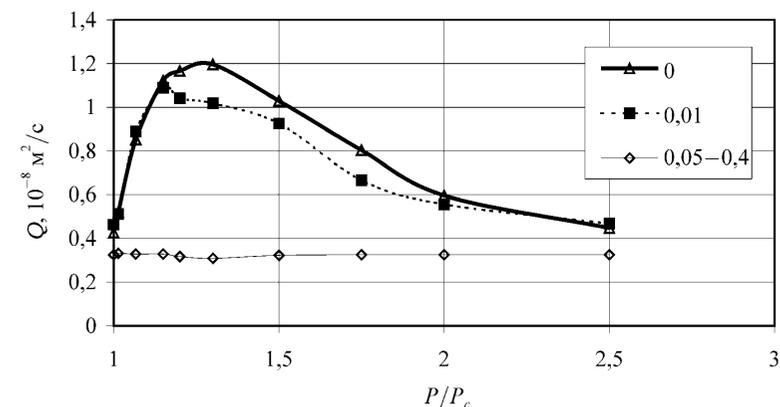


Рис. 2.14. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различных концентрациях ПАВ (%)

На рис.2.14, 2.15 показана зависимость расхода жидкости от уровня давления, а на рис. 2.16, 2.17 – зависимость подвижности жидкости от давления.

Результаты эксперимента оформлялись также в виде зависимости безразмерного расхода жидкости от уровня среднего давления (P/P_c), которые показаны на рис. 2.18.

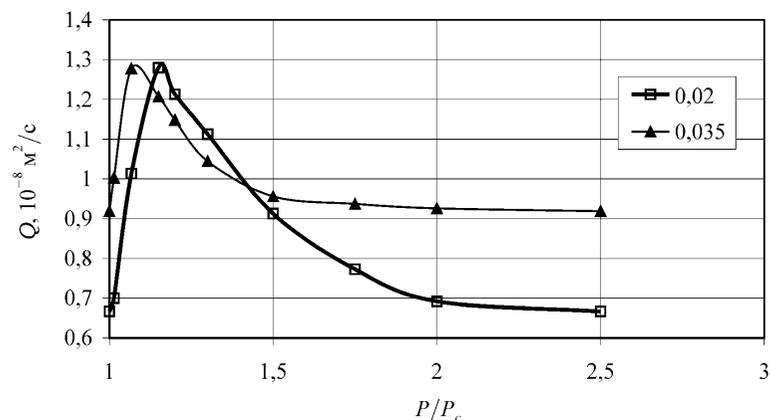


Рис. 2.15. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различных концентрациях ПАВ (%)

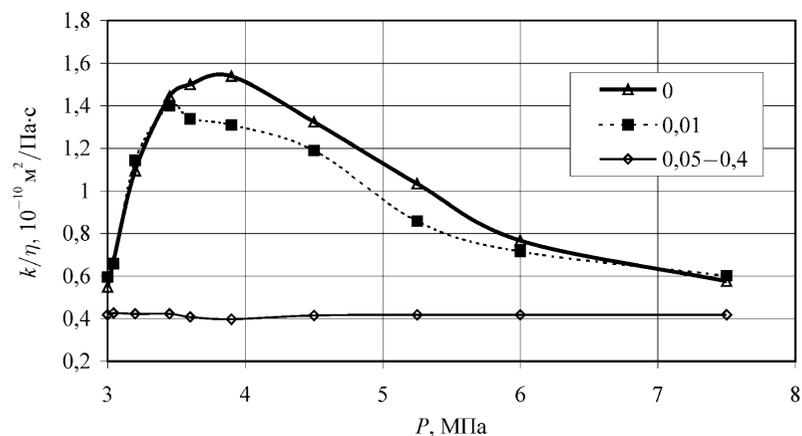


Рис. 2.16. Зависимость подвижности жидкости от давления при различных концентрациях ПАВ (%)

Как видно из рисунка, во всех случаях зависимость расхода жидкости от уровня давления имеет немонотонный характер, причем наблюдается увеличение расхода жидкости вблизи давления насыщения. Аналогичные результаты могут быть получены и для негидрофобизированной среды, т. к. согласно [23], ввиду влияния окружающей среды, реальные гидрофиль-

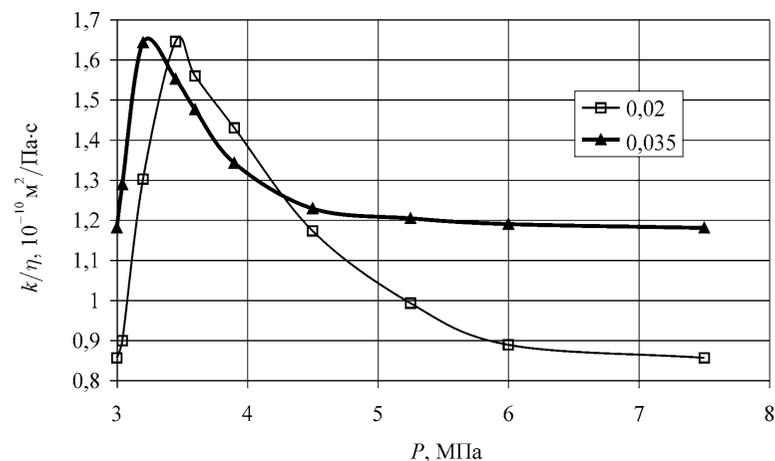


Рис. 2.17. Зависимость подвижности жидкости от давления при различных концентрациях ПАВ (%)

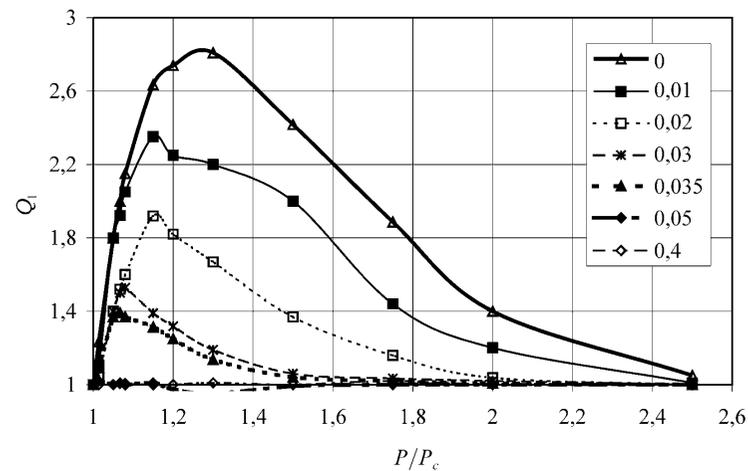


Рис. 2.18. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различной концентрации ПАВ (%)

ные образцы обнаруживают значительные углы смачивания, если их не подвергать специальной обработке, о чем свидетельствуют результаты экспериментов, приведенных в 2.1.2. Следует отметить, что заметное повышение водопроницаемости при $C = 0,02-0,035\%$ связано со значитель-

ным уменьшением остаточной насыщенности пористой среды трансформаторным маслом, а уменьшение при $C = 0,4\%$ превышением критической концентрации мицеллообразования.

На рис. 2.19 показана зависимость давления начала роста расхода жидкости (P_s) от концентрации ПАВ, из которого видно, что с ростом концентрации ПАВ до $0,05\%$ P_s/P_c линейно уменьшается до 1.

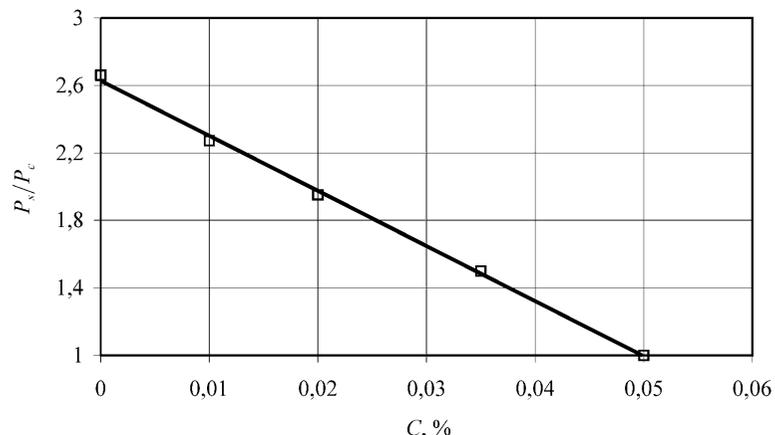


Рис. 2.19. Зависимость давления начала роста расхода жидкости от концентрации ПАВ

На рис. 2.20 показана зависимость максимума относительного расход Q_m от концентрации, из которого видно, что если без добавки ПАВ расход вблизи давления насыщения возрастает почти в 3 раза, то по мере роста концентрации ПАВ максимальное значение относительного расхода уменьшается более чем в 2 раза, достигая при $C = 0,035\%$ значения 1,4. Следует отметить, что пик расхода и подвижности жидкости с увеличением концентрации ПАВ смещается к давлению насыщения, причем при $C = 0\%$ пик достигается при $P/P_c = 1,3$, а при $C = 0,0035\%$ – при $P/P_c = 1,07$.

Интерес представляет также зависимость $\Delta P - Q$ для водогазового раствора. На рис. 2.21 показана зависимость $\Delta P - Q$ для водогазового раствора при P_0 -const ($P_0 = 7,6$ МПа, $P_e = 3,01-7,5$ МПа) и P_e -const ($P_0 = 3,01-7,6$ МПа, и $P_e = 3,01$ МПа).

Как видно из рисунка, при различных сценариях изменения перепада давления возможно как преимущественно дилатантное (при постоянном давлении на выходе пористой среды – P_e -const), так и преимущественно псевдопластичное (при постоянном давлении на входе пористой среды –

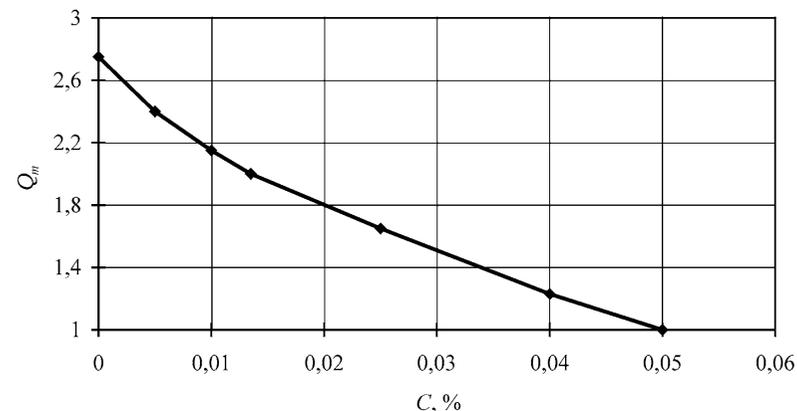


Рис. 2.20. Зависимость максимума безразмерного расхода жидкости Q_m от концентрации ПАВ

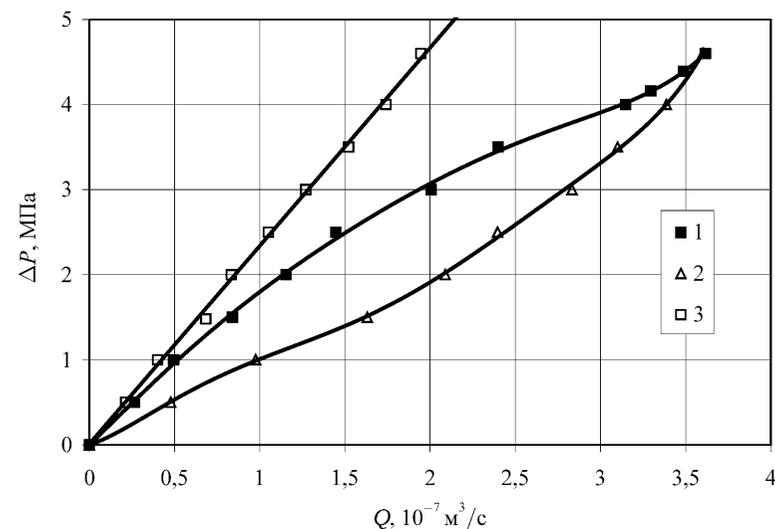


Рис. 2.21. Зависимость $\Delta P - Q$: 1 – при P_0 -const, 2 – при P_e -const, 3 – по Дарси

P_0 -const) течение. При этом в обоих случаях при постоянном перепаде давления расход жидкости выше, чем по Дарси. Следует отметить, что в обоих случаях вблизи давления насыщения после (а при P_e -const – до) пикового расхода, где фильтрационное сопротивление более высокое, ха-

раक्टर зависимости $\Delta P - Q$ изменяется от псевдопластичного к дилатантному, при этом при $P_0\text{-const}$ преобладает псевдопластичное течение, а при $P_e\text{-const}$ дилатантное. Это хорошо видно из рис. 2.22, где показана зависимость безразмерного расхода от перепада давления при $P_0\text{-const}$ и $P_e\text{-const}$. Как видно из указанного рисунка, зависимость $Q_1(\Delta P)$ при $P_0\text{-const}$ и $P_e\text{-const}$ существенно отличается, причем во втором случае указанная зависимость имеет явно выраженный немонотонный характер, а в первом, характер роста с насыщением. Зависимости $Q_1(\Delta P)$ позволяют сделать вывод о том, что зависимости $\Delta P - Q$ действительно имеют комбинированный характер, при этом происходит смена псевдопластичного течения на дилатантный.

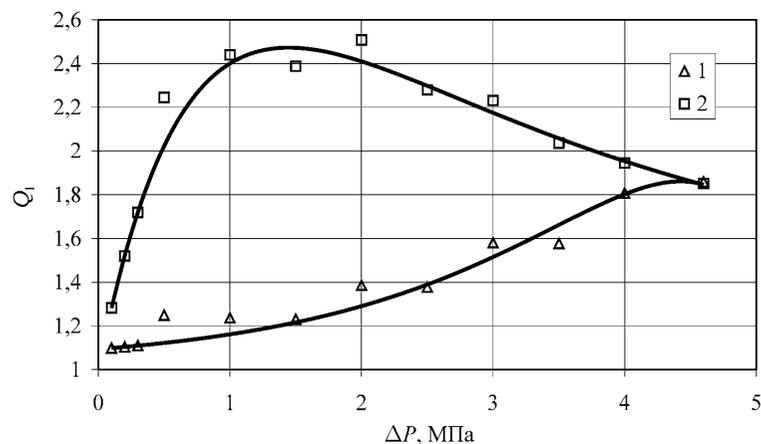


Рис. 2.22. Зависимость безразмерного расхода от перепада давления (1 – $P_0\text{-const}$, 2 – $P_e\text{-const}$)

2.1.4. Влияние неньютоновских свойств жидкости (стационарная фильтрация газированных полимерных растворов)

Эксперименты проводились на установке, схема которой показана на рис. 2.4, по следующей схеме:

- колонка высокого давления, представляющая собой полый стальной цилиндр, обклеенный изнутри кварцевым песком, с длиной рабочей части 1,1 м и внутренним диаметром 0,032 м, путем вертикальной вибрационной трамбовки заполнялась кварцевым песком, состоящим из смеси фракций $0,314\text{--}0,25 \cdot 10^{-3}$ м;

- после обвязки экспериментальной установки согласно схеме (рис. 2.4) по известной методике определяли пористость и проницаемость по воздуху, которые составили соответственно 0,2 и 0,1 мкм²;
- с целью гидрофобизации поверхности пористой среды модель пласта насыщалась трансформаторным маслом при постоянном вакуумировании и термостатировании ($T = 303$ °К);
- в бомбе PVT объемом $3,4 \cdot 10^{-3}$ м³ готовился газированный полимерный раствор (в качестве воды использовалась водопроводная питьевая вода, в качестве полимера – ПАА, а в качестве газа – метан) с газовой долей $1 \text{ м}^3/\text{м}^3$ и по вышеописанной методике определялось давление насыщения, которое составило 3,0 МПа;
- при непрерывном термостатировании ($T = 303$ °К) трансформаторное масло вытеснялось водой, дегазированным полимерным раствором, а затем газированным полимерным раствором при давлении намного выше давления насыщения ($P = 3P_c$), при этом вытеснение продолжалось до установления постоянного расхода жидкости на выходе колонки. Остаточная насыщенность трансформаторным маслом составила 20 %;
- на входе и выходе колонки с пористой средой устанавливалось различное давление (выше давления насыщения) и исследуемая смесь фильтровалась под постоянным перепадом давления 0,1 МПа до установления постоянного расхода жидкости. Определялась зависимость расхода жидкости от среднего давления в модели пласта $P = (P_0 + P_e)/2$;
- давление в модели пласта вновь поднималось до $P = 3P_c$, вход и выход колонки перекрывался, и она выдерживалась в этом состоянии в течение суток;
- вновь производилась фильтрация исследуемой системы в модели пласта, в процессе которой определялся расход жидкости при различных перепадах давления (при давлении выше давления насыщения);
- давление в модели пласта вновь поднималось до $P = 3P_c$, вход и выход колонки перекрывался, и она выдерживалась в этом состоянии в течение суток;
- готовилась новая газированная полимерная смесь (с большей концентрацией ПАА), для которой повторялся весь комплекс исследований.

Все исследования были проведены на различных уровнях давления ($P_0 = 1,2\text{--}3,1 P_c$, $P_e = 1,1\text{--}3,0 P_c$, где P_0 , P_e – соответственно давления на входе и выходе колонки с пористой средой), а также при двух массовых концентрациях ПАА 0,01 %, 0,02 %.

Следует отметить, что методом пропитки [22] определялся краевой угол смачивания при различных концентрациях ПАА. При этом при $C = 0,01\%$ краевой угол смачивания составил 67° , а при $C = 0,02\%$ – 8° .

Результаты эксперимента оформлялись в виде зависимости безразмерного расхода жидкости $Q_1 = Q/Q_0$ (Q – расход жидкости на определенном уровне среднего давления, Q_0 – расход жидкости для дегазированного раствора) от уровня среднего давления (P/P_c), которые показаны на рис. 2.23. Как видно из рисунка, в обоих случаях зависимость расхода жидкости от уровня давления имеет немонотонный характер, причем наблюдается увеличение расхода жидкости вблизи давления насыщения, при этом с увеличением концентрации ПАА рост расхода жидкости уменьшается.

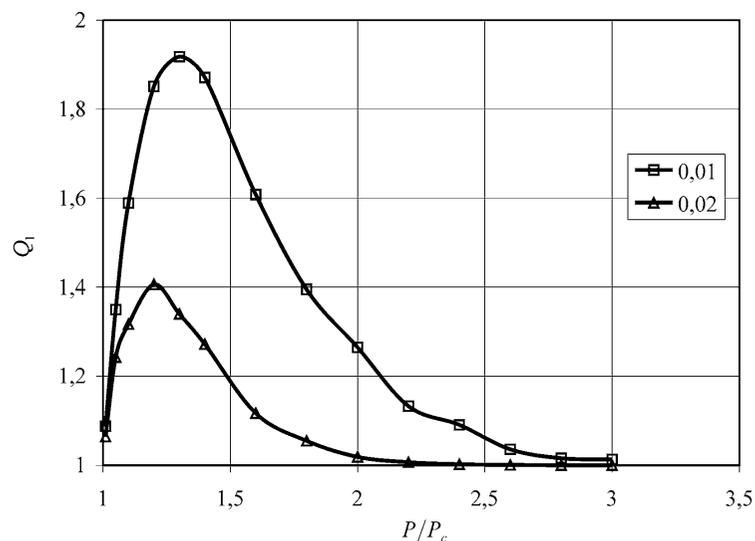


Рис. 2.23. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различной концентрации ПАА (%)

На рис. 2.24, 2.25 показана зависимость $\Delta P - Q$ для газированных полимерных растворов при $P_0 - \text{const}$ ($P_0 = 7,8$ МПа, $P_e = 3,01-7,7$ МПа) и $P_e - \text{const}$ ($P_0 = 3,01-7,8$ МПа, и $P_e = 3,01$ МПа). Как видно из рисунков, при различных сценариях изменения перепада давления возможна полная модификация характера течения ($P_e - \text{const}$ при $C = 0,01\%$). В данном случае происходит смена псевдопластичного течения на дилатантное, причем практически во всем исследуемом интервале давлений (за исключением

небольшого начального участка). При концентрации $C = 0,02\%$ изменение характера течения менее заметно. При этом в обоих случаях при постоянном перепаде давления расход жидкости выше, чем для дегазированного раствора.

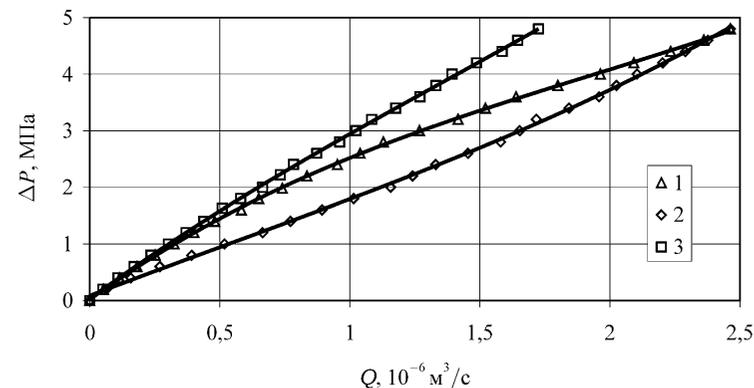


Рис. 2.24. Зависимость $\Delta P - Q$ при концентрации ПАА 0,01 %: 1 – $P_0 - \text{const}$, 2 – $P_e - \text{const}$, 3 – дегазированный раствор

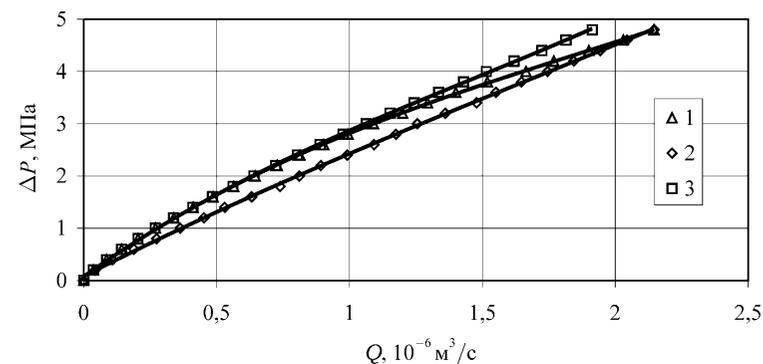


Рис. 2.25 Зависимость $\Delta P - Q$ при концентрации ПАА 0,02 %: 1 – $P_0 - \text{const}$, 2 – $P_e - \text{const}$, 3 – дегазированный раствор

На рис. 2.26, 2.27 показана зависимость безразмерного расхода от перепада давления при $P_0 - \text{const}$ (кривые 1) и $P_e - \text{const}$ (кривые 2) при различных концентрациях ПАА. Как видно из указанного рисунка, зависимости $Q_1(\Delta P)$ при $P_0 - \text{const}$ (кривые 1) и $P_e - \text{const}$ (кривые 2) существенно от-

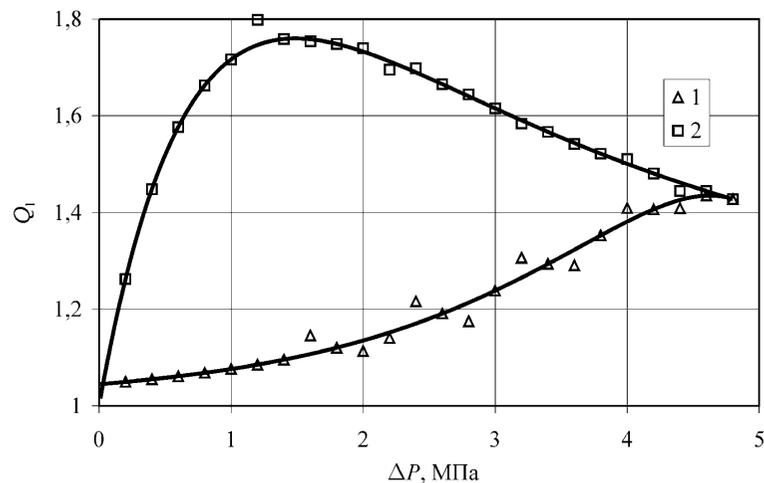


Рис. 2.26. Зависимость безразмерного расхода от перепада давления при концентрации ПАА 0,01 % (1 – P_0 -const, 2 – P_e -const)

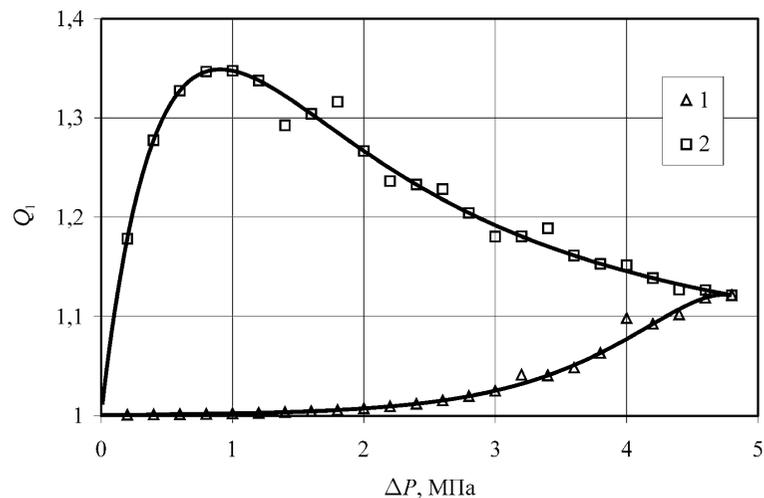


Рис. 2.27. Зависимость безразмерного расхода от перепада давления при концентрации ПАА 0,02% (1 – P_0 -const, 2 – P_e -const)

личаются, причем во втором случае указанные зависимости имеют явно выраженный немонотонный характер, а в первом – характер роста с насыщением. Зависимости $Q_1(\Delta P)$ позволяют сделать вывод о том, что зависимости $\Delta P - Q$ имеют комбинированный характер, при этом происходит смена псевдопластичного течения на дилатантный, однако при концентрации ПАА 0,01 % участок псевдопластичного течения больше, но и дилатансия более выражена, т. к. увеличение расхода жидкости вблизи давления насыщения в данном случае значительно больше.

2.1.5. Влияние газонасыщенности жидкости

Эксперименты были проведены на установке, схема которой показана на рис. 2.4.

Эксперименты проводились по следующей схеме:

- колонка высокого давления, представляющая собой полый стальной цилиндр, обклеенный изнутри кварцевым песком, с длиной рабочей части 1,1 м и внутренним диаметром 0,032 м, путем вертикальной вибрационной трамбовки заполнялась кварцевым песком, состоящим из смеси фракций $0,314-0,25 \cdot 10^{-3}$ м и $0,14-0,005 \cdot 10^{-3}$ м;
- после обвязки экспериментальной установки согласно схеме (рис. 2.4) по известной методике определяли пористость и проницаемость по воздуху;
- в бомбе PVT объемом $3,4 \cdot 10^{-3}$ м³ готовилась водогазовая смесь (в качестве воды использовалась водопроводная питьевая вода, в качестве газа – метан) с определенным газоводяным отношением и по вышеописанной методике определялось давление насыщения;
- при постоянном вакуумировании и термостатировании ($T = 308$ °К) модель пласта насыщалась водой, при этом после насыщения продолжалась фильтрация воды под постоянным перепадом давления до установления постоянного расхода на выходе колонки. Определялась водопроницаемость пористой среды, которая составила 0,05 Д;
- при непрерывном термостатировании ($T = 308$ °К) вода вытеснялась исследуемой водогазовой смесью при давлении намного выше давления насыщения ($P = 3P_e$), при этом вытеснение продолжалось до выхода водогазовой смеси с исходным газоводяным отношением на выходе колонки;
- на входе и выходе колонки с пористой средой устанавливалось различное давление, и исследуемая водогазовая смесь фильтровалась под постоянным перепадом давления до установления постоянного расхода жидкости. Определялась зависимость подвижности жидкости от среднего давления в модели пласта $P = (P_0 + P_e)/2$;

- давление в модели пласта поднималось до $P = 3P_c$, вход и выход колонки перекрывался, и она выдерживалась в этом состоянии в течение суток;
- вновь производилась фильтрация исследуемой системы в модели пласта, в процессе которой определялся расход жидкости при различных перепадах давления (при давлении выше давления насыщения);
- давление в модели пласта вновь поднималось до $P = 3P_c$, вход и выход колонки перекрывался, и она выдерживалась в этом состоянии в течение суток;
- готовилась новая водогазовая смесь с новым газосодержанием, для которой повторялся весь комплекс исследований.

Исследования были проведены при различных газоводяных отношениях (Γ) – 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3 $\text{м}^3/\text{м}^3$. При этом давление насыщения составило соответственно – 1,5; 3; 4,5; 7; 12; 20 МПа.

На рис. 2.28 показана зависимость подвижности жидкости от уровня давления.

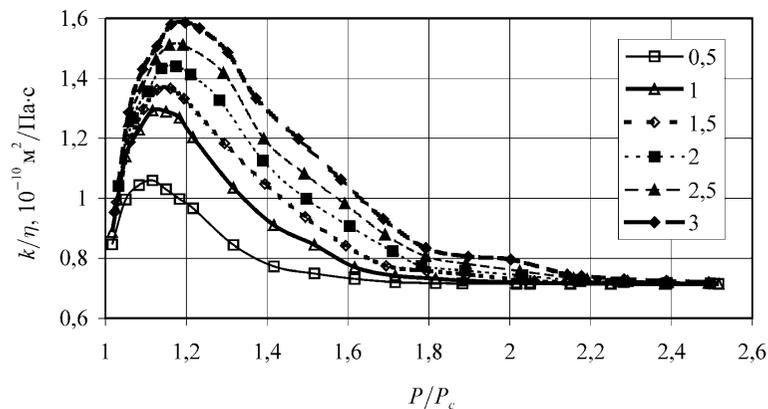


Рис. 2.28. Зависимость подвижности жидкости от уровня давления при различном газоводяном отношении Γ ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

Результаты эксперимента оформлялись также в виде зависимости безразмерного расхода жидкости от среднего уровня давления (P/P_c), которые показаны на рис. 2.29. Как видно из рисунков, с увеличением газонасыщенности подвижность и расход жидкости вблизи давления насыщения растут больше.

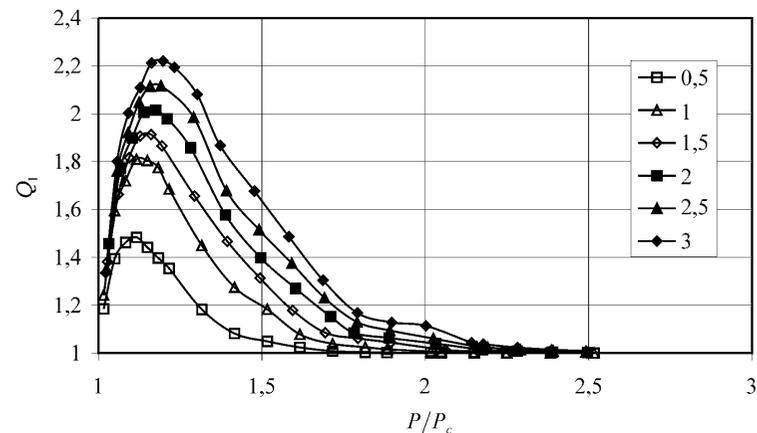


Рис. 2.29. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различном газоводяном отношении Γ ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

На рис. 2.30 показана зависимость давления начала роста расхода жидкости (P_s) от газонасыщенности жидкости, из которого видно, что с ростом газонасыщенности P_s/P_c увеличивается, достигая при $\Gamma = 3 \text{ м}^3/\text{м}^3$ значения 2,1.

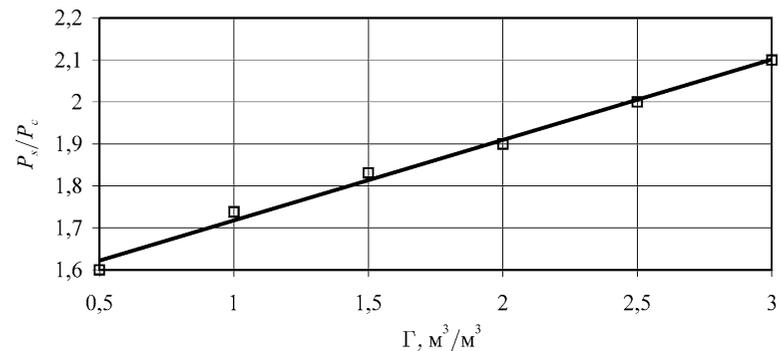


Рис. 2.30. Зависимость давления начала роста расхода жидкости от газоводяного отношения

На рис. 2.31 показана зависимость максимума безразмерного расхода Q_m от газонасыщенности жидкости, из которого видно, что если при $\Gamma = 0,5 \text{ м}^3/\text{м}^3$ расход возрастает примерно в 1,5 раз, то по мере роста газо-

насыщенности максимальное значение безразмерного расхода возрастает, достигая при $\Gamma = 3 \text{ м}^3/\text{м}^3$ значения 2,2. Следует отметить, что пик расхода и подвижности жидкости с уменьшением газонасыщенности смещается к давлению насыщения, причем при $\Gamma = 3 \text{ м}^3/\text{м}^3$ пик достигается при $P/P_c = 1,2$, а при $\Gamma = 0,5 \text{ м}^3/\text{м}^3$ – при $P/P_c = 1,12$ (рис. 2.32).

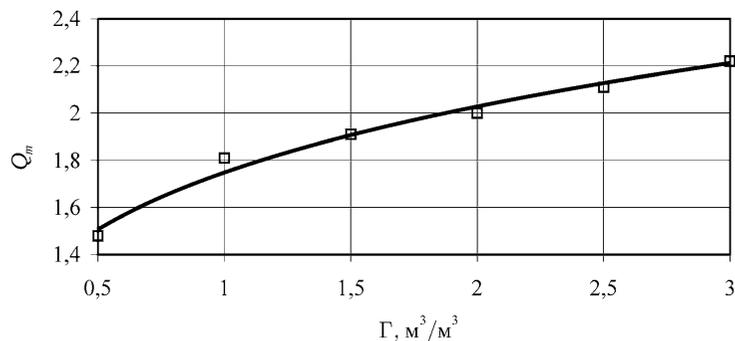


Рис. 2.31. Зависимость максимума безразмерного расхода жидкости Q_m от газовой отношения

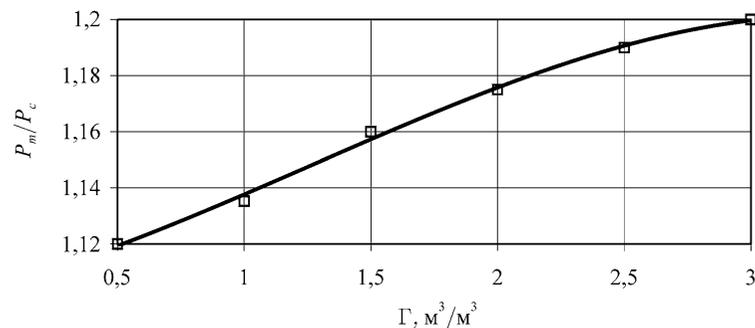


Рис. 2.32. Зависимость уровня давления, при котором достигается максимум безразмерного расхода жидкости Q_m от газовой отношения

Интерес представляет также зависимость $\Delta P - Q$. На рис. 2.33 и 2.34 показана зависимость $\Delta P - Q$ для водогазового раствора при различных газонасыщенностях соответственно при P_0 -const ($P_0 = 7,6 \text{ МПа}$, $P_e = 3,01-7,5 \text{ МПа}$) и P_e -const ($P_0 = 3,01-7,6 \text{ МПа}$, и $P_e = 3,01 \text{ МПа}$). Как видно из рисунков, при различных сценариях изменения перепада давления возможно как дилатантное (при P_e -const), так и псевдопластичное

(при P_0 -const) течение. При этом в обоих случаях при постоянном перепаде давления расход жидкости выше, чем по Дарси. Следует отметить, что в обоих случаях вблизи давления насыщения после (а при P_e -const – до) пикового расхода, где фильтрационное сопротивление более высокое, характер зависимости $\Delta P - Q$ изменяется от псевдопластичного к дилатантному, при этом при P_0 -const преобладает псевдопластичное течение, а при P_e -const дилатантное.

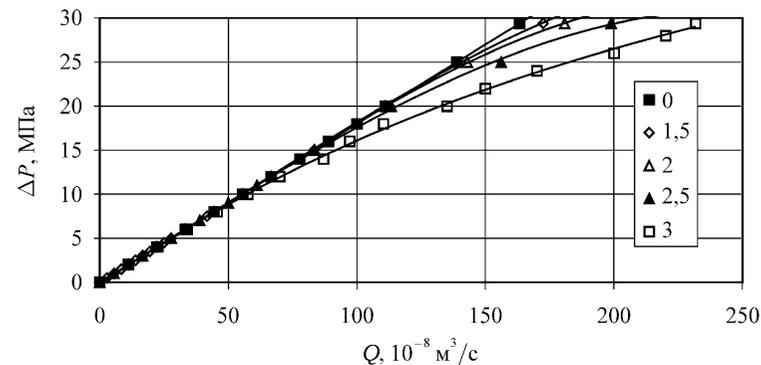


Рис. 2.33. Зависимости $\Delta P - Q$ (P_0 -const) при различном газовой отношении Γ ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

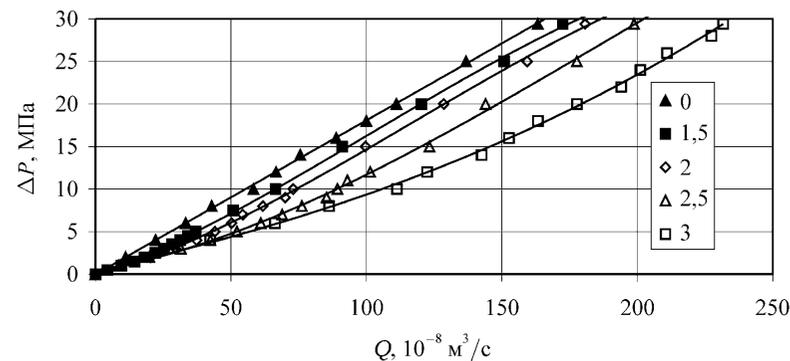


Рис. 2.34. Зависимости $\Delta P - Q$ (P_e -const) при различном газовой отношении Γ ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

Это хорошо видно из рис. 2.35 и 2.36, где показана зависимость безразмерного расхода от перепада давления при различных газонасыщенностях соответственно при P_0 -const и P_e -const. Как видно из указанных ри-

сунков, зависимости $Q_1(\Delta P)$ при $P_0\text{-const}$ и $P_c\text{-const}$ существенно отличаются, причем во втором случае указанные зависимости имеют явно выраженный немонотонный характер, а в первом – характер роста с насыщением. Зависимости $Q_1(\Delta P)$ позволяют сделать вывод о том, что зависимости $\Delta P - Q$ имеют действительно комбинированный характер, при этом происходит смена псевдопластического течения на дилатантное.

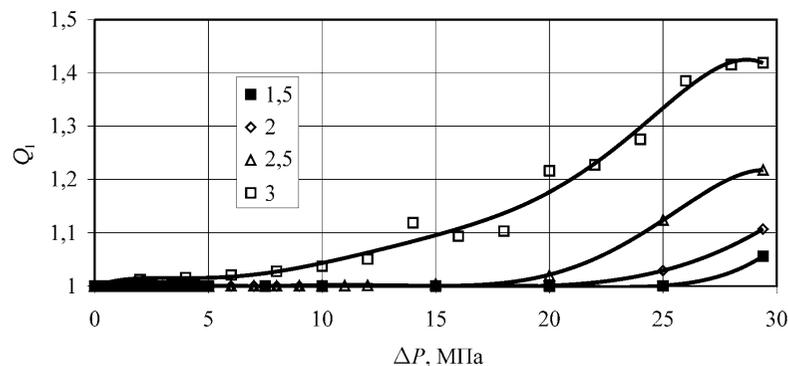


Рис. 2.35. Зависимости безразмерного расхода от перепада давления ($P_0\text{-const}$) при различном газожидкостном отношении Γ ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

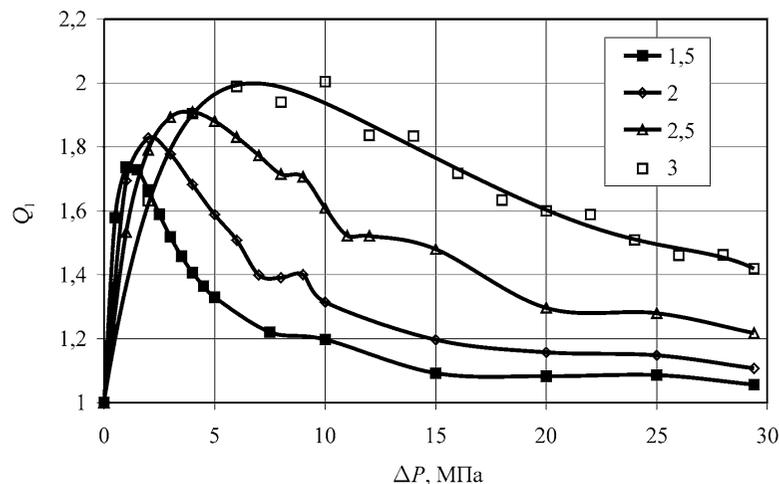


Рис. 2.36. Зависимости безразмерного расхода от перепада давления ($P_c\text{-const}$) при различном газожидкостном отношении Γ ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

2.2. Нестационарные исследования

Нестационарные исследования газированной жидкости проводились в свободном объеме и пористой среде [19, 20, 24].

Исследования в свободном объеме производились методом адиабатического сжатия (нагружения) на установке, схема которой приведена на рис. 2.2. Измерение перепада давления осуществлялось тензодатчиком «Сапфир 22-ДД». В бомбе PVT при постоянном термостатировании ($T = 303 \text{ }^\circ\text{K}$) готовилась водогазовая смесь (использовался метан) с газово-жидкостным отношением $1 \text{ м}^3/\text{м}^3$.

Объемным методом определялось давление насыщения P_c , которое составило 3,2 МПа. Исследование газированной жидкости производилось методом нагружения, которое осуществлялось равновесным темпом – $0,017 \text{ МПа/с}$ [2] с рассматриваемого уровня P на 1,6 МПа, после чего велись наблюдения за изменением текущего давления P_t в системе. Аналогичным образом исследовались водогазовые смеси с добавками анионоактивного ПАВ (сульфанола) с массовыми концентрациями $C = 0\text{--}0,4 \%$. Уровень, с которого начинали нагружение, изменялся в широких пределах и составлял $P = 1,1\text{--}2,5P_c$.

Изменение давления во времени после нагружения газожидкостных систем с разных уровней показано на рис. 2.37 и 2.38, из которых видно, что если при $P > 2P_c$ падение давления составляет 0,03 МПа (рис. 2.37, $P = 2,5P_c$), то вблизи давления насыщения при $P < 2P_c$ падение давления увеличивается и достигает при $P = 1,1P_c$ значения 0,081 МПа (рис. 2.38).

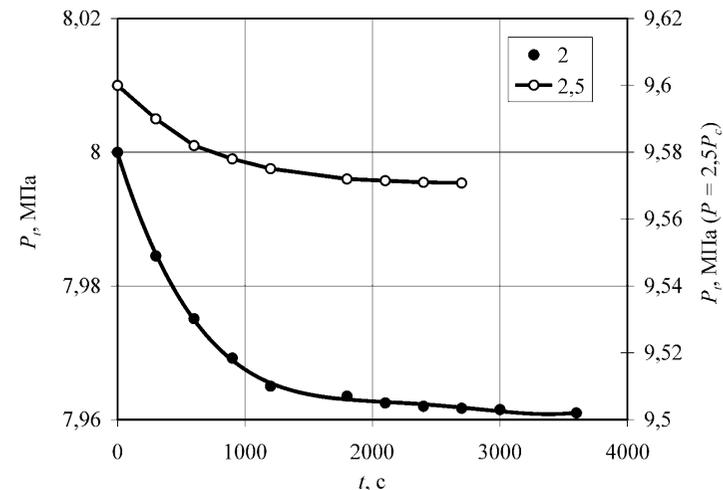


Рис. 2.37. Изменение давления во времени после нагружения водогазовой смеси с различных начальных уровней (P/P_c)

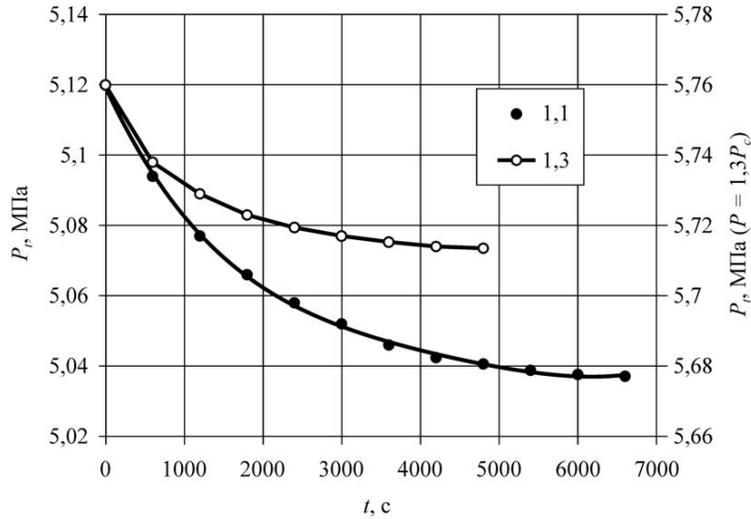


Рис. 2.38. Изменение давления во времени после нагружения водогазовой смеси с различных начальных уровней (P/P_c)

Как видно из рис. 2.37 и 2.38, с приближением начального уровня нагружения к критической области время установления давления после нагружения также растет.

Для объяснения полученных результатов зависимости $P_t - t$ были перестроены в координатах [27], $\left\{ \ln \left[\frac{P_0 - P_\infty}{P_t - P_\infty} \right] - t \right\}$, где P_0, P_∞ , соответственно начальное и конечное давления. По углу наклона линейных участков перестроенных кривых можно определить время релаксации ($\tau = \text{tg}^{-1} \alpha$).

Результаты перестройки в новых координатах показаны на рис. 2.39 $\left(\left(\frac{P_0 - P_\infty}{P_t - P_\infty} \right) = P^* \right)$, по которому видно, что если при $P < 2P_c$ полученная зависимость имеет вид ломаной с двумя линейными участками, то при $P > 2P_c$ – прямой, т. е. происходит смена моделей от экспоненциальной к описываемой суммой экспонент. Следует отметить, что с приближением к критической области линии отклоняются вправо, т. е. в сторону больших времен релаксации.

Полученные результаты могут быть объяснены следующим возможным механизмом. Будем полагать, что в исходной жидкости имеются зародыши с начальными радиусами R_0 и числовой концентрацией N_0 , завися-

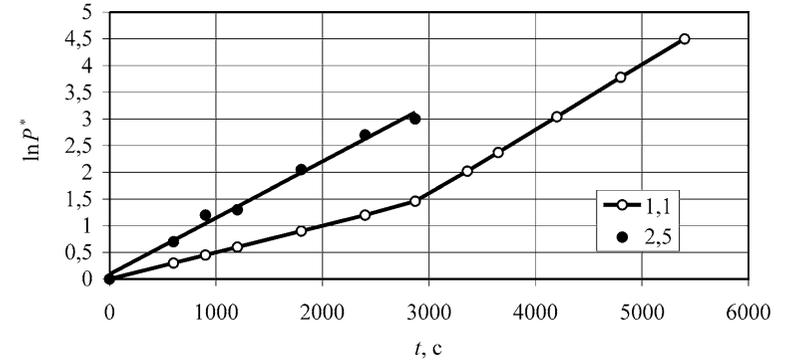


Рис. 2.39. Зависимости $P_t = f(t)$ в полулогарифмических координатах для различных уровней начального давления (P/P_c)

щими от начального давления в рассматриваемой смеси P_{g0} и состава газожидкостной среды.

С повышением давления в газожидкостной смеси система испытывает адиабатическое сжатие. При этом так как жидкость малосжимаема, то изменение объема смеси происходит за счет зародышей газа. Если газ плохо растворим, то зародыши из начального состояния, характеризуемого параметрами R_0, P_{g0}, T_{g0} , переходят в состояние с R_e, P_{ge}, T_{ge} , где

$$\frac{R_e}{R_0} = \left(\frac{P_{g0}}{P_{ge}} \right)^{\frac{1}{3\gamma}}, \quad \frac{T_{ge}}{T_{g0}} = \left(\frac{P_{ge}}{P_{g0}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \frac{\rho_{ge}}{\rho_{g0}} = \left(\frac{P_{ge}}{P_{g0}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.13)$$

Здесь ρ_{g0}, ρ_{ge} – начальная и конечная плотность газа, γ – показатель адиабаты.

При сжатии зародыши интенсивно отдают приобретенное тепло в жидкость вследствие большого градиента температуры газа в пограничном слое и хорошего отвода этого тепла жидкостью. В случае изолированного пузырька жидкость интенсивно забирает тепло газа, при этом не изменяя свою температуру. В условиях настоящих экспериментов (в отличие от [26]) вследствие сильного пересжатия газа ($\rho_{ge} \gg \rho_{g0}$) необходимо учесть, что температура жидкости вблизи поверхности отличается от T_{g0} , согласно (2.13).

Таким образом, увеличение потенциальной энергии взаимно притягивающихся молекул жидкости и газа при сжатии приводит к приращению

внутренней энергии газожидкостной среды. В свою очередь избыточная внутренняя энергия расходуется на структурные превращения в смеси. Частицы смеси при превращениях меняют взаимное расположение, видоизменяя строение молекулярных комплексов, обуславливающих химические превращения, при растворении газа в жидкости. При этом структурные превращения обладают одной особенностью, которая связывает их с явлениями теплообмена: превращения вызывают тепловой эффект, оказывающий влияние на тепловое состояние смеси (что подтверждается экспериментальными данными, приведенными в работе [27]). При растворении тепловой эффект еле уловим, тем не менее измеряется в лабораторных условиях.

По истечении характерного времени структурной перестройки газожидкостная смесь «разгружается», во время всего процесса давление медленно падает, если при этом не происходит химических превращений с дополнительным выделением тепла, способствующим поддержанию или повышению давления. Понятно, что эффект падения давления усилится, если начальное давление в системе будет ближе к давлению насыщения, когда объемное содержание газовых зародышей будет больше.

Из приведенного выше анализа следует, что процесс падения давления можно разделить на две стадии. Первая – начальная, происходящая вследствие повышения температуры газа и перераспределения тепловых потоков в жидкость, и вторая, сопровождаемая молекулярной и конвективной ее перестройкой. Очевидно, что вторая стадия появляется при давлениях, близких к давлению насыщения, когда объемное содержание зародышей резко увеличивается.

Во второй серии экспериментов весь комплекс описанных выше исследований был проведен для водогазовой смеси с добавками поверхностно-активного вещества.

На рис. 2.40 показана зависимость падения давления ΔP от P/P_c при различных массовых концентрациях ПАВ, из которого видно, что с увеличением концентрации ΔP уменьшается, а при $C > 0,04\%$ практически не зависит от P/P_c . Определение времени релаксации по вышеописанной методике показало, что с добавкой поверхностно-активного вещества время релаксации уменьшается, что эквивалентно снижению сжимаемости системы.

Следует отметить, что при относительно высоких концентрациях ПАВ уровень начального давления практически не влияет на ΔP и оно принимает значения, равные полученным без добавок при $P \geq 2P_c$, а вторая стадия падения давления отсутствует. В случае меньших добавок наблю-

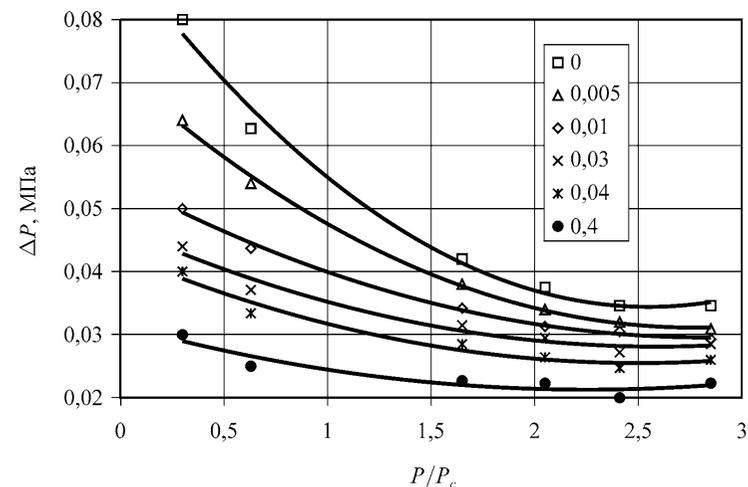


Рис. 2.40. Зависимости $\Delta P = f(P/P_c)$ для различных массовых концентраций поверхностно-активного вещества C (%)

дается только тенденция к уменьшению начального давления, при котором вторая стадия отсутствует.

Очевидно, что поверхностные эффекты будут более ярко выражены при фильтрации исследуемых систем в пористой среде, где имеет место значительно более высокая удельная поверхность твердого тела, чем в бомбе РВТ.

Изучение нестационарной фильтрации газированной жидкости проводилось на экспериментальной установке, приведенной на рис. 2.4.

Пористая среда, составленная кварцевым песком с проницаемостью по воздуху $0,3 \text{ мкм}^2$ и гидрофобизированная углеводородной жидкостью (краевой угол смачивания θ после обработки составил 83°), после вакуумирования и при непрерывном термостатировании ($T = 308 \text{ }^\circ\text{K}$) насыщалась водогазовой смесью (при $P \gg P_c$), причем основные параметры газированной жидкости совпадали с вышеописанными (подробная методика эксперимента описана в 2.1.3). На входе и выходе колонки с пористой средой устанавливалось необходимое давление, и исследуемая водогазовая смесь фильтровалась под постоянным перепадом давления $2,7 \text{ МПа}$ до установления постоянного расхода жидкости. Затем выход колонки перекрывался, и наблюдалось изменение текущего давления P_t на выходе колонки во времени (кривые восстановления давления). Все эти исследования были проведены при различных исходных уровнях давления на выходе

колонки с пористой средой $P = 1,1-2,5P_c$ и различных массовых концентрациях ПАВ $C = 0-0,4 \%$. На рис. 2.41 и 2.42 показаны полученные КВД при массовой концентрации ПАВ, соответственно 0 и 0,035 %.

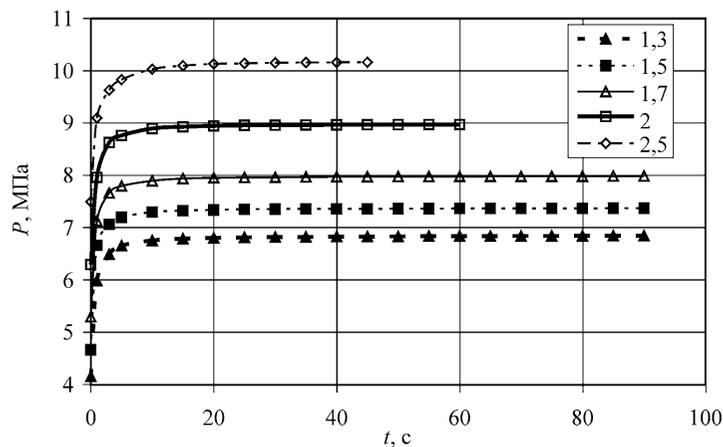


Рис. 2.41. Кривые восстановления давления для различных P/P_c ($C = 0 \%$)

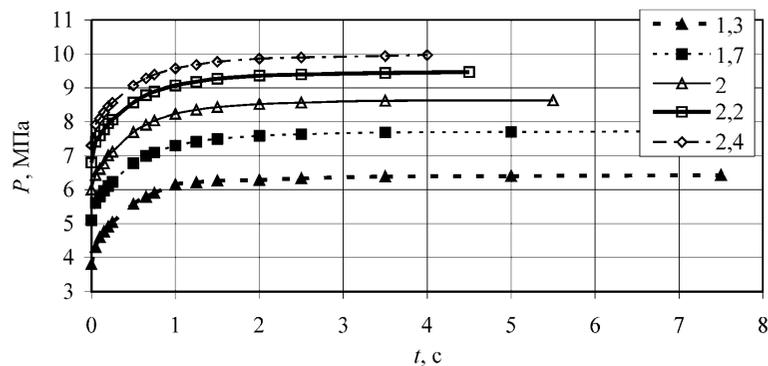


Рис. 2.42. Кривые восстановления давления для различных P/P_c ($C = 0,035 \%$)

Полученные кривые по вышеописанной методике перестраивались в полулогарифмических координатах. На рис. 2.43 приведены результаты перестройки для кривых, снятых в отсутствие добавок ПАВ. Было обнару-

жено, что при $P < 2P_c$ полученная зависимость имеет вид ломаной с двумя характерными участками, а при $P \geq 2P_c$ – прямой, т. е. при приближении исходного давления на выходе колонки к P_c происходит смена моделей с экспоненциальной на описываемую суммой экспонент. С приближением к критической области начальные участки ломаных отклоняются влево (т. е. в сторону меньших времен релаксации), а конечные вправо (т. е. в сторону больших времен релаксации), при этом время восстановления давления также возрастает.

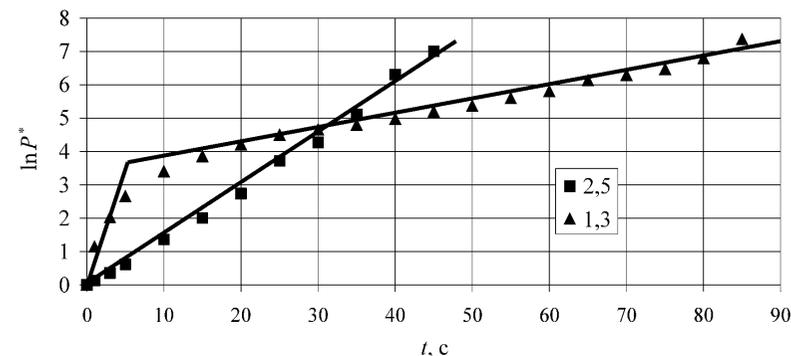


Рис. 2.43. Кривые восстановления давления в полулогарифмических координатах для различных P/P_c

Таким образом, процесс восстановления давления, при $P < 2P_c$, может быть разбит на две стадии: первую – начальную, обусловленную сжимаемостью газированной жидкости, и вторую – более длительную, вызванную, вероятно, диффузионной неравновесностью системы (см. 2.4.3). Очевидно, что вторая стадия появляется, когда объемное содержание зародышей газовой фазы резко увеличивается. На рис. 2.44 приведены результаты перестройки в полулогарифмических координатах кривых восстановления давления, снятых при $P = 1,3P_c$ для концентраций ПАВ $C = 0 \%$ и $C = 0,035 \%$.

На рис. 2.45 показана зависимость времени релаксации (определялось время релаксации первой стадии процесса восстановления давления при $P = 1,3P_c$) от концентрации ПАВ.

Анализ кривых восстановления давления, снятых при добавках поверхностно-активного вещества показал, что с увеличением его концентрации при постоянном исходном уровне давления на выходе колонки кривые отклоняются влево (рис. 2.44), т. е. в сторону меньших времен релаксации. Так, для $P = 1,3P_c$, при $C = 0 \%$, $\tau = 5$ с, а при $C = 0,4 \%$ $\tau = 1,2$ с (рис. 2.45).

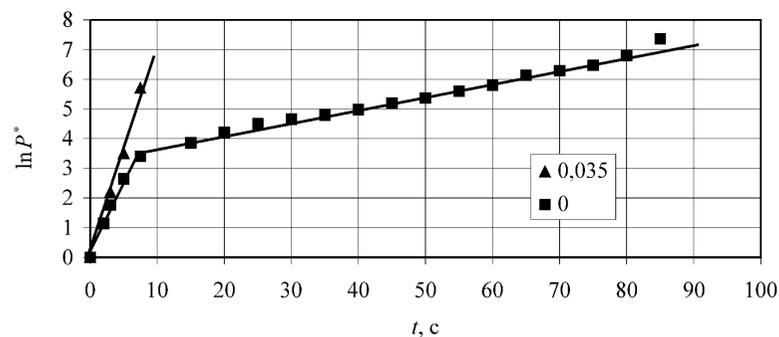


Рис. 2.44. Кривые восстановления давления, снятые при $P = 1,3P_c$ в полулогарифмических координатах для различных массовых концентраций ПАВ (%)

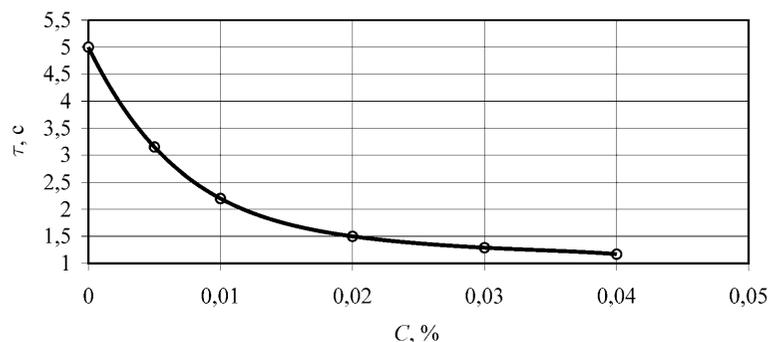


Рис. 2.45. Зависимость времени релаксации от массовой концентрации ПАВ ($P = 1,3P_c$)

Следует отметить, что добавки ПАВ способствуют либо снятию (при относительно высоких концентрациях) второй стадии восстановления давления, либо к снижению уровня исходного давления, при которых она отсутствует.

Таким образом, добавка анионного поверхностно-активного вещества способствует уменьшению неравновесных эффектов в газированных жидкостях в докритической области.

2.3. Анализ результатов экспериментальных исследований и механизм наблюдаемых явлений

На основании имеющегося и полученного в данной работе экспериментального материала можно сделать следующие выводы:

- газированная жидкость при давлении выше давления насыщения обладает нелинейной сжимаемостью;
- добавки анионного ПАВ в газированную жидкость приводят к снижению сжимаемости системы;
- при стационарной фильтрации газированной жидкости в пористой среде наблюдается значительное увеличение расхода жидкости вблизи (выше) давления насыщения;
- эффект увеличения расхода жидкости уменьшается с ростом проницаемости (или среднего радиуса капилляров) пористой среды;
- давление, при котором начинается рост расхода жидкости с увеличением проницаемости, уменьшается;
- зависимость подвижности и расхода жидкости, приведенного к расходу по Дарси (относительный расход) от уровня давления выше давления насыщения, имеет немонотонный характер;
- пик подвижности и относительного расхода жидкости с увеличением проницаемости смещается к давлению насыщения;
- с улучшением смачиваемости поверхности пористой среды в результате добавки анионного ПАВ в газированную жидкость эффект увеличения расхода жидкости становится значительно меньше;
- давление, при котором начинается рост расхода жидкости с улучшением смачиваемости, уменьшается;
- пик подвижности и относительного расхода жидкости с улучшением смачиваемости смещается к давлению насыщения;
- с увеличением газонасыщенности жидкости эффект увеличения расхода жидкости возрастает;
- давление, при котором начинается рост расхода жидкости с увеличением газонасыщенности жидкости, возрастает;
- пик подвижности и относительного расхода жидкости с уменьшением газонасыщенности жидкости смещается к давлению насыщения;
- при различных сценариях изменения перепада давления в процессе стационарной фильтрации газированной ньютоновской жидкости возможно как дилатантное (при постоянном давлении на выходе пористой среды – P_e -const), так и псевдопластичное (при постоянном давлении на входе пористой среды – P_0 -const) течение;
- при нестационарной фильтрации газированной жидкости процесс восстановления давления может быть разбит на две стадии: первая относительно короткая стадия характеризуется низким по сравнению с негазированной жидкостью временем релаксации, а вторая, значительно более длительная – высоким;
- основные закономерности стационарного течения газированных ньютоновских жидкостей справедливы и для неньютоновских.

Для объяснения полученных результатов в первую очередь следует знать механизм зародышеобразования – гомогенный или гетерогенный [12].

2.3.1. Гомогенный механизм

Примем, что зародышеобразование происходит в основном во всем объеме жидкой фазы.

В рамках такого подхода полученные результаты могут быть объяснены следующим образом. Следы ПАВ, имеющиеся в водопроводной воде, и поверхностный электрический заряд стабилизируют зародыши газа, однако поверхность раздела жидкость – зародыш еще сохраняет подвижность [8] (т. е. зародыши деформируемы), в результате чего газированная жидкость приобретает сжимаемость, которая растет с приближением к давлению насыщения, ввиду роста объемного содержания зародышей. С принудительной добавкой ПАВ его количество на поверхности зародышей возрастает, ввиду чего она теряет подвижность [28] и сжимаемость системы при прочих равных условиях становится меньше.

Рассмотрим теперь, как наличие нелинейной сжимаемости отразится на расходных характеристиках, при фильтрации газированной жидкости в пористой среде [18].

По определению коэффициент сжимаемости находится из уравнения

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = \beta(P).$$

Подставляя в него (2.12), получим

$$\rho = \rho_c \exp[\beta_1(P - P_c)] \exp\left\{\frac{\beta_c - \beta_1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha(P - P_c))]\right\}, \quad (2.14)$$

где ρ_c – плотность газированной жидкости при P_c . Подэкспоненциальное выражение второй экспоненты при подстановке следующих экспериментальных данных (см. 2.2): $\alpha \approx 10^{-6}$ 1/Па, $P - P_c \approx 10^6$ Па, $\beta_c - \beta_1 \approx 5 \cdot 10^{-10}$ 1/Па оказывается близким к нулю ($\sim 10^{-4}$), поэтому выражение (2.14) может быть упрощено:

$$\rho = \rho_c \exp[\beta_1(P - P_c)]. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) показывает, что для течения газированной жидкости можно использовать модель «сверхсжимаемой» жидкости Маскета [29], включающую наряду с (2.15) еще и следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{m\beta_1\eta}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где m – пористость, η – вязкость, k – проницаемость.

Для стационарного течения газированной жидкости при постоянном перепаде давления массовый расход имеет вид:

$$Q = Q_c \frac{\rho_0 - \rho_e}{\beta_1 \rho_c (P_0 - P_e)}, \quad (2.16)$$

где ρ_0 и ρ_e – плотность газированной жидкости соответственно на входе и выходе пористой среды, Q_c – массовый расход несжимаемой жидкости с плотностью ρ_c , определяемый из выражения

$$Q_c = \frac{k\rho_c F}{\eta l} (P_0 - P_e),$$

где F , l – соответственно площадь поперечного сечения и длина образца пористой среды.

После преобразований (при $P_0 - P_e \ll 1/\beta_1$) формулу (2.16) можно привести к виду

$$Q = Q_c [1 + \beta_1(P - P_c)],$$

где $P = (P_0 + P_e)/2$.

Принимая по результатам экспериментов для $\beta_1 \approx 5 \cdot 10^{-10}$ 1/Па, а для $P - P_c \approx 2 \cdot 10^6$ Па, получим $\beta_1(P - P_c) \approx 10^{-3}$.

Таким образом, сжимаемость практически не оказывает влияния на расходные характеристики при фильтрации газированной жидкости в пористой среде.

2.3.2. Гетерогенный механизм

Известно, что зародыши новой фазы в основном образуются на существующих поверхностях [30]. В рассматриваемых случаях эту роль исполняют либо металлические стенки бомбы PVT, либо пористая среда.

Действительно, работа гетерогенного образования зародышей может быть определена из соотношения [31, 32]

$$\frac{W_h}{W} = f(\theta), \quad (2.17)$$

где W – работа гомогенного образования зародышей газовой фазы, $f(\theta)$ – функция краевого угла смачивания жидкостью твердой поверхности [31]:

$$f(\theta) = \frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^2 (2 - \cos \theta). \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.17), после преобразований получим

$$\frac{W_h}{W} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos^3 \theta.$$

Из приведенного уравнения видно, что при $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ работа гетерогенного процесса всегда меньше работы гомогенного процесса. С улучшением смачиваемости, что достигается добавкой анионного ПАВ, работа гетерогенного образования зародыша увеличивается, т. е. уменьшается вероятность их образования.

Примем, что образующиеся (адсорбирующиеся [33]) на поверхности капилляров зародыши газа подвижны, в результате пристенный слой жидкости, насыщенный зародышами газа, обладает меньшей вязкостью, чем центральный. Естественно предположить, что при снижении давления к давлению насыщения, ввиду уменьшения работы образования зародышей, объемное содержание их возрастает, что может привести к увеличению толщины пристенного слоя пониженной вязкости.

Рассмотрим движение газожидкостной системы в единичном капилляре и воспользуемся результатами работ [34, 35], в которых на основе принципа максимума Понтрягина получена функция

$$h(c) = \rho(c)/2\eta(c) + (A/(1-r^2))c,$$

где $\rho(c)$, $\eta(c)$ – соответственно функции плотности и вязкости от концентрации газа. Ищется такое распределение концентрации по радиусу капилляра $c(r)$, которое обеспечивает максимум $h(c)$ и соответственно расхода жидкости. Согласно [35], A – постоянная, причем $A \in [0; \infty)$, $r \in [0; 1]$, $c \in [0; 1]$.

Для функции плотности от концентрации можно принять известное соотношение $\rho(c) = 1 - c$. Для функции вязкости от концентрации, согласно [36], принимаем $\eta(c) = 1 - \lambda c$ ($1/3 < \lambda < 1$) и для относительно низких средних концентраций F ($0 < F < 1/6\lambda$) для распределения концентрации доставляющего максимум расхода жидкости получим

$$c_m(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < \sqrt{\left(1 - \frac{2A}{1-\lambda}\right)}, \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{(1-\lambda)(1-r^2)}{2A}\right)}, & \sqrt{\left(1 - \frac{2A}{1-\lambda}\right)} < r < 1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Средняя концентрация газа, согласно [35], определяется из соотношения

$$F = \int_0^1 c_m(r) r dr = \frac{A}{3\lambda(1-\lambda)}.$$

Указанное распределение концентрации по сечению (2.19) будет иметь место при $A \in (0; (1-\lambda)/2)$ и $F \in (0; 1/6\lambda)$.

Отметим, что при относительно высоких концентрациях газа, когда имеет место двухфазное течение, возможно, как показано в [35], образование пристенного газового слоя.

Таким образом, максимизация расхода происходит при расслоении газожидкостной системы, когда в центре течет чистая жидкость, а у стенок жидкость с зародышами газа (т. е. система с меньшей вязкостью, чем в центре потока). Очевидно, что относительно малый пристенный слой, насыщенный выделившимися гетерогенными зародышами газа, будет иметь значительно меньшую вязкость, чем чистая жидкость, в то время как объемная вязкость газированной жидкости при наличии зародышей газа, согласно [1], уменьшается всего на 10–15 %.

а) Кольцевая схема течения в капилляре

Ньютоновская жидкость.

Для определения расхода примем кольцевую схему движения в капилляре, предложенную С. Ф. Аверьяновым [37]. Тогда скорость стационарного течения флюидов в капилляре определится из уравнения

$$v_i = -\frac{\Delta P}{4l\eta_i} r^2 + a_{1i} \ln r + a_{2i}, \quad (2.20)$$

где $\Delta P/l$ – градиент давления, η_i – вязкость флюида (для центрального флюида примем индекс 1, для пристенного – 2). Постоянные a_{1i} и a_{2i} определяются из следующих граничных условий:

$$v_2 = 0; \quad r = R; \quad \eta_2 \frac{dv_2}{dr} = \eta_1 \frac{dv_1}{dr}, \quad v_1 = v_2, \quad r = R_0; \quad \frac{dv_1}{dr} = 0, \quad r = 0$$

Из (2.20) при указанных граничных условиях определим скорость

$$v_1 = \frac{\Delta P R^2}{4l\eta_1} \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right) \right] \quad (2.21)$$

и относительный расход жидкости

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = S^4 \left[1 + \frac{2\varepsilon}{S^2} (1 - S^2) \right]$$

или

$$Q_1 = (1 - \xi)^4 \left[1 + \frac{2\varepsilon\xi(2 - \xi)}{(1 - \xi)^2} \right], \quad (2.22)$$

где $S = \frac{R_0}{R} = 1 - \xi$, $\xi = \frac{\delta}{R}$, $\varepsilon = \frac{\eta_1}{\eta_2} > 1$, Q_0 – расход, по Пуазейлю, для жидкости с вязкостью η_1 . Переход к пористой среде в данном случае не изменит

результата, если принять (2.22) как относительную проницаемость. Анализ выражения (2.22) показывает, что зависимость расхода жидкости от толщины пристенного слоя имеет немонотонный характер, причем максимум расхода наступает при

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}}. \quad (2.23)$$

Немонотонность расхода определяется произведением $(1 - \xi)^4 \times \left[\frac{2\varepsilon\xi(2 - \xi)}{(1 - \xi)^2} \right]$. Первый множитель характеризует площадь поперечного сечения потока жидкости, второй – вклад пристенного слоя пониженной вязкости в увеличение расхода жидкости. При относительно низкой толщине пристенного слоя превалирует второй множитель, и расход жидкости возрастает. При относительно высокой толщине пристенного слоя превалирует первый множитель, и расход жидкости снижается.

Примем, что пристенный слой представлен только газом, причем $\varepsilon = 65$ (отношение вязкостей воды и метана при температуре 308 °K). На рис. 2.46 приведена зависимость относительного расхода жидкости от безразмерной толщины пристенного газового слоя, из которого видно, что, хотя указанная зависимость качественно описывает полученные экспериментальные результаты, пик относительного расхода более чем на порядок превышает экспериментально определенный. Это связано с тем, что пристенный слой в общем случае имеет переменную вязкость. Действительно, зародыши образуются на поверхности порового канала, находясь, однако, в объеме жидкости. При этом естественно предположить, что на линии контакта газо-

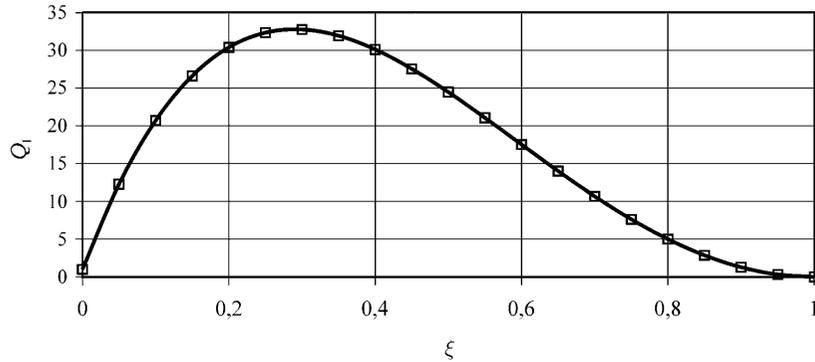


Рис. 2.46. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\xi)$

вых зародышей в форме полу- или сегмента сферы, покрывающих поверхность порового канала и жидкости, вязкость практически равна вязкости жидкости, а на стенке капилляра – вязкости газа. Учитывая вышесказанное, а также то, что вязкость граничного слоя изменяется по экспоненциальному закону [38], можем принять искомую зависимость в следующем виде,

$$\eta_b = \eta_2 \exp\left(\ln \varepsilon \frac{R - r}{R - R_0}\right), \quad (2.24)$$

где η_2 – вязкость газа.

Стационарное течение вязкого флюида в капилляре описывается, как известно, следующим уравнением:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \eta_b \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{l}, \quad (2.25)$$

где η_b определяется уравнением (2.24).

Решая уравнение (2.25) для скорости течения пристенного слоя, получим

$$v = -\frac{\Delta P}{2l\eta_2(\ln \varepsilon)^2} \left[(R - R_0)(R_0 - R + r \ln \varepsilon) \exp\left(\ln \varepsilon \frac{r - R}{R - R_0}\right) + \frac{a_{12}}{\eta_2} \exp\left(-\ln \varepsilon \frac{R}{R - R_0}\right) Ei\left(\ln \varepsilon \frac{r}{R - R_0}\right) + a_{22} \right]. \quad (2.26)$$

Тогда из (2.20) и (2.26) при вышеуказанных граничных условиях для скорости жидкости получим

$$v_1 = \frac{\Delta P R^2}{4l\eta_1} \left\{ (1 - \xi)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{2\xi}{(\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1 - \varepsilon) - (1 - \xi) \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon) \right] \right\}. \quad (2.27)$$

Из (2.27) для относительного расхода жидкости получим

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = (1 - \xi)^4 \left\{ 1 + \frac{4\xi}{(1 - \xi)^2 (\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1 - \varepsilon) - (1 - \xi) \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon) \right] \right\}. \quad (2.28)$$

Анализ полученного выражения показывает, что в данном случае немонотонность расхода определяется произведением

$$(1 - \xi)^4 \left\{ \frac{4\xi}{(1 - \xi)^2 (\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1 - \varepsilon) - (1 - \xi) \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon) \right] \right\}.$$

Первый сомножитель характеризует площадь поперечного сечения потока жидкости, второй – вклад пристенного слоя пониженной вязкости в увеличение расхода жидкости. При относительно низких значениях толщины пристенного слоя превалирует второй сомножитель, и расход жидкости возрастает. При относительно высоких значениях толщины пристенного слоя превалирует первый сомножитель, и расход жидкости снижается. На рис. 2.47 приведена зависимость относительного расхода жидкости от безразмерной толщины пристенного слоя ($\varepsilon = 65$), из которого видно, что указанная зависимость хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований, причем пик расхода жидкости имеет тот же порядок, что и экспериментально определенный.

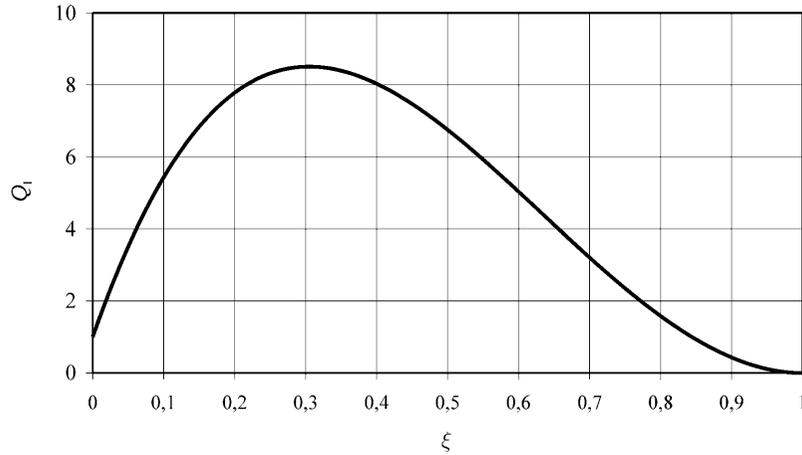


Рис. 2.47. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\xi)$

Неньютоновская жидкость.

Рассмотрим кольцевое течение в капилляре неньютоновской (степенной) жидкости с пристенным слоем газа. Скорость движения жидкости в капилляре, учитывая, что при $r=0$ напряжение τ должно быть конечной величиной, определится из уравнения [92]:

$$v_1 = -\frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}+1} + a_{21}, \quad (2.29)$$

а скорость течения пристенного слоя газа из уравнения

$$v_2 = -\frac{\Delta P}{4l\eta_2} r^2 + a_{12} \ln r + a_{22}, \quad (2.30)$$

где η_0 – постоянная величина ($\eta_0 = \tau/\gamma^n$). Постоянные интегрирования определяются из следующих граничных условий:

$$v_2 = 0; \quad r = R; \quad \tau_2 = \tau_1, \quad v_1 = v_2, \quad r = R_0.$$

Тогда из (2.29) и (2.30) определим скорость течения

$$v_1 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} R_0^{\frac{1}{n}+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] + \frac{\Delta P R^2}{4\eta_2 l} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right] \quad (2.31)$$

и из (2.31) относительный расход жидкости

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = (1-\xi)^{\frac{1}{n}+3} \left[1 + \frac{3n+1}{2n} \frac{\varepsilon \xi (2-\xi)}{(1-\xi)^2} \right], \quad (2.32)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \eta_1 = \eta_0 \left(\frac{\Delta P R_0}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2.33)$$

где η_1 – вязкость жидкости при $r = R_0$, т. е. на границе раздела жидкости

и газа, $Q_0 = \frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1}{n}+3}$ – расход степенной жидкости с вязкостью $\eta_1 = \eta_0 \left(\frac{dv_1}{dr} \right)^{n-1}$.

При $n=1$ уравнения (2.31) и (2.32) переходят соответственно в уравнения (2.21) и (2.22). Анализ выражения (2.32) показывает, что зависимость расхода жидкости от толщины пристенного слоя также имеет немонотонный характер, причем максимум расхода наступает при

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{(n+1)\varepsilon}{(3n+1)\varepsilon - 2n}}. \quad (2.34)$$

При $n=1$ уравнение (2.34) переходит в уравнение (2.23). Анализ выражения (2.34) показывает, что с ростом n (при прочих равных условиях) ξ возрастает. Причем при $n \rightarrow 0$ $\xi \rightarrow 0$, а при $n \rightarrow \infty$ $\xi \rightarrow 0,42$. Для обычных на практике значений $n=0,5-2$, $\xi=0,22-0,34$ при $\varepsilon \geq 30$.

Немонотонность расхода по вышеописанным причинам определяется произведением $(1-\xi)^{\frac{1}{n}+3} \left[\frac{3n+1}{2n} \frac{\varepsilon \xi (2-\xi)}{(1-\xi)^2} \right]$.

На рис. 2.48 приведена зависимость относительного расхода жидкости от безразмерной толщины пристенного газового слоя при различных n ($\Delta P/l = 1$ МПа/м), из которого видно, что, хотя указанная зависимость качественно описывает полученные экспериментальные результаты, пик относительного расхода значительно превышает экспериментально определенный.

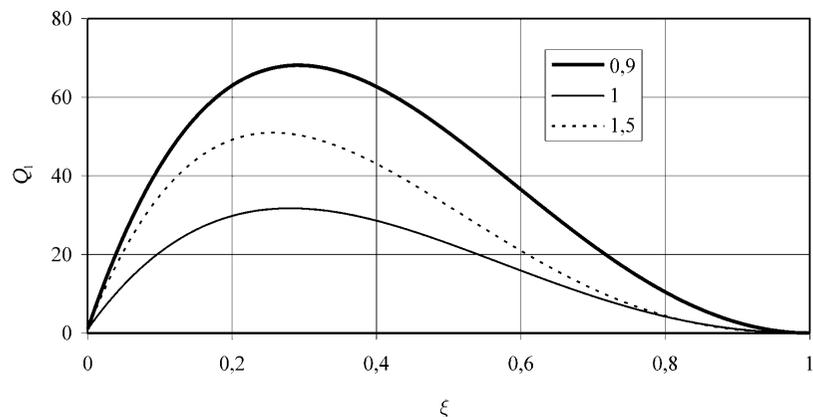


Рис. 2.48. Теоретическая зависимость относительного расхода жидкости от безразмерной толщины пристенного газового слоя при различных n ($\Delta P/l = 1$ МПа/м)

Рассмотрим теперь кольцевое течение в капилляре степенной жидкости с переменной вязкостью пристенного слоя (в первом приближении принимаем, что жидкость в пристенном слое ньютоновская). Тогда согласно (2.24)–(2.26) примем для пристенного слоя уравнение (2.26), а для текущей в центре жидкости уравнение (2.29). Решая уравнения при тех же граничных условиях, для скорости жидкости получим

$$v_1 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1}{n+1}} \left\{ (1-\xi)^{\frac{1}{n+1}} - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n+1}} + \frac{n+1}{n} \frac{\xi}{(1-\xi)^{\frac{1}{n}} (\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1-\varepsilon) - (1-\xi) \ln \varepsilon \exp(1-\varepsilon) \right] \right\}. \quad (2.35)$$

Для относительного расхода из (2.35) имеем

$$Q_1 = (1-\xi)^{\frac{1}{n+3}} \left\{ 1 + \frac{3n+1}{n} \frac{\xi}{(1-\xi)^2 (\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1-\varepsilon) - (1-\xi) \ln \varepsilon \exp(1-\varepsilon) \right] \right\}. \quad (2.36)$$

При $n=1$ уравнения (2.35) и (2.36) переходят соответственно в уравнения (2.27) и (2.28).

Немонотонность расхода по вышеописанным причинам определяется произведением

$$(1-\xi)^{\frac{1}{n+3}} \left\{ \frac{3n+1}{n} \frac{\xi}{(1-\xi)^2 (\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1-\varepsilon) - (1-\xi) \ln \varepsilon \exp(1-\varepsilon) \right] \right\}.$$

На рис. 2.49 приведена зависимость относительного расхода жидкости от безразмерной толщины пристенного слоя при различных n ($\Delta P/l = 1$ МПа/м), из которого видно, что указанная зависимость также хорошо согласуется с экспериментом, причем пик расхода жидкости имеет тот же порядок, что и экспериментально определенный.

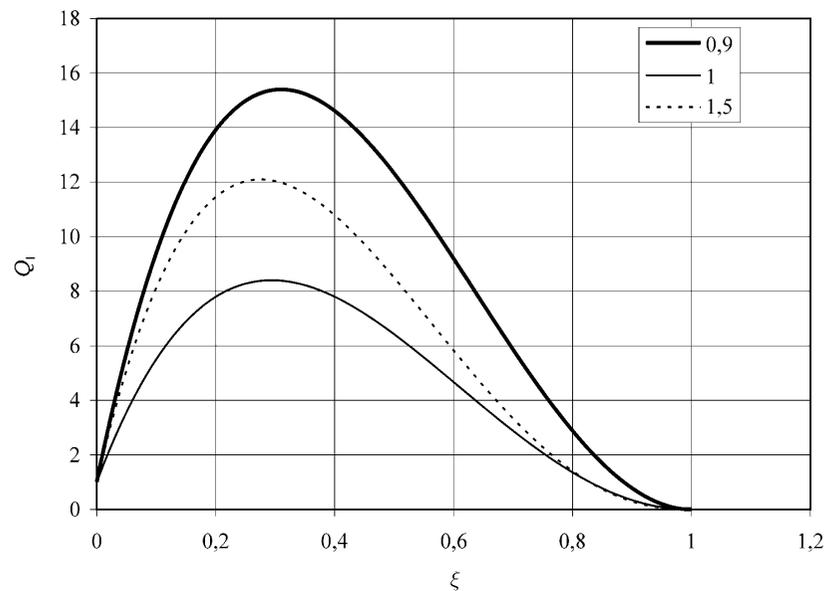


Рис. 2.49. Теоретическая зависимость относительного расхода жидкости от безразмерной толщины пристенного слоя при различных n ($\Delta P/l = 1$ МПа/м)

б) Эффект проскальзывания

Теперь примем, что зародышеобразование происходит в основном на твердой поверхности капилляров пористой среды, причем образующиеся

(адсорбирующиеся) зародыши удерживаются пористой средой и в основном неподвижны [33, 39].

Еще в начале прошлого века были проведены экспериментальные работы по течению в гидрофобных капиллярах, свидетельствующие о невыполнении условия прилипания [40–42]. В ряде более поздних экспериментальных работ показано [43, 44], что в лиофобных микрокапиллярах, ввиду адсорбции газа, происходит ослабление сцепления жидкости с поверхностью капилляра, а это приводит к проскальзыванию жидкости. Согласно молекулярной теории проскальзывания Д. М. Толстого [45, 46], проскальзывание может происходить и на лиофильной поверхности, более поздние исследования также отмечают этот факт [47–51]. Вместе с тем лиофобная поверхность более предпочтительна для образования зародышей газа [31, 52]. В работе [53] проведены численные эксперименты методами молекулярной динамики, при этом молекулы жидкости, твердого тела и газа моделировались сферами, взаимодействующими по простому закону – притяжения на больших расстояниях и отталкивания на малых. Переход от лиофильной поверхности к лиофобной моделировался изменением энергии связи между молекулами стенки и жидкости (чем слабее связь, тем лиофобнее поверхность). Численный эксперимент показал, что газ мигрирует к поверхности, причем в случае сильно лиофобной поверхности жидкость не касается стенки – их разделяет моноатомный слой. Согласно [44] уже при толщине адсорбционного слоя газа 0,15 нм имеет место заметное проскальзывание жидкости. С улучшением смачиваемости работа гетерогенного образования зародыша увеличивается, т. е. вероятность образования зародышей газа на единице поверхности порового канала и соответственно проскальзывания уменьшается. Это согласуется с экспериментальным материалом [44], в том числе представленным и в настоящей работе (см. 2.1, 2.2), по которому в лиофильных капиллярах проскальзывание ослабляется. В ряде работ показано, что наличие растворенного в жидкости газа [50, 54], а также изменение внешнего давления [55–58] оказывает существенное влияние на эффект проскальзывания, что также согласуется с представленным в настоящей работе экспериментальным материалом (см. 2.1, 2.2).

В последнее десятилетие интерес к эффекту проскальзывания значительно возрос в связи с проблемой гидрофобного притяжения [59–60]. При этом при погружении двух гидрофобных пластин в ультрачистую воду они притягиваются и слипаются. Этот эффект экспериментально изучался многими авторами, но наиболее точные измерения были проведены Дж. Паркером (J. Parker) с соавторами [60]. Ряд авторов, в том числе и Ф. Аттард (P. Attard) с соавторами [61–63], объясняют этот эффект образованием на поверхности погруженных в воду гидрофобных пластин нанопузырьков

атмосферного воздуха, всегда имеющегося в воде. Дж. Тиррелл (J. Tyrrell) и Ф. Аттард методом атомной силовой микроскопии (atomic force microscopy) получили фотографии нанопузырьков воздуха и исследовали их морфологию [63]. Ими показано, что нанопузырьки имеют нерегулярную, приплюснутую форму в виде блина (pancake), при этом высота пузырьков составляет 20–30 нм, а площадь занимаемой ими поверхности $4\text{--}6 \cdot 10^3 \text{ нм}^2$, при этом высота и площадь увеличиваются с уменьшением pH среды. А. Симонсен (A. Simonsen) с соавторами [64], а позже А. Агравал (A. Agrawal) и Г. МакКинли (G. McKinley) [65] показали, что нанопузырьки по форме близки к сегменту сферы (см. рис. 2.50).

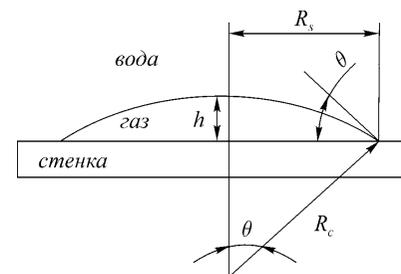


Рис. 2.50. Морфология нанопузырька, представленная в виде сегмента сферы

При этом контактный угол между водой и газом, радиус кривизны пузырька и объем сегмента сферы определяется из выражений [64]

$$\theta = 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{h}{R_s}\right),$$

$$R_c = \frac{R_s^2 + h^2}{2h}, \quad (2.37)$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi h^2(3R_c - h). \quad (2.38)$$

Результаты описанных экспериментальных исследований позволяют по-новому взглянуть на стабильность нанопузырьков (см. введение к настоящей главе). Действительно, радиус кривизны сегмента сферы значительно больше, чем если нанопузырек представлял бы собой полусферу ($R_s = R_c = h$); так, по экспериментальным данным [65] $R_c \approx 25\text{--}35h$ и $R_c \approx 50h$ по данным [64]. Оценки по формуле Лапласа давления внутри пузырька, приведенные в [64], показали, что для нанопузырьков воздуха

в водной среде в случае морфологии полусферы ($R_c = R_s = h = 6,6$ нм) и сегмента сферы дают соответственно 21,5 и 0,45 МПа. Таким образом, вероятность схлопывания нанопузырька с морфологией сегмента значительно ниже, чем с морфологией полусферы. Вместе с тем если бы нанопузырек был стабилен при внутреннем давлении 21,5 МПа, то он бы был практически недеформируемым, что не подтверждается экспериментом [65], и вероятность проскальзывания жидкости относительно такого пузырька была бы очень низкая.

Теоретически невыполнение условия прилипания было исследовано Навье в 1823 году [50, 66], и он выдвинул гипотезу, заключающуюся в том, что тангенциальная составляющая скорости жидкости на стенке пропорциональна скорости сдвига. Позже к этому выводу пришел и Максвелл [50, 67]. На рис. 2.51 показан профиль скорости жидкости (случай обтекания твердого тела жидкостью) [50, 68] при выполнении и невыполнении условия прилипания.

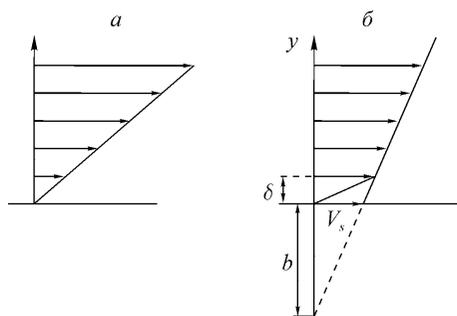


Рис. 2.51. Профиль скорости жидкости вблизи твердой поверхности: *a* – условие прилипания выполняется, *б* – условие прилипания не выполняется

Как видно из рисунка, в первом случае профиль скорости линейный, а во втором за счет наличия граничного слоя с толщиной δ пониженной (по сравнению с объемной) вязкости, он меняет форму, и скорость на стенке определяется выражением

$$v_s = b \frac{dv}{dy}.$$

Для чисто сдвигового течения коэффициент b может быть интерпретирован как фиктивное расстояние ниже поверхности твердого тела, где выполняется условие прилипания. В зарубежной литературе коэффициент b называется длиной скольжения (slip length), а в отечественной литературе – коэффициентом скольжения или проскальзывания.

Ньютоновская жидкость.

Как известно, расход вязкой жидкости с проскальзыванием при течении в капилляре определяется выражением [68]

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{4b}{R} \right),$$

где b – коэффициент скольжения, R – радиус капилляра, Q_0 – расход жидкости по Пуазейлю.

Учитывая, что, согласно [69], нанопузырьки могут образовываться непосредственно в поровых каналах и это может приводить к заметному проскальзыванию жидкости [56], перейдем к пористой среде, используя подход Козени–Кармана [70].

Средняя скорость фильтрации с проскальзыванием в пористой среде длиной l и со средним радиусом капилляров R_m определится из выражения

$$v = \frac{m \Delta P R_m^2}{8 l \eta} \left(1 + \frac{4b}{R_m} \right). \quad (2.39)$$

Подставляя в (2.39)

$$R_m = \frac{mD}{6(1-m)},$$

где D – диаметр частиц пористой среды (порядок величины R_m для наших экспериментов составляет $\sim 10^{-6}$ м), окончательно получим

$$v = \frac{\Delta P m^3 D^2}{288(1-m)^2 l \eta} \left[1 + \frac{24b(1-m)}{mD} \right].$$

Расход жидкости для пористого образца с поперечным сечением F определится из уравнения

$$Q = \frac{\Delta P m^3 D^2 F}{288(1-m)^2 l \eta} \left[1 + \frac{24b(1-m)}{mD} \right].$$

Выражение в скобках отражает увеличение расхода в результате проскальзывания. Если принять, согласно [43, 44], $b = 10^{-6} - 10^{-5}$ м; $m = 0,2$; $D = 10^{-4}$ м, получим, что расход жидкости с проскальзыванием может возрасти в 2–10 раз, что согласуется с экспериментальным материалом по фильтрации газированной жидкости при давлении выше давления насыщения.

Рассмотрим движение жидкости в капилляре при наличии пристенного неподвижного слоя газа. Решая уравнение (2.20) при следующих гра-

ничных условиях:

$$v = -b \frac{dv}{dr}, \quad r = R_0; \quad \frac{dv}{dr} = 0, \quad r = 0, \quad (2.40)$$

для скорости течения получим

$$v = \frac{\Delta P}{4l\eta} (R_0^2 - r^2) + b \frac{\Delta P R_0}{2l\eta}$$

и для расхода:

$$Q = \frac{\pi \Delta P R_0^4}{8l\eta} \left(1 + \frac{4b}{R_0} \right).$$

Для относительного расхода жидкости можем записать

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = \frac{R_0^4}{R^4} \left(1 + \frac{4b}{R_0} \right)$$

или

$$Q_1 = (1 - \xi)^4 \left[1 + \frac{4b}{R(1 - \xi)} \right]. \quad (2.41)$$

Теперь по аналогии с [71, 72], где рассмотрено движение жидкости при наличии пристенного газового слоя по Стоксу между двумя бесконечными параллельными пластинами, выразим коэффициент проскальзывания через толщину пристенного слоя и радиус капилляра. Для этого, используя гипотезу Навье [66] о пропорциональности скорости на границе контакта жидкости и газа скорости сдвига (использовано также в уравнении (2.40)) вначале для случая при кольцевом течении жидкости и газа при постоянной вязкости газа (уравнение (2.21)), для коэффициента проскальзывания получим

$$b = R \frac{\varepsilon \xi (2 - \xi)}{2(1 - \xi)}. \quad (2.42)$$

Подставляя (2.42) в (2.41), получим уравнение (2.22). Таким образом, кольцевое течение жидкости и газа идентично течению с проскальзыванием при неподвижном граничном слое газа с коэффициентом проскальзывания, определяемым (2.42).

Теперь рассмотрим случай с переменной вязкостью. Из уравнения (2.27) с учетом гипотезы Навье для коэффициента проскальзывания получим

$$b = R \frac{\xi}{(1 - \xi)(\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1 - \varepsilon) - (1 - \xi) \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon) \right]. \quad (2.43)$$

Подставляя (2.43) в (2.41), получим уравнение (2.28). Таким образом, кольцевое течение жидкости и газонасыщенного пристенного слоя с переменной вязкостью идентично течению с проскальзыванием при неподвижном граничном слое с коэффициентом проскальзывания, определяемым (2.43). Пик расхода жидкости наступает при

$$\xi = 1 - \frac{3(a_0 + b_0) - \sqrt{9(a_0 + b_0)^2 - 8a_0(c_0 + 4b_0)}}{2(c_0 + 4b_0)}, \quad (2.44)$$

где $a_0 = \ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1 - \varepsilon)$, $b_0 = \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon)$, $c_0 = (\ln \varepsilon)^2$. Оценки по указанной формуле при $\varepsilon = 65$ показывают, что пик достигается при $\xi \approx 0,3$.

На рис. 2.52 показана теоретическая зависимость относительного расхода от толщины пристенного слоя при различном радиусе капилляра (коэффициент проскальзывания определяется формулой (2.43)).

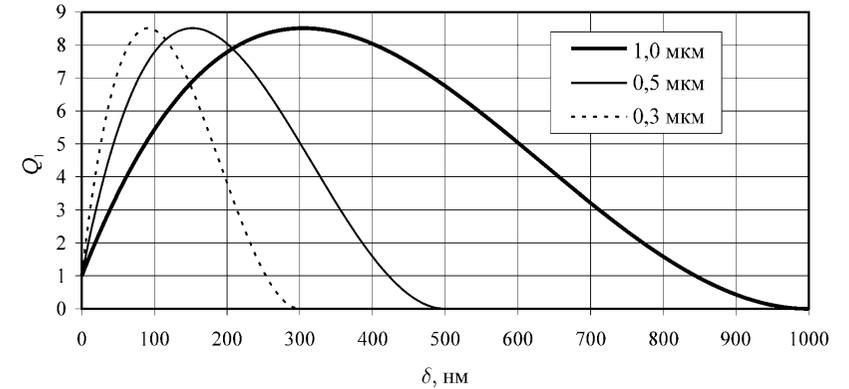


Рис. 2.52 Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\delta)$ при различном радиусе капилляра

Как видно из рисунка, с уменьшением радиуса капилляра пик расхода смещается в сторону меньших толщин пристенного слоя, вместе с тем он наступает при одном и том же значении $\xi \approx 0,3$ (см. рис. 2.47). Полученный пик относительного расхода $\approx 8,5$ следует рассматривать как гидродинамически максимально возможный, при полной заполненности поверхности капилляра пристенным газонасыщенным слоем. Следует отметить, что в отличие от экспериментов снижение радиуса капилляра (или проницаемости пористой среды) не приводит к росту пика относительного расхода.

В ряде исследований [64, 65, 72] показано, что даже абсолютно гладкая гидрофобная поверхность лишь частично покрывается нанопузырька-

ми газа, кроме того, на шероховатой поверхности (с шероховатостью наноразмеров) количество образующихся нанопузырьков снижается, и, по данным [73], заполненность лиофобной поверхности нанопузырьками может составить 20 %. Очевидно, в пористой среде возможны и более низкие значения.

Для определения коэффициента проскальзывания и расхода жидкости в условиях неполного покрытия поверхности капилляра зародышами газовой фазы (частичное проскальзывание – partial slip) воспользуемся подходом, предложенным в работе [72]. Для общей скорости течения жидкости можно использовать следующее уравнение:

$$v_c = f v_s + (1 - f) v_0, \quad (2.45)$$

где v_s – скорость течения жидкости с проскальзыванием, v_0 – скорость течения жидкости по Пуазейлю, f – часть поверхности капилляра, покрытая зародышами газа. Используя гипотезу Навье [66] о пропорциональности общей скорости на границе контакта жидкости и газа скорости сдвига вначале для случая при кольцевом течении жидкости и газа при постоянной вязкости газа из (2.21) с учетом (2.45), для коэффициента проскальзывания получим

$$b = R \frac{\varepsilon \xi (2 - \xi)}{2(1 - \xi)} [1 - f(1 - \varepsilon)]. \quad (2.46)$$

При $f = 1$ уравнение (2.46) переходит в уравнение (2.42).

Теперь рассмотрим случай с переменной вязкостью пристенного слоя. Из уравнения (2.27) с учетом гипотезы Навье для коэффициента проскальзывания и (2.45) получим

$$b = R \left\{ \frac{(1 - f) \xi (2 - \xi)}{2(1 - \xi)} + \frac{f \xi}{(1 - \xi)(\ln \varepsilon)^2} [\ln \varepsilon^e \exp(1 - \varepsilon) - (1 - \xi) \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon)] \right\}. \quad (2.47)$$

При $f = 1$ уравнение (2.47) переходит в уравнение (2.43).

Уравнение (2.47) упрощается, если пренебречь ξ^2 . В этом случае получим

$$b = R \left\{ \frac{\xi [(1 - f) \ln \varepsilon + f(\varepsilon - 1)]}{(1 - \xi) \ln \varepsilon} \right\}.$$

На рис. 2.53, 2.54 соответственно показаны зависимость толщины пристенного слоя от радиуса капилляра при различных значениях коэффици-

циента скольжения и коэффициента скольжения от толщины пристенного слоя при различной степени покрытия поверхности порового канала зародышами газовой фазы f ($R = 10^{-6}$ м).

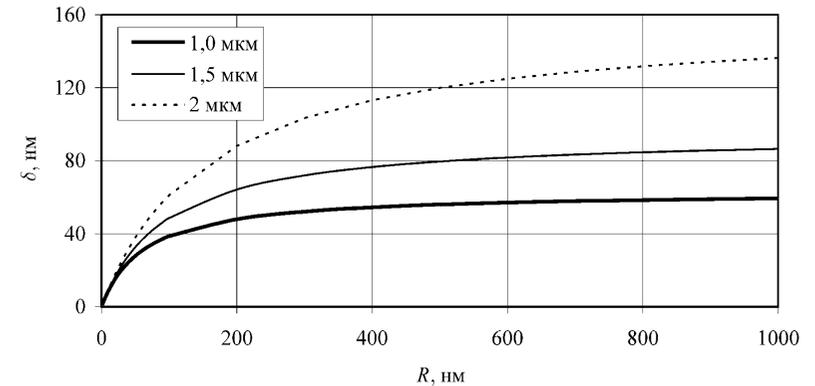


Рис. 2.53. Теоретическая зависимость толщины пристенного слоя от радиуса капилляра при различных значениях коэффициента скольжения

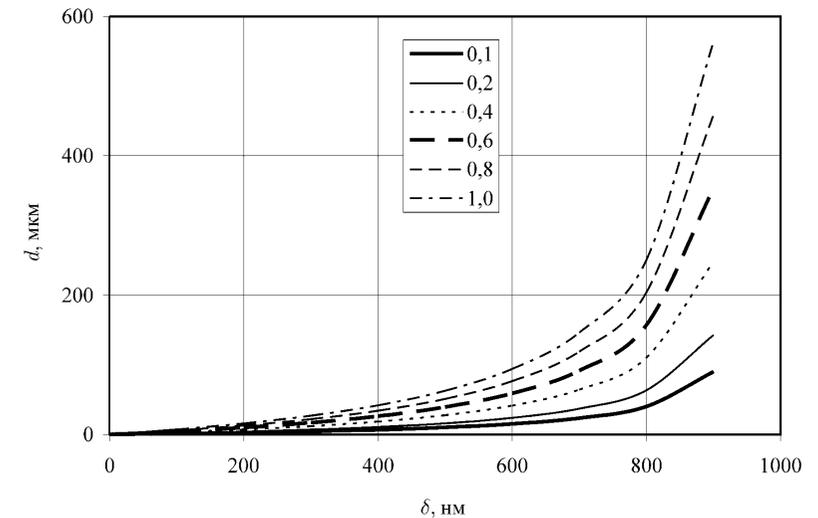


Рис. 2.54. Теоретическая зависимость коэффициента скольжения от толщины пристенного слоя при различной степени покрытия поверхности порового канала зародышами газовой фазы f

Как видно из рис. 2.53, каждому значению коэффициента проскальзывания соответствует определенная толщина пристенного слоя, которая возрастает с ростом коэффициента проскальзывания. С уменьшением радиуса капилляра коэффициент проскальзывания, генерируемый фиксированной толщиной газонасыщенного пристенного слоя, возрастает. Кроме того, при относительно низких значениях радиуса капилляра (менее 200 нм) коэффициент проскальзывания сильно влияет на толщину пристенного слоя. Из рис. 2.54 видно, что при относительно низких толщинах пристенного слоя коэффициент проскальзывания изменяется незначительно и сильно возрастает при $\delta > 800$ нм. При снижении толщины пристенного слоя для достижения одного и того же коэффициента проскальзывания требуется более высокое значение f .

Пик расхода с учетом f наступает при

$$\xi = 1 - \frac{3f(a_0 + b_0) - \sqrt{9f^2(a_0 + b_0)^2 - 4(c_0 - fc_0 + 2fa_0)(2fc_0 - c_0 + 4fb_0)}}{2(2fc_0 - c_0 + 4fb_0)}. \quad (2.48)$$

При $f = 1$ уравнение (2.48) переходит в уравнение (2.44).

На рис. 2.55 показана зависимость относительной толщины пристенного слоя доставляющей максимум расхода жидкости от степени покрытия поверхности капилляра пузырьками газа. Как видно из рисунка, при $f > 0,15$ имеет место незначительное изменение ξ .

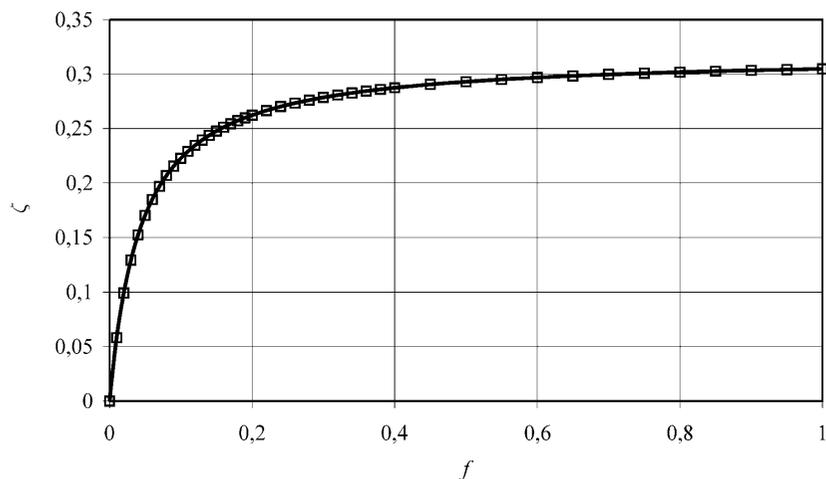


Рис. 2.55. Теоретическая зависимость относительной толщины пристенного слоя доставляющей максимум расхода жидкости от степени покрытия поверхности капилляра пузырьками газа

Как известно, с уменьшением радиуса капилляра его удельная поверхность увеличивается в отношении $\frac{R_2}{R_1}$ (R_2, R_1 – соответственно радиус

большого и меньшего капилляра). Естественно предположить, что и f со снижением радиуса капилляра увеличивается в той же пропорции, т. к. вероятность образования зародышей газовой фазы с увеличением удельной поверхности увеличивается. Принимая $f = 0,1$ при $R = 1$ мкм, получим $f = 0,2$ при $R = 0,5$ мкм и $f \approx 0,3$ при $R = 0,3$ мкм. На рис. 2.56 показана зависимость относительного расхода от толщины пристенного слоя при различном радиусе капилляра с учетом частичного проскальзывания (здесь и далее $\varepsilon = 65$). Как видно из рисунка, снижение радиуса капилляра приводит к росту пика относительного расхода, причем пик расхода смещается в сторону меньших толщин пристенного слоя. На рис. 2.57 показана зависимость относительного расхода от ξ при различном радиусе капилляра с учетом частичного проскальзывания. Как видно из рисунка, пик расхода наступает практически при одном и том же $\xi \approx 0,3$, вне зависимости от радиуса капилляра.

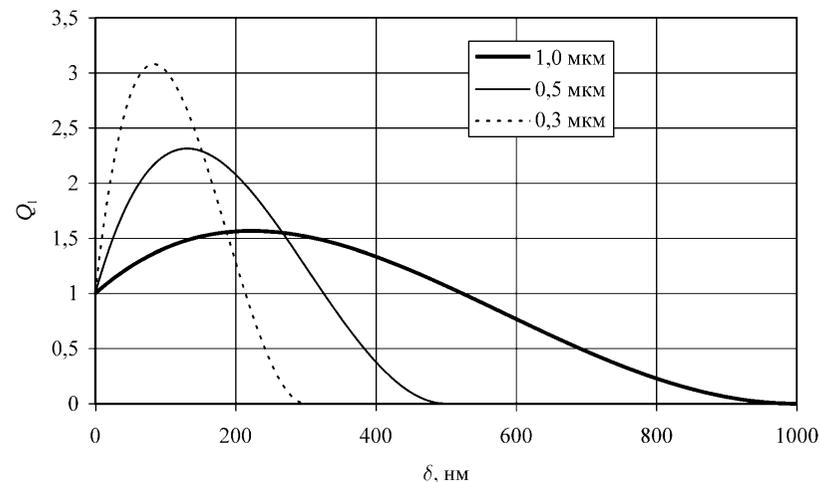


Рис. 2.56. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\delta)$ при различном радиусе капилляра и частичном проскальзывании

Для определения зависимости расхода жидкости от давления воспользуемся уравнением (2.12). Действительно, $\beta \sim C$ (см. 2.1.1), где C – объемная концентрация зародышей газовой фазы, тогда для зависимости

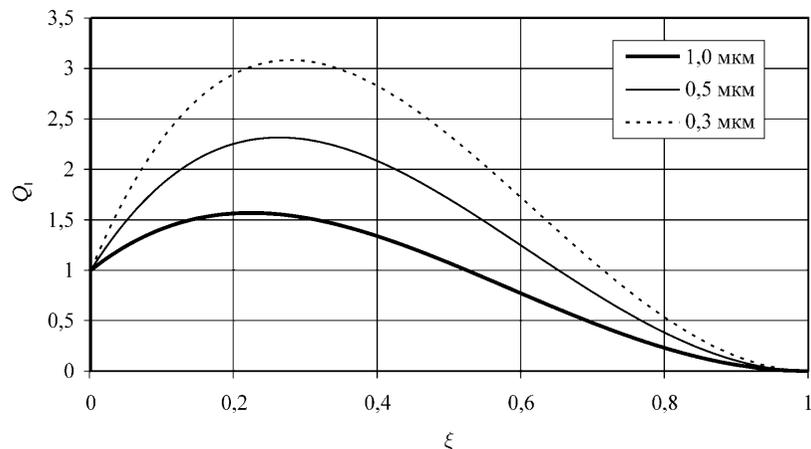


Рис. 2.57. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\xi)$ при различном радиусе капилляра и частичном проскальзывании

объемной концентрации от давления согласно уравнению (2.12) можем записать:

$$C = C_0 \exp\left(-\alpha \frac{P - P_c}{P_c}\right), \quad (2.49)$$

где C_0 – концентрация при $P = P_c$, где P_c – давление насыщения, $\alpha = \frac{1}{f}$ – постоянный коэффициент, характеризующий степень покрытия поверхности порового канала зародышами газовой фазы. Из уравнения (2.49) получим

$$\frac{P}{P_c} = 1 - f \ln \frac{C}{C_0}.$$

Вместе с тем объемная концентрация пристенного слоя может быть определена следующим образом:

$$C = f \frac{\pi R^2 l - \pi R_0^2 l}{\pi R^2 l} = f [2\xi - \xi^2], \quad (2.50)$$

где l – длина капилляра.

Таким образом, используя уравнения (2.49) и (2.50) из (2.41) и (2.47), можем найти зависимость расхода жидкости от давления при условии, что перепад давления относительно низкий и градиент давления по течению

жидкости постоянен. На рис. 2.58 показана зависимость относительного расхода от уровня давления при различных радиусах капилляра. Как видно из рисунка, предложенная модель удовлетворительно описывает экспериментальные результаты. Действительно, с уменьшением радиуса капилляра (проницаемости пористой среды) пик расхода жидкости снижается, смещаясь к давлению насыщения, снижается и давление начала роста расхода жидкости P_s .

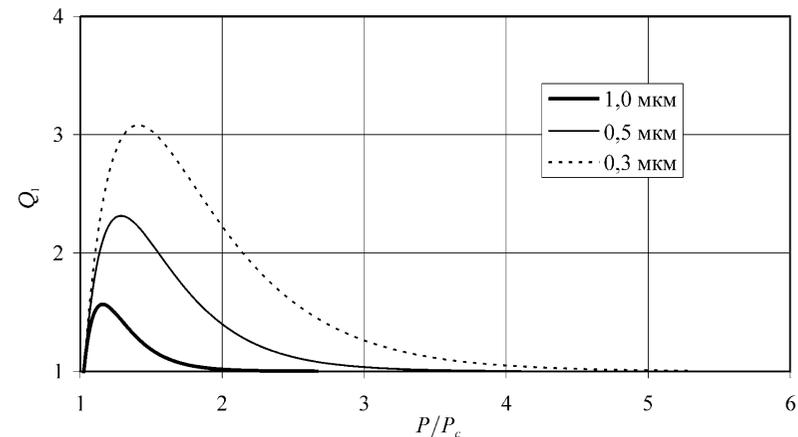


Рис. 2.58. Теоретическая зависимость относительного расхода жидкости от уровня давления при различном радиусе капилляра

Оценим объемную концентрацию газовой фазы при толщине пристенного слоя, обеспечивающей максимум расхода жидкости ($\xi \approx 0,3$). Тогда согласно (2.50) $C = f(2\xi - \xi^2) = 0,51f$, т. е., если пристенный слой представлен только газом и покрывает всю поверхность капилляра ($f = 1$), объемная концентрация газовой фазы составит 51%. Учитывая, что экспериментальным результатам соответствуют значения $f = 0,05-0,3$, получим предельную оценку сверху для объемной концентрации $C = 1,6-14\%$. Как отмечено выше, пристенный слой представлен смесью жидкости и нанопузырьков газа (при плотной упаковке [33]), при этом пузырьки, согласно работам [63–65], имеют морфологию сегмента сферы, причем их радиус кривизны значительно превышает высоту пузырька. Согласно [64] можно использовать следующее соотношение для радиуса кривизны: $R_c \approx 50\delta$ (принимая $\delta = h$), откуда радиус основания сегмента сферы согласно (2.37) составит $R_s \approx 10\delta$. Теперь определим внутреннюю поверхность капилляра

$S_k = 2\pi Rl$, площадь поверхности, занятую одним пузырьком, $S_b = \pi R_s^2$ и число пузырьков при плотной упаковке $N = \frac{S_k}{S_b} = \frac{2Rl}{R_s^2} \approx \frac{Rl}{50\delta^2}$. Объем пузырька, согласно [64], оценим из выражения $V_b = \frac{1}{3}\pi\delta^2(3R_c - \delta) \approx \frac{149}{3}\pi\delta^3$.

Объем капилляра составит $V_k = \pi R^2l$. Объемную концентрацию оценим из выражения

$$C = f \frac{V_b N}{V_k} \approx f \frac{\delta}{R} = f \xi. \quad (2.51)$$

Таким образом, если вся поверхность капилляра покрыта зародышами газовой фазы ($f=1$), объемная концентрация газовой фазы составит около 30%. Предельная оценка снизу для объемной концентрации ($f=0,05-0,3$) составит $C=0,9-8\%$, т. е. даже при очень низких объемных концентрациях газовой фазы возможно значительное увеличение расхода жидкости.

Для определения влияния добавок анионного ПАВ, вызывающих улучшение смачиваемости поверхности порового канала, запишем выражение для концентрации зародышей газовой фазы в зависимости от смачиваемости согласно [32]:

$$C = \exp\left(-\frac{W_h}{kT}\right), \quad (2.52)$$

где W_h – работа гетерогенного образования зародышей газовой фазы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Как видно из (2.52), (2.17) и (2.18), с улучшением смачиваемости работа гетерогенного образования зародышей газовой фазы возрастает, а концентрация снижается. Естественно это, при прочих равных условиях, приводит к снижению расхода жидкости. Этот вывод подтверждается также данными работы [74], где показано, что адсорбция ПАВ на поверхности канала приводит к значительному (более чем в 3 раза) снижению коэффициента проскальзывания. В рамках предложенной модели влияние добавок ПАВ может быть учтено, согласно (2.51), уменьшением f .

Неньютоновская жидкость.

Рассмотрим движение неньютоновской (степенной) жидкости в капилляре при наличии пристенного слоя газа. Определяя постоянную a_{21} из (2.29) при следующем граничном условии:

$$v = -b \frac{dv}{dr}, \quad r = R_0,$$

для скорости течения жидкости получим

$$v = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l}\right)^{\frac{1}{n}} R_0^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \frac{n+1}{n} \frac{b}{R_0}\right]$$

и для расхода:

$$Q = \left(\frac{\pi n}{3n+1}\right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l}\right)^{\frac{1}{n}} R_0^{\frac{1}{n+3}} \left[1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b}{R_0}\right].$$

Относительный расход жидкости примет вид

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{\pi n}{3n+1}\right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\frac{1}{n+3}} \left[1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b}{R_0}\right]$$

или

$$Q_1 = (1-\xi)^{\frac{1}{n+3}} \left[1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b}{R(1-\xi)}\right]. \quad (2.53)$$

Используя, как показано выше, гипотезу Навье к уравнению (2.31), выражаем коэффициент проскальзывания через толщину пристенного слоя и радиус капилляра – получим уравнение (2.42), где ε определяется уравнением (2.33).

Для случая с переменной вязкостью, применяя гипотезу Навье к уравнению (2.35), для коэффициента проскальзывания получим уравнение (2.43), где ε также определяется уравнением (2.33), т. е. решение в обоих случаях совпадает с аналогичным для ньютоновской жидкости. Подставляя выражения для коэффициентов проскальзывания в уравнение (2.53), получим уравнения (2.32) и (2.36) соответственно. Таким образом, и в случае неньютоновской жидкости кольцевое течение жидкости и пристенного слоя идентично течению с проскальзыванием при неподвижном граничном слое с коэффициентом проскальзывания, определяемым уравнениями (2.42) или (2.43).

Пик расхода жидкости наступает при

$$\xi = 1 - \frac{\frac{2n+1}{n}(a_0 + b_0) - \sqrt{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 (a_0 + b_0)^2 - 4 \frac{n+1}{n} a_0 \left(c_0 + \frac{3n+1}{n} b_0\right)}}{2 \left(c_0 + \frac{3n+1}{n} b_0\right)}, \quad (2.54)$$

где $a_0 = \ln \varepsilon^c \exp(1 - \varepsilon)$, $b_0 = \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon)$, $c_0 = (\ln \varepsilon)^2$, ε определяется уравнением (2.33). При $n=1$ уравнение (2.54) переходит в уравнение (2.44). Анализ выражения (2.54) показывает, что с ростом n (при прочих равных условиях) ξ возрастает. Причем при $n \rightarrow 0$ $\xi \rightarrow 0$, а при $n \rightarrow \infty$ $\xi \rightarrow 0,5$ ($\varepsilon \rightarrow \infty$). Для обычных на практике значений $n = 0,5 \div 2$, $\xi = 0,23 \div 0,37$ при $\varepsilon \approx 30 \div 200$.

В рассматриваемом случае вязкость жидкости на границе раздела жидкость–пристенный слой зависит от градиента давления (см. уравнение (2.33)). В связи с этим относительный расход жидкости при прочих равных условиях также зависит от градиента давления. На рис. 2.59 и 2.60 показаны соответственно зависимости максимума относительного расхода жидкости и толщины пристенного слоя доставляющей максимум относительного расхода от градиента давления при различных n .

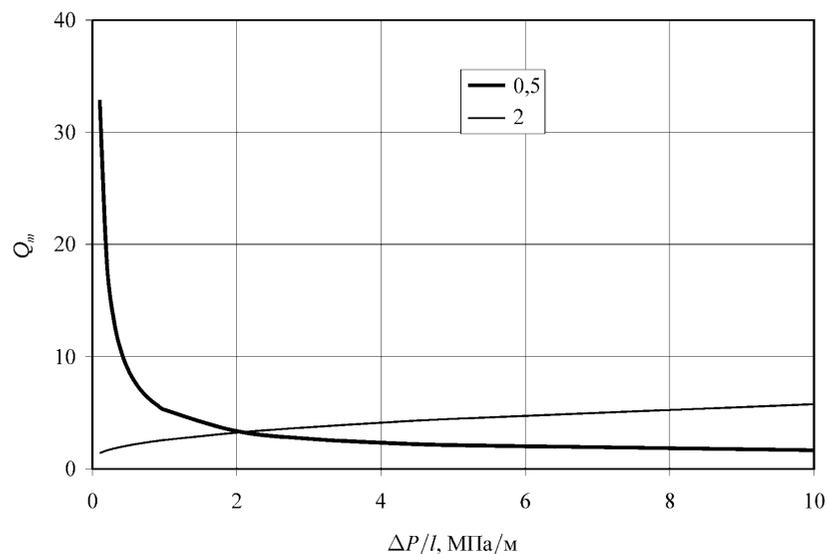


Рис. 2.59. Теоретическая зависимость относительного расхода жидкости от градиента давления при различных n

Как видно из рисунков, пик относительного расхода жидкости и толщина пристенного слоя, доставляющая максимум относительного расхода, снижаются с увеличением градиента давления для псевдопластичных и увеличиваются для дилатантных жидкостей. Это объясняется тем, что вязкость на границе раздела жидкость–пристенный слой для псевдопла-

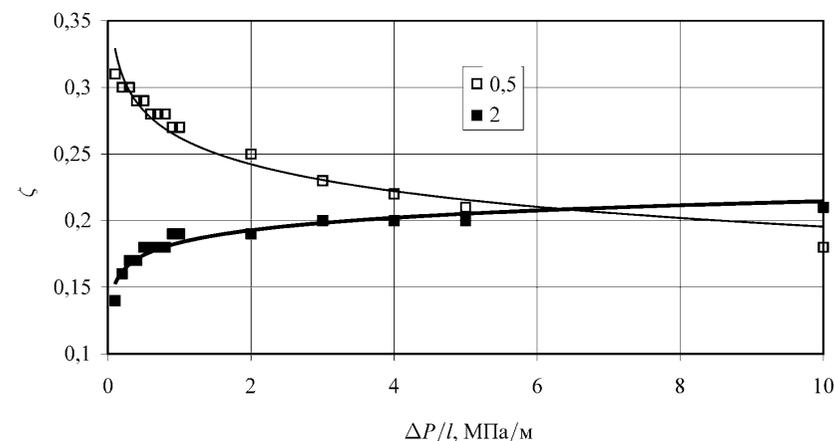


Рис. 2.60. Теоретическая зависимость относительной толщины пристенного слоя доставляющей максимум расхода жидкости от градиента давления при различных n

стичных жидкостей с увеличением градиента давления снижается, а для дилатантных растет, т. е. в первом случае средняя вязкость жидкости с увеличением градиента давления стремится к средней вязкости пристенного слоя, а во втором – наоборот (см. рис. 2.61).

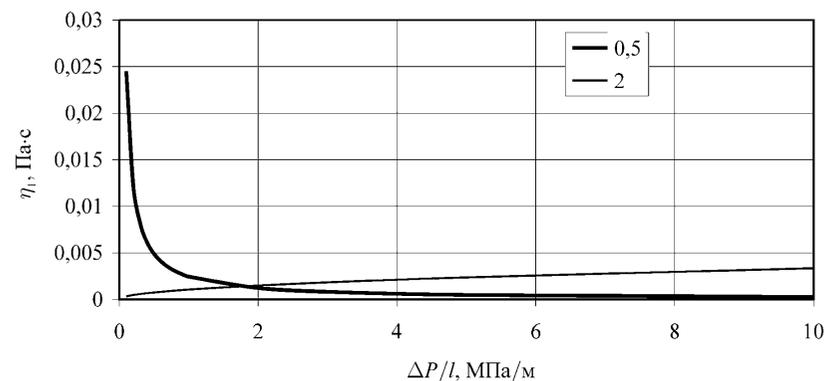


Рис. 2.61. Теоретическая зависимость вязкости на границе раздела жидкость–пристенный слой от градиента давления при различных n

Указанный эффект также хорошо виден по изменению вязкости пристенного слоя по радиусу капилляра, показанному на рис. 2.62 и 2.63.

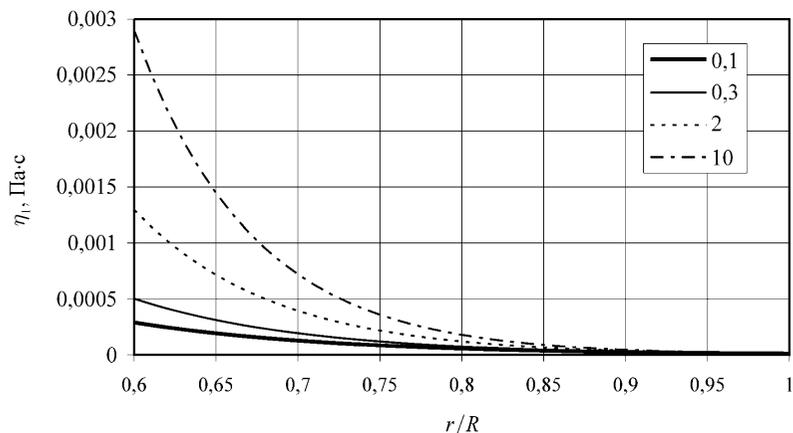


Рис. 2.62. Изменение вязкости пристенного слоя по радиусу капилляра при различных градиентах давления (МПа/м) для дилатантной жидкости ($n = 2, R_0 / R = 0.6$)

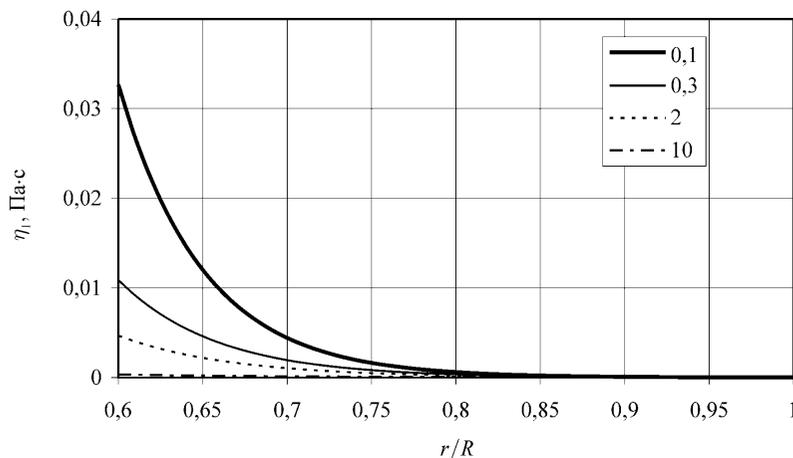


Рис. 2.63 Изменение вязкости пристенного слоя по радиусу капилляра при различных градиентах давления (МПа/м) для псевдопластичной жидкости ($n = 0.5, R_0 / R = 0.6$)

Для определения коэффициента проскальзывания в условиях частичного проскальзывания воспользуемся уравнением (2.45), где v_s определяется уравнением (2.31), а v_0 в данном случае скорость течения для сте-

пенной жидкости без проскальзывания:

$$v_0 = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right]. \quad (2.55)$$

Используя гипотезу Навье, для случая с постоянной вязкостью пристенного слоя получим

$$b = R \left\{ f \frac{\varepsilon \xi (2 - \xi)}{2(1 - \xi)} + (1 - f) \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[\frac{1 - (1 - \xi)^{\frac{1}{n+1}}}{(1 - \xi)^{\frac{1}{n}}} \right] \right\}, \quad (2.56)$$

где ε определяется уравнением (2.33). При $n=1$ уравнение (2.56) переходит в уравнение (2.46).

Для случая с переменной вязкостью пристенного слоя получим

$$b = R \left\{ \left(\frac{n}{n+1} \right) \frac{(1 - f) \left[1 - (1 - \xi)^{\frac{1}{n+1}} \right]}{(1 - \xi)^{\frac{1}{n}}} + \frac{f \xi}{(1 - \xi)(\ln \varepsilon)^2} \left[\ln \varepsilon^\varepsilon \exp(1 - \varepsilon) - (1 - \xi) \ln \varepsilon \exp(1 - \varepsilon) \right] \right\}, \quad (2.57)$$

где ε определяется уравнением (2.33). При $n=1$ уравнение (2.57) переходит в уравнение (2.47).

Анализ уравнения (2.57) показывает, что характер зависимостей $\delta(R)$ и $b(\delta)$ для степенной жидкости не изменяется и соответствует аналогичным зависимостям для ньютоновской жидкости (рис. 2.53, 2.54). Вместе с тем т. к. для степенной жидкости ε зависит от градиента давления, то, при прочих равных условиях, коэффициент проскальзывания для псевдопластичных жидкостей при относительно низких градиентах давления (менее 2 МПа/м) выше, а при относительно высоких ниже, чем для дилатантных жидкостей.

Величину ξ , доставляющую пик расхода с учетом частичного проскальзывания для различных значений n , можно определить из следующе-

го выражения

$$\left[\frac{c_0}{n} + \frac{3n+1}{n^2} b_0 f - \frac{3n+1}{n+1} c_0 (1-f) \right] (1-\xi)^2 - \frac{2n+1}{n^2} (a_0 + b_0) f (1-\xi) + \frac{2}{n+1} c_0 (1-f) (1-\xi)^{\frac{1}{n}} + \frac{n+1}{n^2} a_0 f = 0, \quad (2.58)$$

где $a_0 = \ln \varepsilon^e \exp(1-\varepsilon)$, $b_0 = \ln \varepsilon \exp(1-\varepsilon)$, $c_0 = (\ln \varepsilon)^2$, ε определяется уравнением (2.33). При $n=1$ уравнение (2.58) переходит в уравнение (2.48).

На рис. 2.64 показана зависимость относительной толщины пристенного слоя доставляющей максимум расхода жидкости от степени покрытия поверхности капилляра пузырьками газа при различных n . Как видно из рисунка, характер зависимости не изменяется для степенной жидкости.

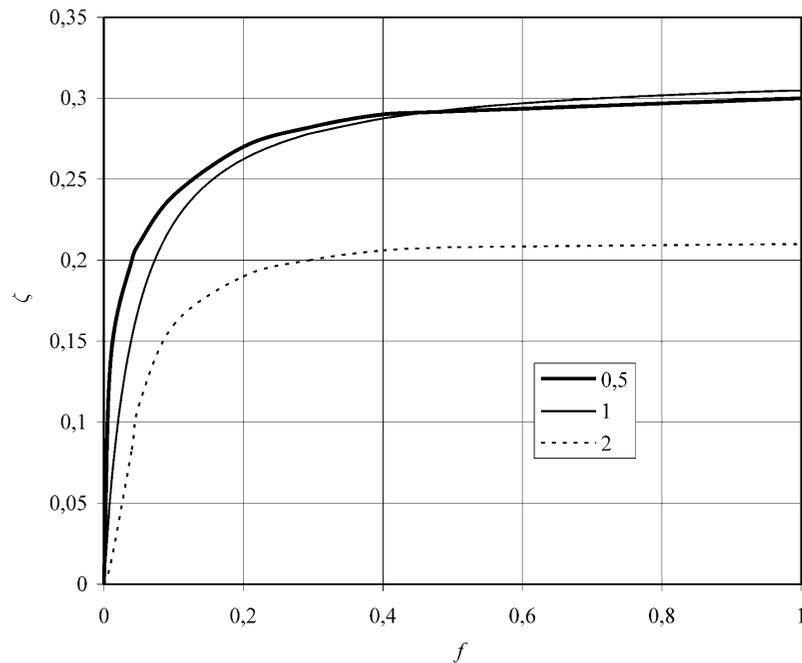


Рис. 2.64. Теоретическая зависимость относительной толщины пристенного слоя доставляющей максимум расхода жидкости от степени покрытия поверхности капилляра пузырьками газа при различных n ($R=1$ мкм, $\Delta P/l=1$ МПа/м)

На рис. 2.65 и 2.66 показана зависимость относительного расхода от толщины пристенного слоя при различном радиусе капилляра с учетом частичного проскальзывания (по аналогии с ньютоновской жидкостью $f=0,1$ при $R=1$ мкм, $f=0,2$ при $R=0,5$ мкм и $f \approx 0,3$ при $R=0,3$ мкм) соответственно для $n=0,5$ и 2. На рис. 2.67 и 2.68 показана зависимость относительного расхода от ξ при различном радиусе капилляра с учетом частичного проскальзывания соответственно для $n=0,5$ и 2. Как видно из рисунков, для степенной жидкости сохраняются те же закономерности, что и для ньютоновской жидкости (см. рис. 2.56, 2.57).

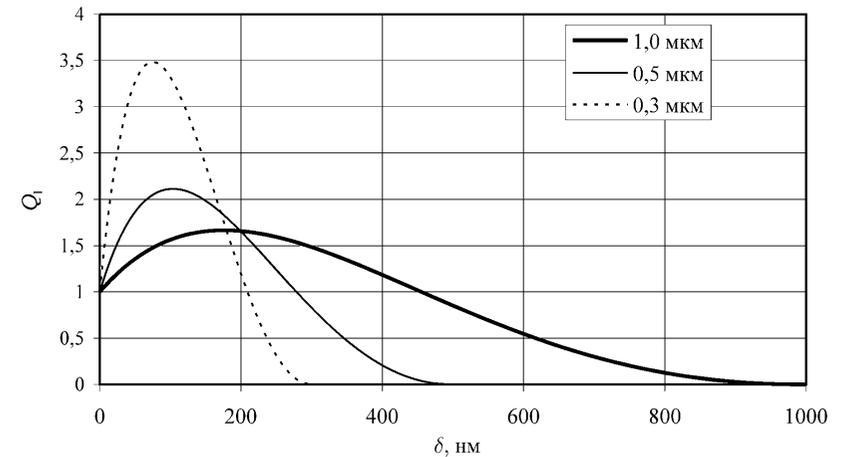


Рис. 2.65. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\delta)$ при различном радиусе капилляра и частичном проскальзывании для псевдопластичной жидкости ($n=0,5$, $\Delta P/l=10$ МПа/м)

Очевидно, что и для степенной жидкости зависимость относительного расхода от уровня давления соответствует аналогичной для ньютоновской жидкости (рис. 2.58); справедливы для степенной жидкости также и оценки объемной концентрации газовой фазы, приведенные для ньютоновской жидкости.

Интерес представляет влияние эффекта проскальзывания на зависимость $\Delta P(Q)$ для степенной жидкости. На рис. 2.69 и 2.70 показаны зависимости $\Delta P(Q)$ соответственно для псевдопластичной и дилатантной жидкостей с наличием и отсутствием эффекта проскальзывания. Как видно из рис. 2.69, полученные результаты качественно описывают экспериментальные результаты для псевдопластичной жидкости (см. рис. 2.24 и 2.25).

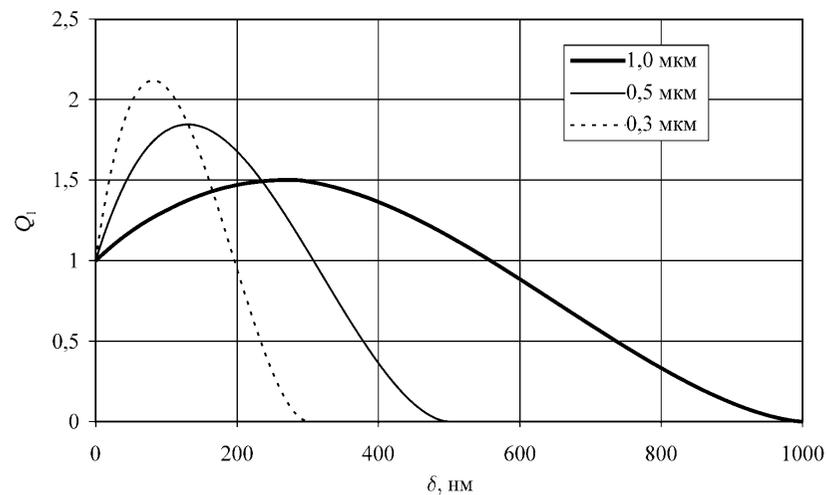


Рис. 2.66. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\delta)$ при различном радиусе капилляра и частичном проскальзывании для дилатантной жидкости ($n = 2$, $\Delta P/l = 1$ МПа/м)

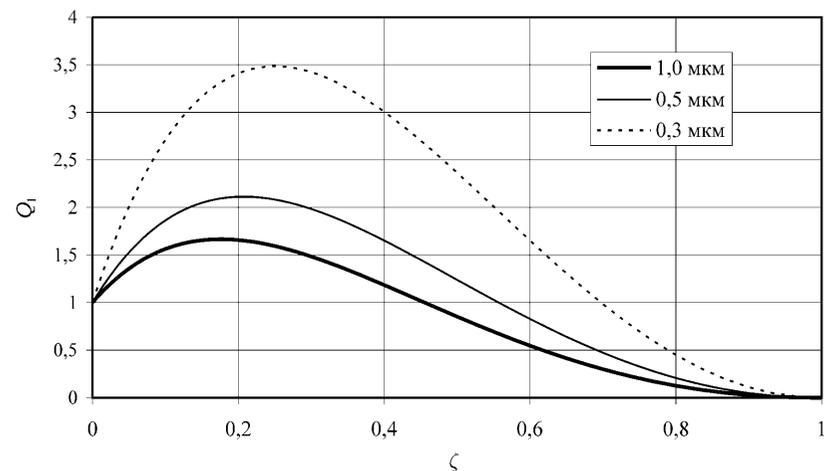


Рис. 2.67. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\zeta)$ при различном радиусе капилляра и частичном проскальзывании для псевдопластичной жидкости ($n = 0,5$, $\Delta P/l = 10$ МПа/м)

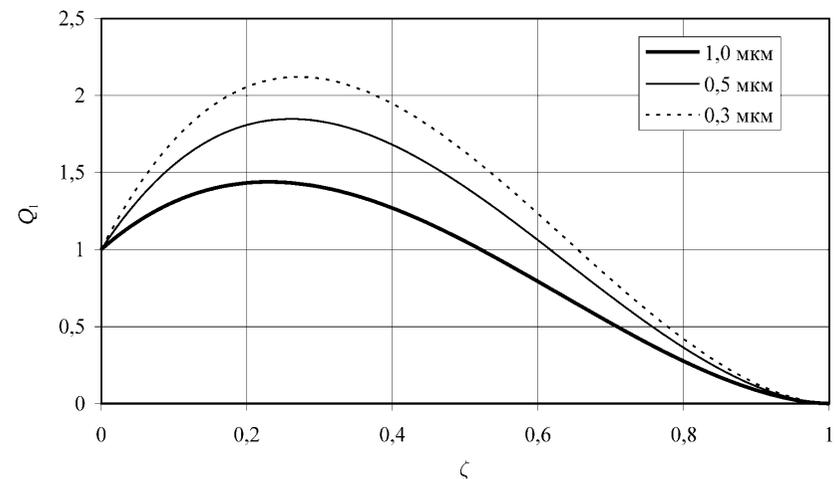


Рис. 2.68. Теоретическая зависимость $Q_1 = f(\zeta)$ при различном радиусе капилляра и частичном проскальзывании для дилатантной жидкости ($n = 2$, $\Delta P/l = 1$ МПа/м)

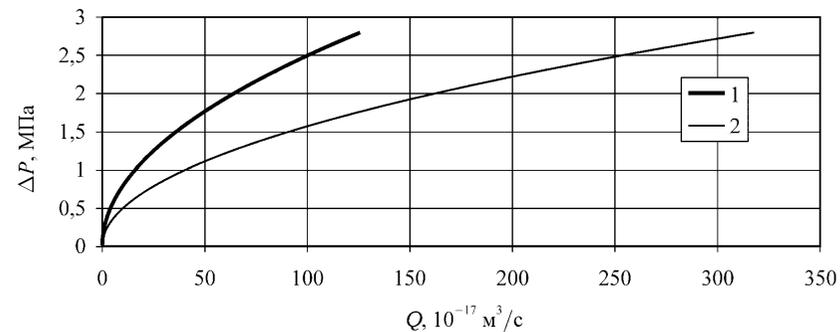


Рис. 2.69 Теоретическая зависимость $\Delta P = f(Q)$ для псевдопластичной жидкости ($n = 0,5$, $R = 1$ мкм, $f = 0,1$, $\Delta P/l = 1,5$ МПа/м): 1 – без проскальзывания, 2 – с проскальзыванием

б) Механизм обнаруженных эффектов

Резюмируя, можно заключить, что эффект проскальзывания объясняет эффекты, обнаруженные экспериментальными исследованиями. Можно предложить следующий механизм наблюдаемых явлений. В процессе фильтрации газированной (ньютоновской и неньютоновской) жидкости

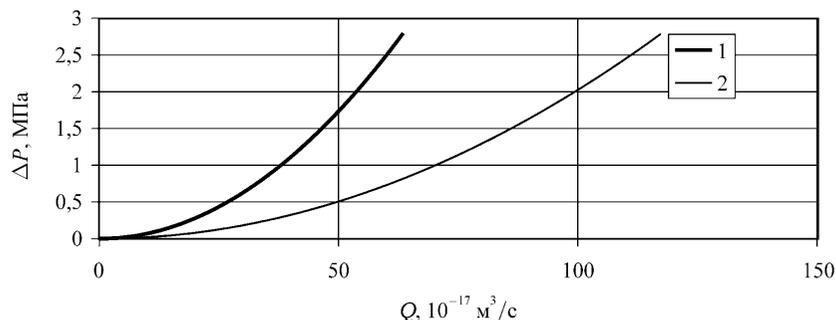


Рис. 2.70 Теоретическая зависимость $\Delta P = f(Q)$ для дилатантной жидкости ($n=2$, $R=1$ мкм, $f=0,1$, $\Delta P/l=1,5$ МПа/м): 1 – без проскальзывания, 2 – с проскальзыванием

в докритической области на поверхности поровых каналов, при краевом угле смачивания $\theta > 0^\circ$, происходит образование стабильных зародышей газовой фазы, размер которых оценивается в 1–100 нм, образующих пристенный слой, что приводит к эффекту проскальзывания и увеличению расхода жидкости при снижении давления к давлению насыщения. Вместе с тем при снижении давления к давлению насыщения происходит уменьшение пропорциональной расходу площади потока жидкости нормальной к направлению течения, ввиду увеличения размера зародышей газовой фазы [1, 5]. Конкуренция этих двух эффектов (см., например, анализ уравнения (9)) приводит к тому, что зависимость расхода жидкости, приведенного к расходу по Дарси (относительного расхода), от давления имеет немонотонный характер, достигая максимума в различных случаях при $\frac{P}{P_c} = 1,1-1,5$.

Очевидно, до достижения максимума преобладает эффект проскальзывания, а дальнейшее снижение относительного расхода до 1 при $\frac{P}{P_c} = 1$ связа-

но с преобладанием уменьшения живого сечения поровых каналов за счет увеличения толщины газонасыщенного пристенного слоя. Следует отметить, что максимум относительного расхода достигается при относительно низких насыщенных порового объема газом $C = 0,9-8\%$. Дальнейшее снижение относительного расхода жидкости при давлении ниже давления насыщения, когда он становится меньше 1, можно объяснить выделением свободной газовой фазы и проявлением эффекта Жамена [75, 76] при закупорке поровых каналов макропузырьками газовой фазы. Этот эффект также может достигаться при относительно низких значениях газонасыщен-

ности порового объема. Так, расчет по данным работы [77], где приводятся эксперименты по течению жидкости в микрокапиллярах с пузырьком газа, полностью перекрывающим его сечение, показывает, что объемная концентрация газа при этом составляет всего 1,5%, в то время как расход жидкости по сравнению с расходом по Пуазейлю снижается в два раза.

Усиление эффекта проскальзывания со снижением проницаемости пористой среды объясняется увеличением степени покрытия поровых каналов зародышами газовой фазы, которая возрастает в связи с увеличением удельной поверхности пористой среды (см. анализ рис. 2.56). При этом влияние эффекта проскальзывания на расход жидкости начинается при более высоких давлениях, при более высоких давлениях достигается пик относительного расхода, выше и значение самого пика. Усиление эффекта проскальзывания с увеличением газонасыщенности жидкости также можно объяснить, при прочих равных условиях, увеличением степени покрытия поровых каналов зародышами газовой фазы.

Ослабление эффекта проскальзывания при добавке анионного ПАВ вызывающего улучшение смачиваемости поверхности порового канала объясняется снижением степени покрытия поровых каналов зародышами газовой фазы. При этом влияние эффекта проскальзывания на расход жидкости начинается при более низких давлениях, при более низких давлениях достигается пик относительного расхода, ниже и значение самого пика.

Следует отметить, что при рассмотрении эффекта проскальзывания нами была принята гипотеза о том, что адсорбирующиеся в пористой среде зародыши газовой фазы удерживаются пористой средой и в основном неподвижны [55, 78]. В пользу этой гипотезы говорит и тот экспериментальный факт [79], что при фильтрации газоконденсатной смеси при давлении выше давления начала конденсации происходит значительное увеличение расхода газа (\approx на 50%). Действительно, если принять кольцевой режим течения газоконденсатной смеси, то при подвижной пристенной жидкой фазе, согласно уравнению (2.22), при $\varepsilon < 1$ должно происходить снижение расхода газа. Поэтому полученный эффект также может быть объяснен эффектом проскальзывания газа.

Механизм нестационарной фильтрации газированных жидкостей в докритической области рассмотрен в 2.4.3.

2.4. Моделирование фильтрации газированной жидкости в докритической области

Как показано в предыдущем параграфе, объяснение аномального увеличения расхода жидкости при фильтрации газированной жидкости в предпереходном фазовом состоянии возможно с привлечением кольце-

вой схемы и эффекта проскальзывания жидкости относительно поверхности порового канала. В работе [82] было рассмотрено течение в пористой среде на основе кольцевой схемы течения газированной жидкости, при этом расход не зависит от проницаемости пористой среды, что не подтверждается экспериментом. Вместе с тем, как показано в предыдущем параграфе, эффект проскальзывания физически более предпочтителен для объяснения рассматриваемых явлений. Однако переход к пористой среде с использованием выведенного в предыдущем параграфе уравнения для коэффициента проскальзывания требует определения зависимости всех входящих параметров (толщина пристенного слоя, степень покрытия капилляра зародышами газовой фазы и т. д.) от давления, что в общем случае достаточно сложно. Вместе с тем задача может быть решена введением экспериментальной зависимости коэффициента проскальзывания от давления.

В данном параграфе построено аналитическое решение задачи стационарной фильтрации газированной жидкости на основе введения экспериментальной зависимости коэффициента проскальзывания от давления и проведено его сопоставление с экспериментом.

2.4.1. Стационарная прямолинейная фильтрация

а) Фильтрация газированной ньютоновской жидкости

При фильтрации газированной жидкости обычно считается, что для жидкости и газа можно записать уравнение Дарси в виде

$$mS_i v_i = -\frac{k_0 K_i}{\eta_i} \nabla P. \quad (2.59)$$

Здесь k_0 , K_i , S_i , η_i – соответственно абсолютная проницаемость пористой среды, относительная проницаемость, насыщенность, пористость и динамическая вязкость флюида.

Уравнение (2.59) соответствует такому течению в пористой среде, когда жидкость и газ совершенно равноправны. Можно представить, что движение жидкости или газа происходит в некой системе непрерывных каналов, заполненных либо жидкостью, либо газом. Однако если содержание одной из фаз (например, газа) мало, то представление о равноправности жидкости и газа, зафиксированное в уравнении (2.59), перестает быть верным [83]. В этом случае пористая среда занята в основном жидкостью с изолированными газовыми пузырьками (зародышами).

В связи с вышеописанным, газированная жидкость при давлении выше давления насыщения может быть представлена как однородная несжимаемая жидкость, эффективная проницаемость для которой определя-

ется проскальзыванием. Тогда решение стационарной задачи для одномерного случая сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= 0, \\ v &= -\frac{k(P)}{\eta} \frac{dP}{dx}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $k(P)$ – эффективная проницаемость.

Эффективная проницаемость при течении с проскальзыванием может быть определена из выражения:

$$k = k_0 \left(1 + \frac{4b}{R} \right), \quad (2.61)$$

где b – коэффициент проскальзывания, R – средний радиус порового канала, определяемый из выражения

$$R = \sqrt{\frac{8k_0}{m}}.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае коэффициент проскальзывания является функцией давления. В первом приближении выражение (2.61) можно записать в виде [55]:

$$k(P) = k_0 \left[1 + \frac{4b(P)}{R} \right].$$

Функция $b(P)$ определялась нами по экспериментальным данным, приведенным на рис. 2.18 ($C = 0\%$), при этом коэффициент проскальзывания при фиксированном давлении оценивался из выражения

$$b = (Q_1 - 1) \frac{R}{4}.$$

На рис. 2.71 показана зависимость коэффициента проскальзывания от давления. Как видно из рисунка, зависимость носит немонотонный характер.

Полученная экспериментальная зависимость описывается следующей эмпирической моделью:

$$b(P) = b_0 \left\{ a \left(\frac{P - P_c}{P_s - P_c} \right) \exp \left[-c \left(\frac{P - P_c}{P_s - P_c} \right) \right] \right\};$$

b_0 – некоторое фиксированное значение коэффициента проскальзывания (в данном случае $b_0 = 1,38 \cdot 10^{-6}$ м, т. е. при $P = 1,3P_c$); P_s – давление, при ко-

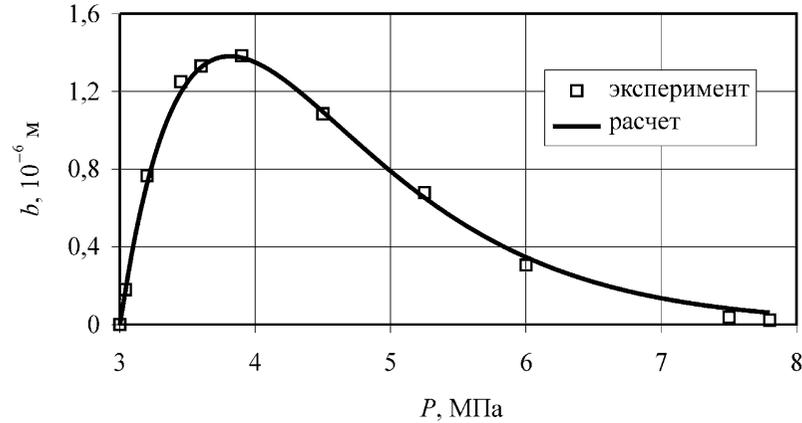


Рис. 2.71. Экспериментальная зависимость коэффициента проскальзывания от давления

тором начинается проскальзывание ($P_s \approx 2,6 P_c = 7,8$ МПа); a, c – постоянные численные коэффициенты (в данном случае $a \approx 16, c \approx 5,8$). Коэффициенты $a, c \sim 1/f$, где f – степень заполненности поверхности порового канала докритическими зародышами газовой фазы.

Таким образом, эффективная проницаемость при фильтрации с проскальзыванием может быть записана в виде [84,85]:

$$k(P) = k_0 \left\{ 1 + \frac{4b_0}{R} \left[a \frac{P - P_c}{P_s - P_c} \exp \left(-c \frac{P - P_c}{P_s - P_c} \right) \right] \right\}. \quad (2.62)$$

Рассмотрим стационарную фильтрацию вначале для случая, когда $P_0 > P_s > P_e \geq P_c$ (см. схему на рис. 2.72а). В этом случае имеются две области: в области $P_s < P < P_0$ имеет место фильтрация без проскальзывания, т. е. $k(P) = k_0$; в области $P_e \leq P < P_s$ имеет место фильтрация с проскальзыванием.

На основе системы уравнений (2.60) распределение давления для первой области может быть определено из выражения

$$P = P_0 - (P_0 - P_s) \frac{x}{x_s}.$$

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$\int_P^{P_s} k(P) dP = \frac{x - x_s}{l - x_s} \int_{P_e}^{P_s} k(P) dP. \quad (2.63)$$

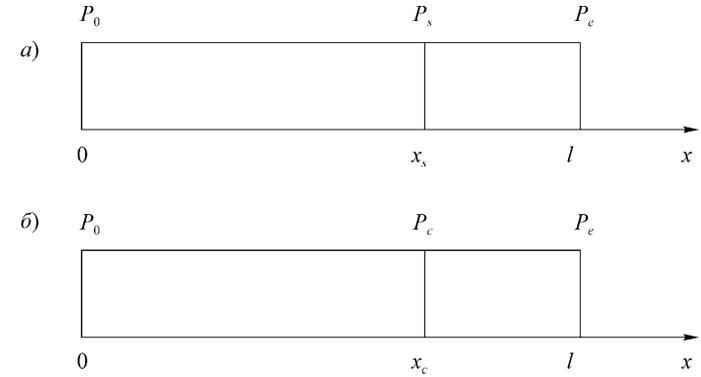


Рис. 2.72. Схема фильтрационного потока в пористой среде: а – для случая $P_0 > P_s > P_e \geq P_c$; б – для случая $P_s \geq P_0 > P_c > P_e$

На основе системы уравнений (2.60) распределение давления для первой области может быть определено из выражения

$$P = P_0 - (P_0 - P_s) \frac{x}{x_s}.$$

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$\int_P^{P_s} k(P) dP = \frac{x - x_s}{l - x_s} \int_{P_e}^{P_s} k(P) dP. \quad (2.63)$$

Для определения x_s , учитывая одномерность и неразрывность движения из системы (2.60), для первой области можем записать

$$- \int_{P_s}^{P_0} k_0 dP = \eta v \int_{x_s}^0 dx. \quad (2.64)$$

Для второй области:

$$- \int_{P_e}^{P_s} k(P) dP = \eta v \int_l^{x_s} dx. \quad (2.65)$$

Из (2.64) и (2.65) находим

$$x_s = l \left[1 + \left(\frac{\int_{P_e}^{P_s} k(p) dP}{\int_{P_e}^{P_s} k_0 dP} \right) / \left(k_0 (P_0 - P_s) \right) \right]^{-1}.$$

Для расхода жидкости из (2.64) или (2.65) получим

$$Q = \frac{k_0(P_0 - P_s)}{\eta x_s} F,$$

где F – площадь поперечного сечения пористой среды.

Расход жидкости по Дарси определится из выражения

$$Q_0 = \frac{k_0(P_0 - P_e)}{\eta l} F.$$

Для безразмерного (относительного) расхода жидкости получим

$$Q_1 = \frac{(P_0 - P_s)l}{(P_0 - P_e)x_s}. \quad (2.66)$$

Для случая когда $P_s \geq P_0 > P_e \geq P_c$ и эффект проскальзывания имеет место во всей области фильтрации, для расхода жидкости получим

$$Q = \frac{\int_{P_e}^{P_0} k(P) dP}{\eta l} F.$$

Распределение давления найдем из выражения

$$\int_P^{P_0} k(P) dP = \frac{x}{l} \int_{P_e}^{P_0} k(P) dP.$$

Для безразмерного расхода получим

$$Q_1 = \frac{\int_{P_e}^{P_0} k(P) dP}{k_0(P_0 - P_e)}. \quad (2.67)$$

Раскрывая интеграл $\int_{P_1}^{P_2} k(P) dP$, с учетом (2.62) получим

$$\int_{P_1}^{P_2} k(P) dP = k_0 \left\{ (P_2 - P_1) + \frac{4b_0}{R} \frac{a}{c^2} (P_s - P_c) \left[\exp\left(-c \frac{P_1 - P_c}{P_s - P_c}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + c \frac{P_1 - P_c}{P_s - P_c} \right) - \exp\left(-c \frac{P_2 - P_c}{P_s - P_c}\right) \left(1 + c \frac{P_2 - P_c}{P_s - P_c} \right) \right] \right\}.$$

Сопоставление представленного в работах [1, 2, 18] и в 2.1 экспериментального материала с полученными зависимостями показало, что предложенная модель хорошо согласуется с экспериментом.

На рис. 2.73 приведены экспериментальная (из работы [2] для системы трансформаторное масло – природный газ) и рассчитанная по формулам (2.66) и (2.67) зависимость безразмерного расхода от безразмерного давления (P/P_c) при $k_0 = 0,15 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$; $m = 0,2$; $b_0 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $a \approx 16,0$; $c \approx 5,8$. Как видно из рисунка, предложенная модель дает хорошее качественное и количественное описание экспериментальных данных.

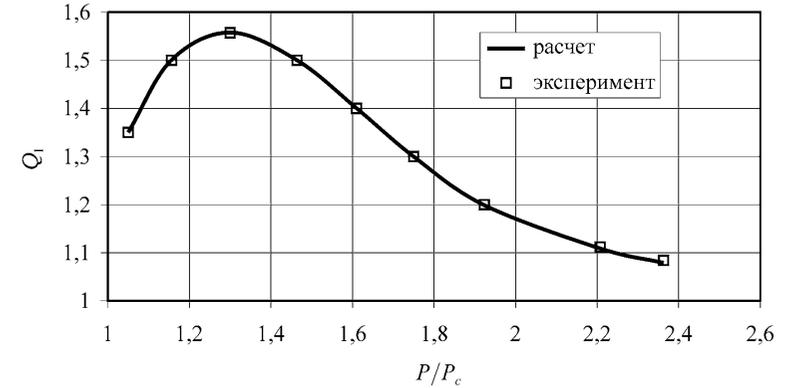


Рис. 2.73. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления

На рис. 2.74 приведены рассчитанные для случая $P_s \geq P_0 > P_e \geq P_c$ зависимости $\Delta P - Q$ по эксперименту с водогазовой смесью, приведенному в 2.1.3. Как видно из рисунка, и в данном случае предложенная модель дает хорошее качественное и количественное описание экспериментальных данных.

Как было отмечено выше, при различных сценариях изменения перепада давления возможно как преимущественно дилатантное (при постоянном давлении на выходе пористой среды), так и преимущественно псевдопластичное (при постоянном давлении на входе пористой среды) течение. При этом в обоих случаях при постоянном перепаде давления расход жидкости выше, чем по Дарси. Полученный эффект объясняется тем, что в первом случае с повышением перепада давления в основном происходит ослабление эффекта проскальзывания (P/P_c растет), а во втором, наоборот, усиление (P/P_c падает, приближаясь к 1). Следует отметить, что в обоих случаях вблизи давления насыщения после (а при $P_e - \text{const}$ – до) пикового

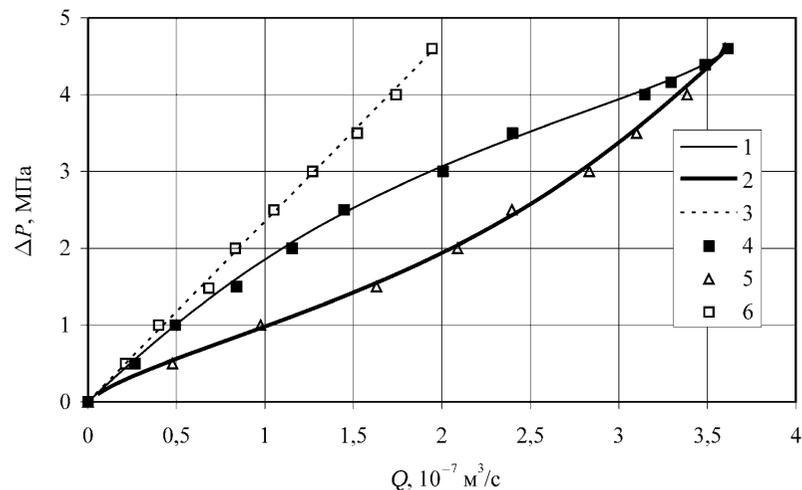


Рис. 2.74. Экспериментальные (4–6) и расчетные (1–3) зависимости $\Delta P - Q$: 1,4 с проскальзыванием при P_0 -const; 2,5 с проскальзыванием при P_e -const; 3,6 – по Дарси

расхода, где фильтрационное сопротивление более высокое, псевдопластичное течение сменяется дилатантным, при этом при P_0 -const преобладает псевдопластичное течение, а при P_e -const дилатантное. Вместе с тем, анализ зависимости безразмерного расхода от перепада давления при P_0 -const и P_e -const (рис.2.75) показывает, что зависимость $Q_1(\Delta P)$ при P_0 -const и P_e -const существенно отличаются, причем во втором случае указанная зависимость имеет немонотонный характер, а в первом характер роста с насыщением. Из рис. 2.75 видно, что при P_0 -const вышеуказанная смена режима фильтрации происходит при $\Delta P \approx 4$ МПа, а при P_e -const – при $\Delta P \approx 1,5$ МПа, что подтверждает наши рассуждения.

На рис. 2.76, 2.77 представлены результаты расчетов зависимости расхода и безразмерного расхода от перепада давления ΔP для системы н-гексан–углекислый газ применительно к экспериментальным данным [1]. Расчеты были проведены при следующих значениях определяющих параметров: $k_0 = 0,24 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$; $m = 0,2$; $P_0 = 10 \text{ МПа}$; $P_s = 3,8 \text{ МПа}$; $P_c = 3,2 \text{ МПа}$; $\eta = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $l = 6 \text{ м}$; $b_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $F = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$; $a \approx 400,0$; $c \approx 5,8$. Как видно из рисунков, и в данном случае предложенная модель дает хорошее качественное и количественное описание эксперимента.

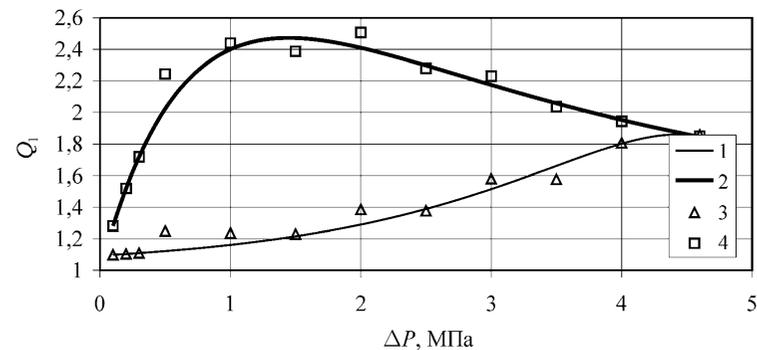


Рис. 2.75. Экспериментальные (3,4) и расчетные (1,2) зависимости $\Delta P - Q$: 1,3 с проскальзыванием при P_0 -const; 2,4 с проскальзыванием при P_e -const

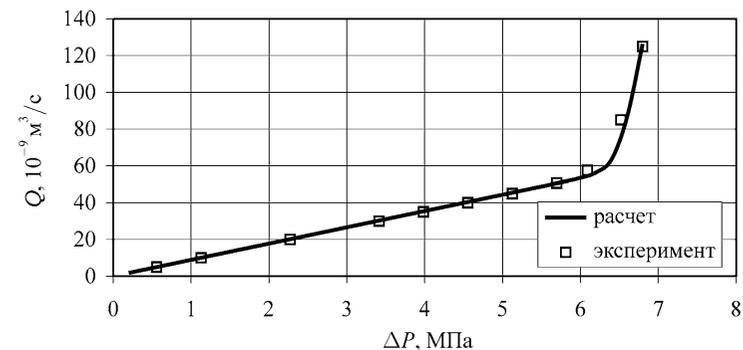


Рис. 2.76 Зависимость расхода жидкости от перепада давления

Влияние проницаемости может быть учтено, если в (2.62) принять $c = c_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{m}}$ и $a = a_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{m}}$, где m, a_1, c_1 – постоянные коэффициенты, k_2, k_1 ($k_2 < k_1$) – проницаемости пористой среды в различных опытах. На рис. 2.78–2.83 приведены результаты расчетов по экспериментам, представленным в 2.1.2, при $m = 3, a_1 = 17, c_1 = 6,2$ (b_0 определялось в точке максимума расхода жидкости, P_s выбиралось по его максимальному значению в экспериментах), а на рис. 2.84 по экспериментам, представленным в работах [86, 87]. Как видно из рисунков, предложенная модель дает хо-

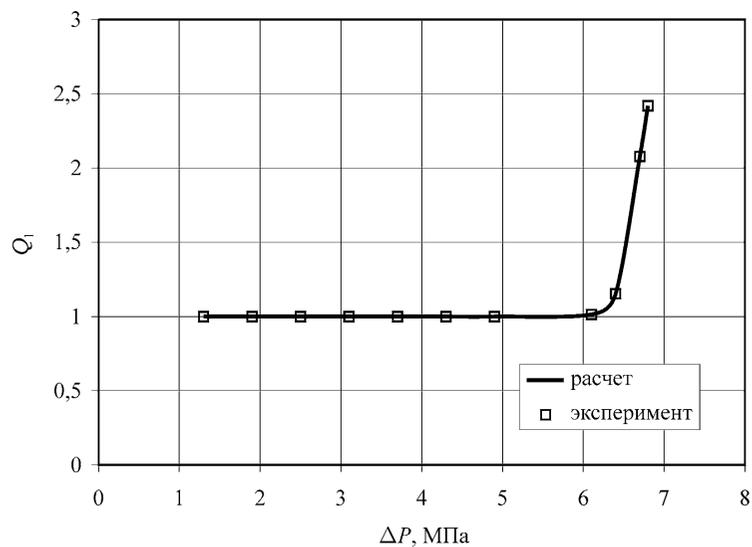


Рис. 2.77. Зависимость безразмерного расхода жидкости от перепада давления

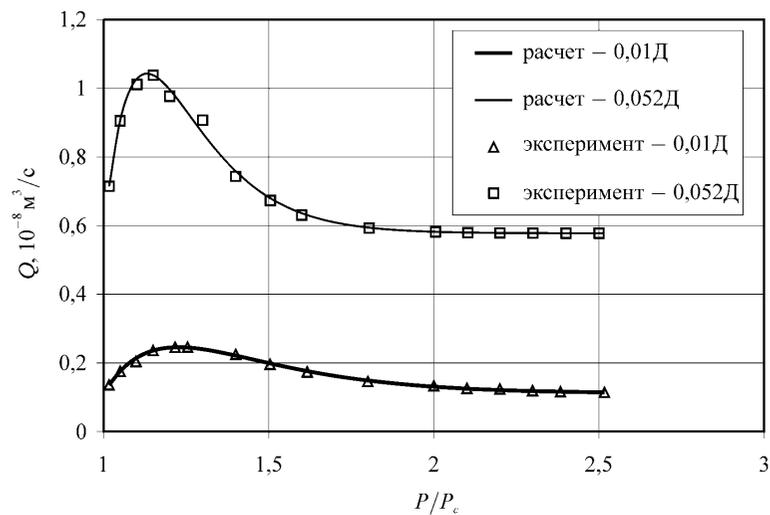


Рис. 2.78. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

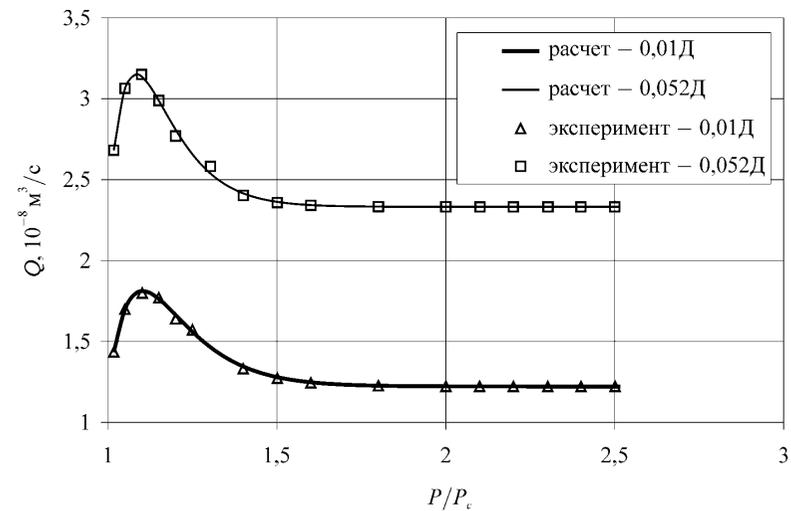


Рис. 2.79. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

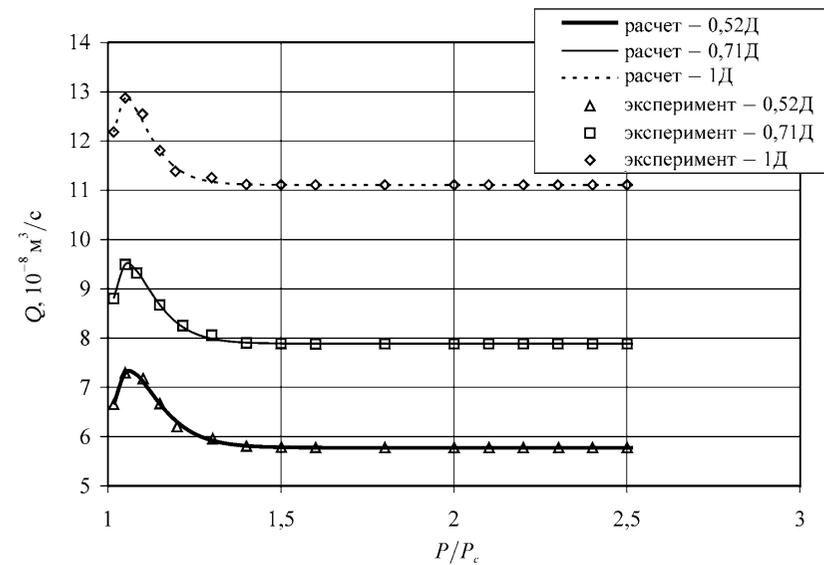


Рис. 2.80. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

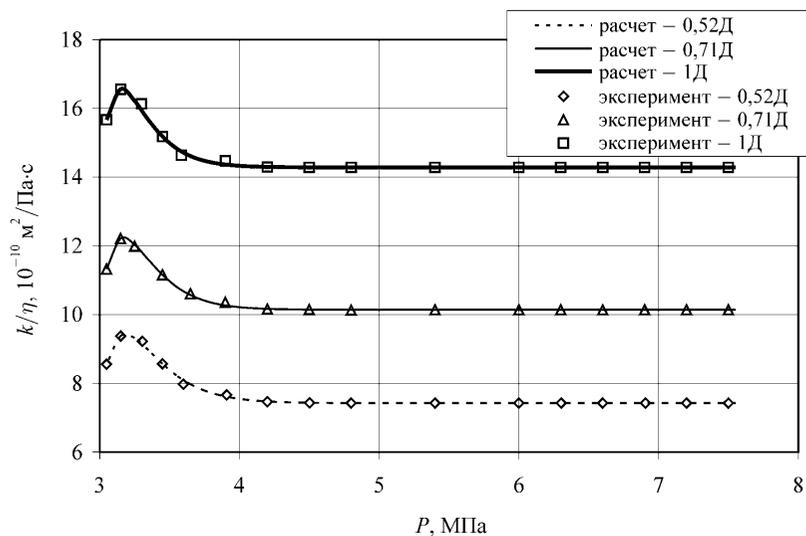


Рис. 2.81. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной проницаемости пористой среды

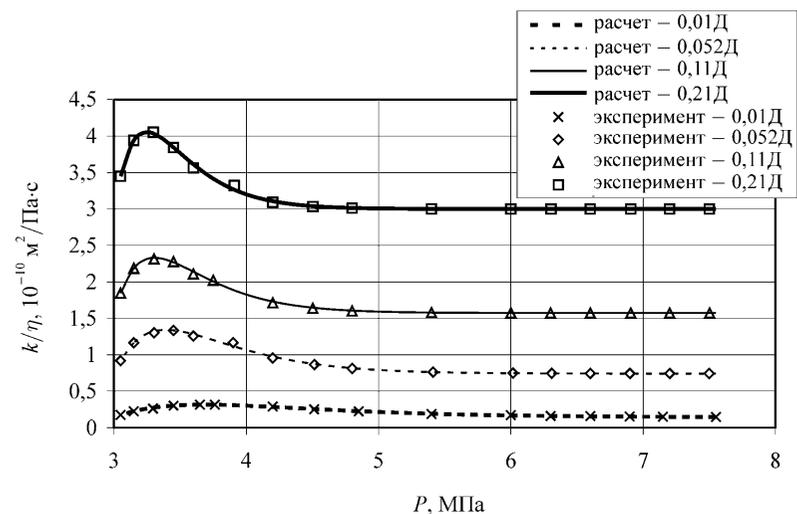


Рис. 2.82. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной проницаемости пористой среды

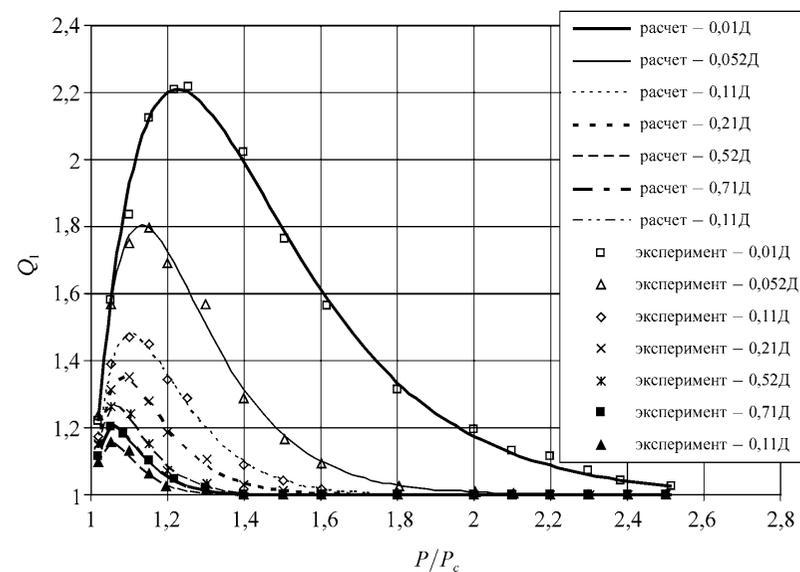


Рис. 2.83. Зависимость безразмерного (относительного) расхода жидкости от уровня давления при различной проницаемости пористой среды

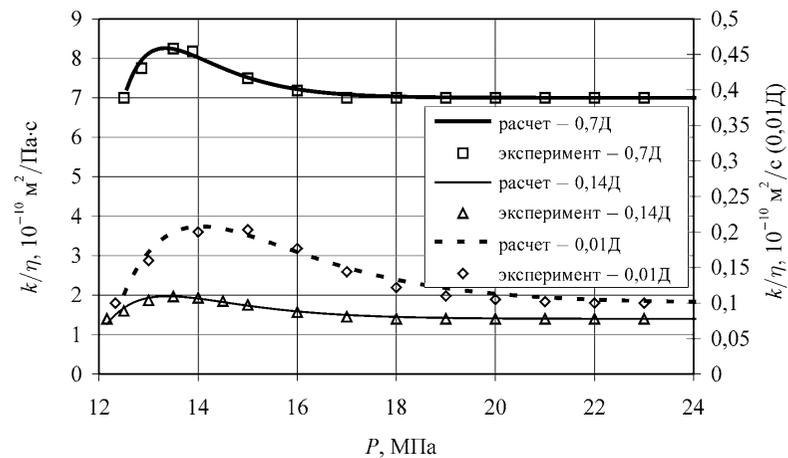


Рис. 2.84. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной проницаемости пористой среды

рошее качественное и количественное описание экспериментов как по расходу, так и по подвижности.

На рис. 2.85 показано распределение давления применительно к приведенным в 2.1.3 экспериментальным данным ($C = 0\%$) для различных давлений на выходе пористой среды ($P_e = 7,8; 6,2; 4,6; 3,0$ МПа). Как видно из рисунка, наличие проскальзывания приводит к значительному снижению наклона кривой для распределения давления в интервале $P_s - P_e$, обуславливающему аномальный рост расхода жидкости.

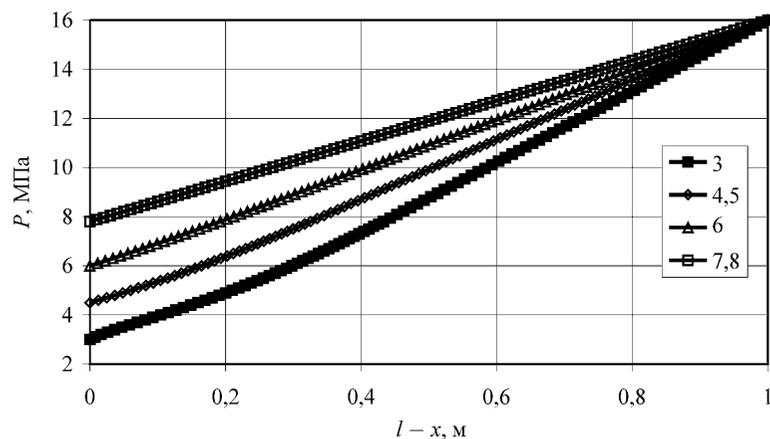


Рис. 2.85. Распределение давления для случая $P_0 > P_s > P_e \geq P_c$ при различных давлениях на выходе пористой среды P_e (МПа)

Следует отметить, что влияние смачиваемости может быть учтено, если в (2.62) принять $c = c_1 f^n(\theta)$ и $a = a_1 f^n(\theta)$, где n, a_1, c_1 – постоянные коэффициенты, $f(\theta)$ – функция краевого угла смачивания. На рис. 2.86 показана расчетная зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления P/P_c при различных значениях θ ($n=1$). Как видно из рисунка, снижение краевого угла смачивания, т. е. гидрофилизация пористой среды, приводит к снижению эффекта проскальзывания, что выражается в уменьшении безразмерного расхода при прочих равных условиях. Кроме того, с гидрофилизацией пористой среды происходит смещение пика безразмерного расхода к давлению насыщения. Полученный результат полностью согласуется с экспериментом по влиянию смачиваемости на фильтрацию газированной жидкости в предпереходном фазовом состоянии, представленном в 2.1.3.

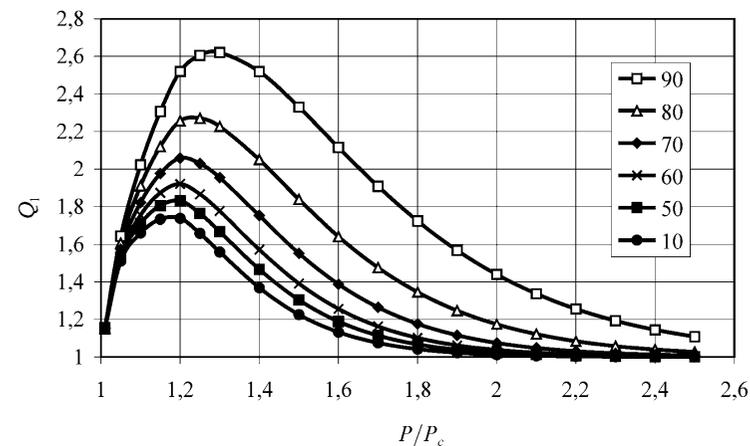


Рис. 2.86. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различных значениях θ (градусы)

На рис. 2.87–2.91 приведены расчетные зависимости применительно к экспериментам, представленным в 2.1.3, при $n=2, a_1=47, c_1=17,8$ (b_0 определялось в точке максимума расхода жидкости, P_s выбиралось по его максимальному значению в экспериментах). Как видно из рисунков,

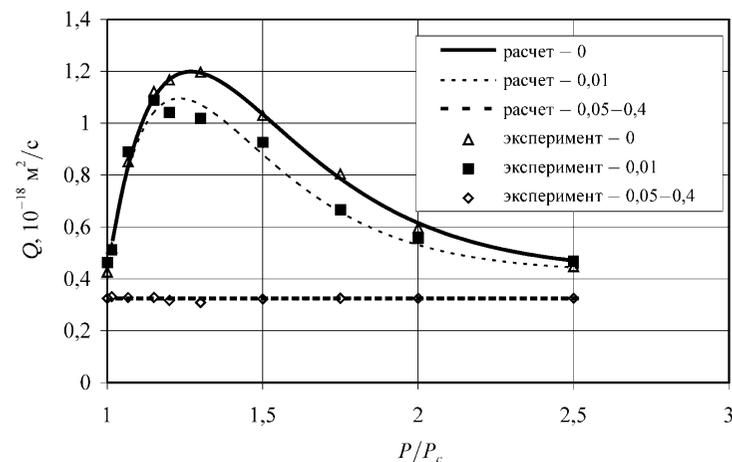


Рис. 2.87. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной концентрации ПАВ (%)

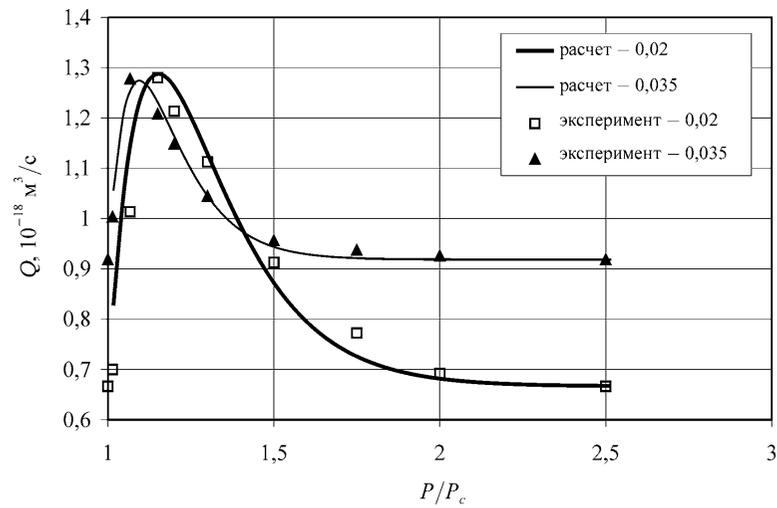


Рис. 2.88. Зависимость расхода жидкости от уровня давления при различной концентрации ПАВ (%)

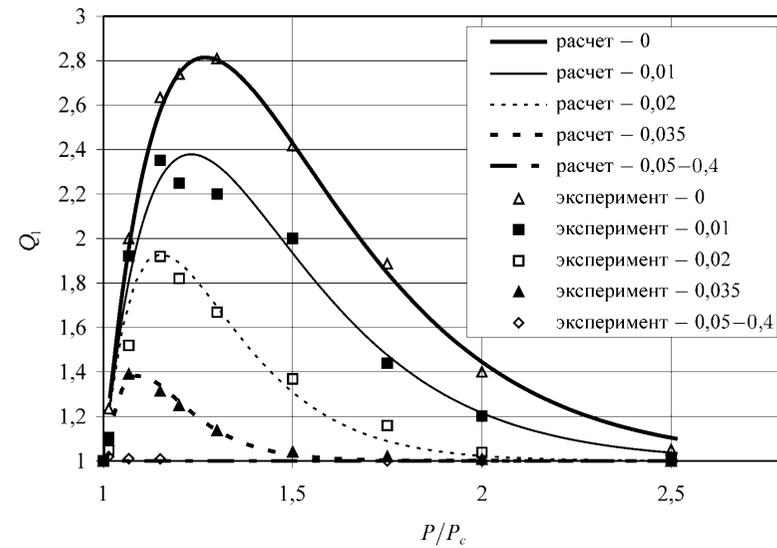


Рис. 2.89. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различной концентрации ПАВ (%)

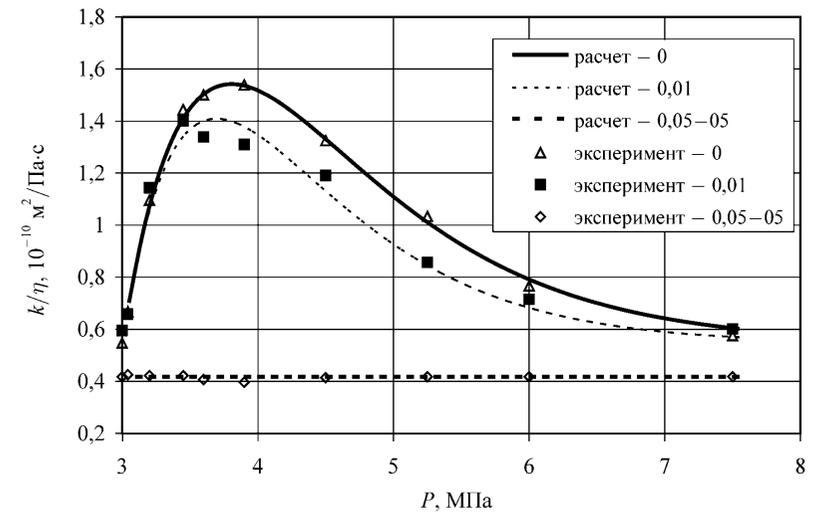


Рис. 2.90. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной концентрации ПАВ (%)

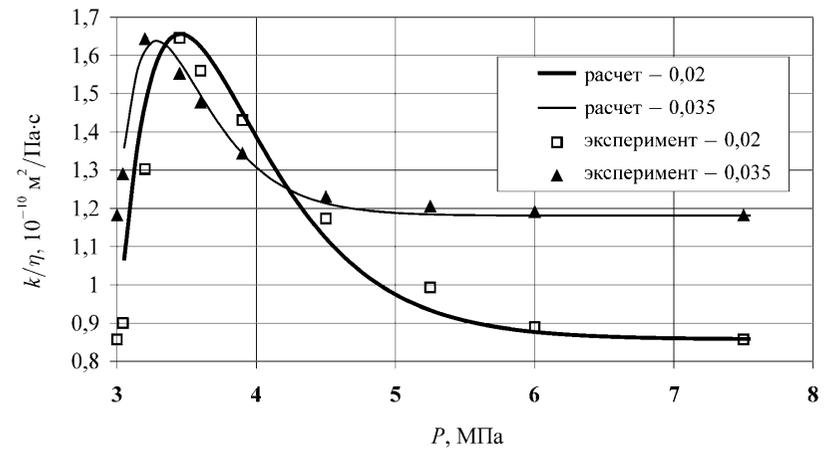


Рис. 2.91. Зависимость подвижности жидкости от давления при различной концентрации ПАВ (%)

предложенная модель дает хорошее качественное и количественное описание экспериментальных данных как по расходу так и подвижности.

Влияние газонасыщенности может быть учтено, если в (2.62) принять $c = c_1 \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^{\frac{1}{m}}$ и $a = a_1 \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^{\frac{1}{m}}$, где m, a_1, c_1 – постоянные коэффициенты, Γ_2, Γ_1 ($\Gamma_1 < \Gamma_2$) – газоводяные отношения в различных опытах.

На рис. 2.92–2.97 приведены расчетные зависимости по экспериментам, представленным в 2.1.5, при $m=3, a_1 = 38, c_1 = 13,7$ (b_0 определялось в точке максимума расхода жидкости, P_s выбиралось по его максимальному значению в экспериментах). Как видно из рисунков, предложенная модель дает хорошее качественное и количественное описание экспериментальных данных.

Рассмотрим теперь случай, когда давление на выходе из пористой среды ниже давления насыщения, т. е. $P_s \geq P_0 > P_c > P_e$ (см. схему на рис. 2.72 б). В этом случае также имеются две области: в области $P_c < P < P_0$ имеет место фильтрация с проскальзыванием; в области $P_e < P < P_c$ имеет место фильтрация двухфазной системы, при этом она может быть представлена как гомогенная несжимаемая жидкость, эффективная проницаемость для которой на основании [88, 89] можно принять $k(P) = k_0 \left(\frac{P}{P_c} \right)^n$, где $n = 0,42$.

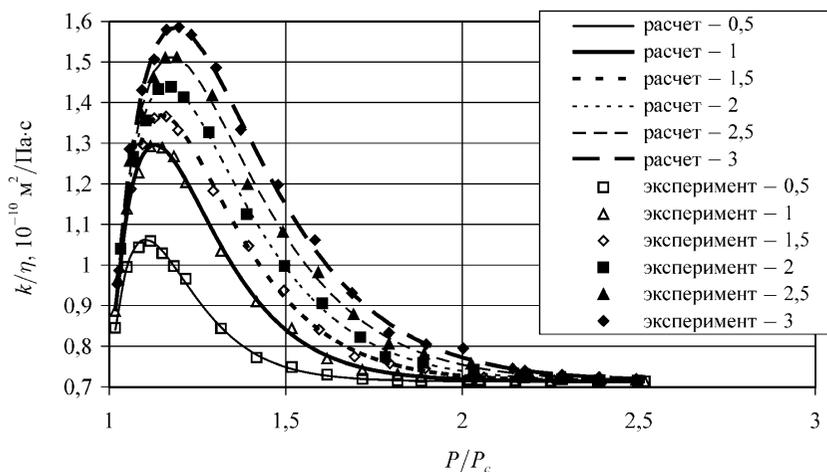


Рис. 2.92. Зависимость подвижности жидкости от уровня давления при различном газоводяном отношении ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

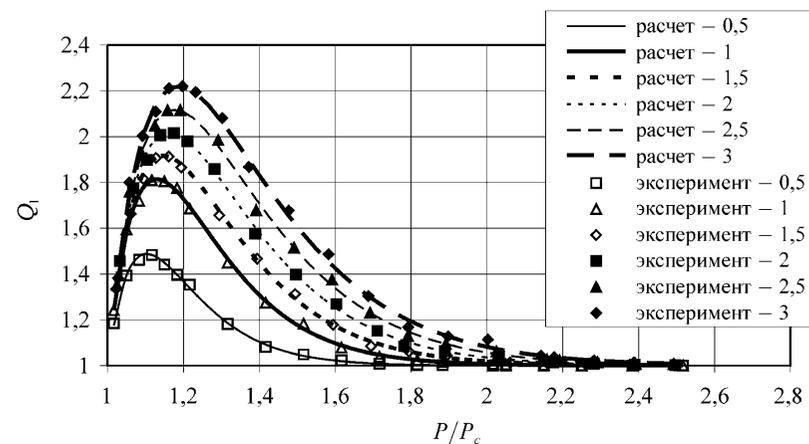


Рис. 2.93. Зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления при различном газоводяном отношении ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

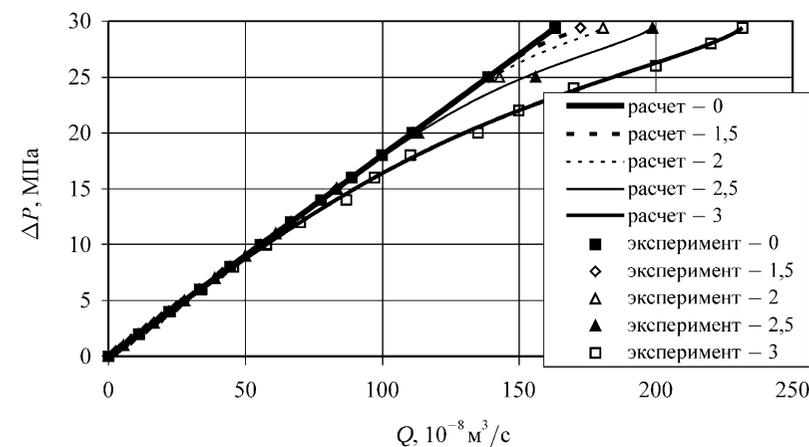


Рис. 2.94. Зависимость $\Delta P - Q$ ($P_0 = \text{const}$) при различном газоводяном отношении ($\text{м}^3/\text{м}^3$)

На основе (2.63) распределение давления для первой области может быть определено из выражения

$$\int_P^{P_0} k(P) dP = \frac{x}{x_c} \int_{P_c}^{P_0} k(P) dP.$$

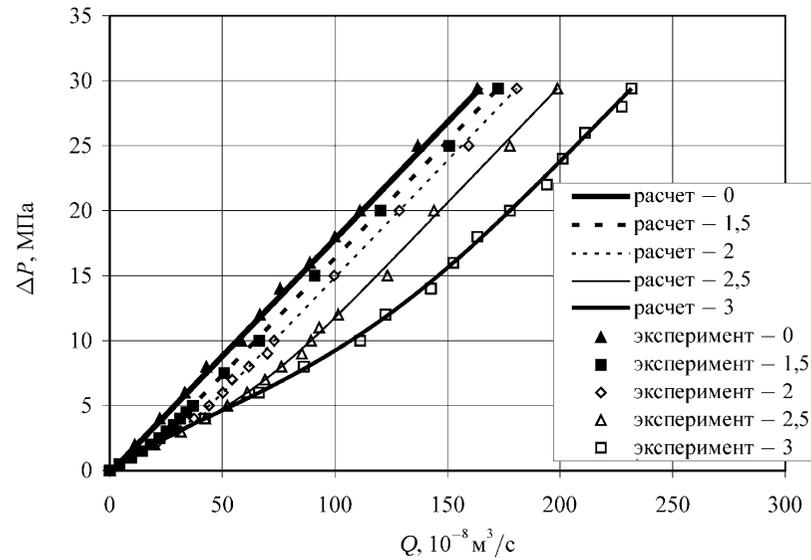


Рис. 2.95. Зависимости $\Delta P - Q$ (P_c -const) при различном газоводяном отношении (m^3/m^3)

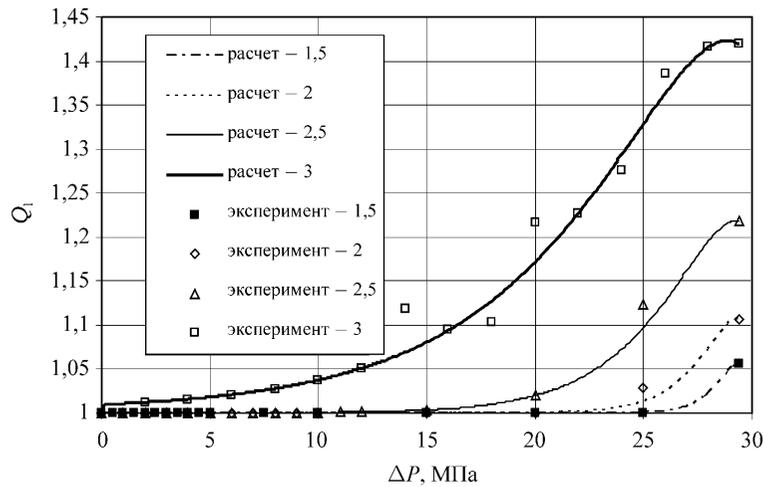


Рис. 2.96. Зависимости безразмерного расхода от перепада давления (P_0 -const) при различном газоводяном отношении (m^3/m^3)

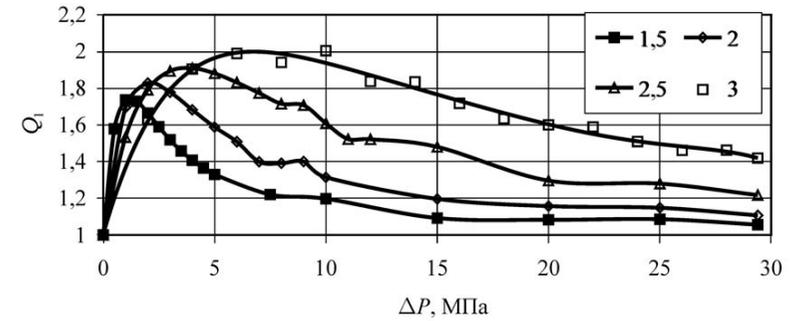


Рис. 2.97. Зависимости безразмерного расхода от перепада давления (P_c -const) при различном газоводяном отношении (m^3/m^3)

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$P^{n+1} = P_c^{n+1} - (P_c^{n+1} - P_e^{n+1}) \frac{x - x_c}{l - x_c}.$$

Для определения x_c , учитывая одномерность и неразрывность движения из системы (2.60), для области $0 < x < x_c$ можем записать

$$-\int_{P_c}^{P_0} k(P) dP = \eta v \int_{x_c}^0 dx. \tag{2.68}$$

Для области $x_c < x < l$ получим

$$-\int_{P_c}^{P_e} k_0 \left(\frac{P}{P_c} \right)^n dP = \eta v \int_l^{x_c} dx. \tag{2.69}$$

Из (2.68) и (2.69) определим

$$x_c = l \left[1 + \frac{k_0 (P_c^{n+1} - P_e^{n+1})}{(n+1) P_c^n \int_{P_c}^{P_0} k(P) dP} \right]^{-1}.$$

Для расхода жидкости получим

$$Q = \frac{\left(\int_{P_c}^{P_0} k(P) dP \right)}{\eta x_c} F.$$

Для безразмерного расхода

$$Q_1 = \frac{\left(\int_{P_e}^{P_0} k(P) dP \right) l}{k_0 (P_0 - P_e) x_c}. \quad (2.70)$$

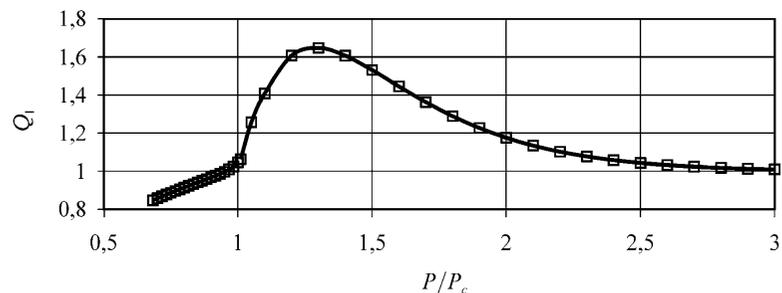


Рис. 2.98. Расчетная зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления для случая $P_s \geq P_0 > P_c > P_e$

На рис. 2.98 показана зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления, рассчитанная по формулам (2.68) и (2.70). В области с проскальзыванием перепад принимался постоянным, равным 0,06 МПа, а в области $P_c > P_e$ принималось, что $P_0 = 3,1$ МПа ($P_c = 3,0$ МПа, $b_0 = 1,1 \cdot 10^{-6}$ м при $P \approx 1,3P_c$; $P_s \approx 2,6P_c = 7,8$ МПа, $a \approx 16$, $c \approx 5,8$).

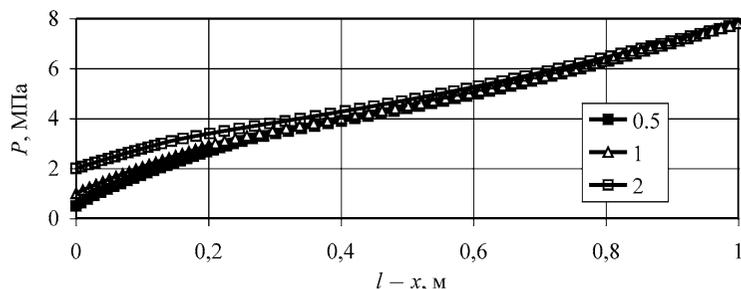


Рис. 2.99. Распределение давления для случая $P_s \geq P_0 > P_c > P_e$ при различных давлениях на выходе пористой среды P_e (МПа)

Расчетная зависимость качественно описывает экспериментальные данные, приведенные в [1, 2]. Как видно из рисунка, при давлениях на выходе пористой среды ниже давления насыщения безразмерный расход снижается и становится меньше единицы, несмотря на то что давление на входе пористой среды находится в области, где имеет место проскальзывание жидкости. Распределение давления применительно к рассматриваемому случаю для различных давлений на выходе пористой среды показано на рис. 2.99 (линии 1–3 соответственно для $P_e = 2,0; 1,0; 0,5$ МПа). Видно, что снижение давления на выходе пористой среды ниже давления насыщения приводит к увеличению наклона кривой для распределения давления (т. е. к возрастанию фильтрационных сопротивлений).

Это объясняется резким увеличением газонасыщенности пористой среды и сопутствующим проявлением эффекта Жамена. Следует отметить: экспериментальные данные, представленные в [1], при давлении на выходе пористой среды ниже давления насыщения, когда расход жидкости резко снижается с ростом перепада давления, не могут быть описаны в условиях соблюдения сплошности жидкой фазы [82, 90].

Таким образом, аномальное увеличение расхода газированной ньютоновской жидкости вблизи (выше) давления насыщения может быть объяснено эффектом проскальзывания жидкости, связанным с интенсивным докритическим зародышеобразованием на стенках поровых каналов.

б) Фильтрация газированной неньютоновской жидкости

Как было показано в пункте “а”, эффект проскальзывания жидкости позволяет описать фильтрацию газированной жидкости с зародышами газа. В этой связи особый интерес представляет изучение фильтрации неньютоновской газированной жидкости [91].

Вначале рассмотрим течение жидкости, подчиняющейся степенному закону, в цилиндрическом капилляре при наличии проскальзывания. Как известно, для степенных жидкостей связь между напряжением и скоростью сдвига определяется выражением

$$\tau = \eta_0 \gamma^n,$$

где η_0 – постоянная величина, а скорость течения в капилляре для степенной жидкости имеет вид [92]:

$$v = - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}+1} + C, \quad (2.71)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из следующего граничного условия:

$$v_r = -b \left(\frac{dv}{dr} \right)_r,$$

где b – коэффициент проскальзывания, R – радиус капилляра. Тогда из (2.71), получим:

$$v = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1}{n}+1} \left(1 + \frac{b}{R} \frac{n+1}{n} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}+1}.$$

Определяем расход жидкости:

$$Q = 2\pi \int_0^R v r dr = \frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{\Delta P}{2\eta_0 l} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{1}{n}+3} \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b}{R} \right)$$

и находим поправку на скольжение:

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = \frac{v}{v_0} = \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b}{R} \right),$$

где Q_0 и v_0 – расход и скорость течения без проскальзывания.

Переходя к пористой среде по Козени–Карману [70, 93], получим:

$$v = -B \left| \frac{dP}{dx} \right|^{\frac{1}{n}-1} \frac{dP}{dx}, \quad (2.72)$$

здесь $B = B_0 \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b}{R} \right)$ – коэффициент фильтрации с проскальзыванием,

а $B_0 = \frac{n}{3n+1} \eta_0^{-\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{2} \left(\frac{3+1}{n} \right)} m^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+1}{n} \right)} k_0^{\frac{1}{2} \left(\frac{1+1}{n} \right)}$ (m – пористость, k_0 – проницаемость пористой среды) – коэффициент фильтрации без проскальзывания, опре-

деляемый при переходе от течения в капилляре к фильтрации в пористой среде.

Согласно вышеописанному принимаем B зависящим от давления по следующему закону: $B(P) = B_0 \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b(P)}{R} \right)$, где $b(P)$ – экспериментальная зависимость коэффициента проскальзывания от давления, приведенная в пункте «а» настоящего параграфа (отметим, что учет проскальзывания можно осуществить и вводом определенной в пункте «а» эффективной проницаемости в (2.71)):

$$b(P) = b_0 \left(a \frac{P - P_c}{P_s - P_c} \exp \left[-c \left(\frac{P - P_c}{P_s - P_c} \right) \right] \right). \quad (2.73)$$

Далее используются обозначения пункта «а» настоящего параграфа.

Рассмотрим одномерную стационарную фильтрацию для случая $P_s \geq P_0 > P_e \geq P_c$, т. е. проскальзывание имеет место на всем протяжении течения жидкости. Решая (2.72) с учетом уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad (2.74)$$

после некоторых преобразований, для скорости фильтрации с проскальзыванием получим:

$$v = \left(-\frac{1}{l} \int_{P_0}^{P_e} B^n(P) dP \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2.75)$$

где l – длина образца с пористой средой.

Распределение давления может быть определено из выражения

$$\int_P^{P_0} B^n(P) dP = \frac{x}{l} \int_{P_e}^{P_0} B^n(P) dP.$$

Для скорости фильтрации степенной жидкости можем записать:

$$v_0 = B_0 \left(\frac{P_0 - P_e}{l} \right)^{\frac{1}{n}},$$

а для отношения расходов:

$$Q_1 = \frac{1}{B_0} \left(\frac{-\int_{P_0}^{P_e} B^n(P) dP}{P_0 - P_e} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.76)$$

Рассмотрим теперь более общий случай $P_0 > P_s > P_e \geq P_c$ (см. схему 2.72а). В этом случае также имеются две области: в области $P_s < P < P_0$ имеет место фильтрация без проскальзывания, т. е. $B(P) = B_0$; в области $P_e \leq P < P_s$ имеет место фильтрация с проскальзыванием.

Совместно решая уравнения (2.72) и (2.74), получим:

$$B(P) \left(-\frac{dP}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} = v.$$

Распределение давления для первой области может быть определено из выражения

$$P = P_0 - (P_0 - P_s) \frac{x}{x_s}.$$

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$\int_P^{P_s} B^n(P) dP = \frac{x - x_s}{l - x_s} \int_{P_e}^{P_s} B^n(P) dP.$$

Для определения x_s , учитывая одномерность и неразрывность движения для первой области, можем записать

$$-\int_{P_s}^{P_0} dP = \left(\frac{v}{B_0} \right)^n \int_{x_s}^0 dx. \quad (2.77)$$

Для второй области

$$-\int_{P_e}^{P_s} B^n(P) dP = v^n \int_l^{x_s} dx. \quad (2.78)$$

После некоторых преобразований находим:

$$x_s = l \left[1 + \frac{\int_{P_e}^{P_s} B^n(P) dP}{B_0^n (P_0 - P_s)} \right]^{-1}.$$

Из (2.77) или (2.78) для скорости фильтрации получим:

$$v = B_0 \left(\frac{P_0 - P_s}{x_s} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Для отношения расходов имеем:

$$Q_1 = \left(\frac{(P_0 - P_s) l}{(P_0 - P_e) x_s} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

С целью определения влияния проскальзывания на характер фильтрации были проведены расчеты по формуле (2.76) при различных значениях n для пористой среды с проницаемостью $0,1 \text{ мкм}^2$ и пористостью $0,25$ (интеграл определялся численно, т. к. он раскрывается только при четных n). η_0 определяли при $\tau = 2 \text{ Н/м}^2$, $\gamma = 1312 \text{ с}^{-1}$. Остальные параметры брались из пункта «а». Результаты приведены на рис. 2.100, 2.101. Как видно из указанных рисунков, с увеличением n (при прочих равных условиях) происходит ослабление эффекта проскальзывания, что выражается в уменьшении Q_1 . Этот эффект можно объяснить следующим образом.

Как показано выше, $B(P) = B_0 \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b(P)}{R} \right)$. Указанное выражение

можно представить в виде $B(P) = B_0 \left[1 + \left(3 + \frac{1}{n} \right) \frac{b(P)}{R} \right]$. Из указанной формулы видно, что с увеличением n поправка на скольжение уменьшается.

На рис. 2.102 показана зависимость безразмерного расхода от перепада давления при $P_0\text{-const}$ (кривые 1) и $P_e\text{-const}$ (кривые 2) при различных n . Как видно из указанного рисунка, при всех значениях n зависимости $Q_1(\Delta P)$ при $P_0\text{-const}$ (кривые 1) и $P_e\text{-const}$ (кривые 2) существенно отличаются, причем во втором случае указанные зависимости имеют немонотонный характер, а в первом – характер роста с насыщением.

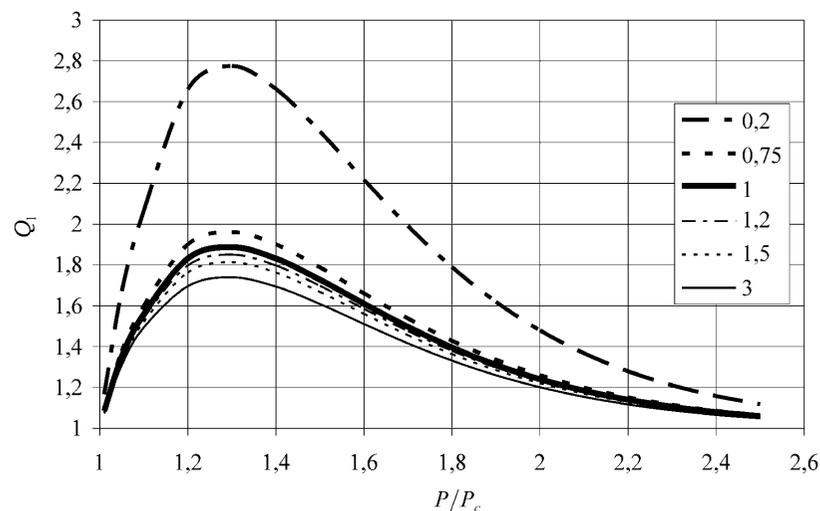


Рис. 2.100. Зависимость безразмерного расхода от уровня давления при различных n

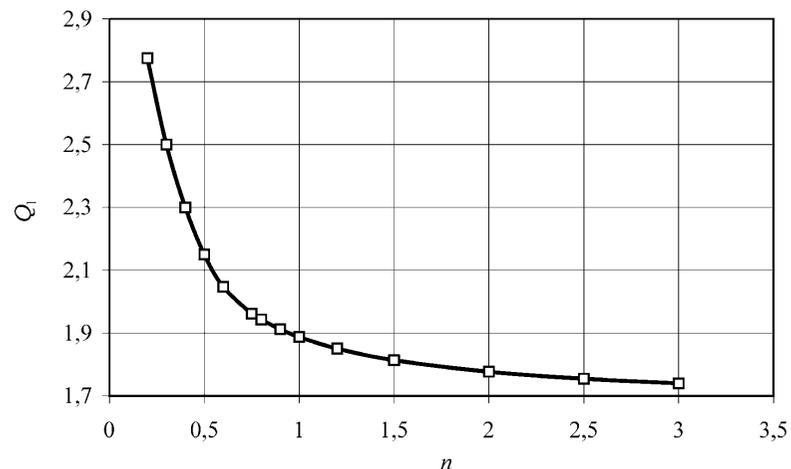


Рис. 2.101. Зависимость безразмерного расхода от n при $P/P_c = 1,3$

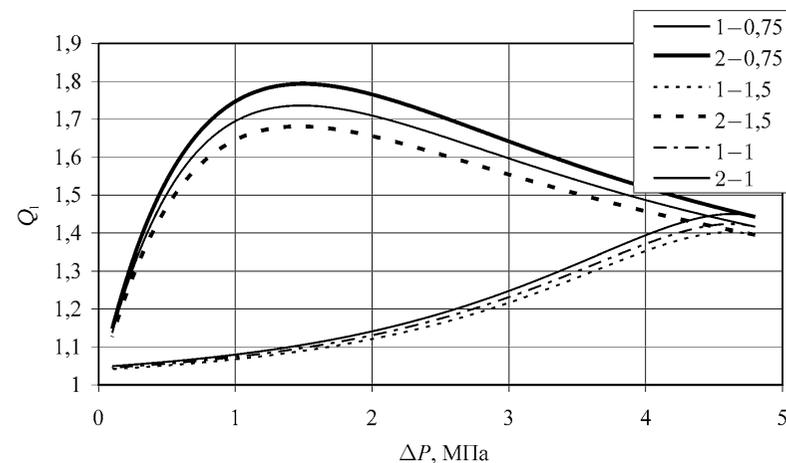


Рис. 2.102. Зависимость безразмерного расхода от перепада давления при различных n (1 – P_0 -const, 2 – P_e -const)

С целью определения влияния проскальзывания на характер зависимости $\Delta P(Q)$ были проведены расчеты по формуле (2.75) при различных значениях n . Как видно из рисунков, при P_0 -const для исходно псевдопластичных жидкостей (рис. 2.103, 2.104) не происходит качественного изменения характера течения, хотя наблюдается значительный рост скорости фильтрации при постоянном перепаде давления. Для исходно дилатантных жидкостей происходит полная модификация характера течения (рис. 2.105, 2.106). Так, при $n=1,1$ дилатантная жидкость меняет характер фильтрации на псевдопластичный (рис. 2.105), а при $n=3$ на S -образный (рис. 2.106). При P_e -const для исходно дилатантных жидкостей (рис. 2.105, 2.106) качественного изменения характера течения практически не происходит, хотя наблюдается значительный рост скорости фильтрации при постоянном перепаде давления. Вместе с тем и для исходно псевдопластичных жидкостей происходит практически полная модификация характера течения (за исключением небольшого начального участка) при определенных значениях n (рис. 2.104). Для исходно дилатантных жидкостей в данном случае изменение характера течения менее заметно. Зависимости $Q_1(\Delta P)$ (рис. 2.102) позволяют сделать вывод о том, что зависимости $\Delta P - Q$ при P_e -const вне зависимости от исходного характера течения имеют комбинированный характер, при этом происходит смена псевдопластического течения на дилатантный. Вместе с тем в зависимости от степени роста расхода жидкости этот эффект может быть выражен более или менее ярко.

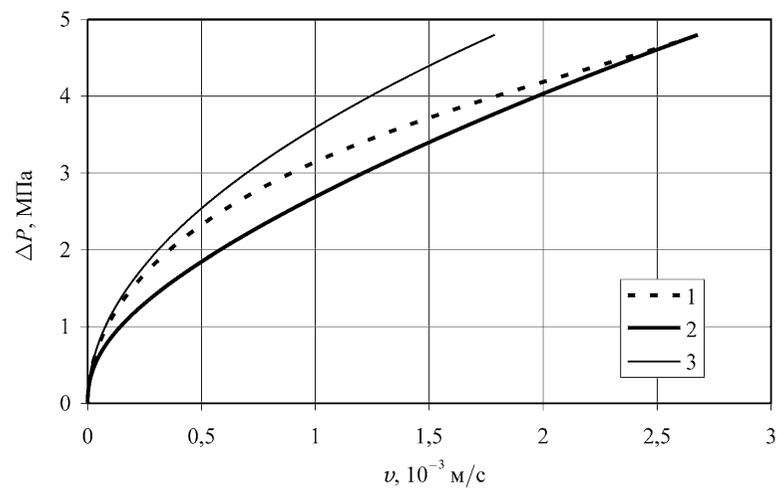


Рис. 2.103. Расчетные кривые течения при $n = 0,5$: 1 – P_0 -const; 2 – P_e -const; 3 – степенная жидкость

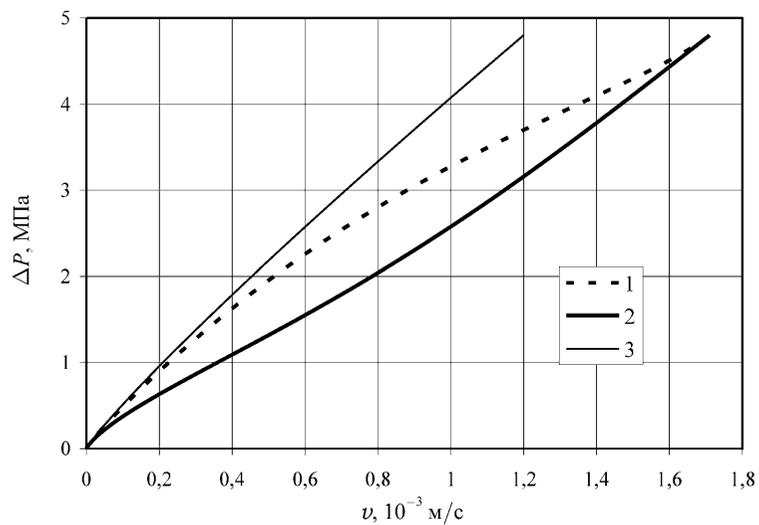


Рис. 2.104. Расчетные кривые течения при $n = 0,9$: 1 – P_0 -const; 2 – P_e -const; 3 – степенная жидкость

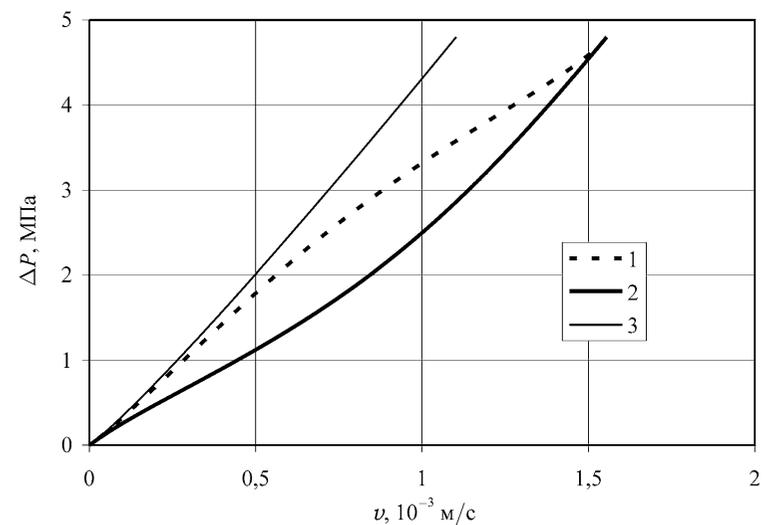


Рис. 2.105. Расчетные кривые течения при $n = 1,1$: 1 – P_0 -const; 2 – P_e -const; 3 – степенная жидкость

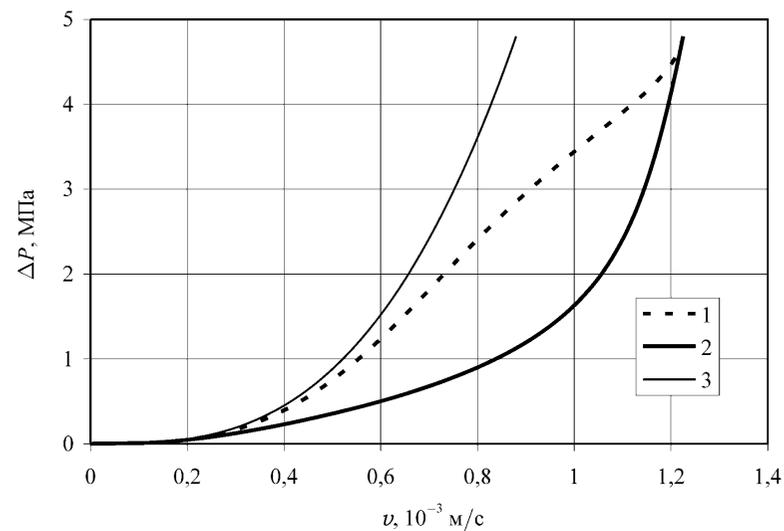


Рис. 2.106. Расчетные кривые течения при $n = 3$: 1 – P_0 -const; 2 – P_e -const; 3 – степенная жидкость

На рис. 2.107–2.111 приведены расчетные зависимости по экспериментам, приведенным в 2.1.4, η_0 определяли при $\tau = 0,65 \text{ Н/м}^2$ ($C = 0,01\%$) и $\tau = 0,72 \text{ Н/м}^2$ ($C = 0,02\%$), $\gamma = 500 \text{ с}^{-1}$, принимали $c = c_1 f^n(\theta)$ и $a = a_1 f^n(\theta)$, $n = 2$, $a_1 = 26,23$; $c_1 = 97,51$ (b_0 определялось в точке максимума расхода жидкости, P_s выбиралось по его максимальному значению в экспериментах).

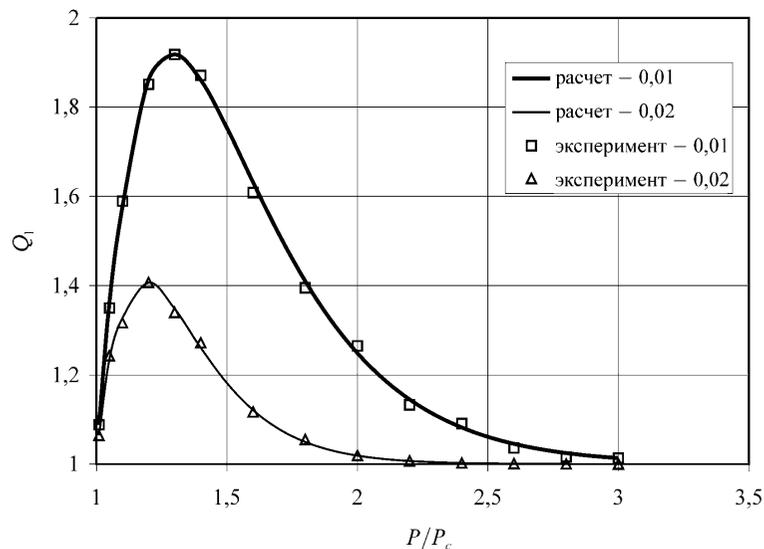


Рис. 2.107. Зависимость безразмерного расхода от уровня давления при различной концентрации ПАА (%)

Как видно из рисунков, предложенная модель дает хорошее качественное и количественное описание экспериментальных данных.

На рис.2.112 показано распределение давления при различных n . Как видно из рисунка, наличие проскальзывания приводит к значительному снижению наклона кривой для распределения давления вблизи давления насыщения, обуславливающего аномальный рост расхода жидкости. При этом с ростом n отклонение от прямолинейного распределения давления (для степенной жидкости без проскальзывания) увеличивается.

Таким образом, результаты расчетов подтверждаются экспериментами по фильтрации газированных полимерных растворов, проявляющих псевдопластичный характер фильтрации. При этом при фильтрации газированных жидкостей в докритической области возможна модификация течения и изменение исходного закона фильтрации.

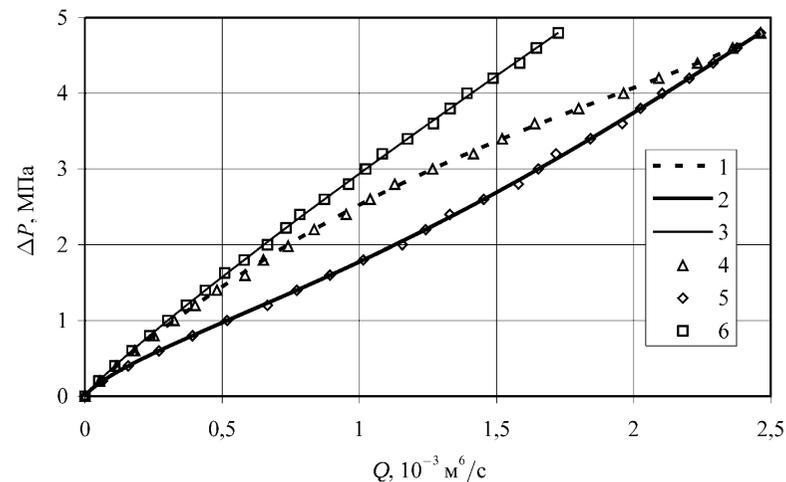


Рис. 2.108. Экспериментальные (4–6) и расчетные (1–3) зависимости $\Delta P - Q$ при концентрации ПАА 0,01%: 1,4 с проскальзыванием при $P_0\text{-const}$; 2,5 с проскальзыванием при $P_c\text{-const}$; 3,6 по степенному закону

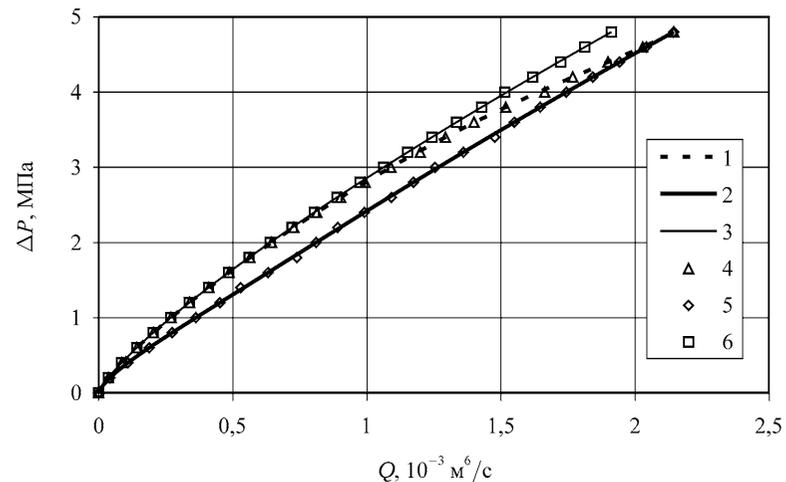


Рис. 2.109. Экспериментальные (4–6) и расчетные (1–3) зависимости $\Delta P - Q$ при концентрации ПАА 0,02%: 1,4 с проскальзыванием при $P_0\text{-const}$; 2,5 с проскальзыванием при $P_c\text{-const}$; 3,6 по степенному закону

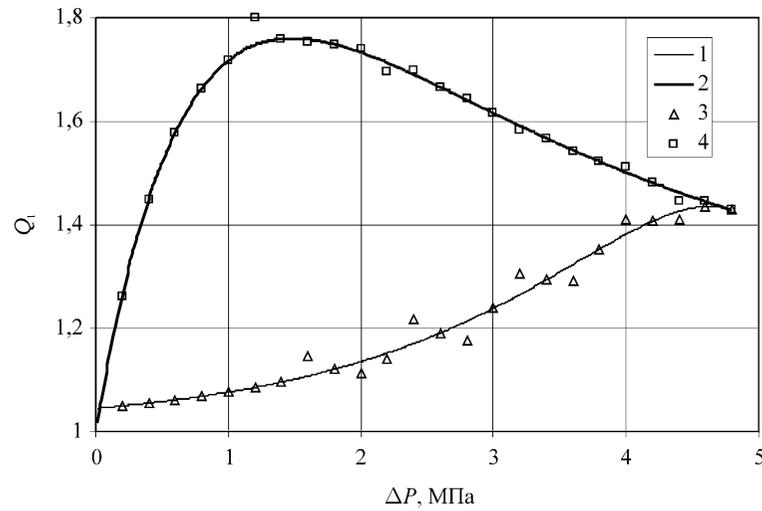


Рис. 2.110. Экспериментальные (3–4) и расчетные (1–2) зависимости безразмерного расхода от перепада давления при концентрации ПАА 0,01% (1,3 – P_0 -const; 2,4 – P_e -const)

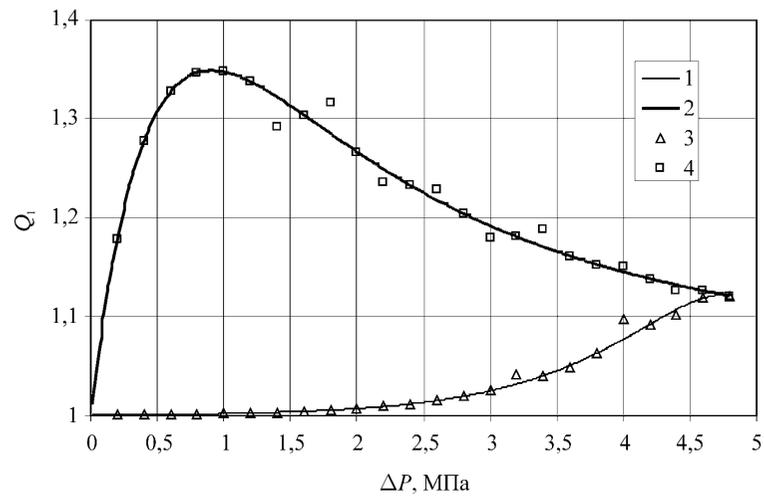


Рис. 2.111. Экспериментальные (3–4) и расчетные (1–2) зависимости безразмерного расхода от перепада давления при концентрации ПАА 0,02% (1,3 – P_0 -const; 2,4 – P_e -const)

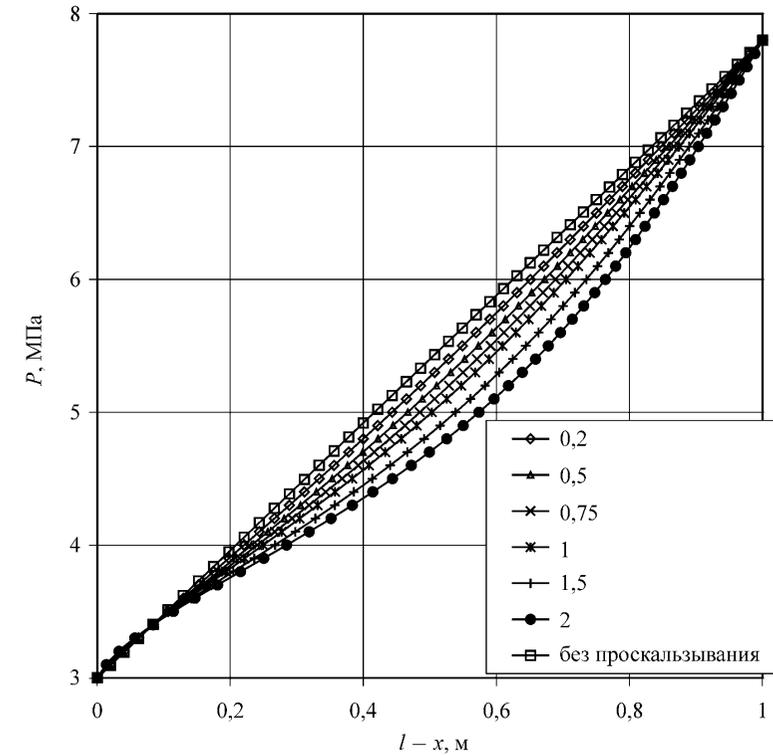


Рис. 2.112. Распределение давления при различных n

2.4.2. Стационарная плоскорадиальная фильтрация

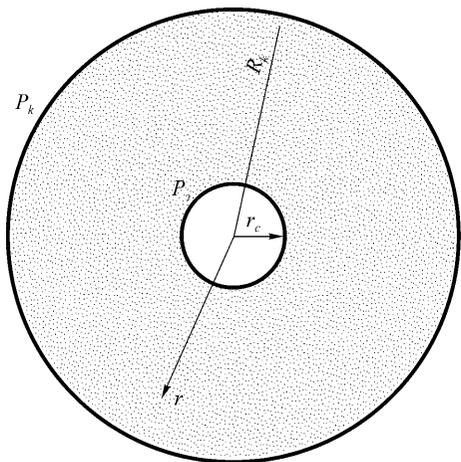
а) Фильтрация газированной ньютоновской жидкости

Рассмотрим теперь стационарную плоскорадиальную фильтрацию квазигомогенной несжимаемой жидкости с учетом эффекта проскальзывания. В этом случае задача сводится к решению системы уравнений (если не оговаривается иное, используются обозначения, принятые в 2.4.1):

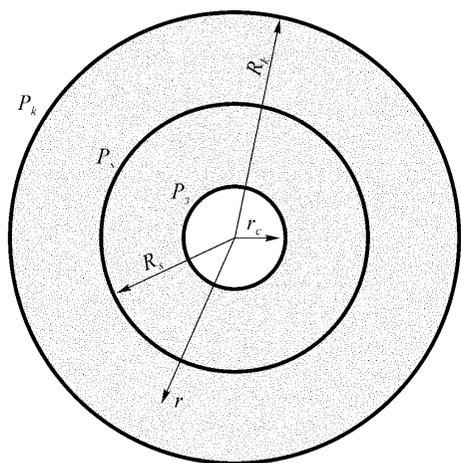
$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rv) &= 0, \\ v &= \frac{k(P)}{\eta} \frac{dP}{dr}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где $k(P)$ – эффективная проницаемость.

Рассмотрим вначале случай, когда $P_s \geq P_k > P_3 \geq P_c$, где P_k, P_3 – соответственно контурное и забойное давления (см. схему на рис. 2.113а), при этом эффект проскальзывания имеет место во всей области фильтрации.



а)



б)

Рис. 2.113. Схема плоскорадиального фильтрационного потока: а – $P_s \geq P_k > P_3 \geq P_c$; б – $P_k > P_s > P_3 \geq P_c$

Из (2.79) будем иметь

$$Q = \frac{2\pi hk(P)}{\eta} \frac{dP}{dr} r, \quad (2.80)$$

где h – мощность пласта.

Из (2.80) получим

$$Q = \frac{2\pi h}{\eta \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{P_3}^{P_k} k(P) dP,$$

где R_k, r_c – соответственно радиус контура питания и скважины.

Находим распределение давления

$$\int_P^{P_k} k(P) dP = \frac{\ln \frac{R_k}{r_c}}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{P_3}^{P_k} k(P) dP.$$

Расход жидкости по Дюпюи определится из выражения

$$Q_0 = \frac{2\pi k_0 h (P_k - P_3)}{\eta \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Для безразмерного расхода жидкости $Q_1 = Q/Q_0$ получим

$$Q_1 = \frac{\int_{P_3}^{P_k} k(P) dP}{k_0 (P_k - P_3)}.$$

Указанное выражение совпадает с аналогичным выражением для прямолинейной фильтрации (2.67), поэтому зависимости, полученные на его основе, справедливы и для плоскорадиального случая.

Полученные результаты хорошо согласуются с промышленными данными, представленными в работе [94]. На рис. 2.114, 2.115 представлены материалы рис. 2.2, 2.10 из указанной работы. Как видно из рис. 2.115, промышленные данные хорошо согласуются с предложенной моделью как качественно, так и количественно.

Рассмотрим случай, когда $P_k > P_s > P_3 > P_c$ (см. схему на рис. 2.113б). В этом случае имеются две области: в области $P_s < P < P_k$ имеет место фильтрация без проскальзывания, т. е. $k(P) = k_0$; в области $P_3 \leq P < P_s$ имеет место фильтрация с проскальзыванием.

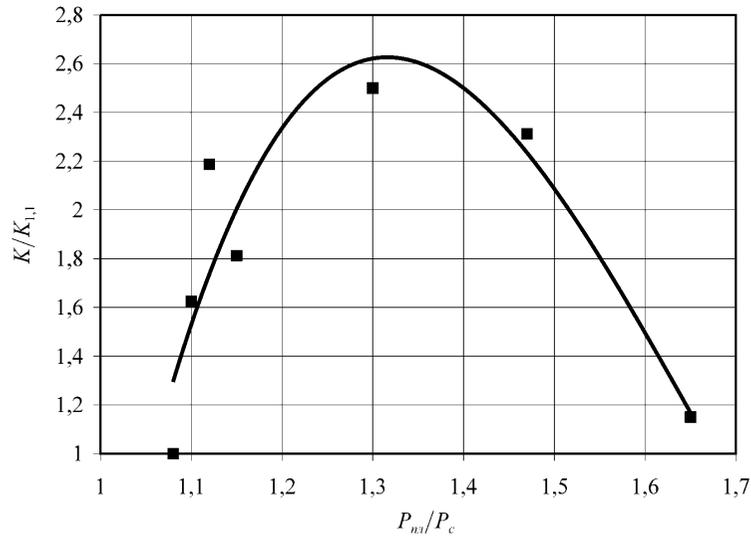


Рис. 2.114. Зависимость отношения проницаемости матричных блоков ($K_{1,1}$ – проницаемость при $P_{пл}/P_c = 1,1$) от $P_{пл}/P_c$ для скважины X0 месторождения «Белый Тигр» (Фундамент) [94]

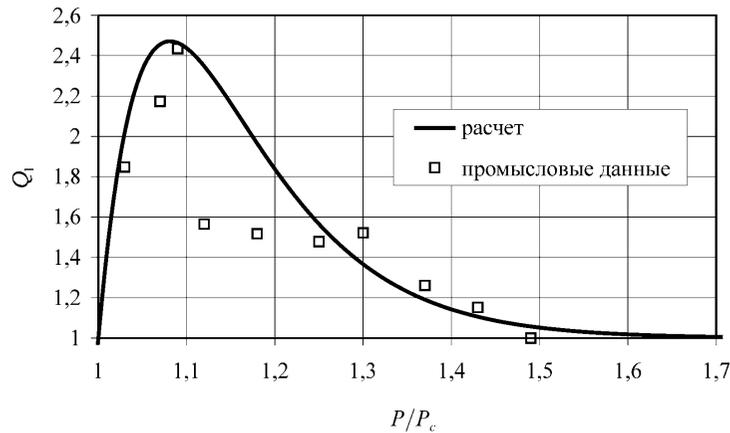


Рис. 2.115 Зависимость безразмерного расхода (Q_0 принимается равным расходу при $P_{пл}/P_c = 1,7$) от P/P_c для месторождения «Белый Тигр» (Фундамент. Центральный Блок) по данным [94]

Распределение давления для первой области может быть определено из выражения

$$P = P_k - (P_k - P_s) \frac{\ln \frac{R_k}{r}}{\ln \frac{R_k}{R_s}}$$

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$\int_P^{P_s} k(P) dP = \frac{\ln \frac{R_s}{P_s}}{\ln \frac{R_s}{P_s}} \int_{r_c}^{r_s} k(P) dP. \quad (2.81)$$

Для определения $\ln R_s$, учитывая неразрывность движения из системы (2.79), для первой области можем записать

$$Q = \frac{2\pi k_0 h (P_k - P_s)}{\eta \ln \frac{R_k}{R_s}}. \quad (2.82)$$

Для второй области:

$$Q = \frac{2\pi h}{\eta \ln \frac{R_s}{P_s}} \int_{r_c}^{P_s} k(P) dP. \quad (2.83)$$

Из (2.82) и (2.83) находим

$$\frac{\ln R_s}{\ln r_c} = \frac{\left(1 + \frac{\ln R_k}{\ln r_c} \frac{\int_{P_s}^{P_k} k(p) dp}{k_0 (P_k - P_s)} \right)}{\left(1 + \frac{\int_{P_s}^{P_s} k(p) dp}{k_0 (P_k - P_s)} \right)}$$

Для расхода жидкости из (2.82) или (2.83) получим

$$Q = \frac{2\pi k_0 h (P_k - P_s)}{\eta \ln \frac{R_k}{R_s}}$$

Для безразмерного расхода жидкости получим

$$Q_1 = \frac{(P_k - P_s) \ln \frac{R_k}{r_c}}{(P_k - P_s) \ln \frac{R_k}{R_s}}. \quad (2.84)$$

Раскрытие интеграла $\int_{P_1}^{P_2} k(P) dP$ дано в 2.5.1а.

На рис. 2.116 приведены расчетные зависимости $\Delta P - Q$ (индикаторные диаграммы) для случая $P_s \geq P_k > P_3 \geq P_c$ при следующих значениях определяющих параметров: $k_0 = 20$ мД; $h = 10$ м; $R_k = 25$ м; $r_c = 0,15$ м; $\eta = 5$ мПа · с; остальные параметры брались из 2.5.1. Как видно из рисунка, полученные результаты соответствуют аналогичным при прямолинейной фильтрации (рис. 2.74). Здесь также при различных сценариях изменения перепада давления возможно как преимущественно псевдопластичное (при постоянном контурном давлении), так и преимущественно дилатантное (при постоянном забойном давлении) течение. При этом в обоих случаях при постоянном перепаде давления расход жидкости выше, чем по Дюпюи. Следует отметить, что в промышленных условиях осуществляется первый сценарий, так как изменение контурного давления – капиталоемкая опе-

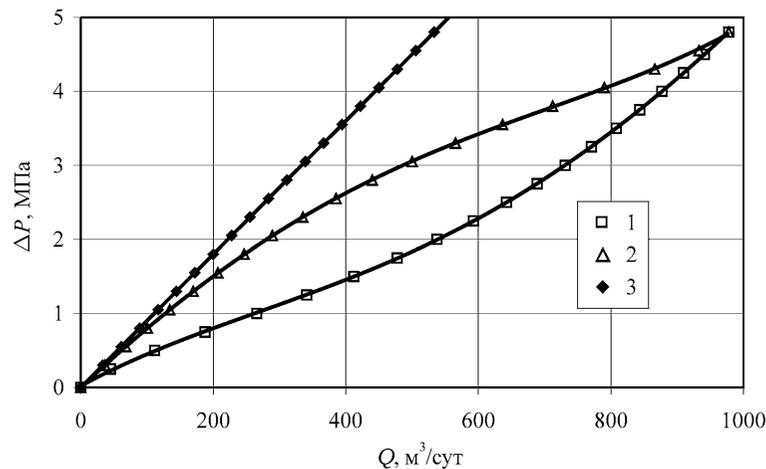


Рис. 2.116. Расчетные индикаторные диаграммы: 1 – с проскальзыванием при $P_3 = \text{const}$, 2 – с проскальзыванием при $P_k = \text{const}$, 3 – по Дюпюи

рация, поэтому в промышленных условиях при наличии проскальзывания следует ожидать псевдопластичный характер индикаторных диаграмм.

Полученные результаты хорошо согласуются с промышленными данными, представленными в работе [94]. На рис. 2.117, 2.118 представлены материалы рис. 1.17 из указанной работы. Как видно из рисунков, приведенные индикаторные диаграммы, снятые при давлении вблизи (выше) давления насыщения, свидетельствуют о псевдопластичном характере течения. Следует отметить, что отмеченные в 2.4.1а для одномерного случая особенности зависимости $\Delta P - Q$ (комбинированный характер с преобладанием псевдопластичного или дилатантного течения, характер зависимости $Q_1 - \Delta P$) справедливы и в данном случае, что хорошо видно из рис. 2.116.

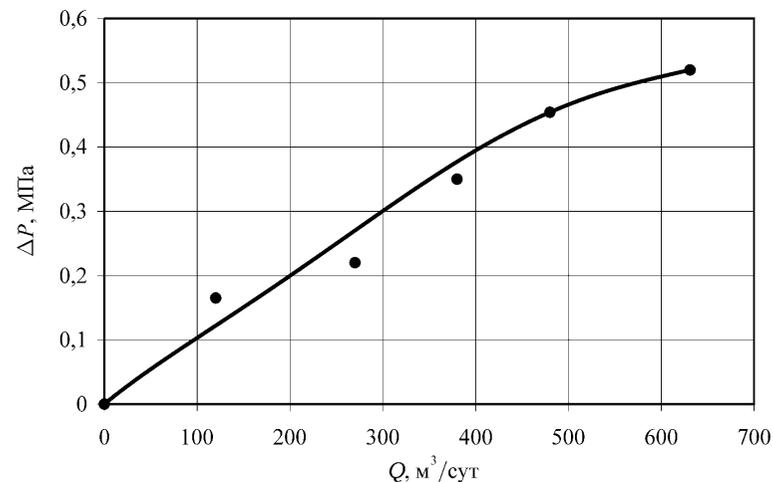


Рис. 2.117. Индикаторная диаграмма для скважины V03 месторождения «Белый Тигр» (Фундамент) [94]

На рис. 2.119 показано распределение давления для случая, когда $P_s \geq P_k > P_3 \geq P_c$ и в отсутствие проскальзывания. Как видно из рисунка, наличие проскальзывания приводит к снижению давления при одном и том же радиусе плоскорадиального потока, что обуславливает рост расхода жидкости.

Рассмотрим теперь случай, когда забойное давление ниже давления насыщения, т. е. $P_3 \geq P_k > P_c > P_s$ (см. схему на рис. 2.113б, принимая вместо P_s и R_s соответственно P_c и R_c). В этом случае также имеются две области: в области $P_c < P < P_k$ имеет место фильтрация с проскальзыванием; в об-

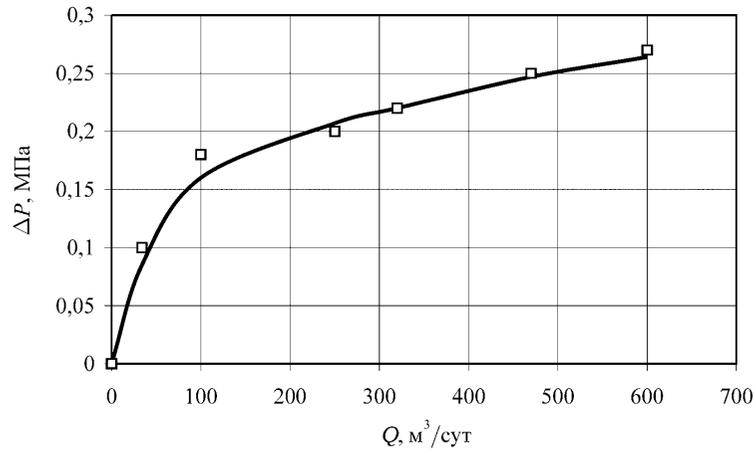


Рис. 2.118. Индикаторная диаграмма для скважины V38 месторождения «Белый Тигр» (Фундамент) [94]

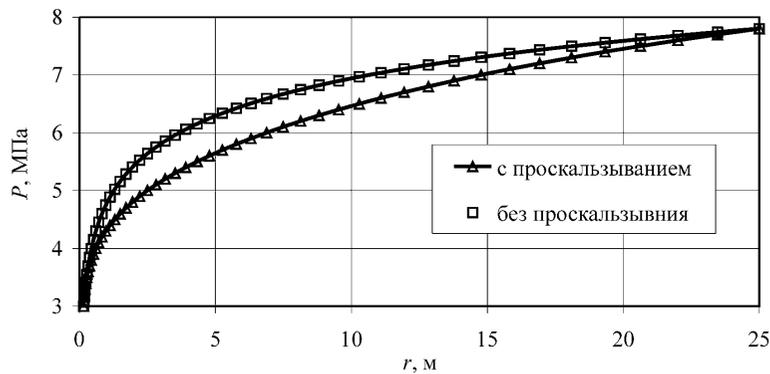


Рис. 2.119. Распределение давления при наличии и отсутствии эффекта проскальзывания

ласти $P_3 < P < P_c$ имеет место фильтрация двухфазной системы, при этом, как показано выше, она может быть представлена как гомогенная несжимаемая жидкость, эффективную проницаемость для которой можно принять в виде (см. 2.4.1а)

$$k(P) = k_0 \left(\frac{P}{P_c} \right)^n, \quad n = 0.42.$$

На основе (2.81) распределение давления для первой области может быть определено из выражения

$$\int_P^{P_k} k(P) dP = -\frac{r}{R_k} \int_{R_k}^{R_c} k(P) dP.$$

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$P^{n+1} = P_c^{n+1} - (P_c^{n+1} - P_3^{n+1}) \frac{\ln \frac{R_c}{r}}{\ln \frac{R_c}{R_k}}.$$

Для определения $\ln R_c$, учитывая неразрывность движения для первой области, можем записать

$$Q = \frac{2\pi h}{\eta \ln \frac{R_k}{R_c}} \int_{R_k}^{P_k} k(P) dP. \quad (2.85)$$

Для второй области получим

$$Q = \frac{2\pi k_0 h (P_c^{n+1} - P_3^{n+1})}{\eta \ln \frac{R_c}{r} (n+1) P_c^n}. \quad (2.86)$$

Из (2.85) и (2.86) определим

$$\frac{\ln R_c}{\ln r} = \frac{\left(1 + \frac{\ln R_k}{\ln r} \frac{k_0 (P_c^{n+1} - P_3^{n+1})}{(n+1) P_c^n \int_{R_k}^{P_k} k(p) dp} \right)}{\left(1 + \frac{k_0 (P_c^{n+1} - P_3^{n+1})}{(n+1) P_c^n \int_{P_c}^{P_k} k(p) dp} \right)}.$$

Для расхода жидкости получим

$$Q = \frac{2\pi h}{\eta \ln \frac{R_k}{R_c}} \int_{R_k}^{P_k} k(P) dP.$$

Для безразмерного расхода

$$Q_1 = \frac{\left(\int_{P_c}^{P_k} k(p) dp \right) \ln \frac{R_k}{r_c}}{k_0 (P_k - P_s) \ln \frac{R_k}{R_c}}. \quad (2.87)$$

На рис. 2.120 показана индикаторная диаграмма, рассчитанная по вышеуказанной формуле (при $P_s = \text{const}$). Как видно из рисунка, характер течения, в отличие от фильтрации с проскальзыванием, дилатантный.

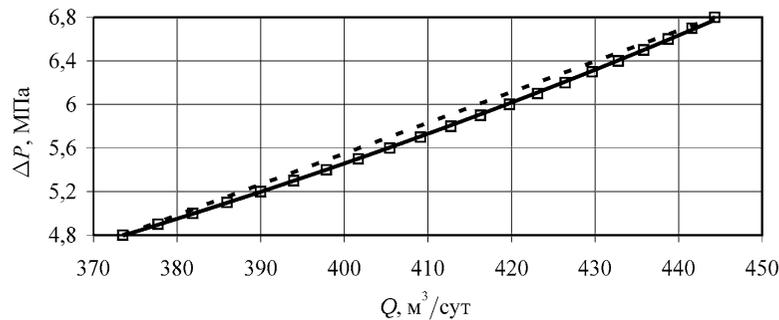


Рис. 2.120. Расчетная индикаторная диаграмма для случая $P_s \geq P_k > P_s \geq P_c$

Распределение давления применительно к рассматриваемому случаю для $P_s = 1$ МПа показано на рис. 2.121. Видно, что, пока забойное давление выше давления насыщения, давление при одном и том же радиусе плоско-радиального потока ниже (фильтрационное сопротивление снижается),

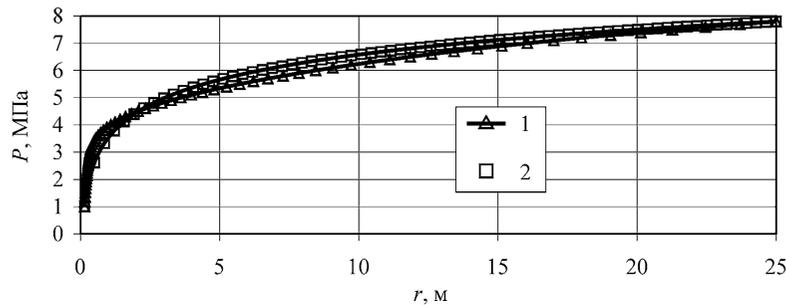


Рис. 2.121. Распределение давления для случая $P_s \geq P_k > P_s \geq P_c$ (1) и по Дюпюи (2)

а при забойном давлении ниже давления насыщения выше, чем по Дюпюи (фильтрационное сопротивление возрастает).

На рис. 2.122 показана расчетная зависимость безразмерного расхода жидкости от уровня давления. Как видно из рисунка, при забойном давлении ниже давления насыщения безразмерный расход резко снижается и становится меньше единицы, несмотря на то что давление на контуре питания выше давления насыщения.

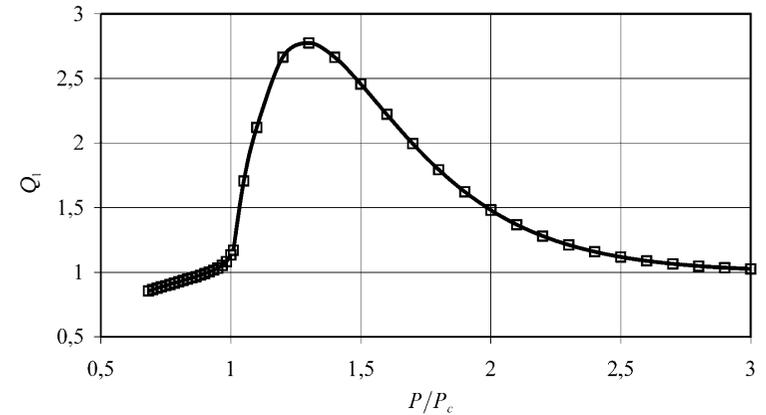


Рис. 2.122. Зависимость безразмерного расхода от уровня давления

б) Фильтрация газированной неньютоновской жидкости

Переходя к пористой среде по Козени–Карману, получим (если не оговаривается иное, используются обозначения, принятые в 2.4.1 и 2.4.2a):

$$Q = 2\pi h B(P) r \left(\frac{dp}{dr} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.88)$$

Рассмотрим плоско-радиальную стационарную фильтрацию для случая $P_s \geq P_k > P_s \geq P_c$, т. е. проскальзывание имеет место на всем протяжении течения жидкости (см. схему на рис. 2.113a). Решая уравнение (2.88) совместно с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{d}{dr}(rv) = 0, \quad (2.89)$$

после некоторых преобразований для расхода жидкости получим:

$$Q = 2\pi h \left(\frac{1-n}{R_k^{1-n} - r_c^{1-n}} \int_{P_s}^{P_k} B^n(P) dP \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.90)$$

Распределение давления может быть определено из выражения

$$\int_P^{P_k} B^n(P) dP = \frac{R_k^{1-n} - r^{1-n}}{R_k^{1-n} - r_c^{1-n}} \int_{P_3}^{P_k} B^n(P) dP.$$

Для расхода степенной жидкости можем записать:

$$Q = 2\pi h B_0 \left(\frac{(1-n)(P_k - P_3)}{R_k^{1-n} - r_c^{1-n}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

а для отношения расходов:

$$Q_1 = \frac{1}{B_0} \left(\frac{\int_{P_3}^{P_k} B^n(p) dP}{(P_k - P_3)} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.91)$$

Указанное выражение совпадает с аналогичным выражением для прямолинейной фильтрации (2.76), поэтому зависимости, полученные на его основе, справедливы и для плоскорадиального случая.

С целью определения влияния проскальзывания на характер индикаторных диаграмм были проведены расчеты по вышеуказанным формулам при различных значениях n для пористой среды с проницаемостью $0,02 \text{ мкм}^2$ и пористостью $0,2$ (интеграл определялся численно, т. к. он раскрывается только при четных n), η_0 определяли при $\tau = 2 \text{ Н/м}^2$, $\gamma = 400 \text{ с}^{-1}$. Остальные параметры брались из пункта «а». Результаты приведены на рис. 2.123–2.126. Как видно из рисунков, полученные результаты практически идентичны аналогичным при прямолинейной фильтрации. Действительно, при $P_k\text{-const}$ для исходно псевдопластичных жидкостей (рис. 2.123, 2.124) не происходит качественного изменения характера течения, хотя наблюдается значительный рост расхода жидкости при постоянном перепаде давления. Для исходно дилатантных жидкостей происходит полная модификация характера течения (рис. 2.125, 2.126). Так, при $n = 1,1$ дилатантная жидкость меняет характер фильтрации на псевдопластичный (рис. 2.125), а при $n = 3$ на S -образный (рис. 2.126).

При $P_3\text{-const}$ для исходно дилатантных жидкостей (рис. 2.125, 2.126) не происходит качественного изменения характера течения, хотя наблюдается значительный рост расхода жидкости при постоянном перепаде давления. Для исходно псевдопластичных жидкостей при определенных значениях n происходит полная (за исключением небольшого начального участка) модификация характера течения (рис. 2.124). Следует отметить, что

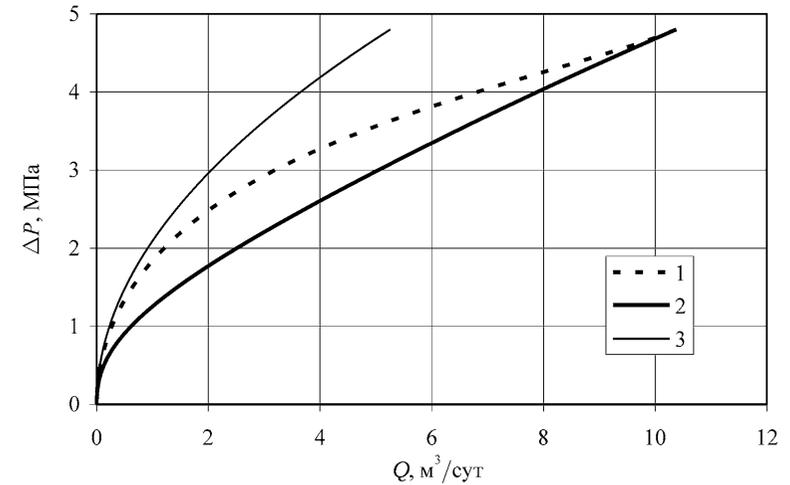


Рис. 2.123. Расчетные индикаторные диаграммы при $n = 0,5$: 1 – $P_k\text{-const}$; 2 – $P_3\text{-const}$; 3 – степенная жидкость

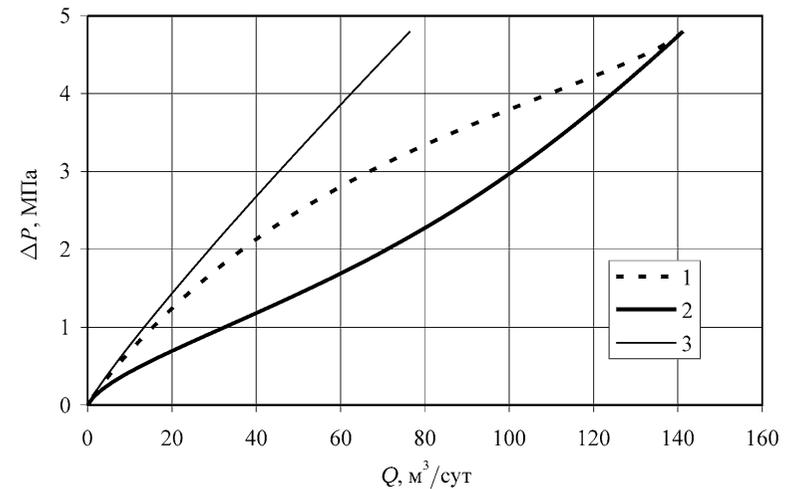


Рис. 2.124. Расчетные индикаторные диаграммы при $n = 0,9$: 1 – $P_k\text{-const}$; 2 – $P_3\text{-const}$; 3 – степенная жидкость

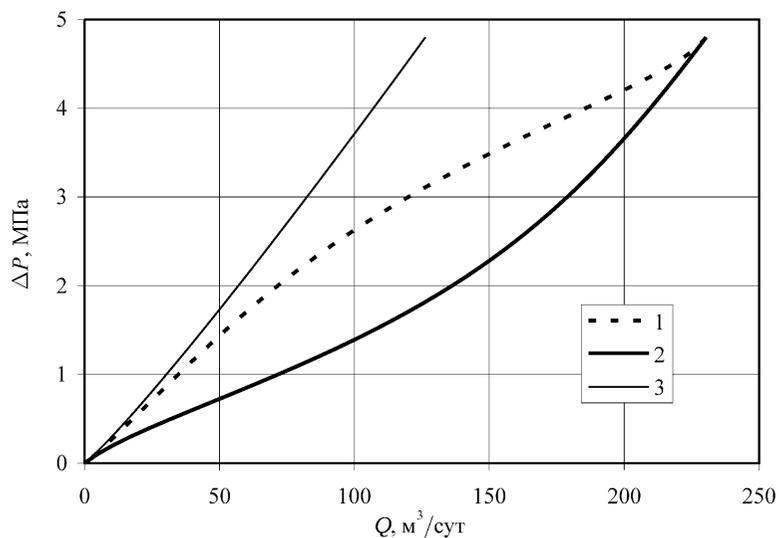


Рис. 2.125. Расчетные индикаторные диаграммы при $n = 1,1$: 1 – P_k -const; 2 – P_s -const; 3 – степенная жидкость

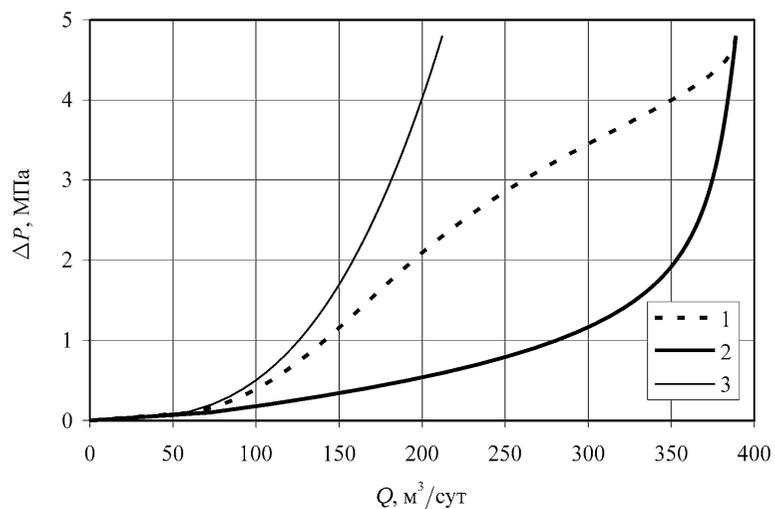


Рис. 2.126. Расчетные индикаторные диаграммы при $n=3$: 1 – P_k -const; 2 – P_s -const; 3 – степенная жидкость

отмеченные в 2.4.1б для прямолинейной фильтрации особенности зависимости $\Delta P - Q$ (комбинированный характер с преобладанием псевдопластичного или дилатантного течения, характер зависимости $Q_1 - \Delta P$) справедливы и в данном случае, что хорошо видно из вышеприведенных рисунков.

Полученные результаты хорошо согласуются с промышленными данными, представленными в работе [94] (при P_k -const). На рис. 2.127, 2.128 представлены материалы рис. 2.7, 2.9 из указанной работы. Как видно из рисунка 2.127, с усилением эффекта проскальзывания при приближении давления к давлению насыщения расход жидкости при прочих равных условиях значительно возрастает. Из рисунка 2.128 видно, что с усилением эффекта проскальзывания происходит качественное изменение характера течения от дилатантного к S-образному.

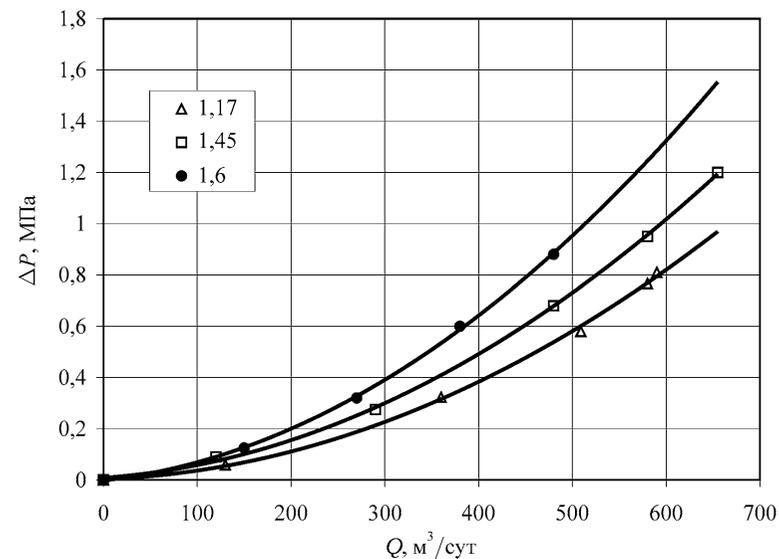


Рис. 2.127. Индикаторные диаграммы скважины X0 (месторождение «Белый Тигр». Фундамент) [94] при различных P/P_c

На рис. 2.129 показано распределение давления при различных n . Как видно из рисунка, наличие проскальзывания приводит к снижению давления при прочих равных условиях.

Рассмотрим теперь более общий случай $P_k > P_s > P_s \geq P_c$ (см. схему на рис. 2.113б). В этом случае также имеются две области: в области $P_s < P < P_k$

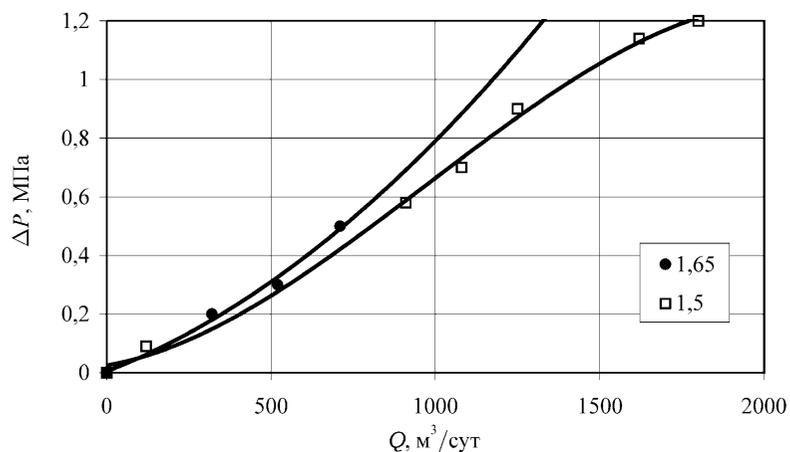


Рис. 2.128. Индикаторные диаграммы скважины В03 (месторождение «Белый Тигр». Фундамент) [94] при различных P/P_c

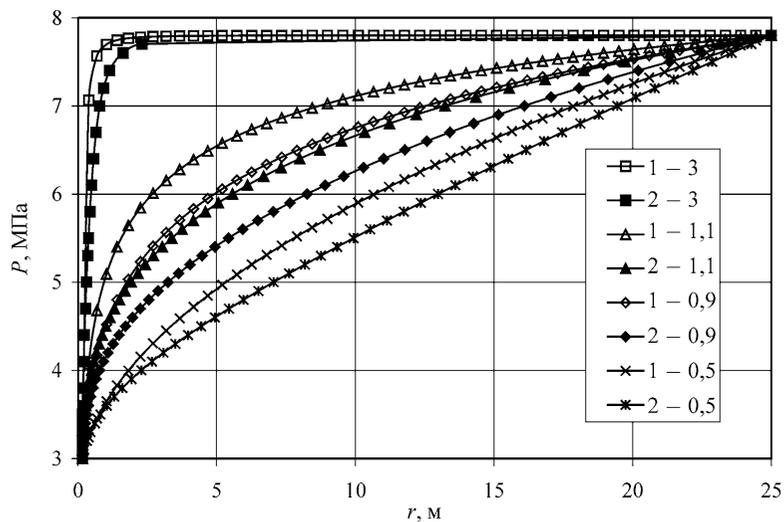


Рис. 2.129. Распределение давления при различных n : 1 – без проскальзывания; 2 – с проскальзыванием

имеет место фильтрация без проскальзывания, т. е. $B(P) = B_0$; в области $P_3 \leq P < P_s$ имеет место фильтрация с проскальзыванием.

Совместно решая (2.88) и (2.89), для распределения давления в первой области получим:

$$P = P_k - (P_k - P_s) \frac{R_k^{1-n} - r^{1-n}}{R_k^{1-n} - R_s^{1-n}}.$$

Для второй области после несложных преобразований получим:

$$\int_P^{P_s} B^n(P) dP = \frac{R_s^{1-n} - r^{1-n}}{R_s^{1-n} - R_c^{1-n}} \int_{P_3}^{P_s} B^n(P) dP.$$

Для определения R_s , учитывая неразрывность движения для первой области, можем записать

$$Q = 2\pi h B_0 \left(\frac{(1-n)(P_k - P_s)}{R_k^{1-n} - R_s^{1-n}} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.92)$$

Для второй области:

$$Q = 2\pi h \left(\frac{1-n}{R_s^{1-n} - R_c^{1-n}} \int_{P_3}^{P_s} B^n(P) dP \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.93)$$

После некоторых преобразований находим:

$$R_s^{1-n} = \frac{\left(r_c^{1-n} \left(1 + \frac{R_k^{1-n}}{r_c^{1-n}} \frac{\int_{P_3}^{P_s} B^n(p) dp}{B_0^n (P_k - P_s)} \right) \right)}{\left(1 + \frac{\int_{P_3}^{P_s} B^n(p) dp}{B_0^n (P_k - P_s)} \right)}.$$

Из (2.92) или (2.93) для расхода жидкости получим:

$$Q = 2\pi h B_0 \left(\frac{(1-n)(P_k - P_s)}{R_k^{1-n} - R_s^{1-n}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Для отношения расходов, имеем

$$Q_1 = \left(\frac{(P_k - P_s)(R_k^{1-n} - r_c^{1-n})}{(P_k - P_s)(R_k^{1-n} - R_s^{1-n})} \right).$$

Таким образом, результаты расчетов для плоскорадиального случая подтверждаются промысловыми исследованиями фильтрации газированных жидкостей в докритической области.

2.4.3. Нестационарная фильтрация

Как показали вышеприведенные экспериментальные исследования, эффект проскальзывания оказывает существенное влияние на процесс восстановления давления при фильтрации газированной жидкости. В связи с этим исследование восстановления давления с учетом эффекта проскальзывания при мгновенном прекращении притока жидкости представляет как научный, так и практический интерес. С этой целью рассмотрим скважину с начальным дебитом Q_0 , примем, что в определенный момент времени происходит её мгновенная остановка.

Рассмотрим упрощенную модель и предположим, что проницаемость пористой среды зависит от давления (если не оговаривается иное, используются обозначения, принятые в 2.4.1 и 2.4.2). Тогда распределение давления в пласте описывается уравнением пьезопроводности [95]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\chi(P) r \frac{\partial P}{\partial r} \right]. \quad (2.94)$$

Начальные и граничные условия:

$$P|_{t=0} = P_{cm}, \quad (2.95)$$

$$\left. \begin{aligned} P|_{r=R_k} &= P_k \\ 2\pi r h \frac{k(P)}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c} &= Q(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

Для решения нелинейной краевой задачи (2.94) применим преобразование Кирхгофа [96]

$$\theta = \frac{1}{\chi_0} \int_0^P \chi(P) dP. \quad (2.97)$$

Из (2.94) с учетом (2.97) получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]. \quad (2.98)$$

Усредняя $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ по r , получим

$$\varphi(t) = \frac{2}{R_k^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_k} \frac{\partial \theta}{\partial t} r dr. \quad (2.99)$$

В 2.4.1 показано, что эффективная проницаемость с учетом проскальзывания жидкости может быть найдена из уравнения

$$k(P) = k_0 \left[1 + \frac{4b(P)}{R} \right]. \quad (2.100)$$

Рассмотрим фильтрационный процесс выше давления насыщения с учетом эффекта проскальзывания.

Линеаризуя полученные в работе [55] и приведенные в 2.4.1 результаты, для пьезопроводности получим

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{k_0}{\eta \beta^*} \left[1 + \frac{4}{R} a(P - P_c) \right] \quad P_c \leq P \leq P_m \\ \chi &= \frac{k_0}{\eta \beta^*} \left[1 + \frac{1}{R} a(P_s - P) \right] \quad P_m \leq P \leq P_s \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

где P_m – давление, при котором эффективная проницаемость достигает максимального значения (в экспериментах $P_m = 1.1 - 1.5 P_c$), a – постоянный коэффициент.

Из (2.97) с учетом (2.101) получим

$$\left. \begin{aligned} \theta &= P + \frac{2a}{R} \left[(P - P_c)^2 - P_c^2 \right] \quad P_c \leq P \leq P_m \\ \theta &= P + \frac{a}{2R} \left[P_s^2 - (P_s - P)^2 \right] \quad P_m \leq P \leq P_s \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Давление представим в виде

$$P = P_{cm} + P_\phi, \quad (2.103)$$

где $P_{cm} = P_k + \frac{\eta Q_0}{2\pi k_0 h} \ln \frac{r}{R_k}$ – стационарная составляющая давления, P_ϕ – флуктуирующая составляющая давления.

Подставляя (2.103) в (2.102) и линеаризуя, получим

$$\left. \begin{aligned} \theta &= P_{cm} + P_\phi + \frac{2a}{R} \left[\left(1 + \frac{2P_\phi}{P_{cm}} \right) P_{cm}^2 - 2P_{cm}P_c - 2P_cP_\phi \right] \quad P_c \leq P \leq P_m, \\ \theta &= P_{cm} + P_\phi + \frac{a}{2R} \left[- \left(1 + \frac{2P_\phi}{P_{cm}} \right) P_{cm}^2 + 2P_sP_{cm} + 2P_sP_\phi \right] \quad P_m \leq P \leq P_s, \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

Граничное условие (2.96) с учетом (2.100) и (2.102) примет вид

$$\frac{k(P)}{\eta} 2\pi h r_c \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = \frac{k_0}{\eta} 2\pi h r_c \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_c}. \quad (2.105)$$

Подставляя (2.99) в (2.98) и интегрируя его с учетом (2.95), (2.96) и (2.105), получим

$$\theta = \theta_k + \frac{\varphi(t)}{2\chi_0} (r^2 - R_k^2) - \frac{\varphi(t)}{2\chi_0} r_c^2 \ln \left(\frac{r}{R_k} \right) + \frac{\mu Q(t)}{2\pi h k_0} \ln \frac{r}{R_k}; \quad (2.106)$$

здесь

$$\theta_k = P_k + \frac{2a}{R} [(P_k - P_c)^2 - P_c^2] \quad P_c \leq P \leq P_m,$$

$$\theta_k = P_k + \frac{a}{2R} [P_s^2 - (P_s - P_k)^2] \quad P_m \leq P \leq P_s.$$

Тогда из (2.99) с учетом (2.106) и пренебрегая r_c^2 , будем иметь

$$\dot{\varphi} + \frac{4\chi_0}{R^2} \varphi = - \frac{\dot{Q}(t)}{\pi \beta^* h R_k^2}; \quad (2.107)$$

$\dot{\varphi}$, $\dot{Q}(t)$ – производные φ и $Q(t)$ по времени.

Следует отметить, что при постоянном значении проницаемости пласта k_0 дифференциальное уравнение для φ получится в таком же виде как (2.107).

$Q(t)$ должно быть определено из совместного решения дифференциальных уравнений фильтрации и движения жидкости в вертикальном трубопроводе. Однако в первом приближении можно считать, что при мгновенном отсечении потока жидкости с устья приток в скважину сразу не прекращается, а меняется по закону

$$Q = Q_0 e^{-\beta_0 t}, \quad (2.108)$$

где $\beta_0 = \frac{4\chi_0}{R^2}$.

Тогда из (2.107) с учетом (2.108), при давлении намного выше давления насыщения при отсутствии проскальзывания жидкости ($P > P_s$) будем иметь

$$\varphi = \frac{Q_0}{\pi \beta^* h R_k^2} \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R^2}\right) \left(\frac{4\chi_0 t}{R^2} - 1 \right) + C_1 \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R^2}\right). \quad (2.109)$$

Из (2.106) с учетом (2.95), (2.109) для распределения давления получим

$$P = P_k + \frac{r^2 - R_k^2}{2\chi_0} \frac{Q_0}{\pi \beta^* h R_k^2} \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R^2}\right) \frac{4\chi_0 t}{R_k^2} + \frac{\eta Q_0 \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right)}{2\pi h k_0} \cdot \ln \frac{r}{R_k}. \quad (2.110)$$

Изменение (восстановление) забойного давления во времени может быть определено из (2.110) и будет иметь вид

$$P_s = P_k - \frac{2Q_0 t}{\pi \beta^* h R_k^2} \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right) + \frac{\mu Q_0 \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right)}{2\pi h k_0} \ln \frac{r_c}{R_k} \quad (2.111)$$

или

$$P_s = P_k - \Delta P \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right) \left[\frac{4\chi_0 t}{R_k^2 \ln \frac{R_k}{r_c}} + 1 \right].$$

Восстановление давления при наличии проскальзывания жидкости может быть определено из (2.106) с учетом (2.95), (2.102) и (2.109) по формулам:

при $P_c \leq P \leq P_m$

$$P_s = P_k - \frac{R}{4a} \left[1 + \frac{4a}{R} (P_k - P_c) \right] +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{R}{4a} \right)^2 \left[1 + \frac{4a}{R} (P_k - P_c) \right]^2 - \frac{R}{2a} \Delta P \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right) \left[\frac{4\chi_0 t}{R_k^2 \ln \left(\frac{R_k}{R_c} \right)} + \frac{2a}{R} (P_{s0} + P_k - 2P_c) - 1 \right]};$$

при $P_m \leq P \leq P_s$

$$P_s = P_k + \frac{R}{a} \left[1 + \frac{a}{R} (P_s - P_k) - \frac{a}{2R} \Delta P \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right) \right] -$$

$$- \sqrt{\left(\frac{R}{a} \right)^2 \left[1 + \frac{a}{R} (P_s - P_k) - \frac{a}{2R} \Delta P \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right) \right]^2 + 2\Delta P \exp\left(-\frac{4\chi_0 t}{R_k^2}\right) \left[P_s - P_k + \frac{R}{a} \left(\frac{4\chi_0 t}{R_k^2 \ln \frac{R_k}{r_c}} + 1 \right) \right]},$$

где P_{s0} – начальное забойное давление, $\Delta P = P_k - P_{s0}$.

На рис. 2.130–2.133 представлены результаты численного расчета по указанным формулам при следующих значениях параметров: $P_k = 10,8–22$ МПа; $\eta = 1$ мПа·с; $h = 10$ м; $r_c = 0,15$ м; $\chi_0 = 0,05$ м²/с; $k_0 = 0,15 \cdot 10^{-12}$ м²; $m = 0,2$; $a = 5 \cdot 10^{-11}$ м/Па; $R = 2,45 \cdot 10^{-6}$ м; $\beta^* = 2,94 \times 10^{-9}$ 1/Па; $R_k = 25$ м; $P_s = 20$ МПа; $P_c = 8,0$ МПа; $P_{30} = 8,8–20$ МПа.

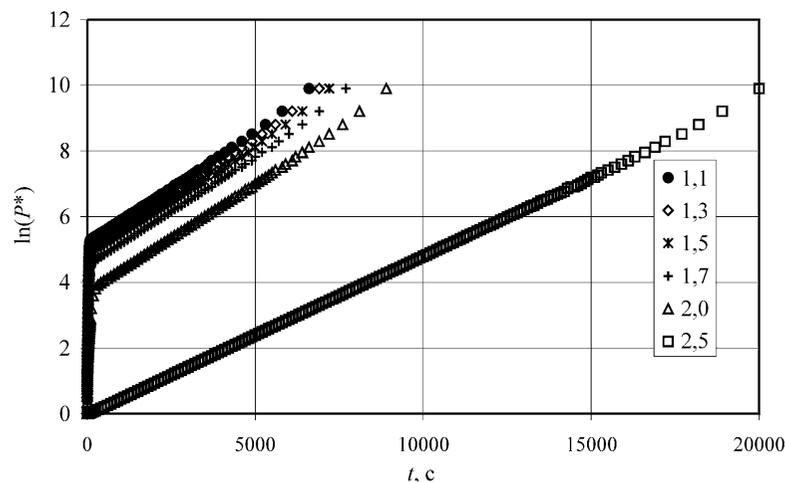


Рис. 2.130. Расчетные кривые восстановления давления, перестроенные в полулогарифмических координатах при различных P/P_c

Полученные кривые восстановления давления по вышеописанной методике перестраивались в полулогарифмических координатах. Как видно из рис. 2.130 и 2.131, при $P < 2P_c$ полученная зависимость имеет вид ломаной с двумя характерными участками, а при $P \geq 2,5P_c$ – прямой, т. е. при приближении исходного забойного давления к P_c происходит смена моделей с экспоненциальной на описываемую суммой экспонент. С приближением к критической области линии отклоняются влево, (т. е. в сторону меньших времен релаксации), при этом время восстановления давления также уменьшается (рис. 2.132). Следует также отметить, что при приближении забойного давления к P_c величина начального прямолинейного участка полулогарифмической зависимости увеличивается (рис. 2.130).

Наблюдаемые эффекты, очевидно, связаны с увеличением проницаемости и соответственно пьезопроводности среды в области давлений, где имеет место эффект проскальзывания. Это хорошо видно из рис. 2.133,

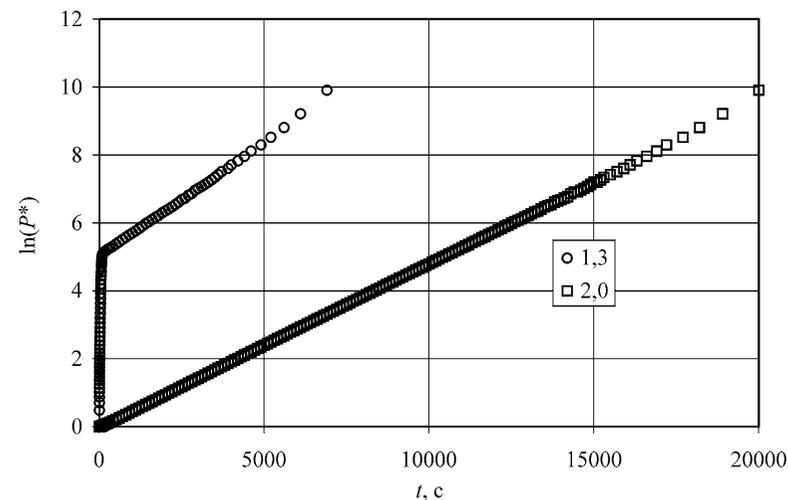


Рис. 2.131. Расчетные кривые восстановления давления, перестроенные в полулогарифмических координатах при различных P/P_c

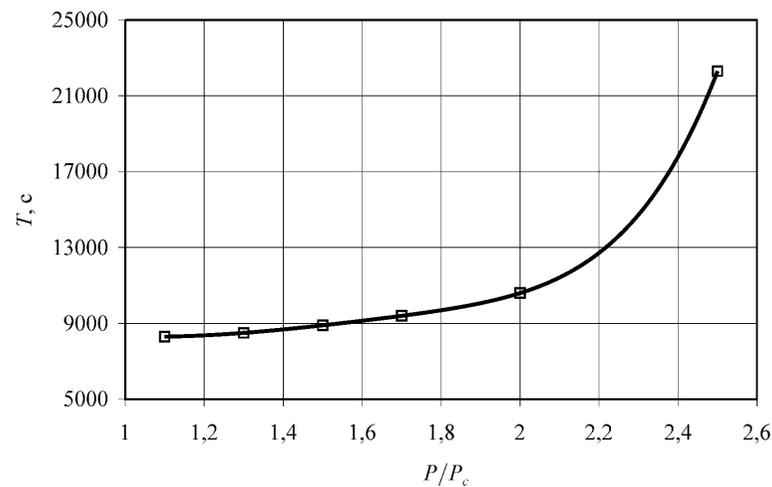


Рис. 2.132. Зависимость времени восстановления давления от P/P_c .

где показана расчетная кривая восстановления давления, перестроенная в полулогарифмических координатах, и динамика проницаемости пористой среды при $P/P_c = 1,3$. При этом при стабилизации проницаемости пористой среды происходит снижение интенсивности восстановления давления.

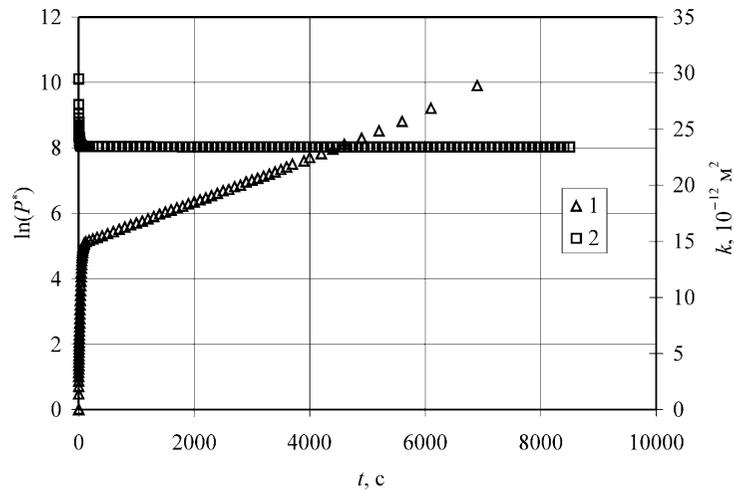


Рис. 2.133. Расчетная кривая восстановления давления, перестроенная в полулогарифмических координатах (1), и динамика проницаемости пористой среды (2) при $P/P_c = 1,3$.

Полученные результаты хорошо согласуются с промысловыми данными, представленными в работе [94]. На рис. 2.134, 2.135 представлены материалы рис. 2.6 из указанной работы.

Как видно из указанных рисунков, кривые восстановления давления для скважины X0 месторождения «Белый Тигр», перестроенные в полулогарифмических координатах, имеют вид ломаной с двумя характерными участками, при этом при приближении забойного давления к P_c величина начального прямолинейного участка полулогарифмической зависимости увеличивается (рис. 2.134). С приближением к критической области линии отклоняются влево (т. е. в сторону меньших времен релаксации), при этом время восстановления давления также уменьшается (рис. 2.135). На рис. 2.136 показаны расчетные и промысловые КВД по данным [94], перестроенные в полулогарифмических координатах. Как видно из рисунка, предложенная модель качественно и количественно описывает промысловые результаты.

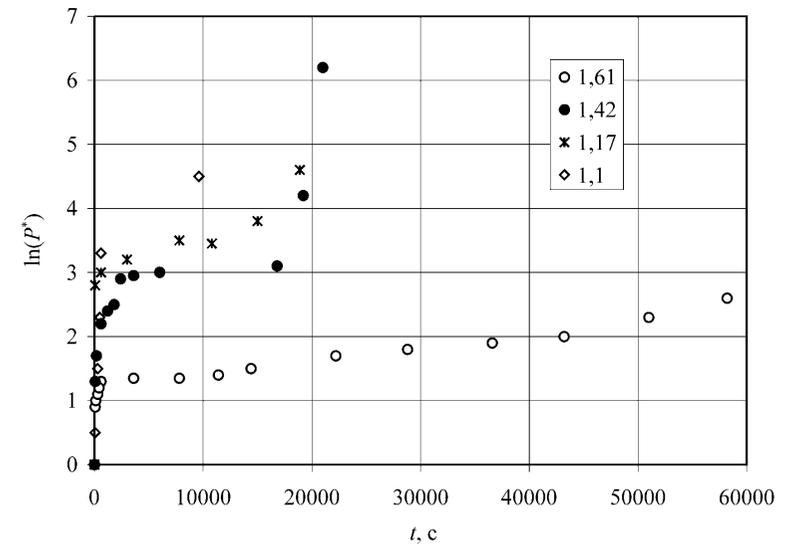


Рис. 2.134. Кривые восстановления давления для скважины X0 месторождения «Белый Тигр» [94], перестроенные в полулогарифмических координатах при различных P/P_c

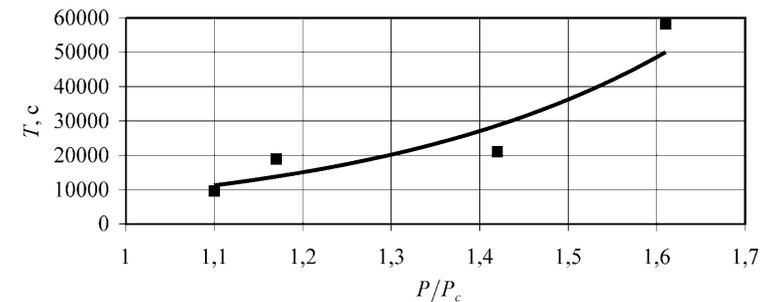


Рис. 2.135. Зависимость времени восстановления давления от P/P_c для скважины X0 месторождения «Белый Тигр» [94]

Теперь с целью сравнения результатов теоретических и экспериментальных исследований рассмотрим прямолинейную фильтрацию. Из уравнения прямолинейной фильтрации [95] с учетом начальных и граничных условий (2.95), (2.96), а также применяя преобразование Кирхгофа (2.98) и метод усреднения (2.99) для распределения и восстановления давления на выходе из пористой среды при давлении намного выше давления насы-

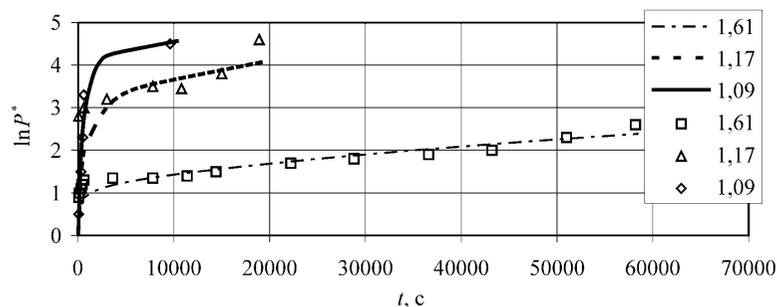


Рис. 2.136. Расчетные (линии) и промысловые (точки) кривые восстановления давления для скважины X0 месторождения «Белый Тигр» [94], перестроенные в полулогарифмических координатах при различных P/P_c

щения, т. е. при отсутствии проскальзывания жидкости ($P > P_s$), соответственно получим

$$P = \frac{x^2 - l^2}{2\chi_0} \frac{3Q_0}{2\beta^* fl} \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) \cdot \frac{3\chi_0}{l^2} \cdot t + P_0 + \frac{Q_0 \eta}{k_0 f} \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) (x-l), \quad (2.112)$$

$$P_e = P_0 - \frac{9Q_0}{4\beta^* fl} t \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) - \frac{Q_0 \eta l}{k_0 f} \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) \quad (2.113)$$

или

$$P_e = P_0 - \Delta P \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) \left(\frac{9\chi_0}{4l^2} t - \frac{1}{2}\right).$$

Восстановление давления при наличии проскальзывания жидкости может быть определено из следующих уравнений:

при $P_c \leq P \leq P_m$

$$P_e = P_0 - \frac{R}{4a} \left[1 + \frac{4a}{R} (P_0 - P_c) \right] + \sqrt{\left(\frac{R}{4a}\right)^2 \left[1 + \frac{4a}{R} (P_0 - P_c) \right]^2 - \Delta P \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) \left[\frac{R}{2a} \left(\frac{9\chi_0}{4l^2} t + 1\right) - (P_0 + P_{e0} - 2P_c) \right]};$$

при $P_m \leq P \leq P_s$

$$P_e = P_0 + \frac{R}{a} \left[1 + \frac{a}{R} (P_s - P_0) \right] - \sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^2 \left[1 + \frac{a}{R} (P_s - P_0) \right]^2 + \Delta P \exp\left(-\frac{3\chi_0}{l^2} t\right) \left[\frac{2R}{a} \left(\frac{9\chi_0}{4l^2} t - \frac{1}{2}\right) - (P_0 + P_{e0} - 2P_s) \right]};$$

где P_{e0} – начальное давление на выходе пористой среды, $\Delta P = P_0 - P_{e0}$.

На рис. 2.137–2.140 представлены результаты численного расчета по указанным формулам при следующих значениях параметров: $P_0 = 5,7 - 10,2$ МПа; $\eta = 1$ МПа·с; $F = 8 \cdot 10^{-4}$ м²; $\chi_0 = 0,05$ м²/с; $k_0 = 015 \cdot 10^{-12}$ м²; $a = 5 \cdot 10^{-11}$ м/Па; $R = 2,45 \cdot 10^{-6}$ м; $\beta^* = 2,94 \cdot 10^{-9}$ 1/Па; $l = 1,1$ м; $P_s = 7,8$ МПа; $P_c = 3$ МПа; $P_{e0} = 3,0 - 7,5$ МПа.

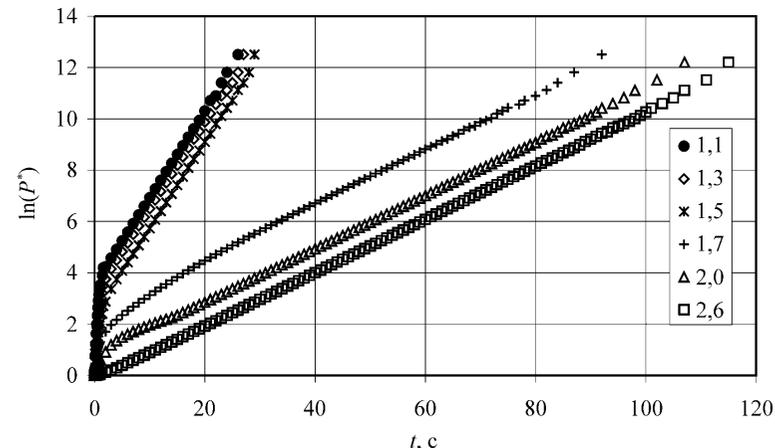


Рис. 2.137. Расчетные кривые восстановления давления, перестроенные в полулогарифмических координатах при различных P/P_c

Как видно из рис. 2.137-2.139, для линейного случая имеют место те же закономерности, что и для радиального. Вместе с тем полученное решение не вполне соответствует экспериментальным результатам, приведенным в 2.2, а именно ввиду неучета диффузионного растворения докритических зародышей газа время восстановления при приближении к критической области, в отличие от экспериментальных исследований, уменьшается. Соответствие решения для радиального случая (где также не учитывалось диффузионное растворение газа) промысловым исследованиям можно объяснить тем, что при промысловых исследованиях пластовое давление полностью не восстанавливается. Для его полного восстановления требуется закрытие всех скважин на исследуемой площади, что практически не осуществляется, поэтому полученное для радиального случая решение может быть использовано для интерпретации промысловых КВД.

Процесс диффузионного растворения газа рассмотрен в работе [97]. В указанной работе показано, что при наличии диффузионного растворе-

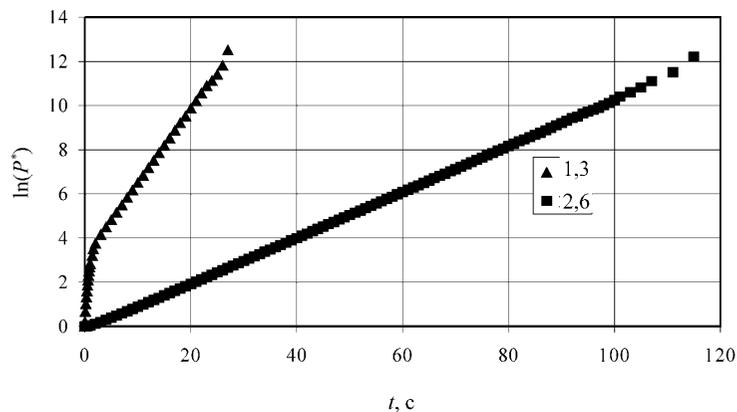


Рис. 2.138. Расчетные кривые восстановления давления, перестроенные в полулогарифмических координатах при различных P/P_c

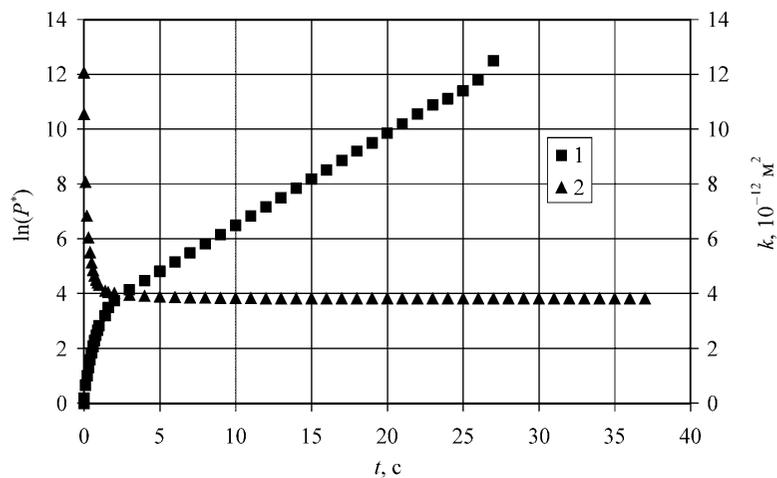


Рис. 2.139. Расчетные кривые восстановления давления, перестроенные в полулогарифмических координатах (1), и динамика проницаемости пористой среды (2) при $P/P_c = 1,3$.

ния в процессе восстановления давления соответствующие участки КВД в координатах $(\ln(\sqrt{t} \frac{\partial P}{\partial t}), \frac{1}{t})$ имеют прямолинейный характер.

Перестройка экспериментальных кривых восстановления давления в новых «диффузионных» координатах показана на рис. 2.141 ($\sqrt{t} \frac{\partial P}{\partial t} = P^0$).

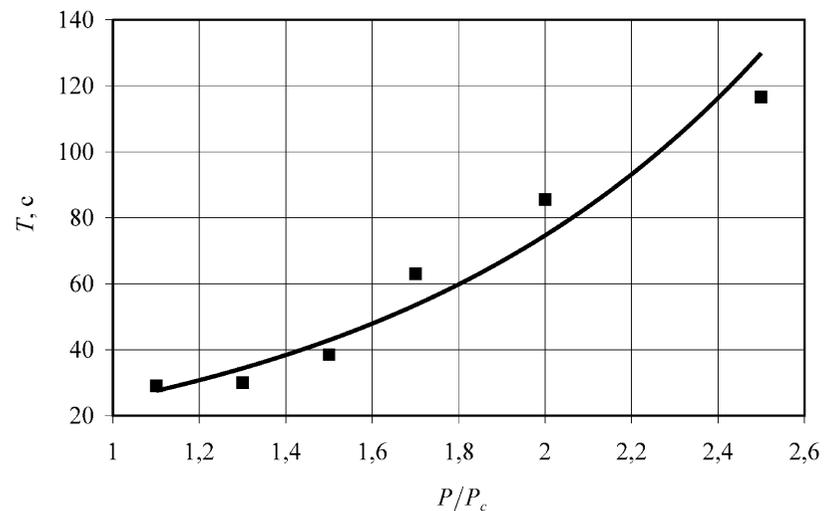


Рис. 2.140. Зависимость времени восстановления давления от P/P_c

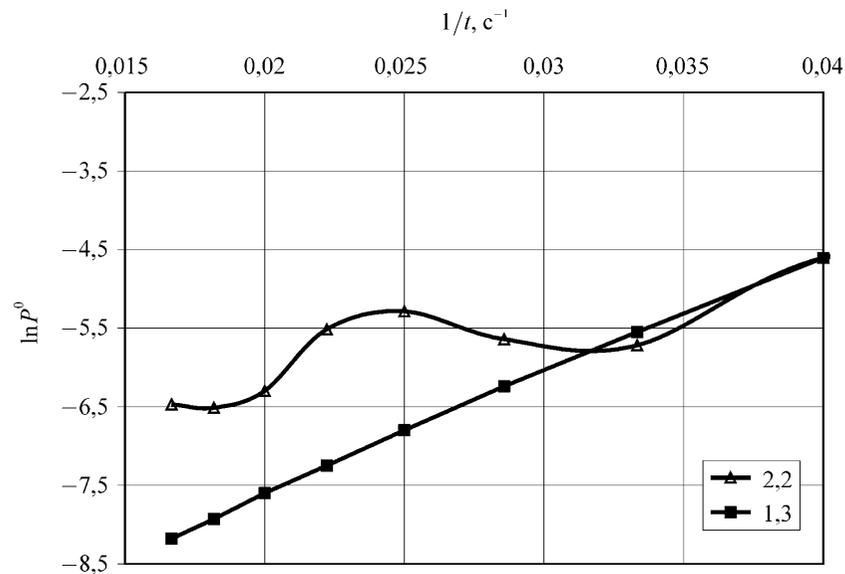


Рис. 2.141. Экспериментальные кривые восстановления давления при различных P/P_c , перестроенные в «диффузионных» координатах

Как видно из рисунка, для уровней начального давления, близких к критической области ($P=1.3P_c$), конечный участок спрямляется в указанных координатах, а для уровней $P \geq 2P_c$ этого не происходит, что подтверждает наши рассуждения.

2.5. Вытеснение нефти газированной жидкостью

2.5.1. Вытеснение нефти ньютоновской газированной жидкостью

Известна технология разработки нефтяной залежи, включающая очередную или одновременную закачку в пласт воды и углеводородного (природного, попутного нефтяного) газа [98]. При этом количество закачиваемого углеводородного газа не менее чем в 10 раз превышает необходимый его объем для полного насыщения в воде при пластовом давлении. Так, газовой фактор, приведенный к пластовому давлению, составляет не менее $2 \text{ нм}^3/\text{м}^3 \cdot \text{МПа}$, в то время как газовой фактор, необходимый для полного насыщения воды, составляет при пластовых условиях около $0,2 \text{ нм}^3/\text{м}^3 \cdot \text{МПа}$. В результате даже при высоких давлениях нагнетания значительная часть углеводородного газа не растворяется в воде, находясь в состоянии свободной газовой фазы. Недостатком способа является двухфазный характер водогазовой смеси, что предопределяет опережающие прорывы газа к добывающим скважинам, снижает охват пласта заводнением и нефтеотдачу. Помимо этого, применение способа требует высокого удельного расхода дорогостоящего углеводородного газа. Кроме того, при осуществлении способа значительно усложняется оборудование нагнетательной скважины, а ее приемистость снижается не менее чем в 4 раза.

Вместе с тем известна технология заводнения нефтяных пластов водовоздушными растворами в предпереходном фазовом состоянии, осуществляемая путем поддержания отношения объемов воздуха к воде в диапазоне $0,27:1-0,36:1$, а отношения забойного давления в нагнетательных скважинах к пластовому давлению в диапазоне $1,1-1,8$ [3, 99]. При этом водовоздушная смесь, находясь в предпереходном фазовом состоянии, увеличивает охват пласта заводнением. Недостатком технологии является интенсивная коррозия нефтепромыслового оборудования, кроме того, при смешении воздуха и углеводородного газа в добывающей скважине появляется возможность взрыва.

В связи с вышеуказанным, в данном параграфе представлены экспериментальные исследования по использованию в качестве вытесняющего агента водогазового раствора в предпереходном фазовом состоянии [100, 101] с добавкой и без добавки ПАВ.

Опыты проводились на модели двухслойного пласта (с контактирующими слоями) [102] с проницаемостью слоев $0,4$ и $1,6 \text{ мкм}^2$. Пористая среда состояла из кварцевого песка (90%) и монтмориллонитовой глины (10%), моделью нефти служило трансформаторное масло. Водогазовый раствор (ВГР), в котором в качестве газовой фазы служил метан, предварительно готовился в бомбе PVT с давлением насыщения $P_c = 3 \text{ МПа}$ и газовой фазой $1 \text{ м}^3/\text{м}^3$. Температура в процессе опытов поддерживалась на уровне 303° К . Вытеснение нефти осуществлялось при перепаде давления $0,1 \text{ МПа}$ при различных средних значениях давления в модели пласта $P = 1,1-3P_c$ и различных концентрациях анионного ПАВ (сульфанол) $C = 0\%-0,4\%$.

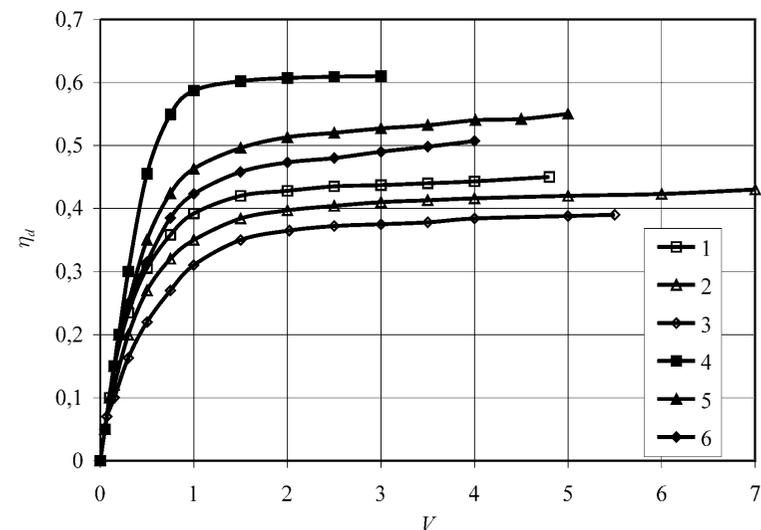


Рис. 2.142. Зависимость коэффициента вытеснения от относительного порового объема прокачки: 1 – вода; 2 – вода и ВГР при $P/P_c=2$ с добавкой сульфанола ($C = 0,01\%$); 3 – вода и ВГР при $P/P_c = 2$ с добавкой сульфанола ($C = 0,035\%$); 4 – ВГР при $P/P_c = 1,3$; 5 – ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой сульфанола ($C = 0,01\%$); 6 – ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой сульфанола ($C = 0,035\%$)

Результаты эксперимента оформлялись в виде зависимости коэффициента вытеснения от относительного порового объема прокачки вытесняющего агента. Полученные результаты показаны на рис. 2.142, из которого видно, что применение водогазовых растворов с добавкой анионного ПАВ позволяет существенно (на 13–22%) увеличить коэффициент вытес-

нения при среднем давлении $P = 1,3P_c$ и диапазоне концентраций катионного ПАВ 0,01–0,035%, по сравнению с водой. Коэффициент вытеснения имеет максимальное значение при вытеснении водогазовым раствором без добавки анионного ПАВ, превышая коэффициент вытеснения для воды почти на 36%.

Таким образом, гидрофилизация поровых каналов при добавке к ВГР анионного ПАВ снижает эффективность процесса по сравнению с ВГР без добавки и увеличивает по сравнению с вытеснением водой.

2.5.2. Вытеснение нефти неньютоновской газированной жидкостью

Наибольший интерес для практического применения представляет использование газированных полимерных растворов в предпереходной области для повышения степени нефтеизвлечения при заводнении нефтяных пластов. В данном пункте приведены экспериментальные исследования вытесняющих свойств газированных полимерных растворов.

Опыты проводились на модели двухслойного пласта (с контактирующими слоями) с проницаемостью по воздуху 3 мкм^2 (эксперименты проводились по плану, представленному в 1.5). Моделью нефти служило трансформаторное масло. Водогазовый раствор (ВГР), в котором в качестве газовой фазы служил метан, предварительно готовился в бомбе РВТ с давлением насыщения $P_c = 3 \text{ МПа}$ и газовой долей $1 \text{ м}^3/\text{м}^3$. Температура в процессе опытов поддерживалась на уровне 303° К . Вытеснение нефти осуществлялось при различных средних значениях давления в модели пласта $P = 1,1\text{--}3P_c$ и различных концентрациях полиакриламида (ПАА) $C = 0\text{--}0,03\%$.

В первой серии экспериментов вытеснение осуществлялось при псевдопластичном течении полимерного раствора (при перепаде давления в зависимости от концентрации ПАА 0,2–0,6 МПа).

Результаты эксперимента оформлялись в виде зависимости коэффициента вытеснения от относительного порового объема прокачки вытесняющего агента. Полученные результаты показаны на рис. 2.143, из которого видно, что применение водогазовых растворов с добавкой ПАА позволяет существенно (на 20–36%) увеличить коэффициент вытеснения при среднем давлении $P = 1,3P_c$ и диапазоне концентраций ПАА 0,01–0,03%, по сравнению с водой. Коэффициент вытеснения имеет максимальное значение, при вытеснении водогазовым раствором без добавки ПАА и с концентрацией ПАА 0,03% превышая коэффициент вытеснения для воды почти на 36%. При этом добавка ПАА к водогазовому раствору только в концентрации 0,03% соответствует по эффективности водогазовому раствору без добавки ПАА.

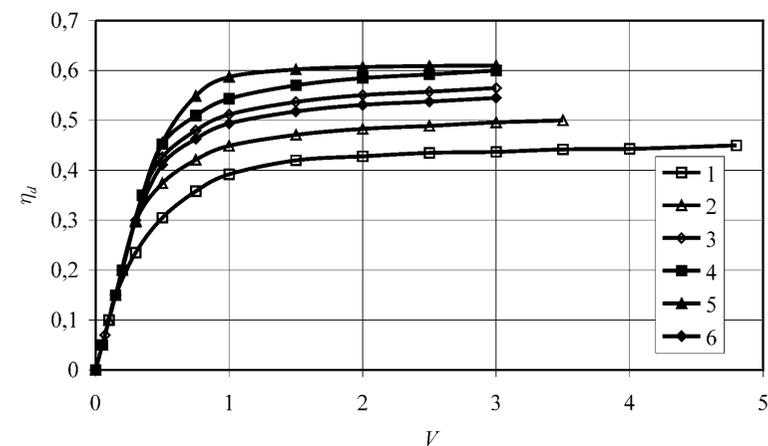


Рис. 2.143. Зависимость коэффициента вытеснения от относительного порового объема прокачки: 1 – вода; 2 – вода с добавкой ПАА ($C = 0,01\%$); 3 – ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой ПАА ($C = 0,01\%$); 4 – вода с добавкой ПАА ($C = 0,03\%$), ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой ПАА ($C = 0,02\%$); 5 – ВГР при $P/P_c = 1,3$, ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой ПАА ($C = 0,03\%$); 6 – вода с добавкой ПАА ($C = 0,02\%$)

Во второй серии экспериментов вытеснение осуществлялось при дилатантном течении полимерного раствора (при перепаде давления в зависимости от концентрации ПАА 0,04–0,1 МПа). Результаты эксперимента приведены на рис. 2.144. Как видно из рисунка, в данном случае эффективность вытеснения значительно выше, чем в первой серии. Вместе с тем с увеличением концентрации ПАА влияние газонасыщенности полимерного раствора на эффективность вытеснения снижается. Так, при концентрации 0,01% коэффициент вытеснения для газированного раствора на 11%, при $C = 0,02\%$ на 8%, при $C = 0,03\%$ на 3% выше, чем для дегазированного.

Это объясняется тем, что в процессе вытеснения газированным полимерным раствором имеют место два процесса – с увеличением концентрации ПАА вязкость вытеснителя повышается, а эффект проскальзывания снижается, т.к. увеличивается смачиваемость пористой среды. Вместе с тем при использовании газированных полимерных растворов существенно сокращается расход дорогостоящего полимера (так, эффективность вытеснения ВГР с добавкой ПАА в концентрации 0,02% равна эффективности вытеснения водного раствора ПАА в концентрации 0,03%).

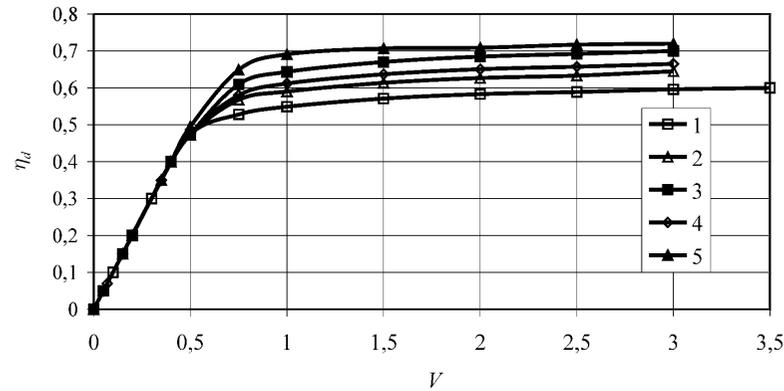


Рис. 2.144. Зависимость коэффициента вытеснения от относительного порового объема прокачки: 1 – вода с добавкой ПАА ($C = 0,01\%$); 2 – вода с добавкой ПАА ($C = 0,02\%$); 3 – вода с добавкой ПАА ($C = 0,03\%$), ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой ПАА ($C = 0,02\%$); 4 – ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой ПАА ($C = 0,01\%$); 5 – ВГР при $P/P_c = 1,3$ с добавкой ПАА ($C = 0,03\%$)

2.5.3. Механизм наблюдаемых явлений

Как показано выше, эффект скольжения проявляется тем заметнее, чем меньше средний радиус порового канала. Поэтому в неоднородной пористой среде профиль фильтрации газожидкостной системы вблизи (выше) давления насыщения должен быть более равномерным, чем для дегазированной ньютоновской жидкости или при $P \gg P_c$ [55, 78].

Действительно, пусть фильтрация газированной жидкости вблизи давления насыщения происходит в двух параллельных слоях с проницаемостью k_1 и k_2 , причем $k_1 \gg k_2$. Средний радиус поровых каналов в каждом из слоев может быть определен из известного соотношения $R_{mi} = 2\sqrt{2k_i/m_i}$ ($i=1,2$). Расход и кажущаяся вязкость жидкости при течении с проскальзыванием для каждого слоя определяется из выражений

$$Q_i = \frac{k_i F \Delta P}{\eta_{si} l}; \quad \eta_{si} = \frac{\eta_0}{\left(1 + 2b\sqrt{\frac{m_i}{2k_i}}\right)}.$$

Отношение подвижностей при одинаковых градиентах:

$$\frac{k_1}{\eta_{s1}} : \frac{k_2}{\eta_{s2}} = \frac{Q_1}{Q_2} = \left[k_1 \left(1 + 2b\sqrt{\frac{m_1}{2k_1}}\right) \right] / \left[k_2 \left(1 + 2b\sqrt{\frac{m_2}{2k_2}}\right) \right].$$

Так как $k_1 \gg k_2$, то значение в скобках в знаменателе указанной формулы всегда больше, чем в числителе. Например, если $k_1 = 10^{-2} \text{ м}^2$; $k_2 = 4 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; $m_1 = 0,25$; $m_2 = 0,2$; $b = 10^{-6} \text{ м}$, то отношение подвижностей вместо 25 будет равно 10,3. Таким образом, эффект проскальзывания приводит к выравниванию профиля фильтрации газированных жидкостей вблизи (выше) давления насыщения.

Эти выводы подтверждаются данными работы [80], где приведены эксперименты по вытеснению дегазированной нефти водогазовой смесью в предпереходном фазовом состоянии. Следует отметить, что, согласно данным [81], эффект тем выше, чем больше мощность низкопроницаемого пропластка.

Действительно, согласно [81] коэффициент охвата в малопроницаемом пропластке в момент прорыва воды через высокопроницаемый пласт (имеется в виду часть пласта, пройденная фронтом в малопроницаемом слое), равен

$$\eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2(1 - \eta_{22})\beta}}{1 - \eta_{22}},$$

$$\text{при этом } \beta = \frac{k_2 \eta_1 m_1}{k_1 \eta_2 m_2} \frac{1 + \eta_{11}}{2}, \quad \eta_{11} = \frac{\eta_w}{\eta_1}, \quad \eta_{22} = \frac{\eta_w}{\eta_2}, \quad \eta_i = \frac{\eta_0}{\left(1 + 2b\sqrt{\frac{m_i}{2k_i}}\right)}.$$

Здесь $\eta_w, \eta_1, \eta_2, \eta_0$ – соответственно вязкость воды, кажущаяся вязкость нефти с учетом проскальзывания для высоко- и низкопроницаемого слоев, истинная вязкость нефти. Принимая следующие значения входящих в уравнения параметров: $k_1 = 10^{-12} \text{ м}^2$, $k_2 = 10^{-13} \text{ м}^2$, $m_1 = 0,205$, $m_2 = 0,17$, $\eta_w = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\eta_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $b = 10^{-6} \text{ м}$, для случая с проскальзыванием для коэффициента охвата получим $\eta = 0,184$ ($\eta_1 = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\eta_2 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$). Для случая без проскальзывания, когда $\eta_1 = \eta_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\eta_{11} = \eta_{22} = 0,5$ получим $\eta = 0,092$. Таким образом, коэффициент охвата для случая с проскальзыванием в 2 раза выше, чем без него.

Рассмотрим теперь влияние на профиль фильтрации мощности высоко- и низкопроницаемого пропластка. Для отношения гидродоупроводностей можем записать

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{k_1 h_1}{\eta_1} / \frac{k_2 h_2}{\eta_2}.$$

Принимая параметры предыдущей задачи, а также для случая $h_1 > h_2$, $h_1 = 20 \text{ м}$, $h_2 = 10 \text{ м}$, а для случая $h_1 < h_2$, $h_1 = 10 \text{ м}$, $h_2 = 20 \text{ м}$ с учетом про-

скальзывания получим:

$$h_1 > h_2, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 11,48;$$

$$h_1 < h_2, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 2,87.$$

Как видно из полученных результатов, когда менее проницаемый пропласток, где эффект проскальзывания проявляется значительно больше, имеет большую мощность, эффект выравнивания профиля фильтрации усиливается. При этом при определенном значении $\frac{h_2}{h_1}$ (в рассматриваем

случае при $\frac{h_2}{h_1} > 5,74$) профиль фильтрации становится менее равномерным, т. к. дебит низкопроницаемого пропластка начинает превышать дебит высокопроницаемого. В данном случае необходимо регулировать коэффициент проскальзывания либо добавками ПАВ, либо изменением давления нагнетания.

Аналогично без проскальзывания получим

$$h_1 > h_2, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 100;$$

$$h_1 < h_2, \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 5.$$

В данном случае также с увеличением мощности малопроницаемого пропластка эффект выравнивания профиля фильтрации усиливается, т. к. с ростом мощности увеличивается и дебит, однако эффект значительно ниже, чем для случая с проскальзыванием, почти в 10 раз при $h_1 > h_2$ и в 2 раза при $h_1 < h_2$. При определенном значении $\frac{h_2}{h_1}$ (в рассматриваем случае

при $\frac{h_2}{h_1} > 10$) профиль фильтрации становится менее равномерным,

т. к. дебит низкопроницаемого пропластка начинает превышать дебит высокопроницаемого.

Следует отметить, что перспективным представляется также применение в качестве вытеснителя нефти газированного, исходно дилатантного, полимерного раствора в предпереходном фазовом состоянии. При этом устраняются все недостатки, присущие полимерному заводнению. Действительно, выделяющиеся на поверхности пористой среды зародыши (со-

гласно [103] при газовом факторе 0,1–10 поверхность пористой среды покрывается зародышами газовой фазы) препятствуют адсорбции полимерного раствора. Дилатантность и эффект проскальзывания способствуют выравниванию профиля фильтрации, а также, ввиду модификации течения от дилатантного к псевдопластичному, ускорению процесса разработки и увеличению приемистости нагнетательной скважины, по сравнению с закачкой негазированного полимерного раствора. Возможно использование также полимерных растворов, имеющих псевдопластичный характер течения, при этом эффект проскальзывания нейтрализует отрицательное влияние разжижения при сдвиге на профиль фильтрации [84].

Действительно, пусть фильтрация газированного полимерного раствора в предпереходном фазовом состоянии происходит в двух параллельных слоях с проницаемостью k_1 и k_2 (при прочих равных условиях), причем $k_1 \gg k_2$, и соответствует степенному закону с проскальзыванием (см. 2.4.1б). Тогда согласно (2.72) получим

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b\sqrt{m}}{\sqrt{8k_1}} \right) \left(1 + \frac{3n+1}{n} \frac{b\sqrt{m}}{\sqrt{8k_2}} \right)^{-1}.$$

Как видно из последнего выражения для дилатантной жидкости ($n > 1$) проскальзывание усиливает эффект выравнивания профиля фильтрации, а для псевдопластичной ($n < 1$) нейтрализует отрицательное влияние разжижения при сдвиге на профиль фильтрации.

Резюмируя, можно заключить, что привлечение эффекта проскальзывания объясняет выравнивание фронта и увеличение коэффициента вытеснения при использовании газированных жидкостей в предпереходном фазовом состоянии.

2.6. Исследование псевдооживления газированными жидкостями

При разработке пластов, сложенных рыхлыми слабосцементированными породами, в призабойной зоне разрушается скелет пласта. В этом случае жидкость и газ во время движения по пласту увлекают в скважину некоторое, а иногда весьма значительное количество песка. Если скорость недостаточна для подъема песчинок, то они осаждаются на забое, скапливаются, образуя пробку, высота которой может достигать нескольких сотен метров. Несмотря на то что проницаемость песчаной пробки в десятки раз больше проницаемости пласта, ее образование приводит к прекращению работы скважины, что объясняется несоизмеримостью площади боковой поверхности фильтра и площади поперечного сечения лифтовых труб [104] (гидравлические сопротивления жидкости, фильтрующейся через пробку,

значительно превышают гидравлические сопротивления при движении жидкости в призабойной зоне). Большое значение имеет наличие в продукции скважины воды, что приводит к увеличению градиента давления и, как следствие, к дальнейшему разрушению скелета пласта, а так как мелкие частицы песка и глины с появлением воды начинают коагулировать и оседать, происходит частое образование песчаной пробки.

В подавляющем большинстве случаев промывка песчаной пробки ведется технической водой в скважинах, характеризующихся низким пластовым давлением. В этих условиях промывкой водой не удастся удалить из скважины всю песчаную пробку. Часть песка вместе с водой проникает в пласт в результате сильного поглощения, что вызывает частичное разрушение призабойной зоны, а иногда приводит к деформации эксплуатационной колонны. Кроме того, в процессе освоения скважины проникший в призабойную зону песок вновь беспрепятственно попадает в ствол и через некоторое время возникает необходимость повторного удаления песчаной пробки.

Повсеместное применение воды для ликвидации песчаных пробок в эксплуатационных скважинах – причина преждевременного вывода действующего фонда скважин из строя, значительного снижения текущих дебитов и уменьшения конечного коэффициента нефтеотдачи. В связи с этим наибольшее распространение в промысловых условиях получили физико-химические методы промывки песчаной пробки. В частности, в отечественной и западной практике применяется метод промывки песчаной пробки газожидкостными системами [105–107] и водными растворами химических реагентов [108, 109]. Недостатком этих способов является большой расход химических реагентов и газа; кроме того, при попадании рабочих жидкостей в пласт, ввиду их высокой газонасыщенности и вязкости, возможно снижение фазовой проницаемости для нефти.

Рабочая жидкость для промывки песчаной пробки должна обладать высокими песковыносными свойствами, что обеспечивается ее высокой вязкостью. Вместе с тем скорость промывки должна быть высокой, что обеспечивается малой вязкостью оживающего агента. Кроме того, в поглощающих пластах рабочая жидкость должна иметь низкую плотность, в то время как уменьшение плотности рабочей жидкости способствует увеличению скорости выноса зернистого материала. Таким образом, взаимоисключающие требования к рабочей жидкости определяют техническое противоречие, присущее процессу промывки песчаной пробки. В данном параграфе исследуется псевдооживление гетерогенными системами с целью создания более экономичных технологий промывки песчаной пробки.

2.6.1. Псевдооживление газированной жидкостью

а) Использование в качестве оживающего агента газированной углекислым газом воды

Исследование процесса псевдооживления песчаных систем проводилось на экспериментальной установке, схема которой представлена на рис. 2.145. Установка включала следующие элементы: колонку из оргстекла (1) внутренним диаметром $1,2 \cdot 10^{-2}$ и длиной 2,4 м, в нижней части которой устанавливался металлический фильтр с диаметром отверстий $0,03 \cdot 10^{-3}$ м; сатуратор с мешалкой рабочим объемом $5 \cdot 10^{-2}$ м³ (2); дифференциальный манометр ДМ-50 (3); запорные вентили (4); баллон со сжатым газом (5); редуктор (6); образцовый манометр (7); мерный сосуд (8); регулятор давления (9).

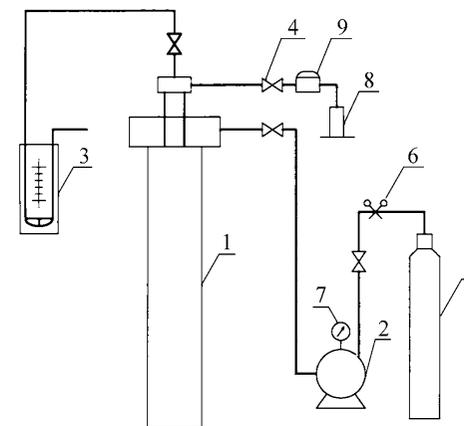


Рис. 2.145. Схема экспериментальной установки

Целью экспериментов являлось изучение процесса псевдооживления кварцевого песка газированной углекислым газом воды при давлениях много выше и вблизи давления насыщения [110–112]. Давление насыщения P_c во всех опытах составляло 0,03 МПа. Модель песчаной пробки составлялась из кварцевого песка двух фракций: крупный песок, средним размером $0,25 \cdot 10^{-3}$ м, и мелкий, средним размером $0,1 \cdot 10^{-3}$ м.

Эксперименты проводились по следующему плану:

- производилась обвязка экспериментальной установки согласно схеме, показанной на рис. 2.145;
- в трубку из оргстекла засыпалась порция предварительно замоченного кварцевого песка необходимой фракции;

- в сатураторе готовилась водогазовая смесь с использованием водопроводной воды и углекислого газа;
- посредством баллона со сжатым газом и сатуратора производилась фильтрация газированной воды через зернистый слой;
- в процессе фильтрации газированной воды определяли характеристику псевдооживления ($\Delta P - Q$), а также зависимость расширения зернистого слоя (Δh) от расхода жидкости при постоянном среднем давлении (P) в экспериментальной трубке, а также от уровня среднего давления.

Процесс псевдооживления производился до уноса песка из зернистого слоя. Для возможности сравнения результатов был проведен также опыт с использованием в качестве оживляющего агента дегазированной воды. Эксперименты проводились при различном среднем давлении ($P = 0,02 - 0,08$ МПа). В первой серии экспериментов пробка составлялась из песка одной (крупной) фракции. Высота засыпки составляла 0,2 м.

На рис. 2.146 приведена зависимость относительного расширения зернистого слоя ($\Delta h_0 = \Delta h_1 / \Delta h_2$, где Δh_1 , Δh_2 – расширение зернистого материала соответственно при исследуемом среднем давлении и при псевдооживлении дегазированной водой) от расхода жидкости при $P = 1,5P_c$. На рис. 2.147 показана характеристика псевдооживления для дегазированной и газированной жидкости.

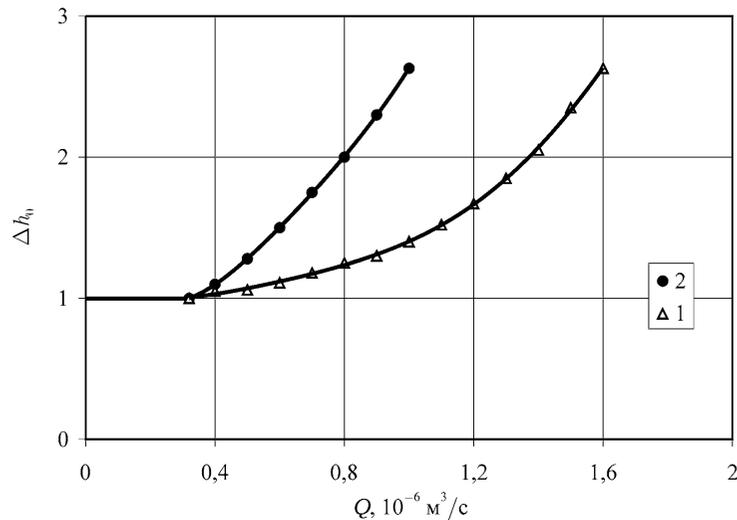


Рис. 2.146. Зависимость относительного расширения зернистого слоя от расхода жидкости ($P = 1,5P_c$) для однородной (1) и неоднородной песчаной пробки (2)

Как видно из рис. 2.146, максимальное относительное расширение зернистого слоя составляет 2.5. Как видно из рис. 2.147, до начала псевдооживления при одном и том же перепаде давления расход жидкости для газированной жидкости больше, чем для дегазированной, в то время как в первом случае псевдооживление наступает при перепаде давления на 10% ниже, чем во втором.

Во второй серии экспериментов моделировалась неоднородная песчаная пробка, составленная из смеси песка мелкой и крупной фракций. Высота засыпки песка также составляла 0,2 м.

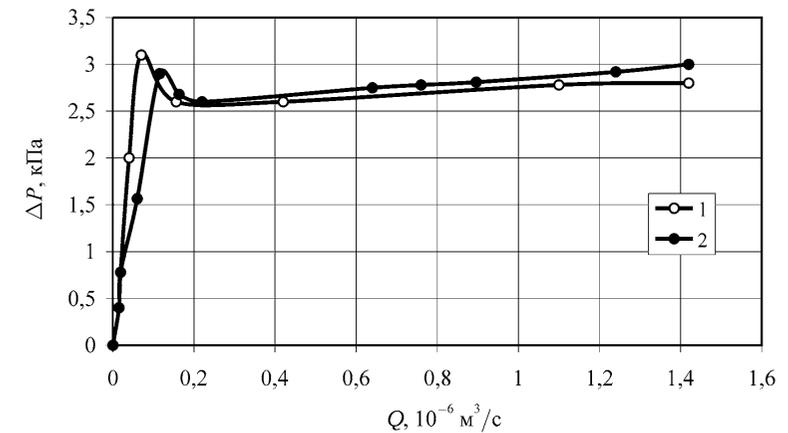


Рис. 2.147. Характеристики псевдооживления песчаной пробки дегазированной водой (1) и системой вода–углекислый газ при $P = 1,5P_c$ (2)

Из рис. 2.146 видно, что для неоднородной пробки равным значениям относительного расширения зернистого слоя соответствуют значительно меньшие значения расхода жидкости. Расход, соответствующий уносу зернистого материала из псевдооживленного слоя для неоднородной пробки на 40% ниже, чем для однородной. При этом расходные характеристики оказались аналогичными, показанным на рис. 2.147.

На рис. 2.148 показана зависимость расширения зернистого материала от уровня среднего давления при постоянном расходе жидкости ($Q = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$).

Из рис. 2.148 видно, что по мере приближения среднего рабочего давления к давлению насыщения происходит увеличение расширения зернистого слоя. Максимальное значение расширения зернистого слоя наступает при $P = 0,045$ МПа ($P = 1,5P_c$). При снижении давления ниже давления

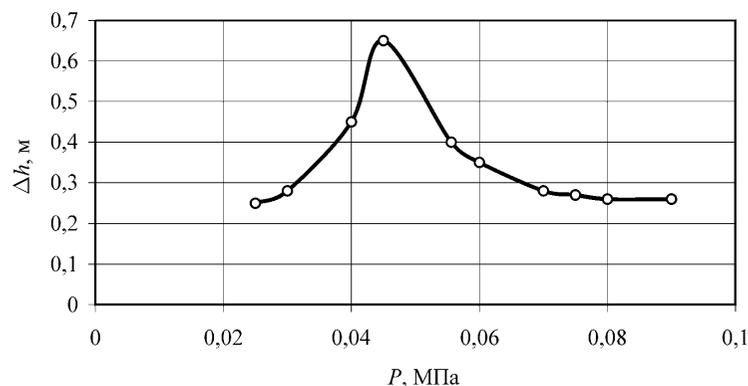


Рис. 2.148. Зависимость расширения зернистого слоя при постоянном расходе жидкости от среднего давления для системы вода–углекислый газ

насыщения, т. е. при течении двухфазной системы, расширение зернистого слоя ниже, чем при использовании в качестве оживающего агента дегазированной воды (или при $P > 2P_c$).

На рис. 2.149 показана зависимость расхода жидкости, соответствующего началу уноса зернистого материала из псевдооживленного слоя Q_0 , от относительного уровня среднего давления (P/P_c). Как видно из рисунка,

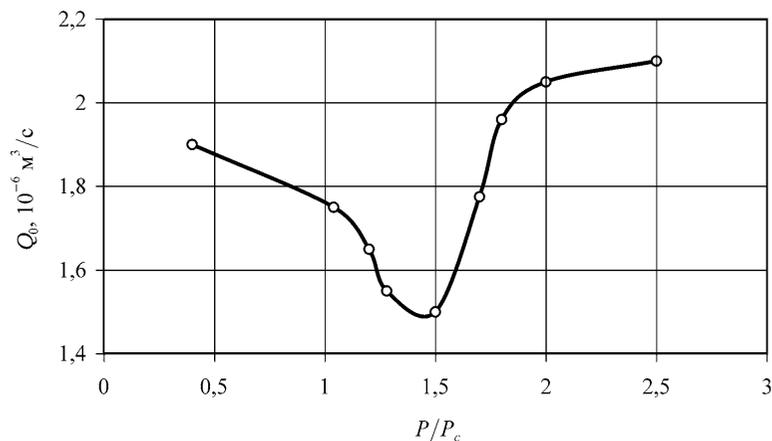


Рис. 2.149. Зависимость расхода жидкости, соответствующего началу уноса зернистого материала из псевдооживленного слоя, от относительного уровня давления для системы вода–углекислый газ

указанная зависимость имеет немонотонный характер с минимумом при $P = 1,5P_c$. При этом Q_0 снижается почти на 30% по сравнению с $P = 2,5P_c$.

Таким образом, использование в качестве оживающего агента газированной углекислым газом воды в предпереходной фазовой области позволяет значительно улучшить вынос песчаной пробки, особенно неоднородной.

б) Использование в качестве рабочего агента смеси воды с воздухом или природным газом

Как известно, в практике нефтедобычи одним из основных способов добычи нефти является компрессорный способ, в связи с чем в промышленных условиях значительно дешевле использовать в качестве агента промывки песчаной пробки смеси воды с воздухом или природным газом. Для определения эффективности промывки этими смесями были проведены лабораторные эксперименты на установке, показанной на рис. 2.145, с той разницей, что диаметр экспериментальной колонки составлял $2,4 \cdot 10^{-2}$ м. В обоих случаях высота засыпки песка составляла 0,2 м, а давление насыщения 0,2 МПа. В опытах моделировалась неоднородная пробка.

Результаты экспериментов приведены на рис. 2.150–2.153. Как видно из рис. 2.150 и 2.151, в области давлений интенсивного зародышеобразования наблюдается увеличение расширения зернистого слоя. Причем максимальный эффект в обоих случаях достигается при $P = 0,25$ МПа

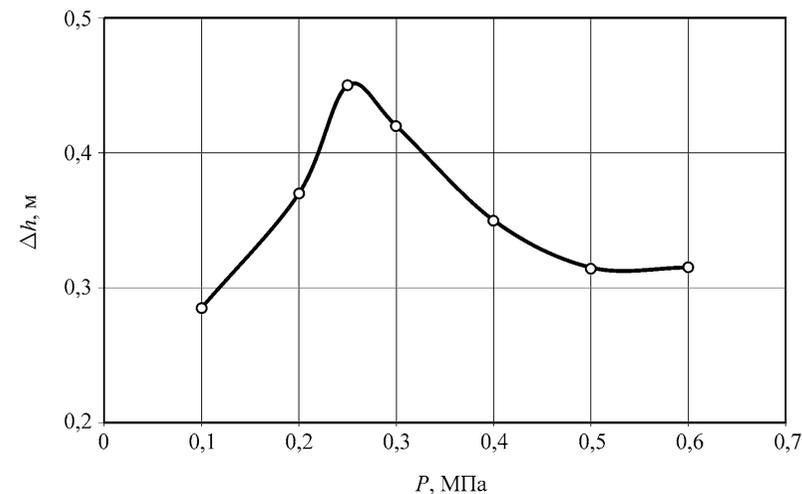


Рис. 2.150. Зависимость расширения зернистого слоя при постоянном расходе жидкости от уровня давления для системы вода – воздух

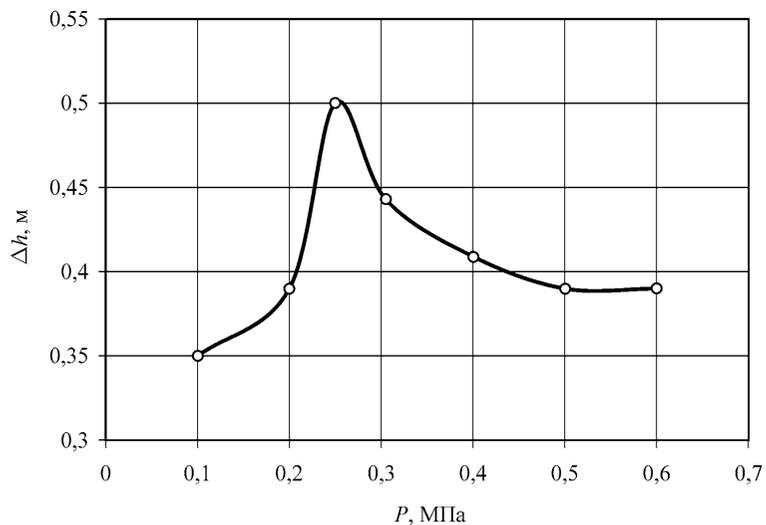


Рис. 2.151. Зависимость расширения зернистого слоя при постоянном расходе жидкости от уровня давления для системы вода–природный газ

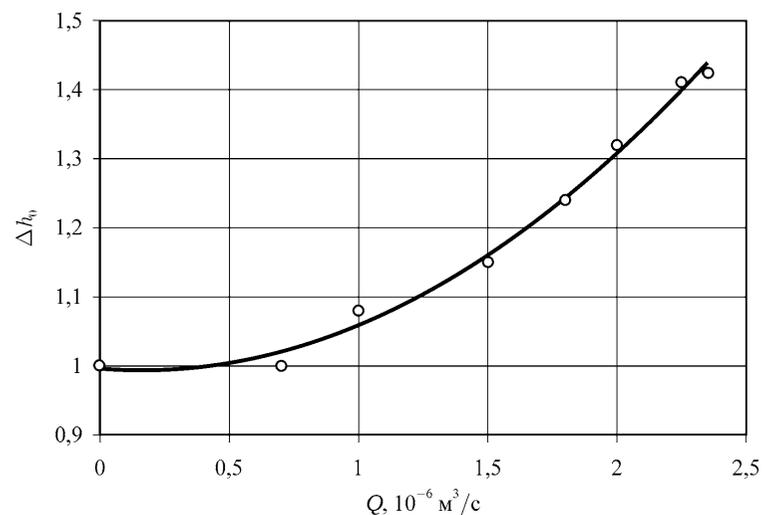


Рис. 2.152. Зависимость относительного расширения зернистого слоя от расхода жидкости для системы вода–воздух

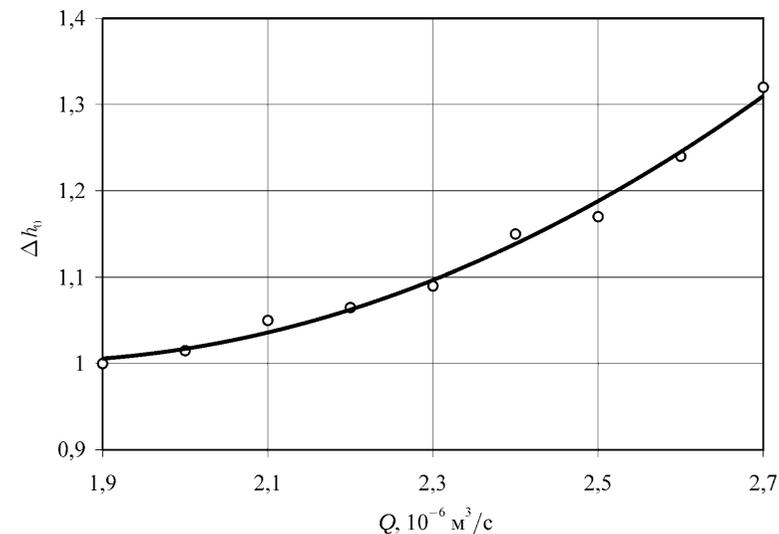


Рис. 2.153. Зависимость относительного расширения зернистого слоя от расхода жидкости для системы вода–природный газ

(т. е. при $P = 1,25P_c$), при этом относительное расширение зернистого слоя для водовоздушной смеси составляет около 40%, а для водогазовой около 30% (см. рис. 2.152 и 2.153).

Следует отметить, что расход жидкости, соответствующий уносу зернистого материала из псевдооживленного слоя, при использовании водовоздушных и водогазовых смесей на 20–30% ниже, чем для дегазированной воды.

Таким образом, и при использовании в качестве ожижающего агента водовоздушных и водогазовых смесей в предпереходной фазовой области вынос песчаной пробки по сравнению с дегазированной водой значительно улучшается.

2.6.2. Исследование влияния добавок химических реагентов на процесс псевдооживления

а) Использование в качестве рабочего агента водовоздушных смесей с добавкой ПАВ

Эксперименты проводились на установке, показанной на рис. 2.145. Опыты отличались от ранее проведенных тем, что на вход колонки подавалась водовоздушная смесь ($P_c = 0,2$ МПа) с различными добавками ПАВ.

В первой серии экспериментов в качестве добавок использовалось анионное ПАВ (сульфанол). Результаты приведены на рис. 2.154 и 2.155. Из рис. 2.154 видно, что с добавкой ПАВ относительное расширение зернистого слоя снижается, однако при $C < 0,05\%$ оно выше, чем для дегазированной воды (аналогичный характер имеет зависимость расхода жидкости, соответствующего началу уноса зернистого материала из псевдооживленного слоя Q_0 , от концентрации ПАВ). Из рис. 2.155 следует, что зависимость расширения зернистого слоя от концентрации ПАВ имеет немонотонный характер с минимумом в точке $C = 0,05\%$.

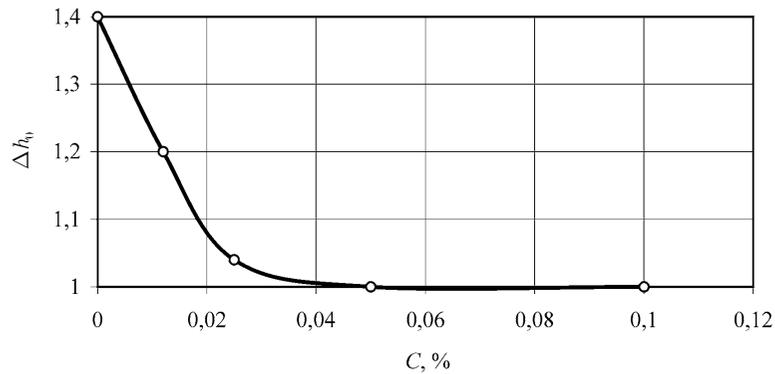


Рис. 2.154. Зависимость относительного расширения зернистого слоя от концентрации анионного ПАВ

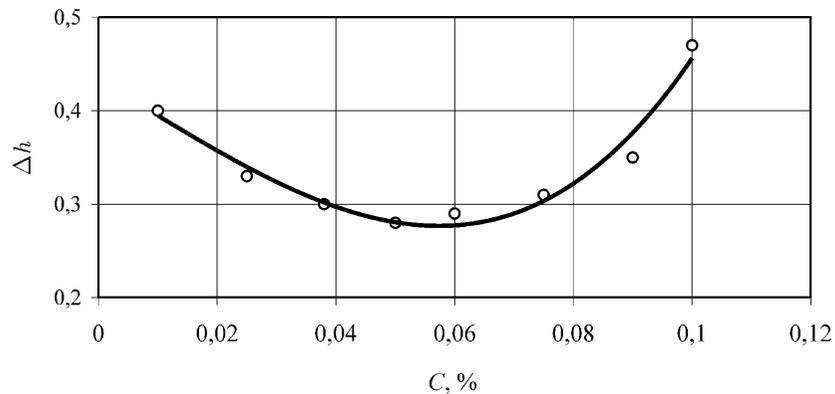


Рис. 2.155. Зависимость расширения зернистого слоя от концентрации анионного ПАВ

Во второй серии экспериментов в качестве добавок использовалось катионное ПАВ (катапин). Результаты приведены на рис. 2.156, из которого видно, что с добавкой катионного ПАВ относительное расширение зернистого слоя монотонно увеличивается, достигая при $C = 0,05\%$ значения 2,1, что на 50% выше его значения без добавки ПАВ.

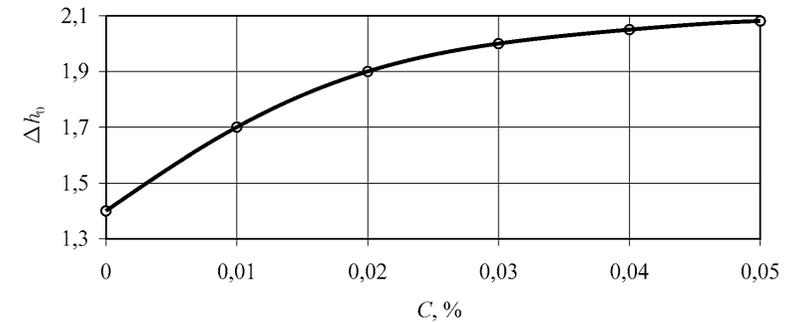


Рис. 2.156. Зависимость относительного расширения зернистого слоя от концентрации катионного ПАВ

б) Псевдооживление полимерными композициями

Эксперименты также проводились на установке, показанной на рис. 2.145. Опыты отличались тем, что в разных экспериментах на вход колонки подавались соответственно вода, полимерная композиция (0,02% ПАА, 0,005% сульфанола), водовоздушная смесь в предпереходном фазовом состоянии [113, 114]. Результаты приведены на рис. 2.157, из которого

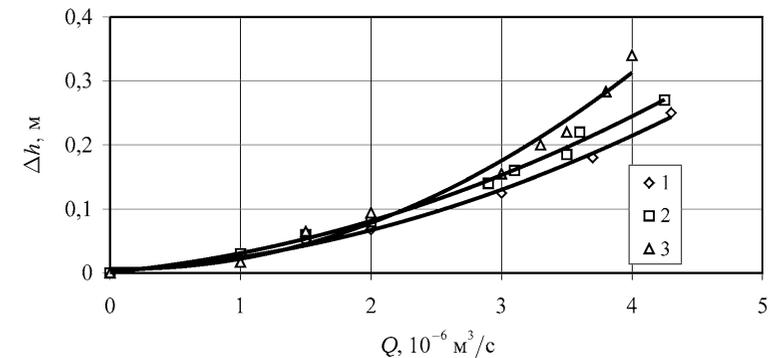


Рис. 2.157. Зависимость расширения зернистого слоя от расхода жидкости: 1 – вода, 2 – полимерная композиция, 3 – водовоздушная смесь при $P = 1,25P_c$

видно, что при постоянном расходе $Q = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ расширение зернистого слоя при ожигении полимерной композицией на 15%, а водовоздушной смесью на 32% выше, чем при ожигении дегазированной водой. Расход жидкости, соответствующий уносу зернистого материала из псевдоожигенного слоя, для водовоздушной смеси в предпереходном фазовом состоянии на 10–15% ниже, чем для полимерной композиции.

2.6.3. Анализ полученных результатов и механизм наблюдаемых явлений

Для сравнения экспериментов в колонках различного диаметра была построена зависимость относительного расширения зернистого материала от скорости фильтрации для различных смесей. На рис. 2.158 представлена указанная зависимость, перестроенная в асимптотических координатах ($Y = h_0/h_{0m}$, $X = v/v_m$, где h_{0m} , v_m – соответственно максимальные значения расширения зернистого слоя и скорости потока), из которой видно, что исходные данные в асимптотических координатах составляют единую кривую, свидетельствующую о качественном единстве процессов при псевдоожигении исследуемыми газированными жидкостями.

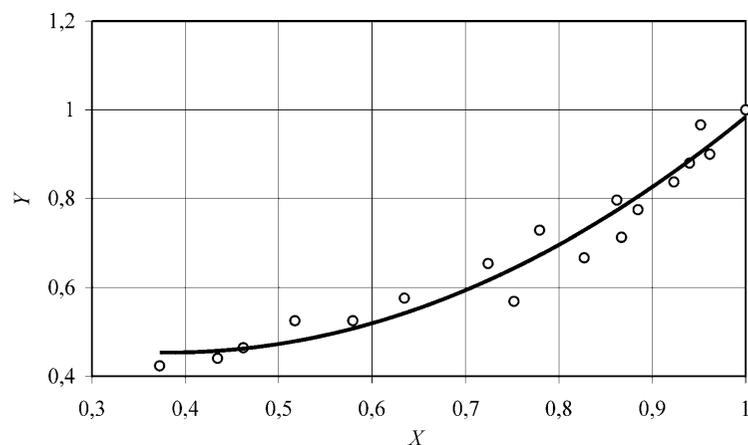


Рис. 2.158. Зависимость относительного расширения зернистого слоя от скорости потока, перестроенного в асимптотических координатах

Следует отметить, что максимальное значение Δh_0 для углекислого газа при $P = 1,5P_c$, а для воздуха и природного газа при $P = 1,25P_c$, причем при $P = 1,5P_c$ значение Δh_0 распределяется следующим образом: 1,45 – для углекислого газа; 1,35 – воздуха; 1,15 – для природного газа. Это связано

с различной растворимостью указанных газов в воде. При этом в нормальных условиях растворимость диоксида углерода на порядок превышает растворимость воздуха и природного газа в воде. В связи с этим, при прочих равных условиях, газонасыщенность жидкости в случае насыщения диоксидом углерода значительно выше, чем при насыщении воздухом и природным газом, а воздухом выше, чем природным газом (используемым в опытах). Согласно материалам 2.1.5 объемная концентрация образующихся зародышей газовой фазы возрастает с увеличением газонасыщенности жидкости, что и определяет увеличение величины относительного расширения зернистого слоя с увеличением растворимости газа. Кроме того, и в данном случае со снижением газонасыщенности жидкости происходит смещение пика эффекта к давлению насыщения (максимум расширения зернистого слоя достигается при $P = 1,5P_c$ для углекислого газа и при $P = 1,25P_c$ для воздуха и природного газа).

Рассмотрим теперь механизм улучшения выноса песчаной пробки газированной жидкостью в предпереходной фазовой области.

Ричардсон (Richardson) и Заки (Zaki) предложили эмпирическое соотношение между скоростью псевдоожигения (U) и пористостью псевдоожигенного слоя (ϵ), линейное в логарифмических координатах, ставшее классическим [115]:

$$\frac{U}{U_i} = \epsilon^n,$$

где U_i – скорость витания частиц.

На рис. 2.159 представлена зависимость между скоростью псевдоожигения (10^{-3} м/с) и пористостью псевдоожигенного слоя (%), перестро-

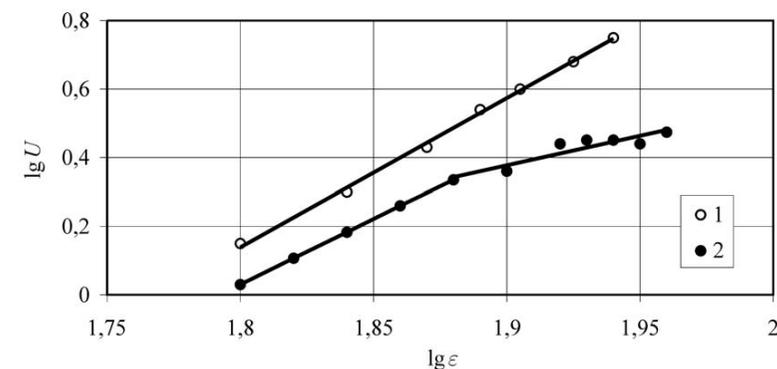


Рис. 2.159. Зависимость скорости псевдоожигения от пористости зернистого слоя для дегазированной (1) и газированной жидкости (2) в логарифмических координатах

енная в логарифмических координатах, при ожигении дегазированной (кривая 1) и газированной углекислым газом водой (кривая 2).

Как видно из рисунка, псевдоожигение дегазированной водой описывается уравнением Ричардсона–Заки, в то время как при ожигении газированной жидкостью на представленной зависимости имеется два линейных участка.

В связи с вышеизложенным процесс псевдоожигения может быть описан следующим обобщающим уравнением:

$$U = \sum_{i=1}^k a_i \exp(-b_i \varepsilon).$$

Процесс псевдоожигения газированной жидкостью описывается указанным уравнением при $k=2$. Экспериментальные результаты удовлетворительно описываются при следующих значениях постоянных коэффициентов: $a_1 = 964,29$; $a_2 = 15,02$; $b_1 = 0,107$; $b_2 = 0,046$. Процесс псевдоожигения дегазированной жидкостью описывается указанным уравнением при $k = 1$. Экспериментальные результаты удовлетворительно описываются при следующих значениях постоянных коэффициентов: $a = 0,0379$; $b = -0,0576$.

На основании экспериментов можно предложить возможный кинетический механизм наблюдаемых явлений. Известно, что имеющиеся экспериментальные результаты по жидкостному псевдоожигению не соответствуют теоретическим, при этом реальная проницаемость псевдоожигенного слоя оказывается выше теоретической, что объясняется агломерацией частиц в небольшие группы (клубки или флоккулы) [116]. Вместе с тем в работе Жу (Zhou) с сотрудниками [117] показано, что зародыши газовой фазы (воздуха) субмикронного размера, выделяясь из воды на поверхность частичек зернистого материала (кремнезема), образуют своеобразную «сольватную оболочку», препятствующую слипанию. Естественно предположить, что в рассматриваемом случае зародыши газа, выделяясь на поверхности частичек песка, препятствуют слипанию, и тем самым псевдоожигение зернистого материала ускоряется. При этом, ввиду того что слипание частиц значительно усиливается с увеличением скорости ожигения (ввиду учащения столкновения частиц) [116], при псевдоожигении жидкостью с зародышами газа на зависимости $\lg U - \lg \varepsilon$ появляется второй линейный участок с более низким значением n , что свидетельствует о снижении среднего размера частичек песка [115, 116] ввиду отсутствия слипания (агломерации). Следует отметить, что в рассматриваемом случае влияние проскальзывания жидкости незначительно, так, согласно [118], при седиментации лиофобных частиц кварца субмикронного размера эффект проскальзывания может увеличить скорость седиментации (или скорость витания) на 20%, причем эффект резко снижается с увеличением

размера частиц. Согласно [50,118],

$$\frac{v_s}{v_{ns}} = \frac{1 + \frac{3b}{R}}{1 + \frac{2b}{R}},$$

где v_s , v_{ns} – соответственно скорость седиментации с проскальзыванием и без него, b – коэффициент проскальзывания, R – радиус частички. Для частичек, использованных в эксперименте, размером 10^{-4} и $2,5 \cdot 10^{-4}$ м при $b \approx 10^{-6}$ м [50, 118] оценки по указанной формуле дают $\frac{v_s}{v_{ns}} = 1,003 - 1,009$,

т. е. скорость седиментации увеличивается всего на 0,3–0,9%.

Добавка анионного ПАВ ввиду его адсорбции на поверхности частичек улучшает смачиваемость, снижая объемную концентрацию зародышей (см. 2.3) и число зерен, покрытых «сольватной оболочкой». Увеличение Δh_0 при $C > 0,05\%$ связано с мицеллообразованием и сопутствующим увеличением вязкости рабочего агента. Добавка катионного ПАВ и сопутствующая гидрофобизация поверхности зернистого материала, напротив, способствует увеличению объемной концентрации (см. 2.3) и числа частичек песка, покрытых «сольватной оболочкой». Поэтому в первом случае вынос песка ухудшается, а во втором – улучшается. Следует отметить, что реальные песчаные пробки обычно гидрофобизованы углеводородной жидкостью, поэтому, согласно полученным результатам, они будут лучше выноситься газированными жидкостями в предпереходном фазовом состоянии.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что применение газожидкостных смесей в предпереходном фазовом состоянии (в том числе и с добавками ПАВ) повышает эффективность процесса промывки по сравнению с применением дегазированных жидкостей и двухфазных газожидкостных смесей. Результаты работы могут быть применены также при выносе выбуренного шлама с забоя скважины.

Литература к главе 2

1. Болотов А. А., Мирзаджанзаде А. Х., Нестеров И.Н. Реологические свойства растворов газов в жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988 – №5. – С. 172–175.
2. Меликов Г. Х. Исследование влияния неравновесности на гидродинамические характеристики газожидкостных систем при давлениях выше давления насыщения. Дис. ... канд. техн. наук. – Баку, 1987. – 109 с.

3. Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Ковалев А. Г. Физика нефтяного и газового пласта. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2005. – 280 с.
4. Уббелодде А. Плавление и кристаллическая структура. – М.: Наука, 1975. – 279 с.
5. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. – Л.: Наука, 1975. – 592 с.
6. Зельдович Я. Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика. – М.: Наука, 1984. – С. 107–122.
7. Бувечич Ю. А. О докритическом образовании зародышей в жидкости с поверхностно-активным веществом (ПАВ) // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 5. – С. 394–402.
8. Сиротюк М. Г. Стабилизация газовых пузырьков в воде // Акустический журнал. – 1970. – Т. 16, № 4. – С. 567–569.
9. Бункин Н. Ф., Бункин Ф. В. Бабстоны – стабильные газовые микропузырьки в сильно разбавленных растворах электролитов // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. – 1992. – Т. 101, № 2. – С. 512–527.
10. Акуличев В. А. Гидратация ионов и кавитационная прочность воды. // Акустический журнал. – 1966. – Т. 12, вып. 2. – С. 160–165.
11. Асхабов А. М., Рязанов М. А. Кластеры «скрытой» фазы – кватероны и зародышеобразование // Доклады РАН. – 1998. – Т. 362, № 5. – С. 630–633.
12. Русанов А. И. Фазовые равновесия и поверхностные явления. – Л.: Химия, 1967. – 387 с.
13. Болотов А. А. Течение газожидкостных систем в пористой среде в области фазового перехода // Тезисы докладов третьей Всесоюзной конференции по механике аномальных. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1982. – С. 58–59.
14. Мирзаджанзаде А. Х., Болотов А. А., Меликов Г. Х. Влияние предпереходных состояний газожидкостных систем на их реологические свойства в пористых средах вблизи давления насыщения // Темат. сб. науч. тр.: Прогнозирование и оптимизация технологических процессов в нефтегазодобыче. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1986. – С. 3–7.
15. Пирсон С. Д. Учение о нефтяном пласте. – М.: Гостоптехиздат, 1961. – 570 с.
16. Сулейманов Б. А., Аббасов Э. М., Меликов Г. Х. Гидродинамические исследования микророзродышевых систем // Тезисы докладов

- XIII школы-семинара по проблемам трубопроводного транспорта нефти. – Уфа: ВНИИСПТНЕФТЬ, 1990. – С. 39–40.
17. Сулейманов Б. А., Исмаилов А. Д. Экспериментальное исследование добавок ПАВ на поведение газожидкостных систем в пористой среде // Темат. сб. науч. тр.: Разработка новой микророзродышной технологии. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1991. – С. 32–36.
18. Сулейманов Б. А., Азизов Х. Ф. Об особенностях течения газированной жидкости в пористом теле // Коллоидный журнал. – 1995. – Т. 57, № 6. – С. 862–867.
19. Сулейманов Б. А., Нагиев Ф. Б. Влияние поверхностно-активного вещества на неравновесные эффекты в газожидкостных системах в докритической области // Инженерно-физический журнал. – 1995. – Т. 68, № 6. – С. 968–974.
20. Сулейманов Б. А., Нагиев Ф. Б., Аббасов Э. М. О влиянии анионного ПАВ на неравновесные эффекты в газированной жидкости в докритической области // Коллоидный журнал. – 1996. – Т. 58, № 5. – С. 704–708.
21. Тривус Н. А., Виноградов К. В. Исследование нефти и газа в пластовых условиях. – Баку: Азнефтеиздат, 1955. – 204 с.
22. Гудок Н. С. Изучение физических свойств пористых сред. – М.: Недра, 1970. – 208 с.
23. Адам Н. К. Физика и химия поверхностей. – М.–Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 552 с.
24. Сулейманов Б. А. О влиянии поверхностно-активного вещества на неравновесные эффекты при фильтрации газожидкостных систем в докритической области // Инженерно-физический журнал. – 1996. – Т. 69, № 4. – С. 548–553.
25. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. – М.: Химия, 1964. – 324 с.
26. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
27. Велиев Ф. Г. Экспериментальное исследование кинетики фазового перехода // Доклады АН Азерб. ССР. – 1984. – Т. 40, № 2. – С. 34–37.
28. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1959. – 700 с.
29. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.–Л.: Гостоптехиздат, 1949. – С. 513.

30. Фольмер М. Кинетика образования новой фазы. – М.: Мир, 1986. – 208 с.
31. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей. – М.–Л.: Гос-техтеориздат, 1951. – 108 с.
32. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. – М.: Металлургия, 1966. – 200 с.
33. Михайлов Д. Н., Степанова Г. С. О влиянии адсорбции-десорбции микророзодышей газа на характер фильтрации газированной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2003, № 5. – С. 106–114.
34. Павловский Ю. Н. О пристеночном эффекте // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967, № 2. – С. 160–165.
35. Аббасов А. А. Исследование некоторых обратных задач процессов тепломассопереноса в системе пласт – скважина // Дис. ... канд. техн. наук. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1990. – 120 с.
36. Саттаров Р. М. Фарзана П. Я. Исследование движения газожидкостных систем с учетом образования микророзодышей // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52, № 5. – С. 765–771.
37. Аверьянов С. Ф. Водопроницаемость грунтов, содержащих воздух // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 69, № 2. – С. 141–144.
38. Киселева О. А., Соболев В. Д., Старов В. М., Чураев Н. В. Изменение вязкости воды вблизи поверхности кварца // Коллоидный журнал. – 1979. – Т. 41, № 2. – С. 245–250.
39. Эфрос Д. А. Исследование фильтрации неоднородных систем. – Л.: Гостоптехиздат, 1963. – 351 с.
40. Ronceray M.P. Recherches sur l'écoulement dans les tubes capillaires // Annales de Chimie et de Physique. – 1911. – V. 22. – P. 107–125.
41. Traube T., Whang S.H. Uber Reibungskonstante und Wandschicht // Zeitschrift Physikal. Chemie. – 1928. – V. 138(A). – P. 102–122.
42. Tausz D., Korosy F.V. Uber Reibungskonstante und Wandschicht // Zeitschrift Physikal. Chemie. – 1929. – V. 140(A). – P. 263–272.
43. Сомов А. Н. Скольжение ртути в кварцевых микрокапиллярах // Коллоидный журнал. – 1982. – Т. 44, № 1. – С. 160–168.
44. Чураев Н. В. Физико-химия процессов массопереноса в пористых телах. – М.: Химия, 1990. – 272 с.
45. Толстой Д. М. Молекулярная теория проскальзывания жидкости относительно твердых поверхностей // ДАН СССР. – 1952. – Т. 85, № 5. – С. 1089–1092

46. Blake T. D. Slip between a liquid and a solid – D.M. Tolstoi (1952) theory reconsidered // Colloids and Surfaces. – 1990. – V. 47. – P. 135–145.
47. Choi C. H., Kim C. J. Large slip of aqueous liquid flow over a nanoengineered superhydrophobic surface // Physical Review Letters. – 2006. – V. 96. – Article 066001.
48. Bonaccorso E., Kappl M., Butt H.J. Hydrodynamic force measurements: Boundary slip of water on hydrophilic surfaces and electrokinetic's effects // Physical Review Letters. – 2002. – V. 88. – Article 076103.
49. Bonaccorso E., Butt H. J., Craig V. C. J. Surface roughness and hydrodynamic boundary slip of a Newtonian fluid in a completely wetting system // Physical Review Letters. – 2003. – V. 90. – Article 144501.
50. Lauga E., Brenner M. P., Stone H. A. Microfluidics: the no-slip boundary condition // Ch. 15 in Handbook of Experimental Fluid Dynamics, Editors J. Foss, C. Tropea and A. Yarin, Springer, New-York, 2005.
51. Cottin-Bizonne C., Jurine S., Baudry J., Crassous J., Restagno F., Charlaix E. Nanorheology: an investigation of the boundary condition at hydrophobic and hydrophilic interfaces// European Physics Journal E. – 2002. – V. 9. – P. 47–53.
52. Дерягин Б. В., Духин С. С., Рулев Н. Н. Микрофлотация. – М.: Химия, 1986. – 112 с.
53. Dammer S. M., Lohse D. Gas enrichment at liquid-wall interfaces // Physical Review Letters. – 2006. – V. 96. – Article 206101.
54. Tretheway D., Stone S., Meinhart C. Effects of absolute pressure and dissolved gases on apparent fluid slip in hydrophobic microchannels // Bulletin of American Physical Society. – 2004. – V. 49. – P. 215.
55. Сулейманов Б. А. Об эффекте проскальзывания при фильтрации газированной жидкости // Коллоидный журнал. – 1997. – Т. 59, № 6. – С. 807–812.
56. Barrat J. L., Bocquet L. Large slip effect at a nonwetting fluid-solid interface // Physical Review Letters. – 1999. – V. 82. – P. 4671–4674.
57. Tretheway D., Meinhart C. Effects of absolute pressure on fluid slip in a hydrophobic microchannel//Proceedings of IMECE'2003. – Washington, D. – C. – 2003.
58. Tretheway D., Meinhart C. Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls // Physics of Fluids. – 2002. – V. 14. – P. L9–L12.

59. Christenson H.K. in *Modern Approaches to Wettability: Theory and Applications*, edited by M. E. Schrader and G. Loeb, Plenum, New York, 1992.
60. Parker J. L., Claesson P. M., Attard P. Bubbles, cavities, and the long-ranged attraction between hydrophobic surfaces // *Journal of Physical Chemistry*. – 1994. – V. 98. – P. 8468–8480.
61. Attard P. On bridging bubbles between hydrophobic surfaces // *Langmuir*. – 1996. – V. 12. – P. 1693–1695.
62. Carambassis A. L., Jonker C., Attard, Rutland M. W. Forces measured between hydrophobic surfaces due to a sub-microscopic bridging bubble // *Physical Review Letters*. – 1998. – V.80. – P. 5357–5360.
63. Tyrrell J. W. G. and Attard P. Images of nanobubbles on hydrophobic surfaces and their interactions // *Physical Review Letters*. – 2001. – V.87. – Article 176104.
64. Simonsen A. C., Hansen P. L., Klosgen B. Nanobubbles give evidence of incomplete wetting at a hydrophobic interface // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 2004. – V.273. – P. 291–299.
65. Agrawal A., McKinley G. H. Nanobubble formation at the solid-liquid interface studied by Atomic Force Microscopy // *Materials Research Society Symposium Proceedings*. – 2006. – V. 899E.
66. Navier C.L.M.H. Memoire sur les lois du mouvement des fluids // *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France*. – 1823. – V. 1. – P. 389–440.
67. Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // *Phil. Trans. Royal Society London*. – 1879. – V. 170. – P. 231–256.
68. Виноградова О. И. Гидродинамическое взаимодействие гидрофобного и гидрофильного тел // *Коллоидный журнал*. – 1994. – Т. 56, № 1. – С. 39–44.
69. Smeets R. M. M., Keyser U. F., Wu M. Y., Dekker N. H., Dekker C. Nanobubbles in solid-state nanopores // *Physical Review Letters*. – 2006. – V. 97. – Article 088101.
70. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. – М.: Химия, 1974. – 687 с.
71. Tretheway D., Liu X., Meinhart C. Analysis of slip flow in microchannels // *Proceedings of 11th International Symposium “Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics”*, 8–11 July 2002, Lisbon, Portugal.

72. Tretheway D., Meinhart C. A generating mechanism for apparent fluid slip in hydrophobic microchannels // *Physics of Fluids*. – 2004. – V. 16. – P. 1509–1515.
73. Zhu Y. and Granick S. Limits of the hydrodynamic no-slip boundary condition // *Physical Review Letters*. – 2002. – V. 88. – Article 106102.
74. Kunert C., Harting J. On the effect of surfactant adsorption and viscosity change on apparent slip in hydrophobic microchannels // Preprint Submitted to Elsevier 2 October 2006.
75. Jamin J. C.: Notes about equilibrium and flow of fluids in porous body // *C. R. Acad.Sc. Paris*. – 1860. – V. 50. – P. 172–311.
76. Герольд С. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин. – М. –Л.: Гос. научно-техническое нефтяное издательство, 1932. – 516 с.
77. Есипова Н. Е., Зорин З. М., Чураев Н. В. Влияние пузырьков заземленного газа на течение жидкостей в тонких капиллярах с гидрофильной и гидрофобной поверхностью // *Коллоидный журнал*. – 1981. – Т. 43, № 1. – С. 9–13.
78. Suleimanov B. A., Azizov Kh. F., Abbasov E. M. Specific Features of the Gas-Liquid Mixture Filtration // *Acta Mechanica*. – 1998. – Vol. 130, № 1–2. – P. 121–133.
79. Бабаев Р. Д., Сулейманов А. А., Абдель Монем Мохаммад Ахмед. Экспериментальное исследование образования микророзродышей в газоконденсатных системах // Темат. сб. научн. тр.: Разработка новой микророзродышной технологии. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1991. – С. 13–17.
80. Меликов Г. Х., Азизов М. Г. Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах // *Изв.ВУЗов СССР. Нефть и Газ*. – 1988, 10. – С. 35–38.
81. Вахитов Г. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Рыжик В. М. и др. Особенности вытеснения водой нефтей с вязкоупругими свойствами // *Нефтяное хозяйство*. – 1977, № 4. – С. 38–41.
82. Шагапов В. Ш. О фильтрации газированной жидкости // *Журнал прикладной механики и технической физики*. – 1993, № 5. – С. 97–105.
83. Бувич Ю. А. К теории совместной фильтрации несмешивающихся жидкостей в поле тяжести // *Изв.АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1967, № 2. – С. 165–167.

84. Сулейманов Б. А. Теоретические и практические основы применения гетерогенных систем для повышения эффективности технологических процессов в нефтедобыче. Дис...док.тех.наук, Баку, АЗИ-НЕФТЕХИМ, 1997. – 367 с.
85. Сулейманов Б. А. Эффективная проницаемость при фильтрации газированной жидкости в докритической области // Труды института математики и механики АН Азербайджана. – 1996. – Т.5(13). – С. 151–153.
86. Mirzadjanzade A. Kh., Ametov I. M., Bogopolsky A. O. et al. Micro-nucleus water-gas solutions: a new efficient agents for water-flooded oil reservoirs // Proceedings Seventh European Symposium on Improved Oil Recovery. Moskow. October 1993. – V. 1. – P. 469–473.
87. Богопольский А. О, Иванов А. Н., Фаткулин А. А. Закономерности и особенности фильтрации микропузырьковых газожидкостных растворов в пористых средах // Инженерно-физический журнал. – 2000. – Т. 73, № 2. – С. 274–282.
88. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
89. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. – М.: Гостоптехиздат, 1949. – 524 с.
90. Хасанов М. М, Булгакова Г. Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. – 288 с.
91. Сулейманов Б. А. Об эффекте проскальзывания при фильтрации газированной неньютоновской жидкости // Коллоидный журнал. – 1999. – Т. 61, № 6. – С. 847–851.
92. Леонов Е. Г., Исаев В. И. Гидроаэромеханика в бурении. – М.: Недра, 1987. – 304 с.
93. Carman P. C. Fluid flow through granular beds // Chemical Engineering and Design. – 1937. – V. 15a. – P. 150–166.
94. Май Ван Зы. Повышение эффективности разработки месторождений с трещиновато-пористыми коллекторами на основе динамического анализа (на примере месторождения «Белый Тигр»). Дис. ... канд. техн. наук. – Баку, 2003. – 163 с.
95. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. – 480 с.
96. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1982. – 303 с.

97. Штибина Н. Б. Определение сорбционной способности пород по данным гидродинамических исследований. Дис. ... канд. техн. наук. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1988. – 124 с.
98. Сургучев М. Л. Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи. – М.: Недра, 1985. – 308 с.
99. Mirzajanzade A. H., Ametov I. M. Rheotechnology – a new trend in oil production technology // Proceedings 6th European Symposium on Improved Oil Recovery. – Stavanger. – May 1991.
100. Сулейманов Б. А., Азизов Х. Ф. Об эффекте проскальзывания газожидкостной системы при фильтрации в пористой среде // Нефтяное хозяйство. – 1996, № 6. – С. 39–42.
101. Suleimanov B. A., Azizov Kh. F., Abbasov E. M. Slippage Effect During Gassed Oil Displacement // Energy Sources. – 1996. – V. 18, № 7. – P. 773–779.
102. Эфрос Д. А. Нефтеотдача при вытеснении водой газированной жидкости // Труды ВНИИ. – 1959. – Вып. 25. – С. 27–29.
103. Аметов И. М., Хавкин А. Я., Бученков Л. Н. и др. Повышение нефтеотдачи – новые возможности // Нефтяное хозяйство. – 1997, № 1. – С. 30–32.
104. Технология и техника добычи нефти / Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Хасаев А. М., Гусев В. И. – М.: Недра, 1986. – 382 с.
105. Алибеков Б. И. Техника и технология эксплуатации залежей нефти с низким пластовым давлением и интенсивным пескопроявлением. – Баку: Азернешр, 1962. – 164 с.
106. Применение пенных систем в нефтегазодобыче / Амиян В. А., Амиян Л. В., Бекиш Е. Н. – М.: Недра, 1987. – 229 с.
107. Лоусон Р. Система безопасного ведения работ в газовых скважинах с применением гидравлики // Нефтегазовые технологии. – 1996, № 5. – С. 19–22.
108. Сьюмен Д., Эллис Р., Снайдер Р. Справочник по контролю и борьбе с пескопроявлением в скважинах. – М.: Недра, 1986. – 176 с.
109. Эксплуатация скважин в осложненных условиях / Алескеров С. С., Алибеков Б. И., Алиев С. М. и др. – М.: Недра, 1971. – 200 с.
110. Сулейманов Б. А., Аббасов Э. М., Исмаилов А. Д. Микрораздышевая технология в процессе разрушения горных пород // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции по разрушению горных пород при бурении скважин. – Уфа, 1990. – Т. 3. – С. 36–38.

111. Сулейманов Б. А., Катин К. К., Исмаилов А. Д. Экспериментальное исследование процесса псевдооживления микроразродышными системами // Темат. сб. научн. тр.: Разработка новой микроразродышной технологии. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1991. – С. 51–56.
112. Разработка новой микроразродышной технологии. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1991. – 61 с.
113. Салаватов Т. Ш., Сулейманов Б. А., Исмаилов А. Д., Алиев Н. С. Ресурсосберегающие технологии промывки скважин // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1990, № 9. – С. 34–37.
114. Салаватов Т. Ш., Сулейманов Б. А., Панахов Г. М. Технология промывки скважин композитными системами // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1993, № 9. – С. 50–55.
115. Ридчарсон Дж. Ф. Начало псевдооживления и однородные системы // в книге: Псевдооживление. – М.: Химия, 1974. – С. 37–73.
116. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
117. Zhou Z., Xu Z., Finch J.A. and Q. Liu Effect of gas nuclei on the filtration of fine particles with different surface properties // Colloids and surfaces A. – 1996. – V. 113. – P. 67–77.
118. Boehnke U.–C., Remmler T., Motschmann H., Wurlitzer S. 1, Nauwede J. 1, Fischer T.M. Partial air wetting on solvophobic surfaces in polar liquids // Journal of Colloid and Interface Science. – 1999. – V. 211. – P. 243–251.

Глава 3

Исследование фрактальных структур и реологии фрактально-неоднородных систем

После пионерской работы Мандельброта [1] появился ряд исследований влияния образования фрактальных структур на фильтрацию жидкостей. Это влияние может осуществляться за счет фрактальной структуры пористой среды [2] или самой гетерогенной системы [3]. Как показано в [2], переход от линейного закона фильтрации к нелинейному в сильной степени зависит от распределения пор по размерам или фрактальности структуры пористой среды. Вместе с тем в [3] показано, что гетерогенные жидкости, в частности эмульсии, обладают динамической фрактальной структурой, которая определяется взаимодействием между частицами дисперсной фазы. При уменьшении взаимодействия между частицами, что происходит со снижением концентрации дисперсной фазы, фрактальная структура системы исчезает.

Практически важным является определение фрактальных характеристик горной породы и их влияние на фильтрацию пластовых жидкостей. Имеется ряд работ по экспериментальному определению фрактальной размерности пористых сред, в частности, в работе [4] методом сканирующей электронной микроскопии определена пространственная фрактальная размерность реального образца пористой среды, в [5] впервые предложен метод определения фрактальной размерности по экспериментальной изотерме адсорбции газа, который нашел свое развитие в [6, 7]. В работах [8, 9] предложены косвенные способы определения фрактальных характеристик пласта по кривым восстановления давления [8] и реакции пластовой системы на мгновенное изменение давления [9]. Имеется также ряд исследований, посвященных фильтрации во фрактально-неоднородных средах [10–12], в том числе кривым фазовых проницаемостей [13]. Вместе с тем, несмотря на значительное число исследований в рассматриваемой области, многие вопросы остаются нерешенными.

В связи с этим в данной главе рассмотрены вопросы образования фрактальных структур в процессе вытеснения несмешивающихся жидкостей, фильтрации во фрактально-неоднородной среде, течения жидкостей с фрактально-неоднородной структурой.

3.1. Исследование образования фрактальных структур при вытеснении нефти

В настоящее время около 90% нефти добывается с применением заводнения [14, 15], причем количество закачиваемой в пласт воды значительно превышает уровень добычи нефти. Тем не менее средний уровень коэффициента нефтеотдачи не превышает 40–50%, что предопределяет актуальность поиска новых технологий воздействия на нефтяную залежь.

Техническим противоречием при заводнении нефтяного месторождения является то, что поддержание пластового давления требует закачки больших объемов воды, вместе с тем закачка большого объема воды приводит к нарушению устойчивости фронта вытеснения и раннему прорыву воды к добывающим скважинам. Преодоление указанного противоречия возможно при использовании неньютоновских гетерогенных систем, обеспечивающих как поддержание пластового давления, так и устойчивость фронта вытеснения.

Несмотря на большое количество работ, посвященных гидродинамической неустойчивости вытеснения несмешивающихся жидкостей, проблема все еще остается острой.

Впервые на эту проблему обратили внимание инженеры-нефтяники на опыте заводнения нефтяных пластов и объяснили это неоднородностью пор по размерам [16]. В работе Саффмана (Saffman) и Тейлора (Taylor) [17] экспериментально на ячейке Хеле–Шоу (Hele–Shaw) было показано, что неустойчивость границы раздела несмешивающихся жидкостей при вытеснении более вязкой жидкости менее вязкой наступает даже в отсутствие пористой среды. В работе [18] на основании учета капиллярных сил работа [17] дополнялась выводом о том, что при относительно малых скоростях вытеснения можно добиться устойчивой границы раздела.

Интерес к этой области значительно возрос после введения Мандельбротом для широкого класса поверхностей, характеризующихся масштабной инвариантностью, понятия фрактальной геометрии. Появилось значительное число публикаций, например работа [19], которые полностью базируются на классической работе [17], вплоть до используемых в опытах флюидов.

Данный параграф посвящен исследованию влияния добавок ПАВ и полимеров на устойчивость фронта вытеснения в ячейке Хеле–Шоу, причем в отношении «вязких пальцев» («viscous fingering») мы пользуемся термином «фрактальные структуры» («fractal structures»), базируясь на широком определении фрактала, которое дал Мандельброт [19].

С целью изучения процесса проведены эксперименты по вытеснению ньютоновской нефти водой в ячейке Хеле–Шоу [20–22], которая состоит из двух параллельных стеклянных пластин (длина – 0,24, ширина –

0,14 м), отстоящих на небольшом расстоянии друг от друга (толщина щели составила $1,2 \cdot 10^{-4}$ м). Смачиваемые прокладки между пластинами ограничивают движение жидкости в ячейке. У одного конца ячейки прокладка не устанавливалась и через него жидкость могла сливаться, а у другого конца имелось отверстие для впуска жидкости. Для контроля процесса вытеснения на верхней пластине в направлении фильтрации имелись отметки через каждые 0,07 м. Все получаемые структуры фотографировались.

Эксперименты проводили по следующей схеме:

- ячейку Хеле–Шоу, установленную горизонтально, вакуумировали и заполняли нефтью, вязкость которой составляла $12 \cdot 10^{-3}$ Па·с;
- посредством емкости воду через отверстие подавали в ячейку, причем вытеснение производилось при различном гидростатическом давлении;
- по достижении фронтом воды отметок на ячейке производили фотографирование.

Опыты проводили при температуре $T = 293^\circ \text{К}$.

Анализ структур, полученных при различных скоростях движения фронта (рис. 3.1а), показал, что при $v = 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$ м/с фронт практически устойчив. При $v < 10^{-3}$ и $v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с наблюдается значительное нарушение устойчивости вытеснения, т. е. безводная нефтеотдача зависит от скорости немонотонно (рис. 3.2, кривая 1), причем при $v = 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$ м/с наблюдается максимум коэффициента вытеснения. Степень гидродинамиче-

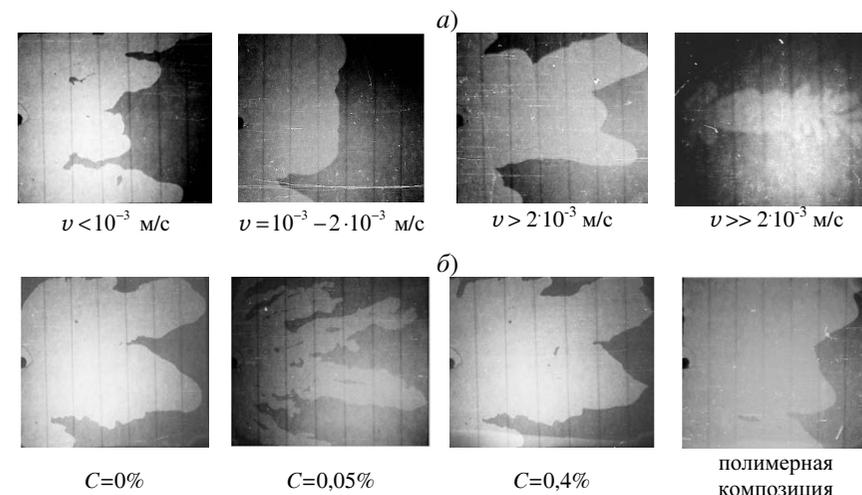


Рис. 3.1. Фрактальные структуры, возникающие при вытеснении нефти водой (а), водным раствором ПАВ ($C = 0-0,4\%$) и полимерной композицией (б)

ской неустойчивости можно оценить по размерности Хаусдорфа–Безиковича d [19]. Расчет этой размерности для полученных структур показал, что при $v < 10^{-3}$ и $v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с $d > 1$, причем максимальное значение ($d = 1,4$) достигается при $v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с (см. рис. 3.2, кривая 2). По данным [23] величина d стремится к значению 1,7, для вытеснения на плоскости, а по данным [4] – к значению 2,5 для трехмерного случая, причем эти значения не зависят от скорости течения и отношения вязкостей вытесняемой и вытесняющей жидкости.

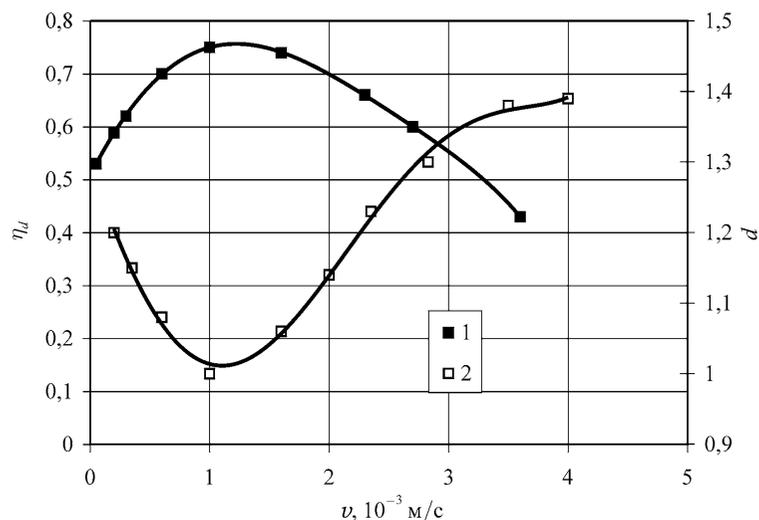


Рис. 3.2. Зависимость безводного коэффициента вытеснения η_d (1) и размерности Хаусдорфа–Безиковича d (2) от скорости течения при вытеснении нефти водой

Динамику процесса вытеснения можно объяснить следующим образом. Молекулярно-поверхностные силы на границе раздела действуют в направлении уменьшения площади поверхности (т.е. в направлении, обратном действию гидродинамических сил), поэтому, когда они преобладают над гидродинамическими силами, форма фронта вытеснения определяется радиусом кривизны с центром, расположенным в вытесняемой жидкости (см. рис. 3.1а, для $v < 10^{-3}$ м/с). Подобные структуры получены также при вытеснении нефти в однородной пористой среде Кисиленко Б. Е. [24–26] и объяснены им неоднородностью пор по размерам. Вместе с тем неустойчивость, возникающая при этом, может быть объяснена возмущением фронта вытеснения в основном у смачиваемых жидкостью боковых прокладок ячейки, так как при доминировании капиллярных сил в центре

потока возмущения не превышающие критическую длину волны подавляются поверхностным натяжением.

Когда поверхностные силы уравновешиваются гидродинамическими силами (возмущения в центре потока и у боковых прокладок имеют один порядок), фронт становится практически устойчивым и имеет место картина, полученная при $v = 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}$ м/с.

При доминировании гидродинамических сил фронт определяется распределением скоростей, при котором максимальная скорость наблюдается в центре, а минимальная – на боковой границе ячейки (см. рис. 3.1а, для $v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с).

Это утверждение можно проиллюстрировать следующими оценочными расчетами. Считая, что молекулярно-поверхностные и гидродинамические силы уравновешиваются (т. е. скорость течения, определяемая приложенным перепадом давления, равна скорости капиллярной пропитки), определяем соответствующую этому положению критическую скорость.

Запишем уравнение Буссинеска

$$v = \frac{b^2 \Delta P}{12 \eta l},$$

где b – толщина щели, ΔP – перепад давления, η – вязкость воды, l – длина ячейки; и уравнение Лапласа для щели

$$\Delta P_k = \frac{2\sigma}{b},$$

где ΔP_k – перепад капиллярного давления, σ – поверхностное натяжение на границе раздела.

Определяя критическую скорость из условия $\Delta P = \Delta P_k$, получим

$$v_0 = \frac{\sigma b}{6 \eta l}.$$

Подставляя в полученное выражение численные значения параметров, используемых в экспериментах: $\sigma = 30 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $b = 1,2 \cdot 10^{-4}$ м, $l = 0,24$ м, $\eta = 10^{-3}$ Па·с (вязкость воды), получим $v_0 \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ м/с, что подтверждает наши рассуждения.

Интересно, что при $v < 10^{-3}$ м/с, так же как и при $v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, появляются доминирующие направления развития «вязких пальцев». При этом рост одних «пальцев» замедляется, а других ускоряется, несмотря на изотропность ячейки. Причем структуры, полученные при $v < 10^{-3}$ и при $v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, практически являются зеркальным отображением друг друга. Если в первом случае доминирует «вязкий палец» вытесняе-

мой, более вязкой жидкости, так как течение определяется радиусом кривизны, то во втором – «вязкий палец» вытесняющей, менее вязкой жидкости, так как скорость в центре максимальна.

На основании проведенных экспериментов построена зависимость критической длины волны возмущения от капиллярного числа Ca при вытеснении нефти водой (рис. 3.3, кривая 1) и для сравнения теоретическая зависимость (рис. 3.3, кривая 2), рассчитанная по формуле, предложенной в работе [17]:

$$\lambda = \pi b Ca^{-0.5}, \quad (3.1)$$

$$Ca = \frac{v(\eta_1 - \eta_2)}{\sigma}, \quad \eta_1 > \eta_2,$$

где η_1 – вязкость нефти; η_2 – вязкость закачиваемой жидкости.

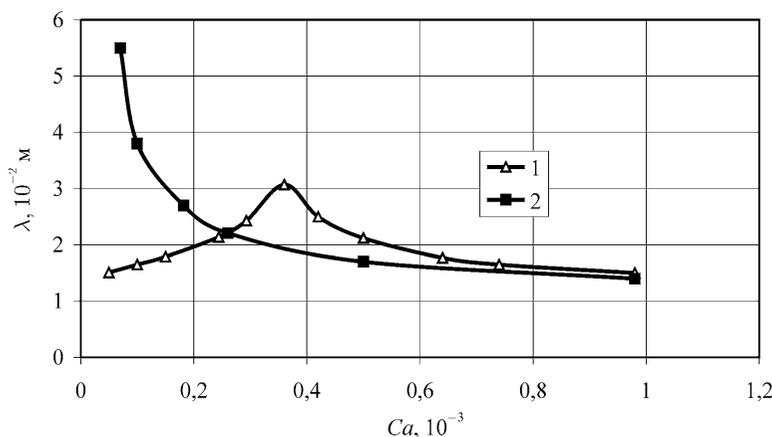


Рис. 3.3. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости критической длины волны от капиллярного числа при вытеснении нефти водой

Как видно из рис. 3.3, в отличие от теоретической экспериментальная зависимость носит немонотонный характер, причем при докритических скоростях (т. е. при $v < 10^{-3}$ м/с) критическая длина волны $\lambda \sim Ca^2$, а при послекритических ($v > 2 \cdot 10^{-3}$ м/с) $\lambda \sim Ca^{-(1/2)}$.

Во второй серии экспериментов нами исследовался процесс вытеснения нефти водой с добавкой ПАВ и полимерной композицией (фрактальные структуры показаны на рис. 3.1б). Результаты экспериментов показали, что с добавкой ПАВ до 0,05% включительно количество вытеснен-

ной нефти уменьшается (см. рис. 3.4, кривая 1), что объясняется ослаблением сдерживающего действия капиллярных сил.

При $C > 0,05\%$ нефтеизвлечение увеличивается, что объясняется появлением в растворе мицелл, приводящих к неньютоновскому поведению вытеснителя. Полученная зависимость размерности Хаусдорфа–Безиковича от концентрации ПАВ в водном растворе показала, что при $C = 0,05\%$ фрактальная размерность полученной структуры максимальна и равна 1,45, а при $C = 0,4\%$ она минимальна и равна 1,2 (см. рис. 3.4, кривая 2).

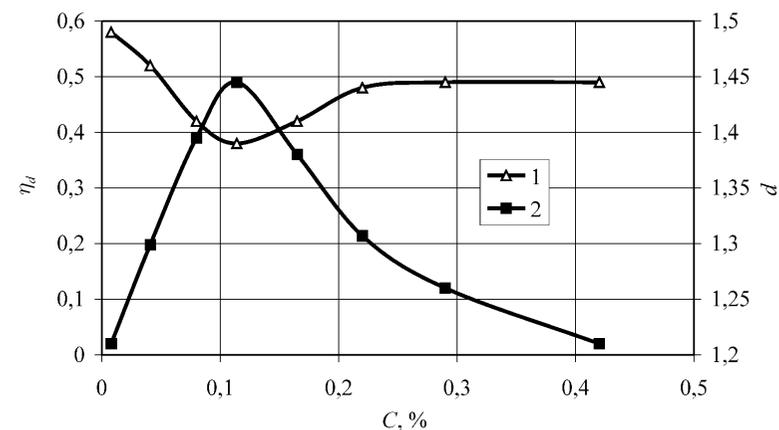


Рис. 3.4. Зависимость безводного коэффициента вытеснения (1) и размерности Хаусдорфа–Безиковича (2) от концентрации ПАВ при вытеснении нефти водным раствором ПАВ

Анализ экспериментальных зависимостей критической длины волны возмущений на фронте вытеснения нефти от концентрации ПАВ соответственно в водном растворе (см. рис. 3.5, кривая 1) и в 0,02% полимерном растворе (кривая 2) (вытеснение проводилось при скоростях ньютоновского течения) показал, что они носят немонотонный характер, в отличие от рассчитанных по формуле (3.1) (кривые 3,4).

Таким образом, формула (3.1), на которой базируются практически все исследования в этой области, применима лишь когда вязкость вытесняющей жидкости меньше, чем вытесняемой, скорость течения выше критической, а также для течения ньютоновских жидкостей.

Анализ экспериментальной зависимости положения фронта вытеснения в точке максимума текущего коэффициента вытеснения от гидростатического давления показывает, что при $\Delta P < 400$ и $\Delta P > 600$ Па макси-

мальный текущий коэффициент вытеснения достигается на первых отметках, после чего постоянно убывает, что объясняется активизацией образования вязких пальцев при приближении фронта к стоку. Это согласуется со свойствами фрактальных объектов [27–29], для которых с увеличением радиуса распространения происходит более резкое деление межфазной границы, что делает фрактальные свойства объекта более ярко выраженными.

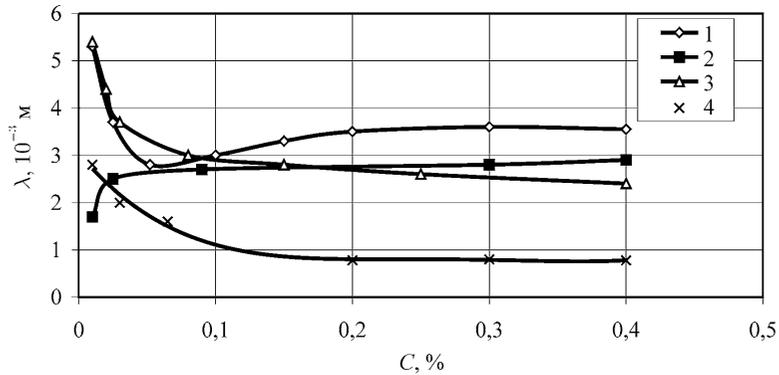


Рис. 3.5. Экспериментальная (1,2) и теоретическая (3,4) зависимости критической длины волны от концентрации ПАВ при вытеснении нефти водным (1, 3) и полимерным (2, 4) растворами

Полученные результаты позволяют грубо оценить границы скоростей, при которых будут наблюдаться равномерное продвижение фронта вытеснения в микронеоднородном (изотропном) или однородном плоскопараллельном пласте одинаковой длины и ширины с целью соответствующей толщины. Запишем формулу (3.1) для скорости

$$v = \frac{\pi^2 b^2 \sigma}{\lambda^2 (\eta_1 - \eta_2)}. \quad (3.2)$$

Подставляя в формулу (3.2) $\lambda = B$ (т. е. фронт вытеснения не возмущен, B – ширина пласта и щели); $b = (12kh)^{1/3}$ (где b – соответствующая данной проницаемости k и мощности h пласта толщина щели), получим

$$v = \frac{\pi^2 (12kh)^{2/3} \sigma}{B^2 (\eta_1 - \eta_2)}. \quad (3.3)$$

Подставляя в формулу (3.3) $k = 10^{-11} - 10^{-12}$ м²; $h = 1 - 100$ м; $\sigma = (5 - 30) \cdot 10^{-3}$ Н/м; $B = 50 - 100$ м; $\eta_1 - \eta_2 = (1 - 10) \cdot 10^{-3}$ Па·с, получим $v =$

$= 7 \cdot 10^{-5} - 1,6$ м/мес, что примерно соответствует скорости капиллярной пропитки.

Столь низкие значения скорости труднодостижимы в промышленных условиях, поэтому более перспективным представляется применение для воздействия на пласт и призабойную зону неньютоновских систем.

Очевидно, что прямое определение фрактальных характеристик фронта вытеснения в промышленных условиях затруднено. Поэтому в данном случае фрактальную размерность фронта вытеснения следует определять косвенными методами [30, 31], исходя из известных свойств фрактальных кластеров.

Рассмотрим нефтяную залежь, в которую через нагнетательные скважины нагнетается вода и добывается необходимая нефть через добывающие скважины, тогда для объема закачанной в залежь воды, если фронт вытеснения фрактален, можно записать [29]

$$V \sim V_0 \left(\frac{r}{R} \right)^{3-D}, \quad (3.4)$$

где V_0 – некоторый постоянный объем, r – максимальное расстояние от линии нагнетания до фронта вытеснения (радиус гирации фрактального кластера), R – расстояние от линии нагнетания до первого ряда добывающих скважин (максимально возможный размер фрактального кластера), D – фрактальная размерность фронта вытеснения (кластера).

Выражение (3.4) может быть записано в виде

$$V \sim V_0 \left(1 - \frac{r_1}{R} \right)^{3-D}, \quad (3.5)$$

где r_1 – расстояние от первого ряда добывающих скважин до фронта вытеснения ($r_1 = R - r$).

Принимая, что количество отобранной нефти пропорционально закачанной воде, и учитывая, что количество отобранной безводной нефти $V = \frac{r_1^2}{\xi^2}$ (ξ – коэффициент пропорциональности) [32], из (3.5) получим

$$V \sim V_0 \left(1 - \frac{\xi V^{0.5}}{R} \right)^{3-D}.$$

Логарифмируя последнее выражение, получим

$$\lg V \sim \lg V_0 + (3 - D) \lg \left(1 - \frac{\xi V^{0.5}}{R} \right).$$

Таким образом, на основе данных об объемах отбираемой нефти в различные периоды времени, в координатах $\lg V - \lg \left(1 - \frac{\xi V^{0.5}}{R}\right)$, можно определить фрактальную размерность фронта вытеснения. Это позволит контролировать равномерность продвижения водонефтяного контакта, а также оценить эффективность воздействия на нефтяную залежь.

3.2. Стационарная фильтрация во фрактально-неоднородной пористой среде

Изучение фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой требует выхода за рамки обычных геометрических представлений и привлечения методов теории фракталов. Нередки случаи несовпадения результатов, полученных стандартными теоретическими исследованиями, с практикой. Это, по-видимому, происходит из-за неучета фрактальной структуры пористой среды. Поэтому изучение фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой представляет как научный, так и практический интерес.

В данной работе рассматривается случай одномерной стационарной фильтрации в неоднородной среде с фрактальной структурой [33]. Жидкость примем объемно несжимаемой. Тогда исходное уравнение будет иметь вид [10, 11]

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{ka_0}{\eta} \rho \frac{d^\alpha P}{dx^\alpha} \right) = 0, \quad (3.6)$$

где α – фрактальная размерность пористой среды, P – давление, k – проницаемость пористой среды, η – вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, x – координата, a_0 – постоянный коэффициент.

Граничные условия

$$P|_{x=0} = P_1, \quad P|_{x=l} = P_2, \quad (3.7)$$

где l – длина фильтрации; P_1, P_2 – давление на входе и выходе пористой среды.

Интегрируя (3.6), получим

$$\frac{d^\alpha P}{dx^\alpha} = C. \quad (3.8)$$

Интегрирование уравнения (3.8) производится методами интегрирования дифференциальных уравнений дробного порядка и может быть осу-

ществлено следующей формулой [34]:

$$y(\xi) = b_1 \frac{\xi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^\xi \frac{(\xi-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t, y) dt.$$

Тогда из уравнения (3.8) дробного порядка с учетом (3.7) получим [34, 35]

$$\frac{P}{P_2} = \beta + (1-\beta)\xi^\alpha, \quad (3.9)$$

где $\beta = \frac{P_1}{P_2}$, $\xi = \frac{x}{l_0}$, l_0 – длина образца с пористой средой.

Расход жидкости для сред с фрактальной структурой может быть определен по модифицированному закону Дарси

$$Q = -\frac{ka_0}{\eta} f \frac{d^\alpha P}{dx^\alpha}. \quad (3.10)$$

Тогда из (3.10) с учетом (3.8) и (3.9) будем иметь [6]

$$Q = \alpha \frac{ka_0}{\eta} f \frac{P_1 - \Gamma(\alpha)P_2}{l^\alpha}, \quad (3.11)$$

где $l^\alpha = l_0 \delta^{1-\alpha}$.

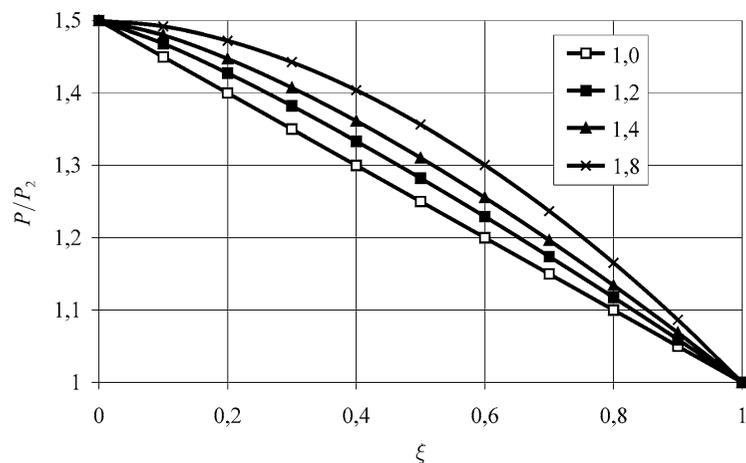
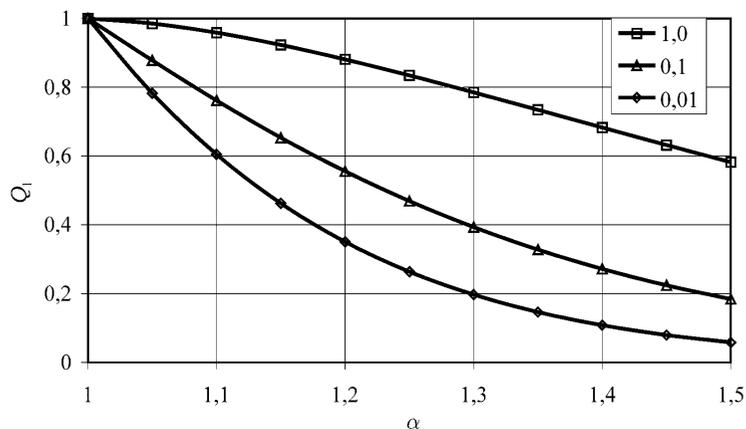
Уравнение (3.11) можно привести к виду

$$Q_1 = \frac{Q}{Q_0} = \frac{\alpha a_0 [\beta - \Gamma(\alpha)]}{(\beta - 1)\delta^{1-\alpha}}, \quad (3.12)$$

где δ – размер частицы пористой среды.

Результаты расчетов по формуле (3.9) и (3.12) при следующих значениях параметров: $P_1 = 15$ МПа, $P_2 = 10$ МПа, $\beta = 1,5$, $a_0 = 1 \text{ м}^{1-\alpha}$, $\xi = 0-1$, $\alpha = 1-1,8$, $l_0 = 1,0$ м; $\delta = 10^{-2} - 10^{-4}$ м представлены на рис. 3.6 и 3.7. Как видно из рисунка 3.6, с увеличением фрактальной размерности пористой среды кривая распределения давления становится более выпуклой, т. е. сопротивление среды растет. Из рис. 3.7 видно, что расход жидкости сильно зависит от фрактальной размерности. При прочих равных условиях, с увеличением фрактальной размерности пористой среды расход жидкости резко падает, и, если учесть, что для реальных пористых сред фрактальная размерность (для одномерного случая) составляет согласно [4] 1.37–1.42, расход жидкости может быть очень низким (рис. 3.7, $\delta = 10^{-4}$ м).

Таким образом, как свидетельствуют проведенные исследования, неучет фактора фрактальной структуры пористой среды может привести к большим ошибкам при изучении фильтрации жидкости.

Рис. 3.6. Распределение давления при различных значениях α Рис. 3.7. Зависимость безразмерного расхода от фрактальной размерности α при различных значениях δ (10^{-2} м)

3.3. Реология фрактально-неоднородных систем с учетом взаимодействия частиц дисперсной фазы

Для дисперсных систем с реологическими свойствами, зависящими от времени, к примеру тиксотропных, нелинейные эффекты, в частности

колебания реологических характеристик, связаны с взаимодействием структурных элементов [36]. Взаимодействие частиц дисперсной фазы в чисто вязких неньютоновских системах ввиду относительно небольшого размера частиц дисперсной фазы (~10 мкм) и отсутствия развитой трехмерной структуры не приводит к заметному временному изменению реологических характеристик, однако отражается на их стационарной реологии.

Объяснение реологии вязких неньютоновских систем возможно на основе определения оптических характеристик потока [37, 38]. При этом прозрачность системы возрастает при образовании агрегатов частиц дисперсной фазы, а при их разрушении уменьшается [37]. По изменению прозрачности судят о динамике взаимодействия частиц.

Исследования проводились на экспериментальной установке, аналогичной приведенной в работах [37, 38]. Через цилиндрический слой жидкости, текущей с постоянной скоростью сдвига, пропускался свет, интенсивность которого измерялась фотоэлектронным умножителем. При напряжении на фотоэлектронном умножителе, пропорциональном прозрачности системы, самописец изображал график зависимости прозрачности от времени.

Исследовался 2%-ный раствор частично гидролизованного полиакрилонитрила (ПАН) со степенью гидролиза 65%. Реологическая кривая для него построена по результатам ротационной вискозиметрии на «Rheotest-2.1» при температуре 20 °С (см. рис. 3.8). Из рис. 3.8 видно, что псевдопластическое течение после превышения пороговой скорости сдвига ($\dot{\gamma}_0=600$ 1/с) сменяется дилатантным.

Следует отметить, что если псевдопластическое течение встречается довольно часто, то большинство исследователей, занимавшихся дилатантным течением [39–42], отмечают, что это довольно редкое явление. Согласно [40, 43], дилатансия наблюдается в системах с высокой концентрацией твердой фазы и в грубых дисперсиях. Для указанных систем это объясняется на основе теории «исключенного объема» [42] в предположении, что в процессе течения концентрация растворителя ввиду его большей подвижности постоянно уменьшается, а это приводит к возрастанию сухого трения между частицами твердой фазы и, как следствие, к увеличению кажущейся вязкости системы.

В работе [39] показано, что сильная дилатансия может отмечаться в дисперсных системах с достаточно малыми частицами (меньше 5 мкм). Это может быть объяснено их миграцией к стенкам капилляра, что выражается в увеличении кажущейся вязкости системы с возрастанием скорости сдвига [44, 45].

Согласно [46] дилатантное течение может наблюдаться в полимерных растворах (в частности, полиметакриловой кислоты), что объясняется

разворачиванием цепей макромолекул с увеличением скорости сдвига и усилением взаимодействия между ними.

Для большинства дилатантных систем не удается наблюдать дилатантное течение при всех скоростях сдвига [39]. При переходе от низких к высоким скоростям сдвига происходит переход от псевдопластического течения к дилатантному (к примеру, для полихлорвинила [40]). Подобную реологию, как видно из рис. 3.8, имеет, в частности, и исследуемый гидролизированный ПАН.

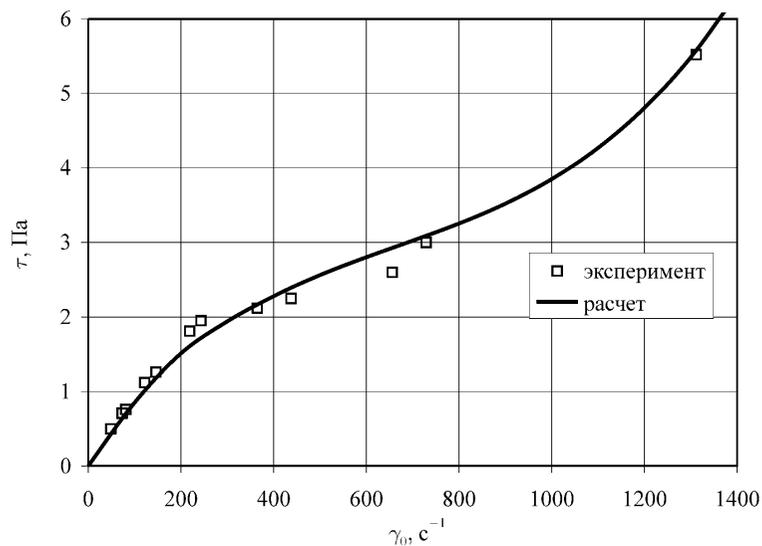


Рис. 3.8. Реологическая кривая водного раствора частично гидролизованного ПАН с концентрацией 2%

Эксперимент по определению динамики прозрачности системы в процессе течения осуществлялся при постоянной скорости сдвига [47]. Исследования проводились для четырех режимов: в области псевдопластического течения ($\gamma_0 = 400 \text{ 1/c}$), точке перегиба ($\gamma_0 = 600 \text{ 1/c}$), вблизи точки перегиба в области дилатантного течения ($\gamma_0 = 800 \text{ 1/c}$) и в области развитого дилатантного течения ($\gamma_0 = 1200 \text{ 1/c}$). Результаты оформлялись в виде зависимостей напряжения от времени (рис. 3.9–3.11), для которых в дальнейшем по стандартному алгоритму [48] проводился спектральный Фурье-анализ.

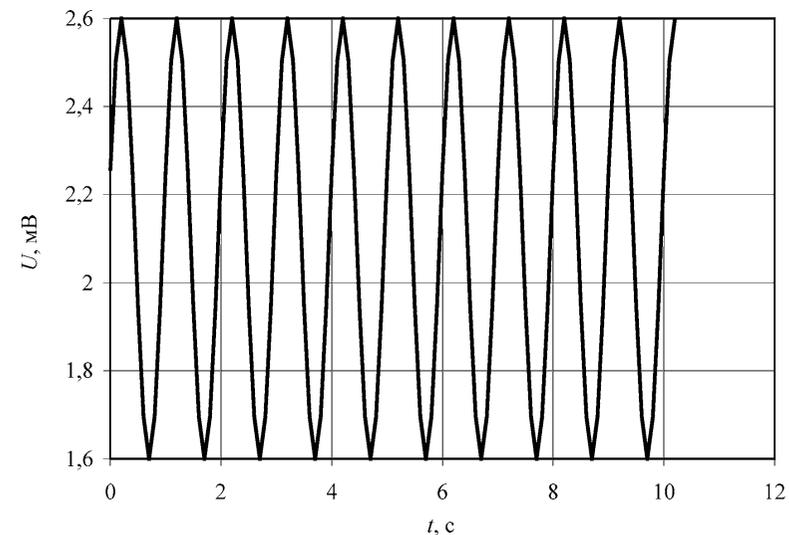


Рис. 3.9. Динамика изменения напряжения при $\gamma_0 = 600 \text{ c}^{-1}$

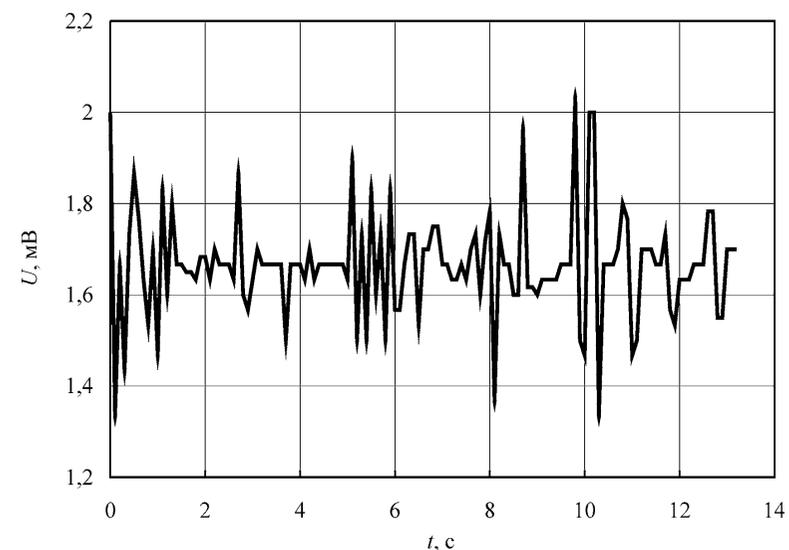


Рис. 3.10. Динамика изменения напряжения при $\gamma_0 = 800 \text{ c}^{-1}$

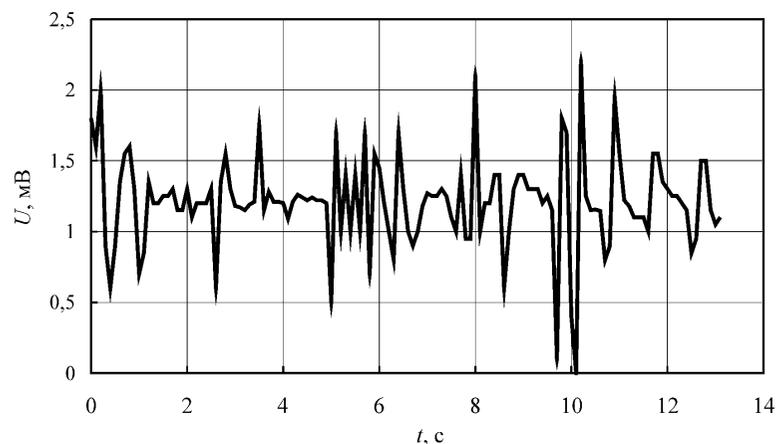


Рис. 3.11. Динамика изменения напряжения при $\gamma_0=1200 \text{ c}^{-1}$

В первом случае прозрачность не изменяется во времени, т. е. течение дисперсии устойчиво; во втором устойчивость течения нарушается и имеют место почти периодические колебания прозрачности (рис. 3.12); в третьем наблюдается квазипериодическое изменение прозрачности с тремя характерными частотами (рис. 3.13), а в четвертом прозрачность изменяется хаотически (рис. 3.14), о чем свидетельствует быстрое затухание автокорреляционной функции $k(t)$ (рис. 3.15) [49].

На основании экспериментальных исследований можно заключить, что нарушение устойчивости течения дисперсии приводит к увеличению гидравлического сопротивления и соответственно к росту кажущейся вязкости исследуемой системы. При этом каждому новому уровню взаимодействия соответствует новое значение кажущейся вязкости системы.

Следует отметить, что нарушение устойчивости течения дисперсной фазы наблюдается при концентрации частично гидролизованного ПАН в водном растворе не менее 1%. Поэтому причина нарушения устойчивости течения, очевидно, связана с усилением взаимодействия между частицами, обычно наблюдаемым с повышением концентрации дисперсной фазы и выражающимся в образовании ассоциатов частиц дисперсной фазы [3, 50, 51]. Для проверки указанного предположения были проведены исследования структуры дисперсии с помощью оптического микроскопа фирмы «Карл Цейс» при различных концентрациях полимера (рис.3.16). Установлено, что при малых концентрациях (до 0,05%) дисперсная фаза состоит из отдельных деформируемых хаотически ориентированных вы-

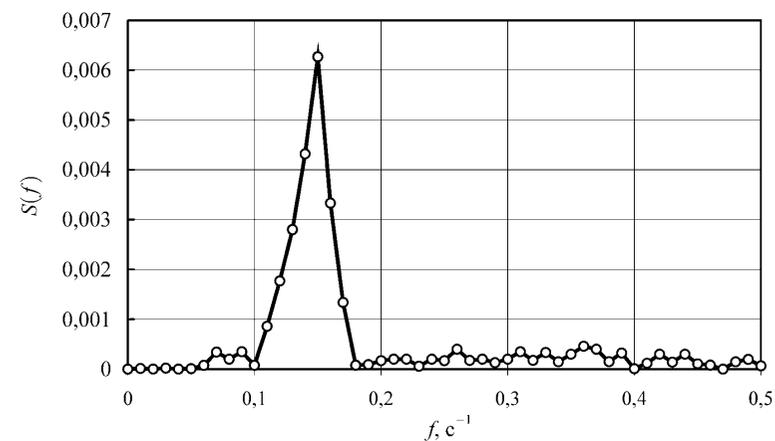


Рис. 3.12. Спектр мощности $S(f)$ при $\gamma_0 = 600 \text{ c}^{-1}$

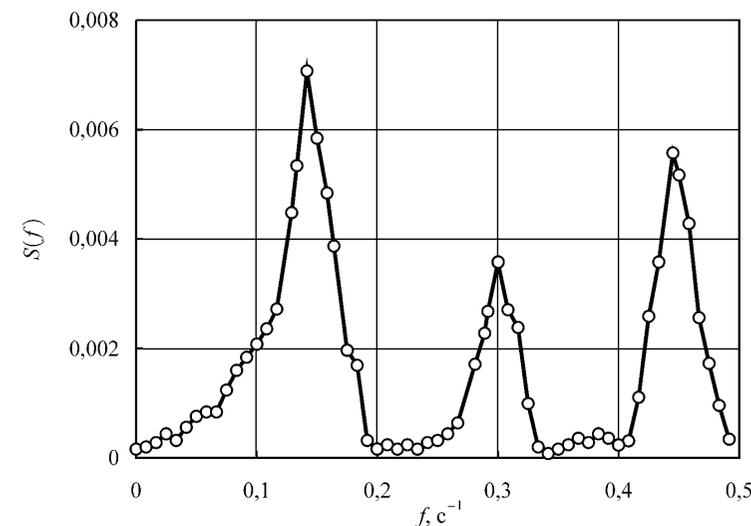


Рис. 3.13. Спектр мощности $S(f)$ при $\gamma_0 = 800 \text{ c}^{-1}$

тянутых (в виде палочек) включений размером порядка 1 мкм. С ростом концентрации до 2,0% и выше вследствие агрегации образуются более крупные ассоциаты, имеющие преимущественно круглую или овальную форму с размером 5–10 мкм. Кроме того, как видно из рис. 3.9–3.11, с уве-

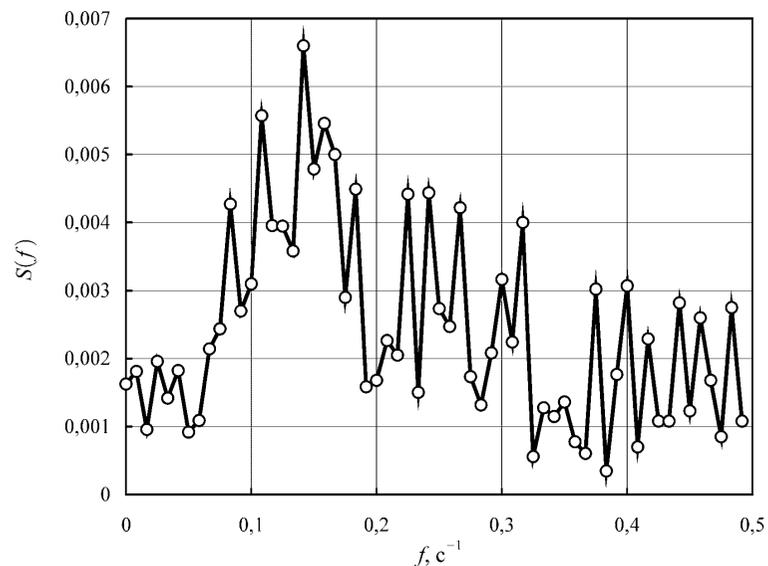


Рис. 3.14. Спектр мощности $S(f)$ при $\gamma_0=1200 \text{ c}^{-1}$

личением скорости сдвига среднее абсолютное значение прозрачности (напряжения) снижается, что свидетельствует о разрушении ассоциатов и увеличении числа элементарных включений.

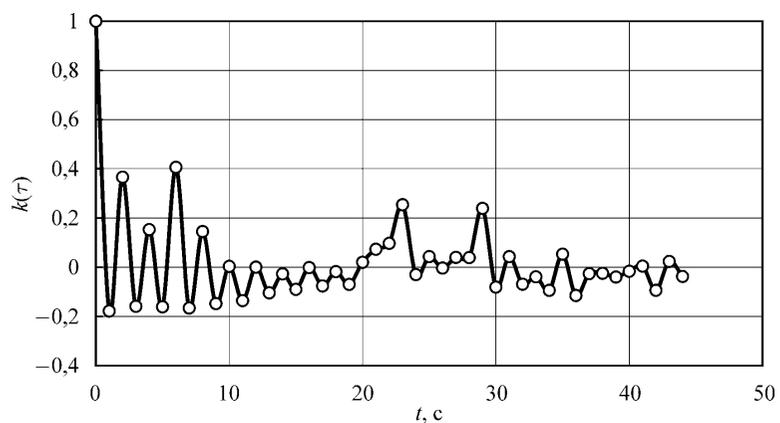


Рис. 3.15. Автокорреляционная функция $k(t)$ при $\gamma_0=1200 \text{ c}^{-1}$

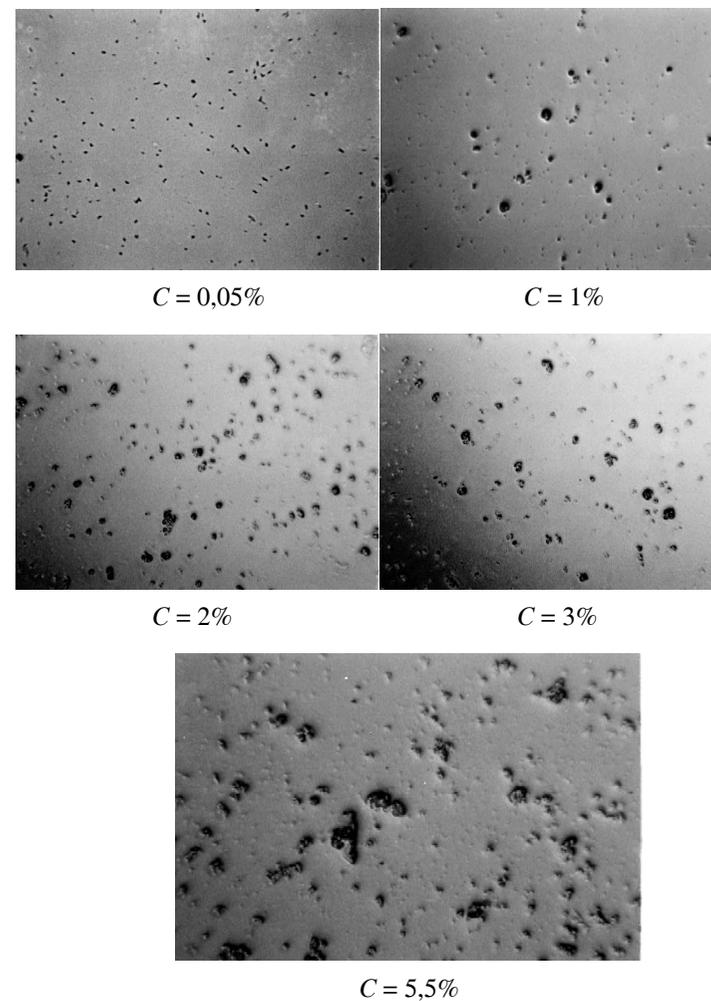


Рис. 3.16. Микрофотография водного раствора частично гидролизованного ПАН при различной концентрации C активной массы

Для определения однородности распределения частиц дисперсной фазы в системе по микрофотографиям строились зависимости числа частиц, находящихся в произвольно выбранном круге, от его радиуса r , $n(r)$ для различных концентраций активной массы в растворе. На основании построенных зависимостей определялась фрактальная размерность гео-

метрической структуры системы по аналогии с [3]. На рис. 3.17 показана зависимость фрактальной размерности d от концентрации полимера. Как видно из рисунка, при концентрациях до 1% геометрическая структура системы однородна и фрактальная размерность соответствует евклидовой размерности поверхности. Дальнейшее увеличение концентрации приводит к снижению фрактальной размерности неоднородностей, но при концентрации 2% она незначительно (на 8%) отличается от евклидовой размерности поверхности. Таким образом, в первом приближении пространственное распределение дисперсной фазы можно считать однородным.

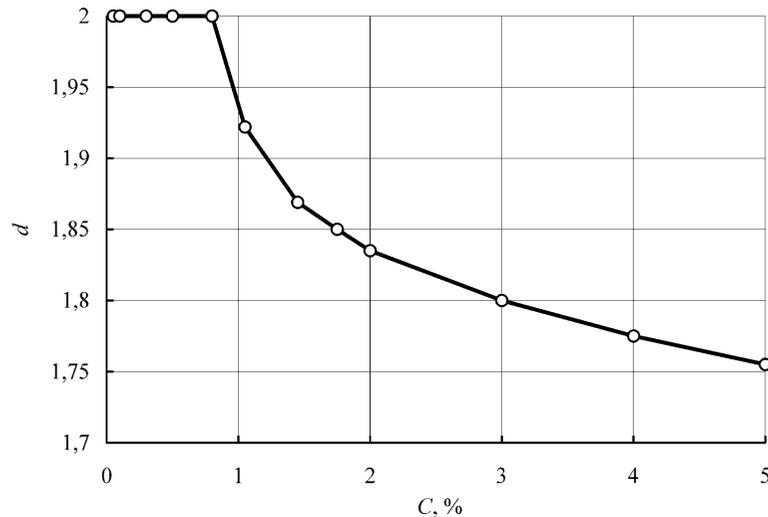


Рис. 3.17. Зависимость фрактальной размерности D от концентрации C полимера

Вышеизложенное позволяет предложить следующую кинетическую модель наблюдаемого процесса. С повышением скорости сдвига число элементарных включений растет за счет разрушения ассоциатов. С увеличением числа элементарных включений усиливается взаимодействие между ними и кажущаяся вязкость системы возрастает.

Процессы, протекающие в концентрированных дисперсных системах, в основном имеют динамический характер. Их теоретическое изучение с учетом эффектов коагуляции даже для простейших случаев представляет большие математические сложности [50, 51]. Поэтому построение более простых моделей, обеспечивающих достаточную для практики точность, представляет большой интерес.

В работах [36, 52–54] на основе кинетического подхода изучены тиксотропные процессы в сложных системах и показано, что в рамках этого подхода можно предсказать реологические свойства дисперсии. Однако в этих исследованиях не принималось во внимание влияние взаимодействия частиц дисперсной фазы на эволюцию реологических характеристик дисперсии и динамика движения дисперсионной среды, имеющая немаловажное значение.

В данной работе предлагается модель, учитывающая взаимодействия каждого вида частиц дисперсной фазы и динамику движения дисперсионной среды [55].

Рассмотрим движение дисперсии в трубе радиусом R .

Пусть N_1 и N_2 соответственно концентрации элементарных включений и ассоциатов. Определения «элементарные включения» и «ассоциаты» условны, при этом под термином «элементарные включения» мы понимаем частицы, которые не разрушаются ни при каких условиях эксперимента, а «ассоциаты» – это более крупные частицы, образующиеся в результате агрегации «элементарных включений». Тогда на основании моделей Лотки–Вольтерра [56] и Ферхюльста [57], пренебрегая в первом приближении из-за относительной малости концентрации частиц пространственной неоднородностью, систему кинетических уравнений, описывающих эволюцию дисперсной фазы, можно представить в виде [36]

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= (a_2\gamma - \beta_1)N_2 - a_1\gamma N_1(1 - \alpha_1 N_1) - (\beta_1 + \beta_2)N_1 + \beta_1 N, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -a_2 N_2 \gamma (1 - \alpha_2 N_2) + \beta_2 N_1 \\ N_1(0) + N_2(0) &\leq N = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где a_1 и a_2 – неотрицательные числа, характеризующие интенсивность разрушения элементарных включений и ассоциатов; α_1 и α_2 – неотрицательные числа, характеризующие замедление интенсивности разрушения частиц с ростом их числа; β_1 , β_2 – неотрицательные числа, определяющие скорость восстановления концентрации частиц обоих видов.

Уравнение движения жидкости в цилиндрической трубе для осесимметричного случая имеет вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \eta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\Delta P}{l}. \quad (3.14)$$

В первом приближении для оценки влияния динамики движения самой жидкости на реологию системы примем скорость сдвига по попереч-

ному сечению $\gamma = -\frac{\partial u}{\partial r} = \text{const}$. Тогда имеем

$$u = \gamma(R - r). \quad (3.15)$$

Из уравнения (3.14) с учетом (3.15) при принятом допущении получим

$$\rho \frac{d\gamma}{dt}(R - r) = -\frac{\eta}{r}\gamma + \frac{\Delta P}{l}. \quad (3.16)$$

Умножив каждый член уравнения (3.16) на $2\pi r dr$ и разделив на πR^2 , осредним обе его стороны по поперечному сечению трубы

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{6\eta}{\rho R^2}\gamma + 3\frac{\Delta P}{\rho l R}. \quad (3.17)$$

Вязкость системы η с течением времени изменяется и может быть определена по формуле [36]

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 \frac{N_2}{N}, \quad (3.18)$$

где $\eta_0, \eta_1 \frac{N_2}{N}$ – соответственно постоянная и переменная составляющие вязкости системы.

Из формулы (3.17) с учетом (3.18) находим

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{6\gamma}{\rho R^2} \left(\eta_0 + \eta_1 \frac{N_2}{N} \right) + 3\frac{\Delta P}{\rho l R}. \quad (3.19)$$

Из системы уравнений (3.13) и (3.19) можно определить динамику изменения реологических параметров дисперсной системы.

Стационарные значения параметров N_1, N_2 и $\gamma(q_1, q_2, \gamma_0)$ можно найти из уравнений (3.13) и (3.19), что дает:

$$q_2 = \frac{\left(\beta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} a \gamma_0 + \frac{a_1 a_2}{\beta_2} \gamma_0^2 \right) + \sqrt{\left(\beta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_2} a \gamma_0 + \frac{a_1 a_2}{\beta_2} \gamma_0^2 \right)^2 - 4\beta_1 N a_0}}{2a_0}, \quad (3.20)$$

$$a_0 = \frac{a_1 a_2 \gamma_0^2}{\beta_2} \alpha_2 + \frac{a_1 a_2^2 \alpha_1 \gamma_0^3}{\beta_2^2} \alpha_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} a_2 \gamma_0 \alpha_2,$$

$$q_1 = \frac{a_2 \gamma_0 q_2 (1 - \alpha_2 q_2)}{\beta_2}, \quad (3.21)$$

$$\gamma_0 = \frac{\Delta P}{l} \cdot \frac{R}{2 \left(\eta_0 + \eta_1 \frac{q_2}{N} \right)}. \quad (3.22)$$

Если α_1 и α_2 намного меньше, чем a_1 и a_2 , то из (3.20) получим

$$q_1 = \frac{\frac{a_2 \gamma_0}{\beta_2} N}{1 + \frac{a_2}{\beta_2} \gamma_0 + \frac{a_1 a_2}{\beta_1 \beta_2} \gamma_0^2}, \quad q_2 = \frac{N}{1 + \frac{a_2}{\beta_2} \gamma_0 + \frac{a_1 a_2}{\beta_1 \beta_2} \gamma_0^2}. \quad (3.23)$$

На основе (3.22) с учетом (3.23) будем иметь

$$\gamma_0^3 - \left(\frac{\Delta PR}{2\eta_0 l} - \frac{\beta_1}{a_1} \right) \gamma_0^2 - \left[\frac{\Delta PR \beta_1}{2\eta_0 l a_1} - \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \frac{\beta_1 \beta_2}{a_1 a_2} \right] \gamma_0 - \frac{\Delta PR \beta_1 \beta_2}{2\eta_0 l a_1 a_2} = 0. \quad (3.24)$$

Из (3.24) следует

$$\gamma_0 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta PR}{2\eta_0 l} - \frac{\beta_1}{a_1} \right), \quad (3.25)$$

где $m = -\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta PR}{2\eta_0 l} - \frac{\beta_1}{a_1} \right)^2 - \frac{\Delta PR \beta_1}{2\eta_0 l a_1} + \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \frac{\beta_1 \beta_2}{a_1 a_2}$;

$$n = -\frac{2}{27} \left(\frac{\Delta PR}{2\eta_0 l} - \frac{\beta_1}{a_1} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta PR}{2\eta_0 l} - \frac{\beta_1}{a_1} \right) \left[\frac{\Delta PR \beta_1}{2\eta_0 l a_1} - \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_0} \right) \frac{\beta_1 \beta_2}{a_1 a_2} \right] - \frac{\Delta PR \beta_1 \beta_2}{2\eta_0 l a_1 a_2}.$$

Значения q_1 и q_2 определяются из (3.23) с учетом (3.25).

В первом приближении предположим, что вокруг стационарного положения q_1, q_2 и γ_0 происходит малая флуктуация v_1, v_2 и ε [56, 57]:

$$N_1 = q_1(1 + v_1), \quad N_2 = q_2(1 + v_2), \quad \gamma = \gamma_0 + \varepsilon. \quad (3.26)$$

Тогда из (3.13) и (3.19) с учетом (3.26) получим уравнения возмущенного движения системы в первом приближении:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -b_1 v_1 + \frac{q_2}{q_1} (a_2 \gamma_0 - \beta_1) v_2 + \left(\alpha_1 q_1 + \frac{a_2 q_2}{a_1 q_1} - 1 \right) a_1 \varepsilon \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{q_1 \beta_2}{q_2} v_1 + (2a_2 q_2 - 1) a_2 \gamma_0 v_2 + (\alpha_2 q_2 - 1) a_3 \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{6}{\rho R^2} \gamma_0 \eta_1 \frac{q_2}{N} v_2 - \frac{6}{\rho R^2} \left(\eta_0 + \frac{\eta_1 q_2}{N} \right) \varepsilon.$$

Пороговые значения параметров, при которых происходит потеря устойчивости системы уравнений невозмущенного движения (3.13) и (3.19), могут быть определены из уравнения (3.27).

Для уравнения возмущенного движения (3.27) характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & \frac{q_2}{q_1}(a_1\gamma_0 - \beta_1) & \left(a_1q_1 + \frac{a_2q_2}{a_1q_1} - 1\right)a_1 \\ \frac{q_1}{q_2}\beta_2 & (2\alpha_2q_2 - 1)a_2\gamma_0 - \lambda & (\alpha_2q_2 - 1)a_3 \\ 0 & -\frac{6}{\rho R^2}\gamma_0\eta_1\frac{q_2}{N} & -\frac{6}{\rho R^2}\left(\eta_0 + \frac{\eta_1q_2}{N}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.28)$$

Тогда из уравнения (3.28) получим

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2\gamma_0(1 - 2a_2q_2) + \frac{6}{\rho R^2}\left(\eta_0 + \frac{\eta_1q_2}{N}\right) + b_1, \\ c_2 &= (1 - 2a_2q_2)a_2\gamma_0\frac{6}{\rho R^2}\left(\eta_0 + \frac{\eta_1q_2}{N}\right) + b_1(1 - 2a_2q_2)a_2\gamma_0 + b_1\frac{6}{\rho R^2}\left(\eta_0 + \frac{\eta_1q_2}{N}\right) + \\ &\quad + (1 - aq_2)a_3\frac{6}{\rho R^2}\gamma_0\eta_1\frac{q_2}{N} + (a_2\gamma_0 - \beta_1)\beta_2\frac{6}{\rho R^2}, \\ c_3 &= b_1(1 - 2a_2q_2)a_2\gamma_0\frac{6}{\rho R^2}\left(\eta_0 + \frac{\eta_1q_2}{N}\right) + b_1(1 - aq_2)a_3\frac{6}{\rho R^2}\gamma_0\eta_1\frac{q_2}{N} + \\ &\quad + (\beta_1 - a_2\gamma_0)\beta_2\frac{6}{\rho R^2}\left(\eta_0 + \frac{\eta_1q_2}{N}\right) + \left(\alpha_1q_1 + \frac{a_2q_2}{a_1q_1} - 1\right)\frac{a_1q_1}{a_2q_2}, \\ b_1 &= a_1\gamma_0(1 - 2\alpha_1q_1) + \beta_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

Матрица Гурвица для уравнения (3.29) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

По теореме Ляпунова, для того чтобы невозмущенные уравнения движения (3.13) и (3.14) системы были асимптотически устойчивыми, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3.29) имело отрицательные действительные части. Тогда по критериям Гурвица все главные диагональ-

ные миноры матрицы (3.30) должны быть положительными, т. е.

$$c_1 > 0, \quad c_1c_2c_3 > 0, \quad c_3(c_1c_2 - c_3) > 0. \quad (3.31)$$

Кроме того, по теореме Ляпунова если хотя бы один из миноров (3.30) отрицателен, то невозмущенное движение системы неустойчиво при любых нелинейных членах в правых частях уравнений (3.13) и (3.14).

Таким образом, полученные условия (3.31) позволяют определить пороговые значения параметров, при которых наступает неустойчивое состояние системы.

Поскольку напряжение сдвига τ в системе может быть определено по формуле

$$\tau = \eta\gamma, \quad (3.32)$$

то из (3.32) с учетом (3.18), (3.24) и (3.26) для предельного случая $t \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\tau = \gamma_0 \left(\eta_0 + \frac{\eta_1}{1 + \frac{a_2}{\beta_2}\gamma_0 + \frac{a_1a_2}{\beta_1\beta_2}\gamma_0^2} \right). \quad (3.33)$$

Численный расчет значения τ по формуле (3.33) произведен при следующих значениях параметров (которые определены по экспериментальной кривой течения с помощью метода наименьших квадратов): $\eta_0 = 4$ мПа·с; $\eta_1 = 20$ мПа·с; $a_1 = a_2 = 10^{-8}$; $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-6}$ с⁻¹.

Результаты расчета совместно с результатами экспериментальных исследований представлены на рис. 3.8. Как видно из рис. 3.8, результаты теоретических исследований хорошо согласуются с экспериментальными данными. При скорости сдвига выше 600 с⁻¹ устойчивость течения системы нарушается. Далее, как показано в [58–60], в системах, подобных исследуемой, при значениях регулирующего параметра выше порогового происходит увеличение периода в 2, 3 или 5 раз, после чего наступают хаотические колебания определяющего параметра, что согласуется с результатами проведенных экспериментов.

Полученные результаты могут быть использованы для гидродинамических расчетов в нефтегазодобыче, а также для описания фильтрации неньютоновских систем в пористых средах.

3.4. Особенности течения суспензий и нефтяных дисперсных систем

Эксперименты с некоторыми дисперсными системами, особенно с фрактально-неоднородной структурой, свидетельствуют, что реологиче-

ские кривые для них не всегда описываются степенным законом. Так, в [61] показано, что при течении полимеров по трубкам с переменным сечением реологическая кривая не подчиняется степенному закону, а зависимость эффективной вязкости от скорости течения имеет немонотонный характер. Подобные же эффекты в трубках переменного сечения наблюдаются и для неньютоновских нефтей [62].

Однако промысловые данные по транспорту нефти свидетельствуют о том, что эти эффекты могут наблюдаться и в трубах постоянного диаметра, например, для водонефтяных эмульсий. Кроме того, при движении суспензий с твердыми частицами также имеются аномальные явления [63].

Для подробного изучения этих вопросов Г. М. Панаховым были проведены экспериментальные исследования реологии неньютоновских нефтей и суспензий с твердыми частицами [64]. Исследовались реологически сложные тяжелые нефти месторождений Грязевая сопка и Бузачи, а также модельная дисперсная система, составленная из глинистого (бентонит) раствора с добавками кварцевого песка (с плотностью 2600 кг/м^3) различных фракций (средний размер частиц 10^{-4} м). Согласно полученным результатам, реологическая кривая имеет S-образный, а соответствующая ей зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига немонотонный характер, причем в точке перегиба дилатантное поведение сменяется псевдопластичным (при этом скорость сдвига $\gamma \approx 160 \text{ 1/с}$) [64]. Аналогичные результаты получены для нефти месторождения Грязевая сопка.

Известно, что дисперсную фазу нефтяных систем составляют в основном асфальтены [65], причем образуемые ими надмолекулярные структуры имеют размер 10^{-6} м и под влиянием внешних сил (например, напряжения сдвига) изменяют свою форму – деформируются [65]. В то же время, согласно микрореологическим исследованиям, приведенным в [66], твердые частицы при ламинарном течении суспензии движутся преимущественно у стенки трубки, а деформируемые частицы мигрируют к центру потока. На основе этого реологические кривые для исследуемых неньютоновских нефтей могут быть описаны следующим возможным кинетическим механизмом. При относительно низкой скорости сдвига хаотически расположенные в жидкости [42] частицы дисперсной фазы не деформируются и ведут себя как твердые, постепенно концентрируясь преимущественно у стенки цилиндрической трубки, что отражается в увеличении эффективной вязкости системы. Затем после определенной пороговой скорости сдвига они начинают деформироваться, что приводит к дополнительному возмущению поля скоростей жидкости, и мигрируют в центр потока, а это отражается в уменьшении эффективной вязкости системы. Действительно, смена характера течения, как показано выше, наступает при $\gamma \approx 160 \text{ 1/с}$, что хорошо согласуется с результатами работы [66], по которым дисперс-

ная частица размером 10^{-6} м начинает деформироваться при средней скорости сдвига по сечению трубки $\gamma > 150 \text{ 1/с}$.

Для качественного подтверждения предложенного механизма вначале определим распределение концентрации дисперсной фазы, при котором достигается максимум или минимум расхода для исследуемых систем.

Учитывая, что для нефтяной дисперсной системы плотность дисперсной фазы и дисперсионной среды практически одинаковы [65], воспользуемся результатами работы [67], в которой предложена функция

$$h(c) = \frac{1}{\eta(c)} + \frac{A}{r^2}c,$$

где $\eta(c)$ – функция вязкости от концентрации, r – цилиндрическая координата, c – концентрация дисперсной фазы, A – постоянный коэффициент. Согласно [67] $A \in [0, \infty)$, $r \in (0, 1]$, $c \in [0, 1]$. Ищут такое $c(r)$, при котором $h(c)$ и соответственно расход максимальны.

Принимая для $\eta(c)$ согласно [65] формулу Эйнштейна, получим

$$h(c) = \frac{1}{1+ac} + \frac{A}{r^2}c. \quad (3.34)$$

Дифференцируя (3.34) по c , имеем

$$h'(c) = -\frac{a}{(1+ac)^2} + \frac{A}{r^2}; \quad (3.35)$$

$$h''(c) = \frac{2a^2}{(1+ac)^3}.$$

Анализ (3.35) показывает, что $h(c)$ принимает максимальное значение либо при $c=0$, либо при $c=1$. Определяя $h(c)$ при этих значениях c , получим

$$h(1) = \frac{1}{1+a} + \frac{A}{r^2}; \quad h(0) \equiv 1.$$

Так как $h(1)$ убывает с ростом r , для распределения концентрации по сечению трубки $c_m(r)$, доставляющего максимум расхода жидкости, можем записать

$$c_m(r) = \begin{cases} 1 & 0 < r < (1+a) \sqrt{A/a}, \\ 0 & (1+a) \sqrt{A/a} < r \leq 1. \end{cases} \quad (3.36)$$

Для средней концентрации в сечении получим [67]

$$F = \int_0^1 c_m(r) r dr = \frac{(1+a)^2 A}{2a},$$

то есть при $A \in \left(0, \frac{a}{(1+a)^2}\right)$ и $F \in (0, 1/2)$ имеет место распределение (3.36)

и происходит полное расслоение системы.

Следует отметить, что полное расслоение, когда дисперсная фаза движется у стенки, на практике не реализуется [67], однако согласно [66] имеется увеличение концентрации и соответственно вязкости системы при приближении от центра трубки к стенке.

Рассмотрим теперь, как отражается полученное распределение на расходе жидкости. Для этого представим кольцевое движение двух вязких несжимаемых жидкостей с разной вязкостью, причем одна из них движется у стенки, а другая в центре потока. Скорость течения этих жидкостей определится из известного уравнения (2.20). Решая его при тех же, что и в 2.3, граничных условиях, для общего расхода получим (используются обозначения, принятые в 2.3)

$$Q = \frac{\pi \Delta PR^4}{8\eta l} [\varepsilon + (1-\delta)^4(1-\varepsilon)]. \quad (3.37)$$

Анализ соотношения (3.37) показывает, что при $\varepsilon > 1$, то есть когда у стенки движется слой пониженной вязкости, расход, при прочих равных условиях, возрастает с увеличением толщины пристенного слоя, а при $\varepsilon < 1$, наоборот, уменьшается.

Как показано в [64], изменение расхода во времени при постоянном перепаде давления для глинистого раствора с добавкой кварцевого песка имеет убывающую тенденцию и через определенное время расход практически полностью затухает. Разброс экспериментальных точек, наблюдаемый до наступления стационарного состояния, может быть объяснен постепенной передислокацией дисперсной фазы. Следует отметить, что подобный разброс наблюдается также при течении реопектических суспензий [8].

Увеличение входного давления до $1,3 \cdot 10^4$ Па приводит к возобновлению течения системы. Исследуемая суспензия имеет достаточно высокую седиментационную устойчивость, обусловленную малым средним размером частиц дисперсной фазы и относительной высокой вязкостью дисперсионной среды при сравнительно низкой разнице плотностей, а также наличием предельного напряжения сдвига. Это подтверждалось тем, что на выходе из экспериментальной трубки концентрация песка ос-

тавалась практически постоянной. Далее в [64] исследовали изменения предельного напряжения сдвига и структурной вязкости от концентрации для рассматриваемой суспензии. Найдено, что предельное напряжение сдвига растет с увеличением концентрации не менее интенсивно, чем структурная вязкость.

Полученное в процессе эксперимента уменьшение расхода с последующим замиранием может быть объяснено тем, что после определенного времени в трубке, где до этого происходило течение суспензии с равномерно распределенными по сечению твердыми частицами, устанавливается такое распределение дисперсной фазы, при котором ее концентрация возрастает с приближением к стенке трубки, а это приводит к росту предельного напряжения сдвига системы.

Для качественного подтверждения предложенного механизма, учитывая, что в данном случае разностью плотностей дисперсной фазы и дисперсионной среды нельзя пренебречь, воспользуемся результатами работы [68]. Преобразуя полученную в [68] функцию для рассматриваемого случая, получим

$$h(c) = -\frac{\rho(c)}{2\eta(c)} + \frac{A}{1-r^2}c,$$

где $\rho(c)$ – функция плотности от концентрации. Определяют такое $c(r)$, которое, максимизируя $h(c)$, минимизирует расход жидкости. Для функции плотности от концентрации примем известное выражение

$$\rho(c) = b + (1-b)c,$$

где b – отношение плотности дисперсионной среды к плотности дисперсной фазы, а для функции вязкости от концентрации согласно [69]

$$\eta(c) = a/(a-c), \quad a > 1,$$

тогда $h(c)$ примет следующий вид:

$$h(c) = \frac{(c-a)[b+(1-b)c]}{2a} + \frac{A}{1-r^2}c.$$

Дифференцируя по c , получим

$$h'(c) = \frac{(2c-a)(1-b)+b}{2a} + \frac{A}{1-r^2}; \quad (3.38)$$

$$h''(c) = \frac{1-b}{a}.$$

Анализ (3.38) показывает, что $h(c)$ достигает максимума либо при $c=0$, либо при $c=1$. Определяя ее при этих значениях c , получим

$$h(1) = \frac{1-a}{2a} + \frac{A}{1-r^2}; \quad h(0) \equiv -\frac{b}{2}.$$

Так как $h(1)$ убывает с уменьшением r , получим ($a > b/(1-b)$)

$$c_m(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < \sqrt{1 - \frac{2aA}{a(1-b)-b}}, \\ 1 & \sqrt{1 - \frac{2aA}{a(1-b)-b}} < r < 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Для средней концентрации получим

$$F = \int_0^1 c_m(r) r dr = \frac{aA}{a(1-b)-b},$$

то есть при $A \in \left(0, \frac{a(1-b)-b}{2a}\right)$, $F \in (0, 1/2)$ наблюдается распределение

(3.39) и происходит полное расслоение системы. Следует учесть, что на практике расслоение в полной мере не реализуется, поэтому естественно предположить, что относительно малый пристенный слой ($\delta = 0,3-0,5$) будет иметь значительно большую концентрацию твердой фазы и соответственно вязкость, чем при равномерном распределении дисперсной фазы.

Для оценки изменения расхода системы представим, что имеется кольцевой режим течения двух вязкопластичных жидкостей в цилиндрической трубке, причем у стенки трубки течет вязкопластичная жидкость со структурной вязкостью η_2 и предельным напряжением сдвига τ_2 , а в центре соответственно η_1 и τ_1 , причем $\eta_2 > \eta_1$, $\tau_2 > \tau_1$. Предполагая, что радиус ядра потока относительно мал, используем упрощенный подход [70, 71], согласно которому уравнение движения вязкопластичной жидкости справедливо по всем интервалам изменения r . Скорость течения вязкопластичных жидкостей определится из известной формулы (если не оговаривается иное, используются обозначения, введенные в 2.3)

$$v_i = -\frac{\Delta P}{4l\eta_i} r^2 + \frac{\tau_i}{\eta_i} r + a_i \ln r + b_i. \quad (3.40)$$

Решая (3.40) при следующих граничных условиях:

$$v_2 = 0, r = R; \quad -\tau_2 + \eta_2 \frac{dv_2}{dr} = -\tau_1 + \eta_1 \frac{dv_1}{dr}, v_1 = v_2, r = R_0; \quad \frac{dv_1}{dr}, r = 0,$$

для общего расхода получим

$$Q = \frac{\pi \Delta P R^4}{8l\eta_1} \left\{ 1 - \frac{8\tau_1 l}{3\Delta P R} [(\varepsilon/\varepsilon_1) + S^3(1-\varepsilon/\varepsilon_1)] - (1-\varepsilon)(1-S^4) \right\}, \quad (3.41)$$

где $\varepsilon_1 = \tau_1/\tau_2$.

Анализ (3.41) показывает, что при $\varepsilon=1$, $\varepsilon_1=1$ уравнение переходит в упрощенное уравнение Букингама [70, 71]. Следует отметить, что согласно (3.42) при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ предельное напряжение сдвига системы, безусловно, больше, чем по Букингаму.

Приведенные оценки могут служить качественным подтверждением выдвинутых предположений. Таким образом, полученные результаты можно объяснить миграцией частиц дисперсной фазы к стенке трубы и от нее, что может быть использовано для регулирования структуры потока дисперсных систем при трубопроводном транспорте и в пористых средах.

Литература к главе 3

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2002. – 656 с.
2. Гийон Э., Митеску К. Д., Юлен Ж. П., Ру С. Фракталы и перколяция в пористой среде // Успехи физических наук. – 1991. – Т. 161, № 10. – С. 121–128.
3. Зосимов В. В., Тарасов Д. Н. Динамическая фрактальная структура эмульсий, обусловленная движением и взаимодействием частиц. Численная модель // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1997. – Т. 111. – Вып. 4. С. 1314–1319.
4. Katz A. J. and Thompson A. H. Fractal Sandstone Pores: Implications for Conductivity and Pore Formation // Physical Review Letters. – 1985. – V. 54. – P. 1325–1332.
5. Avnir D. and Farin D., Pfeifer P. Chemistry in non integer dimensions between two and three. II. Fractal surfaces of adsorbents // The Journal of Chemical Physics. – 1983. – V. 79, № 7. – P. 3566–3571.

6. Неймарк А. В. Термодинамический метод расчета поверхностной фрактальной размерности // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 51. – Вып. 10. – С. 535–538.
7. Черкашин Г. Ю., Дроздов В. А. Оценка фрактальной размерности дисперсных систем на основании уравнения, описывающего адсорбцию в микропорах // Журнал физической химии. – 1998. – Т. 72, № 1. – С. 88–92.
8. Хасанов М. М. Исследование движения реофизически сложных жидкостей в трубах и пористых средах // Автореферат дис. д. тех. наук. – Баку, 1992. – 34 с.
9. Chang J., Yortsos Y. C. Pressure-Transient Analysis of Fractal Reservoirs // SPE Formation Evaluation. – 1990, March. – SPE 18170. – P. 31–38.
10. Динариев О. Ю. Движение жидкостей и газов в пористых средах с фрактальной геометрией // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1992, № 5. – С. 101–109.
11. Мальшаков А. В. Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией // Инженерно-физический журнал. – 1992. – Т. 62, № 3. – С. 405–414.
12. Мейланов Р. П. К теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой // Письма в Журнал технической физики. – 1996. – Т. 22. – Вып. 23. – С. 10–12.
13. Moulu J.C., Vizika O., Kalaydjian F. and Duquerroix J-P. A new model for three-phase relative permeabilities based on a fractal representation of the porous media // SPE Formation Evaluation. – 1997. – SPE 38891.
14. Дункан Г. Методы увеличения нефтеотдачи: практика проектирования, заканчивания и эксплуатации скважин // Нефтегазовые технологии. – 1995, № 2. – С. 11–16.
15. Dake L. P. The Practice of Reservoir Engineering. – Elsevier Science Publishers, 1994. – 556 p.
16. Котяхов Ф. И. Основы физика нефтяного пласта. – М.: Гостоптехиздат, 1956. – 364 с.

17. Saffman P.G. and Taylor G. The Penetration of a Fluid into a Porous Media or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Fluid // Proc.Roy.Soc. – 1958. – A-245 (1242). – P. 312–319.
18. Lenormand Roland. Liq. Interfaces: Les Houches eole D’ete Phys. Theor. – 1988, 30 may-24 June. Sess. 48. – Amsterdam ets.: 641–643.
19. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
20. Сулейманов Б. А. Экспериментальные исследования образования фрактальных структур при вытеснении нефти // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1993, № 5. – С. 29–33.
21. Сулейманов Б. А. Экспериментальные исследования образования фрактальных структур при вытеснении несмешивающихся жидкостей на ячейке Хелле-Шоу // Инженерно-физический журнал. – 1996. – Т. 69, № 2. – С. 229–236.
22. Suleimanov B.A. Experimental Study of the Formation of Fractal Structures During Oil Displacement // Energy Sources. – 1995. – Vol. 17, № 4. – P. 477–483.
23. Нитман И., Даккор Ж., Стенли Х. Когда вязкие «пальцы» имеют фрактальную размерность // в кн.: Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988. – С. 266–281.
24. Кисиленко Б. Е. Об устойчивости водонефтяного контакта в однородной пористой среде // Прикладная механика и техническая физика. – 1961, № 6. – С. 194–195.
25. Кисиленко Б. Е. Экспериментальное изучение характера продвижения водонефтяного контакта в пористой среде // Изв.АН СССР, ОТН. Сер. «Механика и машиностроение». – 1963, № 6. – С. 80–84.
26. Рыжик В. М., Кисиленко Б. Е. Исследование устойчивости продвижения границы раздела воды и нефти в пористой среде / В кн.: Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. – М.: Недра, 1969. – С. 82–92.
27. Мосолов А. Б. Фрактальная гриффитова трещина // Журнал технической физики. – 1991. – Т. 61, вып. 7. – С. 57–60.
28. Мосолов А. Б. Фрактальный распад упругих полей при разрушении // Журнал технической физики. – 1992. – Т. 62, вып. 6. – С. 23–32.

29. Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991. – 136 с.
30. Цаллис К. Об измерении фрактальных размерностей по физическим свойствам // в книге: Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988. – С. 99–105.
31. Иванова В. С., Баланкин А. С., Бунин И. Ж., Оксогоев А. А. Синергетика и фракталы в материаловедении. – М.: Наука, 1994. – 383 с.
32. Караш О. Э. Вероятностное прогнозирование безводной добычи с помощью модели хаотично расположенных сфер // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1986, № 1. – С. 34–37.
33. Сулейманов Б. А., Аббасов Э. М., Эфендиева А. О. Стационарная фильтрация в фрактально-неоднородной пористой среде // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78, № 4. – С. 194–196.
34. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
35. Нигматулин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354–368.
36. Харин В. Т. Реология вязкоупругих тиксотропных жидкостей типа нефтей и полимерных растворов и расплавов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984, № 3. – С. 21–26.
37. Бибик Е. Е., Лавров И. С. Измерение сил сцепления частиц в агрегированных дисперсных системах // Коллоидный журнал. – 1970. – Т. 32, № 4. – С. 483–488.
38. Барань Ш., Грегори Д. Флокуляция суспензий каолина катионными полиэлектролитами // Коллоидный журнал. – 1996. – Т. 58, № 1. – С. 13–18.
39. Рейнольдс В. В. Физическая химия нефтяных растворителей. – Л.: Химия, 1967. – 184 с.
40. Маковей Н. Гидравлика бурения. – М.: Недра, 1986. – 536 с.
41. Бибик Е. Е. Реология дисперсных систем. – Л.: ЛГУ, 1981. – 128 с.

42. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. – М.: Мир, 1964. – 351 с.
43. Урьев Н. Б., Чой С. В. Реологическая характеристика структурированных дисперсий, проявляющих дилатантные свойства // Коллоидный журнал. – 1996. – Т. 58, № 6. – С. 862–864.
44. Сулейманов Б. А. О фильтрации дисперсных систем в неоднородной пористой среде // Коллоидный журнал. – 1995. – Т. 57, № 5. – С. 743–746.
45. Панахов Г. М., Сулейманов Б. А. Особенности течения суспензий и нефтяных дисперсных систем // Коллоидный журнал. – 1995. – Т. 57, № 3. – С. 386–390.
46. Зубов П. И., Липатов Ю. С., Каневская Е. А. О зависимости конформации полимерной цепи в растворе от концентрации раствора // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 141, № 3. – С. 387–388.
47. Сулейманов Б. А. О влиянии взаимодействия частиц дисперсной фазы на реологию фрактально-неоднородных дисперсных систем // Коллоидный журнал. – 2004. – Т. 66, № 2. – С. 283–286.
48. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
49. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания в радиофизике и гидродинамике. Эксперименты и модели // В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. – Горький: ИПФ АН СССР, 1980. – С. 5–23.
50. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 320 с.
51. Урьев Н. Б. Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов. – М.: Химия, 1988. – 256 с.
52. Свалов А. М. Об одной модели тиксотропных систем // Коллоидный журнал. – 1987. – Т. 49, № 4. – С. 799–802.
53. Quemada D. Rheological modeling of complex fluids. I. The concept of effective volume friction revisited // Eur. Phys. J.AP. – 1998. – V. 1. – P. 119–127.

54. Харин В. Т. Интерпретация данных ротационной вискозиметрии вязкоупругих тиксотропных жидкостей // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 293, № 4. – С. 823–827.
55. Сулейманов Б. А., Аббасов Э. М. Кинетический подход к реологии неоднородных систем с учетом взаимодействия частиц дисперсной фазы // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 90–97.
56. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
57. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
58. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
59. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
60. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
61. Калашников В. Н. Течение растворов полимеров по трубам с переменным сечением. – М.: ИПМ АН СССР, 1980. – 50 с.
62. Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Ентов В. М., Рыжик В. И. Реологические проблемы нефтегазоотдачи. – М.: ВНИИОЭНГ, 1986. – 53 с.
63. Мирзаджанзаде А. Х., Караев А. К., Ширинзаде С. А. Гидравлика в бурении и цементировании нефтяных и газовых скважин. – М.: Недра, 1977. – 230 с.
64. Панахов Г. М. Разработка и внедрение новых композитных систем в нефтегазодобыче. Дисс. ... доктора техн. наук. – Баку, 1995. – 270 с.
65. Сюняев З. И. Сюняев Э. З. Сафиева Р. З. Нефтяные дисперсные системы. – М.: Химия, 1990. – 224 с.
66. Голдсмит Г. Микрореология суспензий эритроцитов человека // Механика. – 1973, № 6. – С. 69–93.
67. Павловский Ю. Н. О пристеночном эффекте // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967, № 2. – С. 160–165.

68. Аббасов А. А. Исследование некоторых обратных задач процессов теплопереноса в системе пласт–скважина // Дис. ... канд. техн. наук. – Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1990. – 120 с.
69. Перри Дж. Справочник инженера-химика. Т. 1. пер. с англ. – М.: Химия, 1969. – 624 с.
70. Мирзаджанзаде А. Х., Сеид-Рза М. К. Гидравлика глинистых и цементных растворов. – М.: Недра, 1966. – 298 с.
71. Шищенко Р. И. Есьман Б. И. Практическая гидравлика в бурении. – М.: Недра, 1966. – 318 с.

Глава 4

Исследование волновых процессов при вибровоздействии на пластовую систему

Длительная работа добывающих скважин на определенном режиме эксплуатации приводит в конечном итоге к кольматации призабойной зоны и снижению ее проницаемости. Такое загрязнение, связанное с выносом минеральных частиц из удаленных зон пласта, интенсивным выделением растворенного газа, отложением неорганических солей и т. д. приводит в конечном итоге к снижению дебита скважин.

Существующие методы обработки призабойной зоны скважин можно условно разбить на три группы:

- механические – установка газовых якорей [1], пакеров, применение различных очистных поршней и т. д.;
- физико-химические – применение растворов кислот, ПАВ [2, 3] и т. д.
- физические – акустическое [4,5], вибровоздействие [6], электро- и магнитное [7–11] и т. д.

Недостатком механических методов является применение дорогостоящего оборудования и необходимость проведения трудоемких технологических операций при кратковременности эффекта. Физико-химические методы, получившие наибольшее распространение в нефтяной промышленности, также имеют ряд недостатков, связанных с использованием токсичных, коррозионно-агрессивных, дорогостоящих химреагентов. Наиболее перспективными представляются физические методы, основанные на применении относительно дешевых приспособлений, обеспечивающих эффективную обработку призабойной зоны. Вместе с тем для повышения эффективности физического воздействия необходимо проведение исследований с учетом реофизических характеристик пористых сред и насыщающих их жидкостей.

В связи с этим в данной главе приведены экспериментальные и теоретические исследования виброволнового воздействия в различных средах.

4.1. Экспериментальные исследования виброволнового воздействия на процесс восстановления фильтрационных характеристик пористых сред

Лабораторные опыты проводились на установке [12], схема которой приведена на рис. 1.6.

- Эксперименты проводились по следующему плану:
- колонка высокого давления, представляющая собой полый стальной цилиндр, обклеенный изнутри кварцевым песком, с длиной рабочей части 1,1 м и внутренним диаметром 0,032 м, путем вертикальной вибрационной трамбовки заполнялась кварцевым песком;
 - после обвязки экспериментальной установки согласно схеме (рис. 1.6) по известной методике определяли объем пор и проницаемость по воздуху;
 - при непрерывном термостатировании ($T = 303 \text{ }^\circ\text{K}$) производилось вакуумирование установки;
 - в бомбу PVT, объем которой составлял $3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ($T = 323 \text{ }^\circ\text{K}$), подавали заранее приготовленную модель нефти (трансформаторное масло), содержащую мехпримеси и парафин в концентрации 10%;
 - посредством дозаторного насоса рабочая жидкость под вакуумом подавалась в модель пласта;
 - производилась фильтрация исследуемой системы в модели пласта, в процессе которой определяли зависимость расхода жидкости от безразмерного объема прокачки, при этом контроль давления на входе и выходе колонки осуществлялся при помощи датчиков и образцовых манометров, а поддержание давления на заданном уровне обеспечивал регулятор давления (контактный манометр), установленный после дозаторного насоса.

Для исключения влияния окклюдированного газа (который имеется в пористой среде даже после тщательного вакуумирования) на результаты экспериментов на выходе колонки поддерживалось постоянное давление 2,0 МПа. Эксперимент проводился в пористой среде, сложенной кварцевым песком фракции $0,314 - 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, с проницаемостью $0,7 \text{ мкм}^2$, при перепаде давления $\Delta P = 1 \text{ МПа}$. Результаты приведены на рис. 4.1, из которого

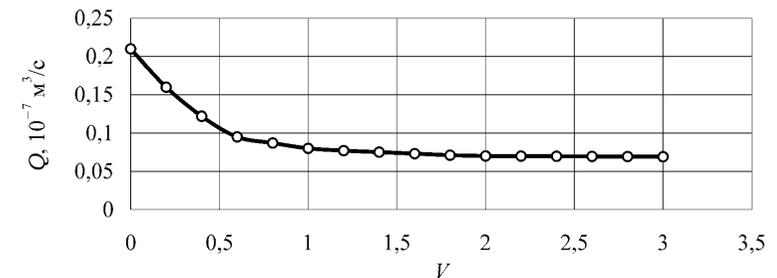


Рис. 4.1. Динамика расхода жидкости при фильтрации модели нефти

видно, что после прокачки двух поровых объемов расход жидкости стабилизируется на уровне практически в три раза меньше, чем первоначальный.

После проведения указанного опыта вход и выход колонки с пористой средой менялся местами, т. к. после прокачки рабочей жидкости механические примеси и парафин отложились в основном вблизи входа колонки, который в дальнейшем служил моделью загрязненной призабойной зоны.

Далее на выходе колонки создавали колебания расхода различной амплитуды ($A = Q/Q_0 = 1,0 - 5,0$, где Q_0 , Q – соответственно первоначальный и создаваемый расход жидкости) и частоты ($\omega = 10^{-3} - 10^{-1} \text{ с}^{-1}$) при первоначальном уровне давления на выходе колонки 2,0 МПа, на входе 3,0 МПа и различных перепадах давления 1,0–5,0 МПа. При этом продолжительность процесса воздействия изменялась в интервале 600–21600 с. После воздействия возобновляли фильтрацию при прочих равных условиях и определяли зависимость расхода жидкости от безразмерного порового объема.

Как известно, степень влияния физического воздействия определяется не отдельно по амплитуде и частоте колебаний, а по обобщающему параметру – ускорению колебаний [13, 14] $A\omega^2$.

В связи с этим эксперименты проводились при различных значениях: $A\omega^2 = 1,5 \cdot 10^{-6} - 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-2}$. Результаты экспериментов при $A\omega^2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$; $2,0 \cdot 10^{-4}$; $5,0 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$ приведены на рис. 4.2 (Q_1 – расход жидкости после физического воздействия).

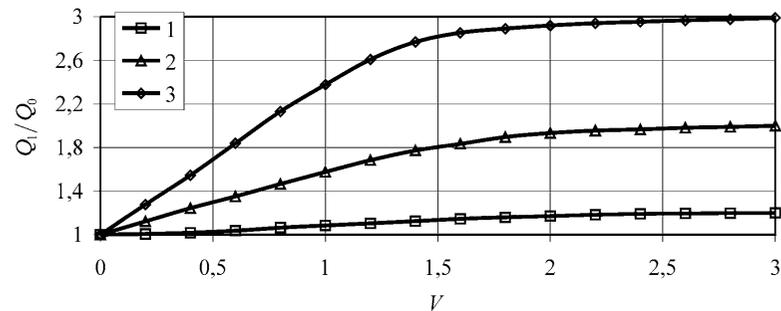


Рис. 4.2. Зависимость прироста расхода жидкости от безразмерного порового объема прокачки при различных значениях $A\omega^2$ (с^{-2}): 1 – $1,5 \cdot 10^{-2}$; 2 – $2 \cdot 10^{-4}$; 3 – $5 \cdot 10^{-6}$

Как видно из рисунка, с уменьшением $A\omega^2$, при прочих равных условиях, эффект от физического воздействия возрастает. Так, после прокачки

ки 3 поровых объемов жидкости при $A\omega^2 = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-2}$ первоначальный расход жидкости восстанавливается на 10%, при $A\omega^2 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-2}$ на 50%, а при $A\omega^2 = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$ практически полностью.

Объем проведенных экспериментов позволяет построить общую зависимость прироста расхода жидкости Q_1/Q_0 от амплитуды и частоты воздействия. В связи с этим полученные результаты описывались зависимостью [14]: $Q_1/Q_0 = KA^n \omega^m$.

Очевидно, что указанная зависимость спрямляется в логарифмических координатах $\lg(Q_1/Q_0) - \lg(A^n \omega^m)$. На рис. 4.3 приведены результаты перестройки экспериментальных данных в логарифмических координатах

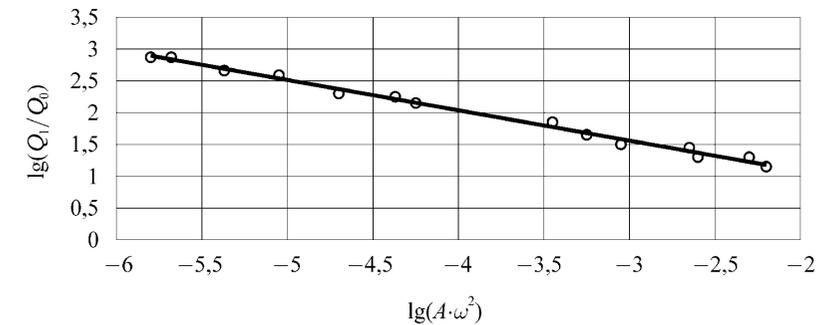


Рис. 4.3. Зависимость прироста расхода жидкости от ускорения колебаний в логарифмических координатах

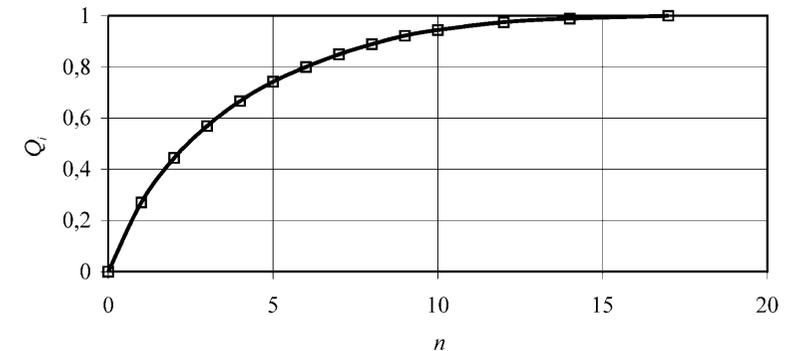


Рис. 4.4. Влияние циклов обработки на эффективность воздействия

натах при $K=0,477 \text{ с}^2$, $n=1$ и $m=2$. Как видно из рисунка, результаты экспериментов хорошо описываются предложенной зависимостью, которая может быть использована для выбора оптимальных условий физического воздействия.

Далее было определено влияние циклов воздействия на эффективность процесса. На рис. 4.4 показана зависимость эффективности воздействия Q_i ($Q_i = (Q_i/Q_0)_{\max} / (Q_i/Q_0)_i$; где $(Q_i/Q_0)_{\max}$, $(Q_i/Q_0)_i$ – максимальное и текущее значения прироста расхода жидкости). Как видно из рисунка, увеличение числа циклов больше 10 не приводит к увеличению эффекта от физического воздействия.

4.2. Виброволновое воздействие на систему пласт–скважина

Одним из эффективных методов интенсификации добычи нефти является виброволновое воздействие на призабойную зону пласта [15–19]. Для этого на потоке добываемой жидкости устанавливается пульсатор, который создает упругие волны, воздействующие на пласт. Упругие волны способствуют развитию микротрещин в нефтяных пластах, а также влияют на реологические свойства жидкости [15, 16]. Вместе с тем механизм вибровоздействия достаточно сложен и мало изучен.

Этой проблеме посвящены работы ряда авторов [15–19]. Однако в этих работах исследования проводились без учета динамики движения жидкости в системе пласт–скважина. Учет этого фактора приобретает особое значение, когда вибровоздействие на пласт оказывается с устья. Данный раздел посвящен исследованию распространения упругих волн при вибровоздействии и его влияние на гидродинамические процессы в системе пласт–скважина [20].

Рассмотрим движение ньютоновской жидкости в насосно-компрессорных трубах (НКТ). На устье скважины установлен пульсатор, башмак НКТ находится у фильтра (рис. 4.5). Волны, созданные пульсатором, можно представить в виде ступенчатой функции (рис. 4.6). В идеальном случае можно принять их в форме, показанной на рис. 4.6 а. Поместим начало координатной оси x в нижнем сечении насосно-компрессорных труб (рис. 4.5), тогда уравнение, описывающее движение жидкости в НКТ без учета инерции стенок, но с учетом инерции пульсатора (рис. 4.6 б) будет иметь вид [20, 21]

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{G_0}{f} c^2 \delta(x-\ell)(x-2a) \times \\ \times e^{-\alpha t} \sum_{v=1}^N \{ H[t - (v-1)(T + \tau)] - H[t - (v\tau + (v-1)T)] \} - \\ - \frac{G_0}{f} c^2 \delta(x-\ell) e^{-\alpha t} \sum_{v=1}^N \{ \delta[t - (v-1)(T + \tau)] - \delta[t - (v\tau + (v-1)T)] \}. \quad (4.1)$$

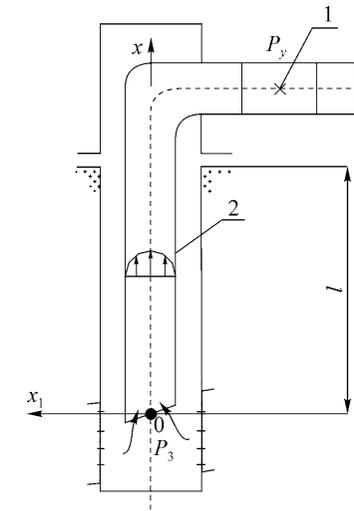


Рис. 4.5. Схема расчета влияния вибровоздействия на систему пласт–скважина: 1 – пульсатор, 2 – насосно-компрессорные трубы

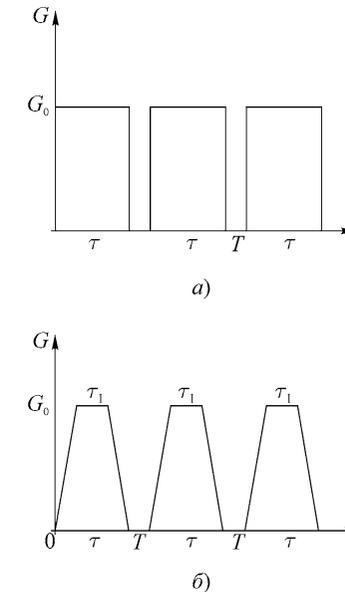


Рис. 4.6. Формы импульсов: а – в идеальном случае, б – с учетом инерции пульсатора

Начальные и граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} P_1(x;0) &= P_3^0 - \frac{P_3^0 - P_y}{\ell} x - \frac{2aG_0}{f} (\ell - x) \\ \frac{\partial P_1(x,0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = \left(-\frac{P_3^0 - P_y}{\ell} + \frac{2aG_0}{f} \right) e^{-\alpha x} \right\} \quad (4.3)$$

$$P_1(x,t) \Big|_{x=0} = P_3, \quad (4.4)$$

Дифференциальное уравнение пьезопроводности для прямолинейно-параллельного потока жидкости в пласте имеет вид [21–24]

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial P_2}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Начальные и граничные условия

$$P_2(x_1;0) = P_n, \quad (4.6)$$

$$P_2(x_1,t) \Big|_{x_1=\ell_1} = P_n, \quad (4.7)$$

$$P_2(x_1;t) \Big|_{x_1=0} = P_3, \quad (4.8)$$

$$2a = \left(\frac{\lambda \vartheta}{8\delta_0} \right),$$

где P_1 – давление в любом сечении потока жидкости в НКТ; c – скорость звука в данной среде; λ – коэффициент сопротивления трению между наружной поверхностью жидкости и стенкой НКТ; δ_0 – гидравлический радиус потока; ϑ – осредненная скорость потока по поперечному сечению НКТ; x и x_1 координаты; t – время; P_n, P_3, P_y – соответственно пластовое, забойное и устьевое давление; P_2 – давление жидкости в любой точке пласта; δ – функция Дирака, f – площадь поперечного сечения НКТ; G_0 – начальный массовый расход жидкости; χ – коэффициент пьезопроводности; P_3^0 – начальное забойное давление; ℓ – длина НКТ; ℓ_1 – длина пласта; α – коэффициент, учитывающий инерцию пульсатора; H – функция Хевисайда.

Применяя метод Фурье, преобразование Лапласа, теорему обращения и свертки, интеграл Дюамеля, приняв $\tau = T = \frac{T_1}{2}$ (рис. 4.6 а) и оставив только вынужденную часть колебания из (4.1) с учетом (4.2)–(4.4) и из (4.5)

с учетом (4.6)–(4.8) при условии равенства расходов

$$\frac{f}{2a} \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \rho b h \frac{k}{\eta} \frac{\partial P_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0},$$

после преобразований получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{f} \frac{k \rho b h}{\eta} \left[\sum_{v=1}^{\infty} \frac{2\pi\chi v^2 \pi^2}{\ell_1^4} \int_0^t P_3(t-\tau) e^{-\frac{v^2 \pi^2}{\ell_1^2} \chi \tau} d\tau \right] - \\ & - \frac{2}{\ell} \sum_{i=1,3,\tau\dots 0}^t \int_0^t \dot{P}_3 e^{-a(t-\tau)} \left[\cos \omega_i(t-\tau) - \frac{a}{\omega_i} \sin \omega_i(t-\tau) \right] d\tau + \\ & + \frac{4a}{\ell} \sum_{i=1,3,\tau\dots 0}^t \int_0^t P_3 \cdot e^{-a(t-\tau)} \left[\cos \omega_i(t-\tau) - \frac{a}{\omega_i} \sin \omega_i(t-\tau) \right] d\tau = \\ & = - \frac{2ak\rho b h}{f\eta} P_n \left(\frac{e^{-\frac{\ell_1^2}{\chi t}}}{\sqrt{\pi\chi t}} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2e^{-\frac{v^2 \ell_1^2}{\chi t}}}{\sqrt{\pi\chi t}} \right) + \frac{G_0}{f} c^2 (\alpha - 2a) \sum_{i=1,3,\tau\dots} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{i^2 \pi^2}{4\ell^2} \times \\ & \times \left[- \frac{\omega_i}{(\alpha - a)^2 + \omega_i^2} \left(1 + e^{-\frac{aT_1}{2}} \right) \left(\frac{a - \alpha}{\omega_i} \sin \omega_i t + \cos \omega_i t \right) \sum_{v=1}^N e^{-a \left[t - (2v-1) \frac{T_1}{2} \right]} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_i}{(\alpha - a)^2 + \omega_i^2} \left(1 - e^{-\frac{aT_1}{2}} \right) \sum_{v=1}^N e^{-\left[t - (2v-1) \frac{T_1}{2} \right]} \right] - \\ & - \frac{G_0 \cdot c^2}{f \ell^2} \sum_{i=1,3,\tau\dots} i\pi (-1)^{\frac{i-1}{2}} e^{-at} \sin \omega_i t \left[1 + e^{-\frac{(\alpha-a)T_1}{2}} \right] \sum_{v=1}^N e^{-\frac{(\alpha-a)(2v-1)T_1}{2}}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

где \dot{P}_3 – производная забойного давления по времени.

При малых значениях α с учетом одного члена ряда из (4.9) получим

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{f} \frac{k \rho b h}{\eta} \left[\frac{2a\chi\pi^2}{\ell_1^2} \int_0^t P_3(t-\tau) e^{-\frac{\pi^2}{\ell_1^2} \chi \tau} d\tau \right] - \\ & - \frac{2}{\ell} \int_0^t \dot{P}_3 e^{-a(t-\tau)} \left[\cos \omega_1(t-\tau) - \frac{a}{\omega_1} \sin \omega_1(t-\tau) \right] d\tau + \\ & + \frac{4a}{\ell} \int_0^t P_3 e^{-a(t-\tau)} \left[\cos \omega_1(t-\tau) - \frac{a}{\omega_1} \sin \omega_1(t-\tau) \right] d\tau = - \frac{2ak\rho b h}{f\eta} P_n \frac{3e^{-\frac{\ell_1^2}{\chi t}}}{\sqrt{\pi\chi t}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{G_0}{f} c^2 (\alpha - 2a) \cdot \frac{\pi^2}{4\ell^2} \left[-\frac{\omega_1}{(\alpha - a)^2 + \omega_1^2} \cdot \left(\frac{a - \alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right) \cdot 2N \cdot e^{-at} \right] - \frac{G_0 c^2 \pi}{f \ell^2} \cdot e^{-at} \cdot 2N \sin \omega_1 t, \quad (4.10)$$

где k, b, h – соответственно коэффициент проницаемости, ширина и мощность пласта; η, ρ – соответственно коэффициент динамической вязкости,

плотность жидкости, $\omega_i = \sqrt{\frac{i^2 \pi^2 c^2}{4\ell^2} - a^2}$ – частота собственных колебаний

потока жидкости в НКТ, $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\omega_1}$ – полупериод первого тона колебаний, N – число циклов пульсатора.

Интегральное уравнение (4.10), решается с применением преобразования Лапласа, теоремы свертки, обращения и интеграла Дюамеля [24].

Как показывает решение (4.10) пульсирующая составляющая P_3 во многом зависима от значений коэффициента a и действительных частей корней α_1 и α_2 уравнения

$$S^3 - \frac{\ell}{2} \left(a_1 + \frac{4a}{\ell} - \frac{2\pi\chi}{\ell_1^2 \ell} \right) S^2 - \left(aa_1 + \frac{2a\pi^2\chi}{\ell_1^2 \ell} \right) \ell S - \frac{\ell}{2} (a_1 a^2 + a_1 \omega_1^2) = 0,$$

$$\text{где } a_1 = \frac{4ak\pi^3\chi\rho bh}{f\eta\ell_1^3}.$$

Причем при режиме работы пульсатора с периодом воздействия (рис. 4.6), равным половине периода собственных колебаний жидкости $T = \tau = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\omega_1}$, в зависимости от значений параметров системы может произойти асимптотическое нарастание, убывание или предельный цикл амплитуды пульсирующей составляющей P_3 .

Решение уравнения (4.10) показывает, что в данном режиме вибро-воздействия амплитуда пульсирующей составляющей P_3 получается равной $2N \cdot e^{-at}$, $2Ne^{-\alpha_1 t}$ и $2Ne^{-\alpha_2 t}$. Причем, с одной стороны, число циклов N со временем растет, а с другой стороны – выражения e^{-at} , $e^{-\alpha_1 t}$ и $e^{-\alpha_2 t}$ убывают. А их произведение в зависимости от значений параметров системы, как и показано выше, либо растет, либо убывает, либо имеет место предельный цикл.

Число циклов за время t может быть определено по формуле

$$N = \frac{t}{T_1}. \quad (4.11)$$

Если принять во внимание, что $\frac{\pi^2 c^2}{4\ell^2} \gg a^2$, то получим

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\ell}{c}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.11), получим $N = \frac{ct}{4\ell}$, тогда амплитуда пульсирующей составляющей P_3 составит

$$a(t) = \frac{ct}{4\ell} e^{-at}, \quad a(t) = \frac{ct}{4\ell} e^{-\alpha_1 t} \quad \text{и} \quad a(t) = \frac{ct}{4\ell} e^{-\alpha_2 t}. \quad (4.13)$$

Предельный цикл получится в том случае, если

$$a(t) = \text{const}. \quad (4.14)$$

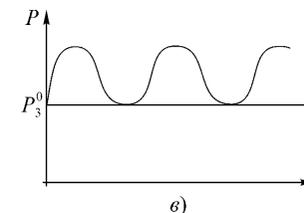
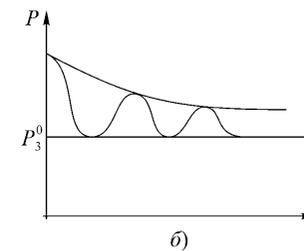
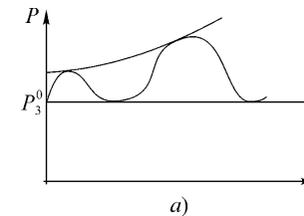


Рис. 4.7. Динамика изменения пульсирующей составляющей забойного давления: а – асимптотическое нарастание, б – асимптотическое убывание, в – предельный цикл

В каждом конкретном случае по формулам (4.13) можно определить, какой именно из случаев, асимптотически нарастающий (рис. 4.7 а), убывающий (рис. 4.7 б) или предельный (рис. 4.7 в) будет иметь место в данном случае.

Из условия (4.14) можно определить значения параметров системы, при которых наступает предельный цикл. Наиболее длительный эффект может быть получен именно при таком режиме воздействия на пласт, так как пульсирующая составляющая забойного давления, определяющая эффективность воздействия на призабойную зону и пласт в период работы пульсатора, будет иметь одинаковую по модулю амплитуду. Поэтому созданные пульсатором упругие волны успеют проникнуть в более глубокие зоны пласта.

В случае когда происходит асимптотическое наращивание пульсирующей составляющей забойного давления (рис. 4.7а) может произойти гидроразрыв пласта. Такой режим вибровоздействия может быть полезным для интенсификации добычи нефти из низкопроницаемых коллекторов.

Таким образом, полученные формулы (4.10), (4.13) и (4.14) позволяют согласовать частоты вибровоздействия с параметрами системы и достичь усиления их воздействия на призабойную зону пласта, а также рационально использовать внутреннюю энергию жидкости.

4.3. Виброволновое воздействие в процессе фильтрации газированной жидкости

В данном параграфе рассмотрено виброволновое воздействие в процессе фильтрации газированной жидкости при давлении выше и ниже давления насыщения (исследование выполнено в соавторстве с Э.М. Аббасовым).

4.3.1. Фильтрация квазигомогенной газированной жидкости с учетом эффекта проскальзывания

Рассмотрим упрощенную модель и различные случаи пульсации дебита жидкости скважины, создаваемые генератором (рис. 4.8).

Предположим, что проницаемость пласта зависит от давления. Тогда распределение давления в плоскорадиальном пласте описывается уравнением пьезопроводности [25] (если не оговаривается иное, используются обозначения, принятые в 2.4.3 и 4.2)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\chi(P) r \frac{\partial P}{\partial r} \right]. \quad (4.15)$$

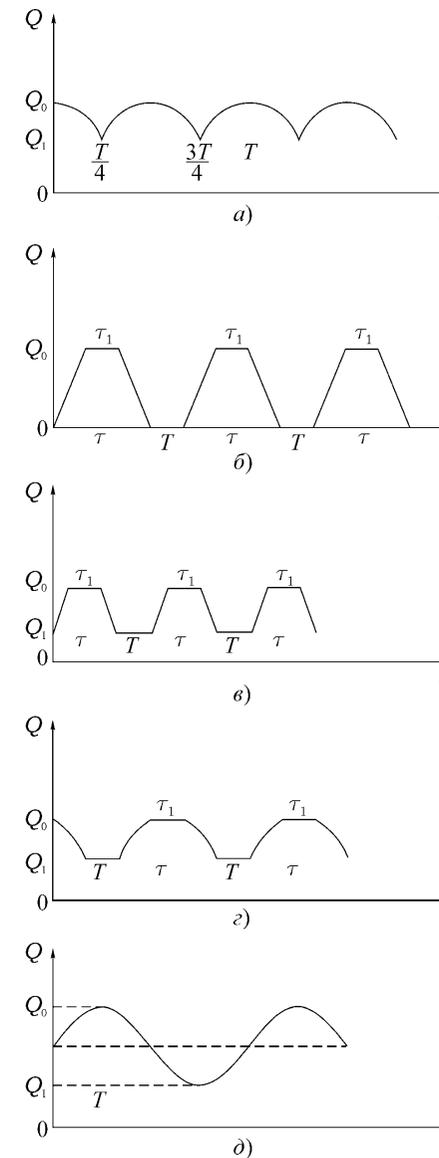


Рис. 4.8. Формы упругих волн

Начальные и граничные условия:

$$P|_{r=0} = P_s, \quad (4.16)$$

$$\left. \begin{aligned} P|_{r=R_k} &= P_k \\ 2\pi r h \frac{k}{\eta} \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_c} &= Q(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Для решения нелинейной краевой задачи (4.15) применим преобразование Кирхгофа [26]

$$\theta = \frac{1}{\chi_0} \int_0^P \chi(P) dP. \quad (4.18)$$

Из (4.15) с учетом (4.18) получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]. \quad (4.19)$$

Усредняя $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ по r , получим

$$\varphi(t) = \frac{2}{R_k^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_k} \frac{\partial \theta}{\partial t} r dr. \quad (4.20)$$

В главе 2 на основе экспериментальных исследований показано, что вблизи (выше) давления насыщения образование поверхностных газовых зародышей приводит к эффекту проскальзывания. Как показано выше (см. 2.4.1), эффективная проницаемость в этом случае может быть определена по формуле

$$k(P) = k_0 \left[1 + \frac{4b(P)}{R} \right]. \quad (4.21)$$

Далее рассмотрен фильтрационный процесс выше давления насыщения с учетом эффекта проскальзывания.

Линеаризуя полученные в работе [2] результаты (см. также 2.4.3), для пьезопроводности получим

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{k_0}{\eta \beta^*} \left[1 + \frac{4}{R} a(P - P_c) \right] \quad P_c \leq P \leq P_m \\ \chi &= \frac{k_0}{\eta \beta^*} \left[1 + \frac{1}{R} a(P_s - P) \right] \quad P_m \leq P \leq P_s \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Из (4.18) с учетом (4.22) получим

$$\left. \begin{aligned} \theta &= P + \frac{2a}{R} \left[(P - P_c)^2 - P_c^2 \right] \quad P_c \leq P \leq P_m \\ \theta &= P + \frac{a}{2R} \left[P_s^2 - (P_s - P)^2 \right] \quad P_m \leq P \leq P_s \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Давление представим в виде

$$P = P_{cm} + P_\phi, \quad (4.24)$$

где $P_{cm} = P_k + \frac{\eta Q_0}{2\pi k_0 h} \ln \frac{r}{R_k}$, Q_0 – верхнее предельное (начальное) значение дебита скважины.

Подставляя (4.24) в (4.23) и линеаризуя его, получим

$$\theta = P_{cm} + P_\phi + \frac{2a}{R} \left[\left(1 + \frac{2P_\phi}{P_{cm}} \right) P_{cm}^2 - 2P_{cm}P_c - 2P_cP_\phi \right] \quad P_c \leq P \leq P_m, \quad (4.25)$$

$$\theta = P_{cm} + \Delta P + \frac{a}{2R} \left[- \left(1 + \frac{2\Delta P}{P_{cm}} \right) P_{cm}^2 + 2P_sP_{cm} + 2P_s\Delta P \right] \quad P_m \leq P \leq P_s.$$

Граничное условие (4.17) с учетом (4.21) и (4.25) примет вид

$$\frac{k(P)}{\eta} 2\pi h r_c \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = \frac{k_0}{\eta} 2\pi h r_c \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_c}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.20) в (4.19) и интегрируя его с учетом (4.16), (4.17) и (4.26), получим

$$\theta = \theta_k + \frac{\varphi(t)}{2\chi_0} (r^2 - R_k^2) - \frac{\varphi(t)}{2\chi_0} r_c^2 \ln \left(\frac{r}{R_k} \right) + \frac{\eta Q(t)}{2\pi h k_0} \ln \frac{r}{R_k}, \quad (4.27)$$

где $\theta_k = P_k + \frac{2a}{R} [(P_k - P_c)^2 - P_c^2]$ $P_c \leq P \leq P_m$,

$$\theta_k = P_k + \frac{a}{2R} [P_s^2 - (P_s - P_k)^2] \quad P_m \leq P \leq P_s.$$

Тогда из (4.20) с учетом (4.27) и пренебрегая r_c^2 , будем иметь

$$\dot{\varphi} + \frac{4\chi_0}{R_k^2} \varphi = - \frac{\dot{Q}(t)}{\pi \beta^* h R_k^2}. \quad (4.28)$$

Следует отметить, что при постоянном значении проницаемости пласта k_0 дифференциальное уравнение для φ получится в том же виде, что и (4.28). Интегрируя (4.28), можем найти распределение давления по

пласту при различных случаях изменения $Q(t)$. Для каждого случая аналитическое выражение $Q(t)$ можно представить в виде (соответственно рис. 4.8 а, в, з, д)

$$Q = Q_1 + (Q_0 - Q_1) \left| \cos \frac{2\pi}{T_1} t \right|, \quad (4.29)$$

$$Q = \left\{ \frac{2(Q_0 - Q_1)}{\tau - \tau_1} t \left[H(t) - H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) \right] + (Q_0 - Q_1) \left[H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) - H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \right] + \left[\frac{2(Q_0 - Q_1)}{\tau - \tau_1} (\tau - t) \right] \left[H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) - H(t - \tau) \right] \right\} \times \left\{ H[t - (v-1)(T+t)] - H[t - (v\tau + (v-1)T)] \right\} + Q_1, \quad (4.30)$$

$$Q = \left\{ (Q_0 - Q_1) \sin\left(\frac{\pi}{\tau - \tau_1} t\right) \left[H(t) - H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) \right] + (Q_0 - Q_1) \left[H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) - H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \right] + (Q_0 - Q_1) \cos\left[\frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right)\right] \left[H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) - H(t - \tau) \right] \right\} \times \left\{ H[t - (v-1)(T+t)] - H[t - (v\tau + (v-1)T)] \right\} + Q_1, \quad (4.31)$$

$$Q = Q_1 + \frac{Q_0 - Q_1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right), \quad (4.32)$$

где Q_1 – нижнее предельное значение дебита скважины, T_1 – период колебания; τ, τ_1, T – времена, характеризующие пульсации дебита жидкости (см. рис. 4.8).

Интегрируя (4.28), получим

$$\varphi = \exp\left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t\right) \times \left[-\frac{Q(t)}{\pi\beta^* h R_k^2} \exp\left(\int \frac{4\chi_0}{R_k^2} dt\right) + \frac{1}{\pi\beta^* R_k^2} \int Q(t) \frac{4\chi_0}{R_k^2} \exp\left(\frac{4\chi_0}{R_k^2} t\right) dt + C_1 \right]. \quad (4.33)$$

Полученная формула (4.33) позволяет определить φ и вместе с тем и распределение давления в пласте для любой из функций воздействия, определяемых (4.29)–(4.32). Для примера рассмотрим функцию (4.32). Тогда из (4.28) с учетом (4.16), (4.27), (4.32) и (4.33) получим

$$\theta = \theta_k + \frac{r^2 - R_k^2}{2\chi_0} \left[-\frac{Q_0 - Q_1}{2\pi\beta^* h R_k^2} \cos \omega t + \frac{Q_0 - Q_1}{2} \frac{4\chi_0}{R_k^4 \pi\beta^* h} \frac{\omega}{16\chi_0^2 + \omega^2} \left(\frac{4\chi_0}{R_k^2} \frac{1}{\omega} \cos \omega t + \sin \omega t \right) \right] + \frac{\eta}{2\pi h k_0} \times \left(\frac{Q_0 - Q_1}{2} \cos \omega t + Q_1 \right) \ln \frac{r}{R_k} + \frac{r^2 - R_k^2}{2\chi_0} \exp\left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t\right) \left[\frac{(\theta_k - \theta_s) 2\chi_0}{R_k^2} + \frac{2(Q_0 + Q_1)}{\pi\beta^* h R_k^2} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4\chi_0^2}{R_k^4} \frac{1}{\omega^2 + \frac{16\chi_0^2}{R_k^4}} \right) + \frac{Q_0 + Q_1}{2\beta^* \pi h R_k^2} \ln \frac{r_c}{R_k} \right]. \quad (4.34)$$

Забойное давление можно найти из (4.34). В отсутствие проскальзывания ($P > P_s$) оно определяется из уравнения

$$P_s = P_k + \frac{Q_0 - Q_1}{4\pi\beta^* h \chi_0} \cos \omega t - \frac{Q_0 - Q_1}{4} \frac{4}{\pi\beta^* h R_k^2} \frac{\omega}{16\chi_0^2 + \omega^2} \left(\frac{4\chi_0}{R_k^2} \frac{1}{\omega} \cos \omega t + \sin \omega t \right) + \frac{\eta}{2\pi h k_0} \left(\frac{Q_0 - Q_1}{2} \cos \omega t + Q_1 \right) \ln \frac{r_c}{R_k} - (P_k - P_s) \exp\left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t\right) + \frac{Q_0 + Q_1}{\pi\beta^* h \chi_0} \exp\left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t\right) \frac{\omega^2}{4\left(\omega^2 + \frac{16\chi_0^2}{R_k^4}\right)} - \frac{\ln \frac{r_c}{R_k}}{4\beta^* \pi h \chi_0} (Q_0 + Q_1) \exp\left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t\right). \quad (4.35)$$

При $P_c \leq P \leq P_m$ распределение давления по пласту (из (4.23) с учетом (4.22)) определяется уравнением

$$P = \frac{\frac{2a}{R} P_{cm}^2}{1 + \frac{4a}{R} (P_{cm} - P_c)} + \frac{1}{1 + \frac{4a}{R} (P_{cm} - P_c)} \theta, \quad (4.36)$$

а при $P_m \leq P \leq P_s$ – уравнением

$$P = \frac{-\frac{a}{2R} P_{cm}^2}{1 + \frac{a}{R} (P_s - P_{cm})} + \frac{1}{1 + \frac{a}{R} (P_s - P_{cm})} \theta. \quad (4.37)$$

Забойное давление может быть определено из (4.36) и (4.37) с учетом (4.34), и соответствующие уравнения имеют следующий вид:

при $P_c \leq P \leq P_m$

$$P_s = \frac{\frac{2a}{R} P_{cm}^2}{1 + \frac{4a}{R} (P_{cm} - P_m)} + \frac{1}{1 + \frac{4a}{R} (P_{cm} - P_m)} \left\{ P_k + \frac{2a}{R} \left[(P_k - P_c)^2 - P_c^2 \right] + \frac{r_c^2 - R_k^2}{2\chi_0} \times \right. \\ \times \left[\frac{Q_0 - Q_1}{2\pi\beta^* h R_k^2} \cos \omega t + \frac{Q_0 - Q_1}{2} \frac{4\chi_0}{R_k^4 \pi \beta^* h 16\chi_0^2 / R_k^4 + \omega^2} \left(\frac{4\chi_0}{R_k^2} \frac{1}{\omega} \cos \omega t + \sin \omega t \right) \right] + \\ \left. + \frac{\eta}{2\pi h k_0} \left(\frac{Q_0 - Q_1}{2} \cos \omega t + Q_1 \right) \ln \frac{r_c}{R_k} \right] + \frac{r_c^2 - R_k^2}{2\chi_0} \exp \left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t \right) \times \\ \times \left[\frac{(\theta_k - \theta_s) 2\chi_0}{R_k^2} + \frac{2(Q_0 + Q_1)}{\pi\beta^* h R_k^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{4\chi_0^2}{R_k^4} \frac{1}{\omega^2 + \frac{16\chi_0^2}{R_k^4}} \right) + \frac{Q_0 + Q_1}{2\beta^* \pi h R_k^2} \ln \frac{r_c}{R_k} \right], \quad (4.38)$$

где $\theta_k = P_k + \frac{2a}{R} \left[(P_k - P_c)^2 - P_c^2 \right]$, $\theta_s = P_s + \frac{2a}{R} \left[(P_s - P_c)^2 - P_c^2 \right]$,

при $P_m \leq P \leq P_s$

$$P_s = \frac{\frac{2a}{R} P_{cm}^2}{1 + \frac{4a}{R} (P_s - P_{cm})} + \frac{1}{1 + \frac{4a}{R} (P_s - P_{cm})} \left\{ P_k + \frac{2a}{R} \left[P_s^2 - (P_s - P_k)^2 \right] + \frac{r_c^2 - R_k^2}{2\chi_0} \left[\frac{Q_0 - Q_1}{2\pi\beta^* h R_k^2} \cos \omega t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Q_0 - Q_1}{2} \frac{4\chi_0}{R_k^4 \pi \beta^* h 16\chi_0^2 / R_k^4 + \omega^2} \left(\frac{4\chi_0}{R_k^2} \frac{1}{\omega} \cos \omega t + \sin \omega t \right) \right] + \frac{\eta}{2\pi h k_0} \left(\frac{Q_0 - Q_1}{2} \cos \omega t + Q_1 \right) \ln \frac{r_c}{R_k} + \right. \\ \left. + \frac{r_c^2 - R_k^2}{2\chi_0} \exp \left(-\frac{4\chi_0}{R_k^2} t \right) \left[\frac{(\theta_k - \theta_s) 2\chi_0}{R_k^2} + \frac{2(Q_0 + Q_1)}{\pi\beta^* h R_k^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{4\chi_0^2}{R_k^4} \frac{1}{\omega^2 + \frac{16\chi_0^2}{R_k^4}} \right) + \frac{Q_0 + Q_1}{2\beta^* \pi h R_k^2} \ln \frac{r_c}{R_k} \right] \right\}, \quad (4.39)$$

где $\theta_k = P_k + \frac{2a}{R} \left[P_s^2 - (P_s - P_k)^2 \right]$, $\theta_s = P_s + \frac{2a}{R} \left[P_s^2 - (P_s - P_s)^2 \right]$.

Как видно из (4.35), (4.38) и (4.39), создаваемые генератором волны по мере углубления в пласт затухают. Причем затухание волн сильно зависит от частоты ω . С уменьшением частоты волн глубина их проникновения в пласт увеличивается, что имеет важное практическое значение. Распространение упругих волн с учетом эффекта проскальзывания носит примерно такой же характер, как без его учета. Кроме того, для увеличения глубины проникновения волн их частоту необходимо выбирать кратной $4\chi_0/R_k^2$.

На рис. 4.9, 4.10 представлены результаты численного расчета по (4.35) и (4.38) глубины проникновения упругих волн при различных $A\omega$, а также динамики перепада давления при следующих значениях параметров системы: $P_k = 10^7$ Па; $\eta = 1$ мПа·с; $h = 10$ м; $r_c = 0,15$ м; $\chi_0 = 0,17$ м²/с; $k_0 = 0,5 \cdot 10^{-12}$ м²; $a = 10^{-12}$ мПа; $R = 4,47 \cdot 10^{-6}$ м; $\beta^* = 2,94 \times 10^{-9}$ 1/Па; $R_k = = 25 - 200$ м; $P_s = 8,5 \cdot 10^6$ Па; $P_c = 5 \cdot 10^6$ Па.

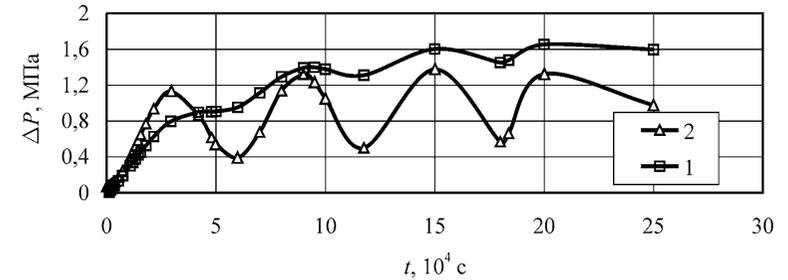


Рис. 4.9. Динамика перепада давления при $R_k = 200$ м: 1 – с учетом эффекта проскальзывания, 2 – без учета эффекта проскальзывания

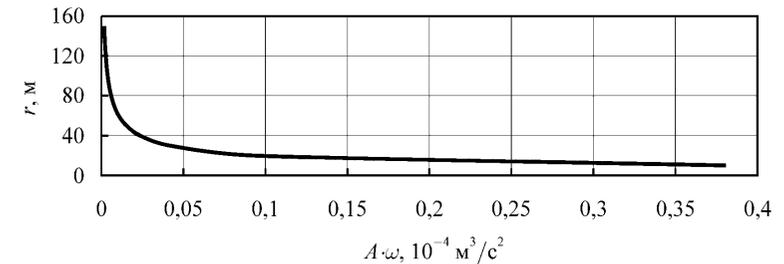


Рис. 4.10. Зависимость глубины проникновения упругих волн от скорости колебаний

Из рисунка 4.9 видно, что перепад давления в процессе виброволнового воздействия с эффектом проскальзывания всегда выше, чем без него,

что имеет важное практическое значение. Действительно, это позволяет поддерживать более высокие значения депрессии на пласт, вследствие чего происходит рост отбора жидкости.

Из рисунка 4.10 видно, что с уменьшением частоты упругих волн глубина их проникновения в пласт увеличивается. Причем с ростом величины $A\omega$ до $5 \cdot 10^{-6}$ м³/с² глубина проникновения упругих волн резко уменьшается, а после него стабилизируется и слабо зависит от $A\omega$. Наибольший эффект от воздействия достигается в интервале $0 < A\omega \leq 5 \cdot 10^{-6}$ м³/с².

4.3.2. Двухфазная фильтрация

Строится модель и определяется влияние упругих волн на процесс двухфазной фильтрации. Рассматриваются различные случаи пульсации дебита жидкости, создаваемые генератором упругих волн на забое скважины (рис. 4.8).

На основе модели Маскета–Миреса [27] уравнения, описывающие фильтрацию газированной жидкости, будут иметь вид (если не оговаривается иное, используются обозначения, принятые в 2.4.3, 4.2, 4.3.1):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\rho_z(P) K_z(\sigma)}{\eta_z(P)} r \frac{\partial P}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{S(P) K_n(\sigma)}{\eta_n(P) \cdot \beta_n(P)} \rho_{z0} r \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \\ & = \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_z(P) \sigma_z + \frac{S(P) \rho_{z0} \sigma_n(P)}{\beta_n(P)} \right] \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{K_n(\sigma)}{\eta_n(P) \beta_n(P)} r \frac{\partial P}{\partial r} \right] = \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sigma_n(P)}{\beta_n(P)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Обозначим $\sigma_n(P) = \sigma$.

Граничные и начальные условия:

$$P \Big|_{r=R_k} = P_k \quad (4.41)$$

$$2\pi \left[\frac{\rho_z(P) K_z(\sigma)}{\eta_z} + (1+S) \frac{K_n(\sigma) \rho_{z0}}{\eta_n(P) \beta_n(P)} \right] r \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = Q_0(1+\Gamma_c), \quad (4.42)$$

$$\sigma \Big|_{r=R_k} = 1,$$

$$P \Big|_{t=0} = P_k, \quad (4.43)$$

$$\sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0, \quad (4.44)$$

где r – координата; t – время; $K_n(\sigma)$, $K_z(\sigma)$ – соответственно относительная проницаемость; η_n, η_z – вязкость; σ_n, σ_z – насыщенность; ρ_n, ρ_z – плотность; β_n, β_z – объемный коэффициент нефти и газа; ρ_{z0} – плотность газа в нормальных условиях; P – давление в любой точке пласта; S – коэффициент объемной растворимости газа; k, m – коэффициент абсолютной проницаемости и пористости; σ_0 – начальная насыщенность нефти; Γ_c – газовый фактор на забое скважины.

Газовый фактор может быть определен из уравнения:

$$\Gamma_c = \frac{\rho_z(P) \psi_1(\sigma_c) \beta_n(P)}{\rho_{z0} \eta_{01}(P)} + S(P), \quad (4.45)$$

$$\text{где } \psi_1(\sigma_c) = \frac{K_z(\sigma_c)}{K_n(\sigma_c)}; \eta_{01} = \frac{\eta_z(P)}{\eta_n(P)}.$$

После перевода системы (4.40–4.44) к безразмерному виду при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{P}{P_k}; u = \ln r^*; r^* = \frac{r}{R_k}; \tau = \frac{k \rho_n(P_k) P_k \cdot t}{m \eta_z(P_k) \rho_n(P_k) \cdot R_k^2}; \rho_n^* = \frac{\rho_n(P)}{\rho_n(P_k)}; \\ \eta_z^* &= \frac{\eta_z(P)}{\eta_z(P_k)}; h^* = \frac{h}{R_k}; \eta_n^* = \frac{\eta_n(P)}{\eta_z(P_k)}; \rho_z^* = \frac{\rho_z(P)}{\rho_n(P_k)}; \rho_{z0}^* = \frac{\rho_{z0}(P)}{\rho_n(P_k)}, \end{aligned}$$

где $\rho_n(P_k)$ и $\eta_z(P_k)$ – соответственно плотность нефти и вязкость газа на контуре, получим

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left[\xi(\sigma, P) \frac{\partial \bar{P}}{\partial u} \right] = e^{2u} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\rho_{z0}^*(P)(1-\sigma) + \frac{S(P)\sigma}{\beta_n(P)} \rho_{z0}^* \right] \\ & \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{K_n(\tau)}{\eta_n^*(P) \beta_n(P)} \frac{\partial \bar{P}}{\partial u} \right] = e^{2u} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\sigma}{\beta_n(P)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

$$\text{где } \xi(P) = \frac{\rho_z^*(P)}{\eta_z^*(P)} K_z(\sigma) + \frac{S(P) K_n(P) \rho_{z0}^*}{\eta_n^*(P) \beta_n(P)}.$$

Граничные и начальные условия примут вид:

$$\bar{P} \Big|_{r^*=1} = 1, \quad (4.47)$$

$$2\pi \left[\frac{\rho_z^* \cdot K_z(\sigma)}{\eta_z^*} + (1+S) \frac{K_n(\sigma) \cdot \rho_{z0}^*}{\eta_n^*} \right] \frac{\partial \bar{P}}{\partial u} h^* = Q_0^*(1+\Gamma_c), \quad (4.48)$$

$$\bar{P} \Big|_{t=0} = 1, \quad (4.49)$$

$$\sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0, \quad (4.50)$$

где $Q_0^* = \frac{mQ_0n_c(P_k)}{kP_kR_k\rho_c(P_k)}$, P_3, σ_C – давление и насыщенность нефти на забое скважины.

$K_n(\sigma), K_c(\sigma), \beta(P)$ и $S(P)$ для несцементированных песков определяются по формулам К. А. Царевича [28]:

$$K_c = 1,16(\sigma - 1)^2, \quad (4.51)$$

$$K_n = 1,06(\sigma^3 - 0,06), \quad (4.52)$$

$$\beta(P) = \begin{cases} 0,001P + 1 & P \leq 5 \text{ МПа} \\ 0,00058P + 1,021 & P > 5 \text{ МПа}, \end{cases} \quad (4.53)$$

$$S(P) = \begin{cases} 0,7P & P \leq 5 \text{ МПа} \\ 0,39P + 15,5 & P > 5 \text{ МПа}. \end{cases} \quad (4.54)$$

Для каждого вида пульсации (рис. 4.8 *a, в, з, д*) аналитическое выражение $Q(t)$ можно представить в виде соответственно

$$Q = Q_1 + (Q_0 - Q_1) \left| \cos \frac{2\pi}{T_1} t \right|, \quad (4.55)$$

$$Q = \left\{ \frac{2(Q_0 - Q_1)}{\tau - \tau_1} t \left[H(t) - H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + (Q_0 - Q_1) \left[H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) - H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2(Q_0 - Q_1)}{\tau - \tau_1} (\tau - t) \left[H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) - H(t - \tau) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ H[t - (v-1)(T + \tau)] - H[t - (v\tau + (v-1)T)] \right\} + Q_1, \quad (4.56)$$

$$Q = \left\{ (Q_0 - Q_1) \sin\left(\frac{\pi}{\tau - \tau_1} t\right) \left[H(t) - H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + (Q_0 - Q_1) \left[H\left(t - \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) - H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + (Q_0 - Q_1) \cos\left[\frac{\pi}{\tau - \tau_1} \left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right)\right] \left[H\left(t - \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) - H(t - T) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ H[t - (v-1)(T + \tau)] - H[t - (v\tau + (v-1)T)] \right\} + Q_1, \quad (4.57)$$

$$Q = Q_1 + \frac{Q_0 - Q_1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right). \quad (4.58)$$

Решение задачи разбивается на два этапа. На первом этапе на основе уравнений (4.40)–(4.42) и (4.44) и начального условия (4.43) с учетом $Q_0 = \text{const}$ в (4.42) определяется P_{cm} – поле распределения давления в пласте при стационарном режиме.

На втором этапе на основе этого решения и уравнений (4.40)–(4.42) и (4.44) и начального условия (4.43) с учетом уравнений (4.55)–(4.58), которые входят в граничное условие (4.42), определяется время достижения фронтом возмущения контура питания и поле распределения давления $P(r, t)$ при виброволновом воздействии.

Краевая задача (4.40)–(4.44) и для первого, и для второго этапа решалась численно с применением метода конечных разностей [29, 30]. Определялось влияние вида пульсации дебита (рис. 4.8) и скорости колебаний на глубину распространения упругих волн, газонасыщенность, газовый фактор, время достижения фронтом возмущения контура питания и динамика забойного давления при фильтрации однородной и газированной жидкости.

Результаты проведенных расчетов при следующих значениях параметров: $P_k = 9$ МПа; $k_0 = 10^{-12}$ м²; $\eta = 0,88$ мПа·с; $h = 10$ м; $Q_0 = 1 - 3,5 \cdot 10^{-3}$ м³/с;

$r_c = 0,1$ м; $m = 0,2$; $R_k = 25 - 1000$ м; $\tau = \tau_1 = T = \frac{T_1}{2}$; $\sigma_0 = 0,85$ представлены в таблице 4.1 и на рис. 4.11–4.14. Из таблицы 4.1 видно, что при прочих равных условиях время достижения фронтом возмущения контура питания в газированной жидкости превышает аналогичный параметр для однородной жидкости.

Как видно из рис. 4.11, глубина проникновения упругих волн в пласте при фильтрации газированной жидкости в 3–4 раза меньше, чем при фильтрации однородной жидкости (кривые 4–6). Причем она сильно зависит от частоты и амплитуды колебаний дебита жидкости. С увеличением начального дебита жидкости скважины глубина проникновения упругих волн также увеличивается. Кроме того, с ростом $A\omega$ глубина проникновения упругих волн как в газированной, так и в однородной жидкости резко уменьшается, а после некоторого его значения стабилизируется и слабо зависит от значения $A\omega$. Наибольший эффект воздействия достигается в интервале $0 < A\omega \leq 1000$ м³/сут².

Из рис. 4.12 видно, что при импульсном воздействии на процесс фильтрации глубина проникновения упругих волн в пласт при прочих равных условиях становится примерно в три раза больше, чем при гармоническом воздействии. Это имеет важное практическое значение, так как достижение увеличения глубины проникновения упругих волн в пласт изменением характера пульсаций дебита скважины позволяет значительно повысить эффективность виброволнового воздействия.

Таблица 4.1

**Время достижения фронтом возмущения контура питания
для газированной и однородной жидкости**

Дебит жидкости скважины	Радиус контура питания	Время достижения фронтом возмущения контура питания	
		газированная жидкость	однородная жидкость
м ³ /сут	м	сут	сут
100	25	0,04	0,002
	50	0,12	0,01
	100	0,35	0,032
	200	0,77	0,1
	400	0,95	0,29
	600	0,95	0,5
	800	0,95	0,69
	1000	1,015	0,85
	1200	1,015	0,96
200	25	0,045	0,003
	50	0,147	0,011
	100	0,434	0,037
	200	1,094	0,11
	400	1,853	0,35
	1200	1,9	1,48
300	25	0,049	0,003
	50	0,16	0,011
	100	0,53	0,039
	200	1,28	0,12
	400	2,55	0,38
	600	2,82	0,71
	800	3,01	1,07
	1000	3,01	1,43
	1200	3,01	1,79

Из рис. 4.13 видно, что при импульсном воздействии на процесс фильтрации газированных жидкостей частота колебания давления на забое скважины становится примерно в 5 раз меньше, чем в однородных жидкостях.

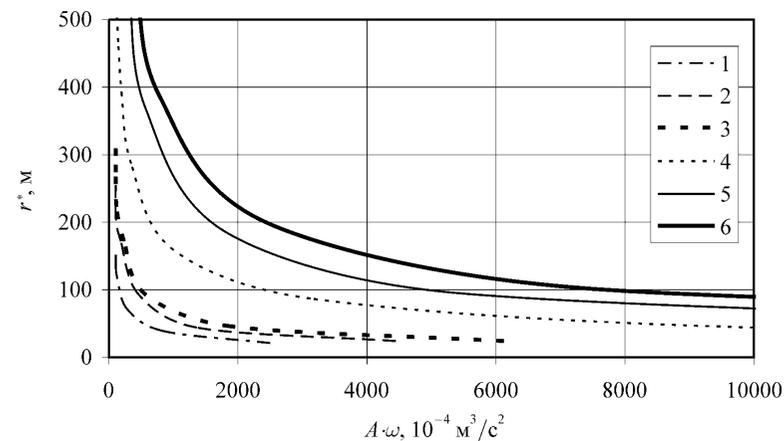


Рис. 4.11. Зависимость глубины проникновения упругих волн от скорости колебаний для газированной (1–3) и однородной жидкости (4–6) при различных начальных дебитах скважины (м³/сут): 1, 4 – 100; 2, 5 – 200; 3, 6 – 300

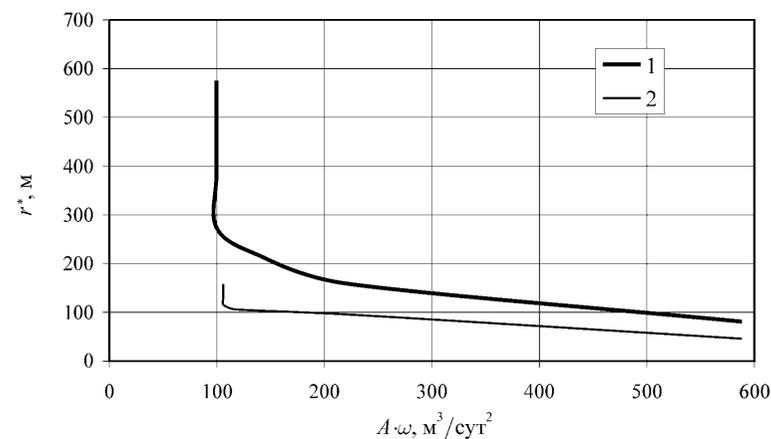


Рис. 4.12. Зависимость глубины проникновения упругих волн от скорости колебаний для импульсного (1) и гармонического (2) воздействия

На рис. 4.14 представлена динамика давления, газонасыщенности и газового фактора на забое скважины при импульсном воздействии, имеющем характер, показанный на рис.4.8 (в и г). Как видно из рисунка, колебания давления, газонасыщенности, а также газового фактора на забое сква-

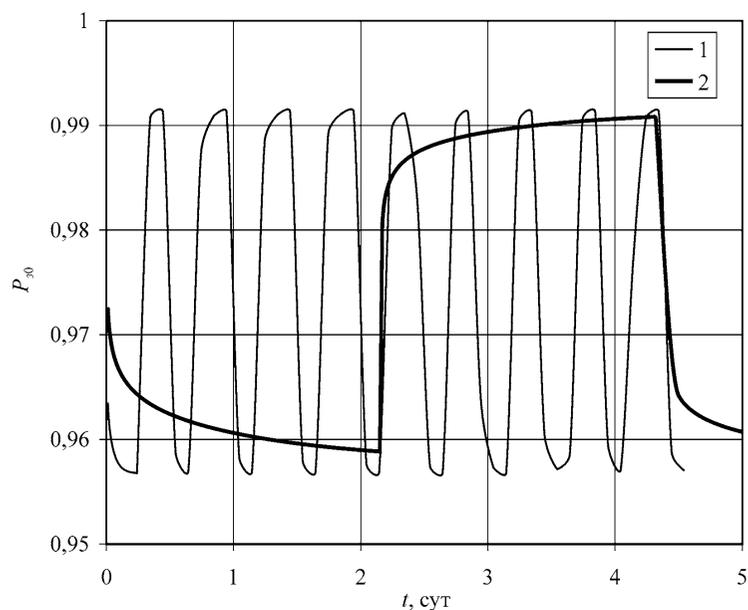


Рис. 4.13. Динамика (безразмерного) забойного давления ($P_{30} = P_3/P_k$) при импульсном воздействии для однородной (1) и газированной жидкости (2)

жины имеют приблизительно одинаковую частоту без фазовых сдвигов. Причем характер импульсного воздействия практически не оказывает влияния на динамику указанных параметров.

Таким образом, полученные результаты дают возможность определить значения параметров виброволнового воздействия, позволяющие повысить его эффективность при фильтрации как газированной, так и однородной жидкости.

Литература к главе 4

1. Мирзаджанзаде А. Х., Аметов И. М., Хасаев А. М., Гусев В. И. Технология и техника добычи нефти. – М.: Недра, 1986. – 382 с.
2. Ибрагимов Г. З., Хисамутдинов Н. И. Справочное пособие по применению химических реагентов в добыче нефти. – М.: Недра, 1983. – 312 с.

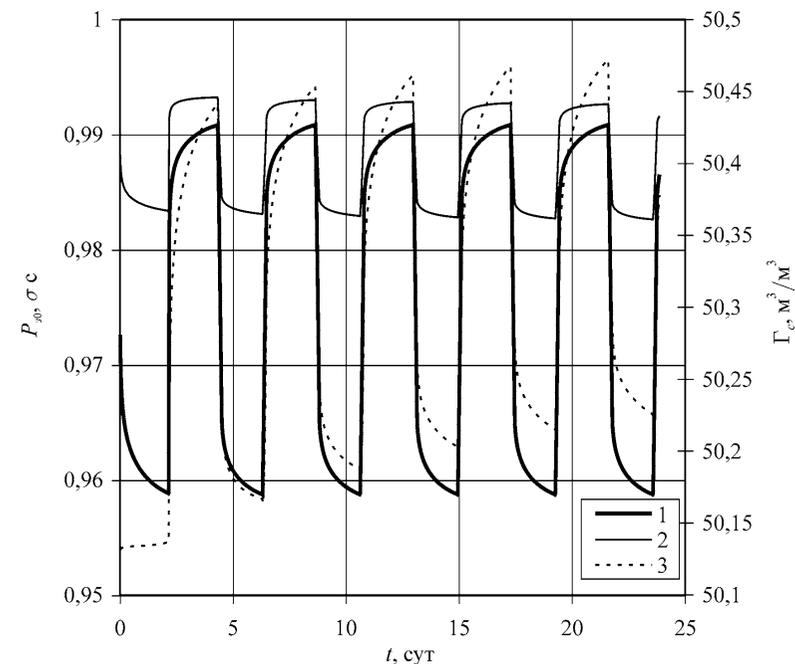


Рис. 4.14. Динамика (безразмерного) забойного давления (1), газонасыщенности (2) и газового фактора (3) при импульсном воздействии

3. Ибрагимов Г. З., Фазлутдинов К. С., Хисамутдинов Н. И. Применение химических реагентов для интенсификации добычи нефти. – М.: Недра, 1991. – 384 с.
4. Зинченко И. А. Совершенствование технологии повышения производительности газоконденсатных скважин в условиях ретроградной конденсации углеводородной смеси (при разработке нижнемеловых залежей углеводородов Севера Тюменской области) // Автореферат дисс. ... канд. тех. наук. – Москва, 1998. – 31 с.
5. Кузнецов О. Л., Ефимова С. А. Применения ультразвука в нефтяной промышленности. – М.: Недра, 1983. – 192 с.
6. Гадиев С. М. Использование вибрации в добыче нефти. – М.: Недра, 1977. – 159 с.
7. Агаларов Дж. М. Магнитный способ борьбы с солеотложениями в нефтедобыче. – Баку: Азернешр, 1981. – 158 с.

8. Вахитов Г. Г., Симкин Э. М. Использование физических полей для извлечения нефти из пласта. – М.: Недра, 1976. – 204 с.
9. Грановский М. Г., Лавров И. С., Смирнов О. В. Электрообработка жидкостей. – Л.: Химия, 1976. – 216 с.
10. Мамедзаде А. М., Салаватов Т. Ш., Эйдельман Л. Р. Влияние обработанной магнитным полем воды на фильтрационные характеристики пористых сред, содержащих глину // Азербайджанское нефтяное хозяйство. – 1984, № 9. – С. 19–22
11. Мирзаджанзаде А. Х., Мамедзаде А. М., Муслимов Р. Х. Методика по закачке омагниченной воды в пласт с применением постоянных магнитов. – Альметьевск: Татнефть, 1984. – 55 с.
12. Сулейманов Б. А., Исмаилов Ш. З. Повышение эффективности физического воздействия на призабойную зону нефтедобывающих скважин // Нефтегазовое дело. – 2005, <http://www.ogbus.ru>
13. Меликов Р. Х. Влияние физических полей на гидравлические и деформационные характеристики неньютоновских систем // Автореферат дисс... канд.тех.наук. – Баку, 1992. – 16 с.
14. Яковлев Ю. П. Влияние периодического сдвигового деформирования на упругие и вязкие свойства наполненных невулканизированных каучуков // Автореферат дисс.... канд.тех.наук. – Рига, 1969. – 18 с.
15. Симонов Б. Ф., Опарин В. Н., Канискин Н. А. Вибросейсмическое воздействие на нефтяные пласты с земной поверхности // Нефтяное хозяйство. – 2000, №5. – С. 41–45
16. Боголюбов Б. Н., Лобанов В. Н., Бриллиант Л. С. и др. Интенсификация добычи нефти низкочастотным акустическим воздействием // Нефтяное хозяйство. – 2000, № 9. – С. 30–31
17. Бриллиант Л. С., Рубинштейн О. И., Морозов В. Ю. и др. Применение волновых технологий в добыче нефти // Нефтяное хозяйство. – 2000, № 8. – С. 87–88.
18. Симонов Б. Ф., Чередников Е. Н., Сердюков С. В. и др. Технология объемного волнового воздействия на нефтегазовые залежи для повышения углеводородоотдачи пластов // Нефтяное хозяйство. – 1998, № 4. – С. 42–44
19. Кузнецов О. Л., Симкин Э. М., Чилингар Дж. Физические основы вибрационного и акустического воздействия на нефтегазовые пласты. – М: Мир, 2001. – 206 с.
20. Сулейманов Б. А., Аббасов Э. М. О влиянии вибровоздействия на систему пласт–скважина // Нефтепромысловое дело. – 2004, № 3. – С. 53–57.

21. Гусейнзаде М. А., Друнина Л. И., Петрова О. Н. и др. Гидродинамические процессы в сложных трубопроводных системах. – М.: Недра, 1991. – 163 с.
22. Чарный Н. А. Неустановившиеся движения жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 295 с.
23. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. – М.: Нефть и газ, 1995. – Т. 2. – 586 с.
24. Баренблатт Г. Н., Енгов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211с.
25. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. – 480 с.
26. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1982. – 303 с.
27. Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидравлика. – М.: Недра, 1986. – 303 с.
28. Розенберг М. Д., Кундин С. А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. – М.: Недра, 1976. – 335 с.
29. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
30. Самарский А. А., Николаев Н. Н. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Глава 5

Применение вейвлет-преобразования для решения задач подземной гидродинамики

Распространено несколько подходов к анализу нестационарных сигналов, характеризующих динамику сложных систем, период колебаний которых может изменяться в очень широких пределах. Первый подход – локальное преобразование Фурье [1], позволяющее получить спектр сигнала. Значительное распространение получила методика Прони [2, 3] и различные ее модификации [4, 5], позволяющая с высокой точностью выделять из сигнала характерные частоты и соответствующие им амплитуды, коэффициенты затухания и фазы. Третий подход – вейвлет-преобразование [6–12], применяемое тогда, когда результат анализа некоего сигнала должен содержать в себе не только простое перечисление его характерных частот (масштабов), но и сведения об определенных локальных координатах, при которых эти частоты проявляют себя. Преобразование Фурье и метод Прони дают хорошее представление о спектральной структуре сигнала, однако не позволяют определить эволюцию этой структуры во времени. В случае когда речь идет об анализе отклика системы на некоторые динамические воздействия, сведения о времени возникновения и затухания колебаний на тех или иных частотах могут играть важную роль. Поэтому методы вейвлет-анализа стали в последнее время основным инструментом исследования нестационарных сигналов в информационно-измерительных системах [13].

В настоящее время вейвлетный анализ приобрел характер самостоятельного аналитического средства, позволяющего вычислить параметры глобального самоподобия (фрактальности) объекта на основе исследования его локального самоподобия [14]. Именно возможность локализации сингулярностей вероятностной меры объекта делает вейвлетный анализ незаменимым средством для выявления мультифрактальной структуры [15], а также нарушения регулярности временных рядов [16].

Частотный анализ временного сигнала с помощью вейвлет-преобразования. Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса харак-

теризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени). Таким образом, в отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала, при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время, координата) и в частотном анализе. Параметр масштаба a вейвлет-преобразования (обычно $a = 2^{-j}$ для j -уровня вейвлет-разложения сигнала) связан с частотой ω соотношением $a = c/\omega$. Так что распределение сигнала в плоскости время–масштаб является одновременно распределением в плоскости время–частота при гиперболической деформации оси частот, т. е. для частоты в шкале $\omega = c/a$.

Преобразование Фурье, равно как и быстрое преобразование Фурье (БПФ), хорошо локализовано по частоте, но плохо локализовано по времени. Оконное преобразование Фурье частично решает последнюю проблему, разбивая промежуток входных данных (промежуток времени) на части – «окна» и выполняя преобразование Фурье на каждой из этих частей отдельно. Недостатком такого преобразования является то, что размер «окна» одинаковый для всех частей и в этом случае сложно определить оптимальный размер. Вейвлет-преобразование действует подобно оконному преобразованию Фурье, но размер «окон» не одинаковый – он больший при нахождении низкочастотных компонентов и меньший при нахождении высокочастотных. Конкретно, пусть t_0, δ_t и ω_0, δ_ω обозначают положение центров и эффективные ширины базисной вейвлет-функции $\psi(t)$ и ее Фурье-образа соответственно. Тогда для $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ и для соответствующих вейвлет-коэффициентов $d_{j,k} = (f, \psi_{j,k})$ центром и шириной окна вдоль оси t будут соответственно $2^j(t_0 + k)$ и $2^j\delta_t$. Вдоль оси ω соответствующими величинами будут соответственно $2^{-j}\omega_0$ и $2^{-j}\delta_\omega$. Откуда видно, что теперь ширины окон по обеим осям зависят от разрешения j . Однако отношения ширин к положениям центров окна вдоль каждой из осей не зависят от изучаемого масштаба. Это означает, что вейвлет-окно разрешает положение и частоту в фиксированной пропорции от их центральных значений:

$$\frac{\delta_t}{t_0 + k} = \frac{\delta_\omega}{\omega_0} = \lambda \Rightarrow \delta_\omega = \lambda\omega_0, \quad \delta_t = \frac{\lambda c 2^j (t_0 + k)}{\omega_0}.$$

Отсюда ясно, что вейвлет-окно для высокочастотных компонент сигнала имеет довольно большую ширину по оси частот, но сжимает полюсу по шкале времени, не нарушая, таким образом, соотношение неопреде-

ленности Гейзенберга. Именно благодаря этому свойству вейвлет-окна принято называть окнами Гейзенберга. Соответственно низкочастотные сигналы допускают окна с большой протяженностью по временной оси и малой – по оси частот. Таким образом, вейвлеты хорошо локализируют низкочастотные «детали» по оси частот и высокочастотные характеристики по временной оси. Эта способность вейвлетов найти идеальный компромисс между локализацией по времени и по частоте путем автоматического выбора и подгонки под исследуемый сигнал ширины окна по обеим осям, соразмеряя их с положениями центров, является решающей характеристикой для их успешного использования при анализе сигналов сложной формы. Вейвлет-преобразование расчленяет сигнал (функцию, оператор и т.п.) на отдельные частотные компоненты, что дает возможность изучать каждую из этих компонент с разрешением, соответствующим ее масштабу, и, таким образом, получать хорошую частотно-временную (масштаб – положение) локализацию. Именно благодаря этой черте вейвлеты могут «сфокусироваться» на сингулярностях или резких перепадах сигнала (т. е. на предельных версиях очень коротко живущих высокочастотных характеристик), тогда как оконные преобразования Фурье для этого не подходят. В терминах традиционного анализа сигналов фильтры, связанные с оконным преобразованием Фурье, называют фильтрами с постоянной полосой пропускания, тогда как вейвлеты можно рассматривать как фильтры с постоянной относительной полосой пропускания, поскольку их ширины по обеим переменным линейно зависят от их положения.

Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов. Анализ спектров всевозможных сигналов широко используется в различных приложениях для диагностики состояния технических систем, в геологоразведке, в задачах обнаружения сигналов, скрытых шумами, синтез сигнала с заданным спектром и т. п. [17–19]. Возросшие возможности техники являются мощным стимулом к развитию математического аппарата, применяемого для построения соответствующих алгоритмов обработки сигналов. В частности, в области спектрального анализа исследуются возможности применения не только гармонических функций в качестве базиса преобразования (как в спектральном Фурье-анализе), но и других ортогональных базисов: ортогональных полиномов, функций Уолша, Радемахера, Крестенсена, Карунена–Лоэва и др. Однако трудности интерпретации получаемых результатов или в ряде случаев невозможность построения быстрых алгоритмов явились причиной того, что все эти базисы не получили широкого распространения.

Появление в начале 80-х годов теории вейвлетов, развитой в работах [20–24], коренным образом изменило отношение к нетрадиционным базисам. Анализ в базисе вейвлетов соединил в себе достоинства оконного

преобразования Фурье (точнее, преобразования Габора, как его разновидности), в частности, локальность анализа с возможностью масштабирования, т. е. растяжения базисной функции или ее сжатия. Это означает, что вейвлеты являются функциями двух переменных – масштаба и сдвига, а сами функции представляют собой кратковременное колебание – уединенную (маленькую) волну «wavelet» (иногда говорят – всплеск). Спектральный анализ в базисе вейвлетов очень хорошо интерпретируется в терминах традиционного преобразования Фурье и легко реализуется в виде быстрых алгоритмов [17].

Как известно, в спектральном анализе для оценки интенсивности спектральных компонент важно, чтобы соседние частотные полосы не перекрывались. При сохранении разрешения этого можно достичь только тогда, когда частотные характеристики фильтров имеют форму прямоугольника. Однако этот идеальный случай на практике не реализуем, поэтому целесообразно рассматривать возможность применения базисов, которые обеспечивают наибольшую крутизну фронтов частотных характеристик. В наибольшей степени для этой цели подходят базисные функции, заданные на ограниченном множестве (базисы с компактным носителем) и многократно дифференцируемые. На примере базисных функций Добеши показано [17], что с увеличением порядка базисных функций уменьшаются боковые колебания частотных характеристик фильтров и увеличивается крутизна фронтов.

Таким образом, вейвлеты могут успешно использоваться для построения октавнополосных анализаторов спектра (в которых частоты настройки соседних фильтров отличаются в 2 раза), в том числе и для целей обнаружения сигналов в шумах. Число вычисляемых операций при этом не больше, чем в случае применения БПФ, что делает спектральный анализ в вейвлетном базисе с учетом его частотно-локальных свойств эффективным средством в ряде применений.

Вейвлет-анализ данных сейсморазведки для обнаружения нефтяных и газовых месторождений. Вейвлет-анализ успешно применяется в последние годы для изучения литологических свойств горных пород с помощью отражающего эффекта звуковых волн, возникающего при проведении сейсмических работ по геофизической разведке нефтяных и газовых месторождений. С этой целью разработан метод энергии поглощения вейвлета, получивший название метод WEA (wavelet energy absorption) [25]. Идея метода заключается в извлечении из сейсмических данных уединенной волны (вейвлета) $W(\omega)$ и изучении ее отражения от границы двух различных сред (жидкость–газ). Регистрируемый сигнал $T(\omega)$, зависящий от геологических свойств встречающихся на его пути пород, представляется

в виде произведения

$$T(\omega) = W(\omega)R(\omega), \quad (5.1)$$

где $R(\omega)$ – функция отражения, определяемая литологическими свойствами земной породы, расположенной выше и ниже отражающей границы. При этом рассматривается простейшая из возможных форм распространения вейвлета, включающая сферическую дивергенцию ($1/t^2$) и энергию поглощения ($e^{-\beta t}$):

$$w(t) = e^{-\beta t} / t^2, \quad (5.2)$$

где β – коэффициент энергии поглощения; t – момент времени.

Как известно [25], гладкость S -амплитуды спектра вейвлета в выражении (5.2) вычисляется по формуле

$$S[W(\omega)] = \beta / 2. \quad (5.3)$$

С другой стороны, как было установлено ранее тем же автором [26], гладкость отражающей функции выражается приближенной формулой

$$S[R(\omega)] \approx 1/t_{\max}^2. \quad (5.4)$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что

$$\frac{S[W(\omega)]}{S[R(\omega)]} \approx \beta t_{\max}^2 / 2. \quad (5.5)$$

Конечно, мы не можем контролировать неизвестный коэффициент абсорбции (поглощения), но мы можем увеличивать время регистрации t_{\max} .

Заметим, что единственным предположением, принятым при построении критерия разделения гладкостей, является затухающий характер вейвлета при его распространении по породе. Все дальнейшие рассуждения основаны на анализе физического процесса распространения вейвлета как самостоятельного явления. Отсюда следует, что исследование свойств вейвлета, выделяемого из регистрируемого сигнала, дает возможность для решения задачи поиска границ неоднородности пластов.

Как показано в [26], спектр сигнала можно отобразить в область гладкости (получая кепструм сигнала). В этой области гладкий вейвлет локализуется в начале координат (что соответствует бесконечной гладкости), в то время как пики отражающей функции принимают резко выраженную острую форму (гладкость нулевая). Поэтому выделение вейвлета в области гладкости равносильно выделению гладкости определенного ранга в окрестности начала координат.

Так как случайная помеха (шум) имеет острый пик в амплитуде спектра, то в область гладкости она отображается на значительном удалении от

начала координат и отражающей функции. Следовательно, извлеченный вейвлет практически нечувствителен к малым изменениям шума.

Необходимо иметь в виду, что извлеченный вейвлет и вейвлет, идущий непосредственно от источника сигналов, – это разные понятия. Разумеется, извлеченный вейвлет также генерируется источником, но затем он изменяется в зависимости от вида земной породы и времени регистрации. Следовательно, он будет зависеть как от характеристик источника и приемника сигналов (геофона), так и многократных отражений, возникающих при прохождении им земной породы.

Чтобы отличать этот вейвлет от вейвлета источника, будем называть его вейвлетом переднего фронта (сокращенно передний вейвлет). Так как алгоритм извлеченного вейвлета основан на критерии разделения гладкостей, он может привести и к извлечению смешанного вейвлета с фазой, сдвинутой назад по времени, поэтому данный алгоритм называют обратной разверткой фазы (phase inversion decomposition-PID). Принимая во внимание зависимость переднего вейвлета от свойств источника и резервуара, приходим к заключению, что развертка с помощью такого вейвлета автоматически совпадает с разверткой, согласованной с поверхностью.

Таким образом, критерий разделения гладкостей является эффективным средством извлечения смешанного вейвлета с запаздыванием по фазе. Этот критерий основан на затухающем свойстве сейсмической энергии при прохождении толщи Земли и на физической природе распространения вейвлета. При этом не делается никаких допущений относительно фазы вейвлета и случайности коэффициентов отражения. Кроме того, в PID-методе не используется априорная информация о свойствах отражающей границы. К тому же, что немаловажно, в этом методе нет предположения о стационарности извлекаемого вейвлета, и, следовательно, получаемый таким методом вейвлет аккумулирует в себе все вариации, порождаемые литологическими свойствами пород, встречающихся на пути распространения звуковой волны от источника к резервуару.

Применение вейвлет-преобразований к решению краевых задач для дифференциальных уравнений. Начиная с 90-х годов широкое развитие в вычислительной практике получили методы численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), связанные с применением вейвлетов (см., например, [27, 28]).

В работе [29] показано применение вейвлетов Гори–Питолли [30] (GP-вейвлеты) к решению краевой задачи

$$u'' = f \text{ на } [0,1], u(0) = a, u(1) = b. \quad (5.6)$$

Численное решение задачи (5.6) строится по вариационному методу Галеркина с базисом в виде GP-вейвлетов. Такой метод решения диффе-

ренциальных уравнений в литературе получил название метод вейвлет–Галеркина.

Задача (5.6) решается в [29] в рамках мультиразрешающего анализа (multiresolution analysis-MRA) на интервале. Доказывается, что решение на основе GP-базиса имеет большую точность аппроксимации, чем решение, полученное тем же методом на основе вейвлетов Добеши [10]. Конструирование MRA на конечном интервале связано с известными трудностями, возникающими при использовании базисных функций, определенных на всей прямой, и с необходимостью их привязки к конечному интервалу. Данная процедура приводит обычно к неустойчивым решениям краевых задач (см. [31]). В связи с этим в [29] осуществляется дискретизация проблемы и используется некоторая модификация масштабирующих функций из класса GP-функций.

В работе [32] показано применение дискретного метода вейвлета – Галеркина (WG-метода) к решению краевой задачи Дирихле для эллиптического уравнения в составной (несвязной) области. Такой способ решения является альтернативой к стандартному методу конечных элементов (finite element – FE-метод), использующему кусочно-полиномиальные базисные функции. Для решения задачи в составной области ω в [32] используется метод фиктивных областей с вложением заданной области в прямоугольную область Ω . Граничные условия на Ω формируются из граничных условий на ω с помощью множителей Лагранжа.

В работе [33] дан глобальный анализ методов всплесков для двумерных уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Еще в книге Майера и Койфмана [34] поставлена проблема: «Можно ли применить вейвлеты для изучения или понимания уравнения Навье–Стокса?» и отмечается, что «Фейербахом предпринята попытка решить уравнение Навье–Стокса методом Фаедо–Галеркина с использованием вейвлетного базиса, состоящего из функций с нулевой дивергенцией». Подробное изложение данного подхода приведено в книге [35]. Позднее в работе [36] Фейербаш получил локальные результаты для трехмерного уравнения Навье–Стокса уже с использованием ортогонального базиса из векторнозначных вейвлет-функций с ненулевой дивергенцией.

В работе Вейса [37] WG-метод использован для численной реализации симуляций и исследования эволюции когерентных структур потока флюидов. С помощью глобального анализа и вейвлет-функций в [38] исследуется двумерная турбулентность и показана зависимость когерентных структур от тензора напряжений и завихренности потока.

В данной главе приведено решение двух задач подземной гидромеханики с использованием вейвлет-преобразования (исследование выполнено в соавторстве с Э. М. Аббасовым и О. А. Дышиным).

5.1. Решение задачи нестационарной фильтрации с разрывными коэффициентами и неточными входными данными

Общая теория разрешимости краевых задач для линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами разработана О. А. Ладыженской и ее коллегами [39, 40].

В настоящей работе рассматривается задача нестационарной фильтрации однофазного потока, описываемого уравнением параболического типа с разрывными, квадратично-интегрируемыми коэффициентами. При неточных исходных данных исследуемая задача относится к классу некорректных задач из-за возможной неустойчивости решения. Для решения такой задачи использован проекционный метод Галеркина, в котором базисная (координатная) система функций совпадает с проекционной системой. В качестве базисных функций приняты многомерные вейвлеты Добеши [10], зависящие как от пространственной переменной r , так и от времени t , и коэффициенты разложения решения задачи определяются в рамках регулярного кратномасштабного вейвлет-анализа [8]. Получаемая при этом вариационная задача решается регуляризирующим методом А. Н. Тихонова [41] с применением принципа обобщенной невязки [42].

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим дифференциальное уравнение неустановившегося плоскорадиального осесимметричного фильтрационного потока в круговом пласте радиусом R , в центре которого имеется совершенная скважина радиусом r_0 :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k(r,t)}{\mu} r \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial P(r,t)}{\partial t}, \quad r_0 < r < R, \quad t_0 < t < t_1, \quad (5.7)$$

при начальном условии

$$P(r, t_0) = \psi_0(r), \quad r_0 < r < R, \quad (5.8)$$

и краевых условиях

$$P(r_0, t) = P_0(t), \quad P(R, t) = 0, \quad t_0 < t < t_1. \quad (5.9)$$

Здесь $P(r, t) = \Delta p(r, t) = p_0 - p(r, t)$; $p(r, t)$ – давление жидкости в точке r в момент времени t ; p_0 – начальное пластовое давление; $k(r, t)$ – проницаемость пласта; μ – вязкость жидкости.

Будем предполагать, что функции $\psi_0(r)$ и $P_0(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1⁰. $\psi_0(r) \in W_2^1(Q_r)$, т. е. квадратично-интегрируема на $[r_0, R]$ вместе с обобщенной производной $\frac{d\psi_0}{dr}$ в смысле Соболева [43] (сокращенно об. производной) и принимает «в среднем квадратичном» нулевые граничные значения.

$$2^0. \|P_0(t)\|_{L_2[t_0, t_1]} \leq v_1, \|P'_0(t)\|_{L_2[t_0, t_1]} \leq v_2.$$

Пусть $Q_{t_0, t_1} = \Omega_{r_0, R} \times (t_0, t_1)$ – цилиндр на плоскости переменных (r, t) , $\Omega_{r_0, R} = (r_0, R)$, и функция $k(r, t)$ удовлетворяет на Q_{t_0, t_1} условиям:

$$3^0. v_3 \leq k(r, t) \leq v_4, v_3 > 0.$$

$$4^0. k(r, t) \text{ имеет об. производную } \frac{\partial k(r, t)}{\partial r}, \text{ для которой } \operatorname{vrai} \max_{Q_{t_0, t_1}} \left| \frac{\partial k(r, t)}{\partial r} \right| < \infty.$$

Условие 3^0 обеспечивает равномерную (по r и t) параболичность уравнения (5.7).

Для однородного пласта ($k(r, t) = \text{const}$) краевые задачи с краевыми условиями первого или второго рода (одного и того же или различного рода на обоих концах) рассмотрены в [44, 45]. Необходимость учета неоднородной пористой среды в гидродинамических задачах отмечается во многих известных работах по фильтрации. Исследования задач фильтрации в неоднородных средах в основном ориентированы на точные входные данные, в то время как на практике эти данные могут быть измерены лишь приближенно. Неучет этого факта может привести к большим отклонениям полученного решения от решения задачи при точных данных (неустойчивость решения). Кроме того, существующие методы решения задач фильтрации (в частности методы, основанные на применении обычного или оконного преобразования Фурье) не дают возможности определить структурные особенности процесса и могут быть использованы только в случае существования классического решения задачи.

После элементарных замен задача (5.7)–(5.9) приводится к следующей задаче:

$$\mathcal{L}u(r, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} u(r, t) - \mathcal{M}u(r, t) = f(r, t), \quad 0 < r < L, \quad 0 < t < L, \quad (5.10)$$

$$u(r, 0) = \psi_0(r), \quad 0 < r < L, \quad (5.11)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (5.12)$$

Здесь $T = L$, $L = 2M - 1$; M – порядок вейвлетов, которые будут использоваться в дальнейшем для вейвлет-разложений функций $k(r, t)$, $f(r, t)$ и $u(r, t)$;

$$\mathcal{M}u \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c}{R - r_0} k(r, t) u_r \right) + \frac{ck(r, t) \cdot u_r}{r_0 L + r(R - r_0)}, \quad c = \frac{L(t_1 - t_0)}{\mu(R - r_0)},$$

$$f(r, t) = \frac{\partial f_1(r, t)}{\partial r} - f_0(r, t), \quad f_1(r, t) = -\frac{ck(r, t)}{L(R - r_0)} P_0(t),$$

$$f_0(r, t) = \frac{c}{L r_0 L + r(R - r_0)} P_0(t) + \left(1 - \frac{r}{L} \right) P'_0(t), \quad (5.13)$$

для упрощения записи после замен сохранены прежние обозначения для $k(r, t)$, $\psi_0(r)$, $P_0(t)$ и $P'_0(t)$.

Задачу (5.10)–(5.12) назовем условно задачей $A_{1,0}(Q_T)$, где $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, L)$; первый из индексов в обозначении задачи означает, что краевые условия являются условиями первого рода, а второй – что эти условия однородны (т. е. нулевые).

В дальнейшем будем использовать введенные в [39, 40] функциональные пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, $W_2^{2,1}(Q_T)$, $V_2(Q_T)$ и $V_2^{1,0}(Q_T)$, а также соответствующие им пространства $W_2^{0,1,0}(Q_T)$, $W_2^{0,1,1}(Q_T)$, $W_2^{0,2,1}(Q_T)$, $V_2^0(Q_T)$ и $V_2^{0,1,0}(Q_T)$. Нуль сверху над обозначением пространства означает, что берутся лишь те элементы данного пространства, которые обращаются в нуль в «среднем квадратичном» на боковой границе $S_T = \{(r, t): r = 0 \vee r = L\}$ цилиндра Q_T .

Под решением задачи $A_{1,0}(Q_T)$ будем понимать обобщенное решение в смысле определения из [39, 40]. А именно обобщенным решением (сокращенно об. решением) из $V_2^{1,0}(Q_T)$ ($W_2^{1,0}(Q_T)$) задачи $A_{1,0}(Q_T)$ будем называть функцию $u(r, t)$ из $V_2^{0,1,0}(Q_T)$ ($W_2^{0,1,0}(Q_T)$), удовлетворяющую уравнению (5.10) и начальному условию (5.11) в смысле интегрального тождества

$$\int_{Q_T} \left(u \eta_t - \frac{c}{R - r_0} k(r, t) u_r \eta_r + \frac{ck(r, t)}{r_0 L + r(R - r_0)} u_r \cdot \eta \right) dr dt = \\ = \int_{Q_T} \left\{ \frac{ck(r, t)}{L(R - r_0)} P_0(t) \eta_r - \left[\frac{c}{L} \cdot \frac{k(r, t)}{r_0 L + r(R - r_0)} P_0(t) + \left(1 - \frac{r}{L} \right) P'_0(t) \right] \eta \right\} dr dt + \int_{\Omega} \psi_0(r) \eta(r, 0) dr \quad (5.14)$$

при любой функции $\eta(r, t)$ из $W_2^{0,1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$. Удовлетворение же краевым условиям (5.12) содержится в том, что $u \in V_2^{0,1,0}(Q_T)$ ($u \in W_2^{0,1,0}(Q_T)$), т. е. условия (5.12) удовлетворяются в «среднем квадратичном». При этом производные u_r , η_r и η_t в (5.14) являются об. производными. Любое об. решение из $W_2^{0,1,0}(Q_T)$ задачи $A_{1,0}(Q_T)$ будет ее об. решением из $V_2^{0,1,0}(Q_T)$ [39].

Из теоремы 3.6.1 [40] следует, что при условиях $1^{\circ}-4^{\circ}$ существует единственное об. решение задачи $A_{1,0}(Q_T)$ из $W_2^{0,1,0}(Q_T)$, принадлежащее $W_2^{2,1}(Q_T)$ и удовлетворяющее уравнению $\mathcal{L}u = f$, $f \in L_2(Q_T)$ ($f \equiv \frac{\partial f_1}{\partial r} - f_0$) почти всюду в Q_T .

2. Вейвлет-представление решения задачи. В кратномасштабном анализе (КМА) в $L_2(\mathbb{R}^2)$, использующем ортонормированные базисы вейвлетов, любой функции $u(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^2)$ соответствует ряд [8]

$$u(x) = \langle u, \varphi \rangle \cdot \varphi(x) + \sum_{\lambda \in \bigcup_{j \geq 0} \Lambda_j} \langle u, \psi_\lambda \rangle \cdot \psi_\lambda(x), \quad (5.15)$$

$\psi_\lambda(x) = 2^j \psi_\ell(2^j \cdot x - k)$, $\Lambda_j = \{\lambda = (\ell, j, k) : 1 \leq \ell \leq 3, k \in Z^2\}$, $Z^2 = Z \times Z$, Z – множество целых неотрицательных чисел; $k = (k_1, k_2) \in Z^2$; $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (для задачи $A_{1,0}(Q_T)$ $x_1 = r$, $x_2 = t$); $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения.

Функции

$$\varphi(x-k), \psi_\lambda(x) = 2^j \psi_\ell(2^j \cdot x - k), \lambda = (\ell, j, k), 1 \leq \ell \leq 3, j \geq 0, k \in Z^2, \quad (5.16)$$

где

$$\varphi(x-k) = \varphi(x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2), \psi_1(x-k) = \varphi(x_1 - k_1) \psi(x_2 - k_2),$$

$$\psi_2(x-k) = \psi(x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2), \psi_3(x-k) = \psi(x_1 - k_1) \psi(x_2 - k_2),$$

образуют сепарабельный ортонормированный базис (ОНБ) в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x \in \mathbb{R}^1$, называемые соответственно скейлинг-функцией (масштабирующей функцией) и вейвлет-функцией, имеют компактные носители в $(0, L)$ и определяются как [7]

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L h_k^{(M)} \cdot \varphi(2x-k), \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L g_k^{(M)} \cdot \varphi(2x-k), \quad (5.17)$$

$L = 2M - 1$ ($M \geq 1$ – целое положительное число); $g_k^{(M)} = (-1)^k \cdot h_{L-k}^{(M)}$. Коэффициенты $h_k^{(M)}$ для вейвлетов Хаара ($M = 1$) имеют значения $h_0^{(1)} = h_1^{(1)} = 1/\sqrt{2}$, а для вейвлетов Добеши ${}_M\varphi(x)$ порядка $M > 1$ значения $h_k^{(M)}$ для $M = \overline{2, 10}$ приведены в [10, с. 270].

Локальная и глобальная регулярность вейвлетов с компактными носителями подробно исследована в гл. 7 работы [10]. Методами Фурье установлено, что для вейвлетов $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, значение глобального показателя Гельдера не меньше 2,158 при $M \geq 7$.

Краткомасштабный анализ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ состоит из последовательности пространств аппроксимации $\{V_j\} (j \geq 0)$ $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset \dots$, где V_j – замкнутое подпространство в $L_2(\mathbb{R}^2)$ с базисом

$$\varphi_j(x-k) = 2^j \varphi(2^j \cdot x - k), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, k = (k_1, k_2) \in Z^2.$$

Так как функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, финитна на $[0, L]$ при любом $M \geq 1$ и дважды непрерывно дифференцируема на $[0, L]$ при $M \geq 7$, то последовательность $\{V_j\} (j \geq 0)$ при выборе базиса $\{\varphi_j(x-k)\}$ на основе функции $\varphi(x)$ из (2.3) с $L = 2M - 1$, $M \geq 7$, будет порождать, по определению [8], 2-регулярный КМА в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Это значит, что для любого целого m и для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, удовлетворяющего условию $|\alpha| \leq 2$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$), для функции $g(x) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$ выполняется неравенство

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq C_m \left(1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{-m}.$$

Если P_j – ортогональный проектор пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$ на V_j , то на основании теоремы 22.1 [8] для любой функции из пространства Соболева $W_2^1(Q_T)$ последовательность $P_j f$ сходится к f в $W_2^1(Q_T)$ -норме, т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha P_j f - \partial^\alpha f\|_{L_2(Q_T)} = 0, |\alpha| \leq 1. \quad (5.18)$$

Согласно теореме 26.1 [8], распределение (обобщенная функция) f принадлежит $W_2^1(Q_T)$ тогда и только тогда, когда ее вейвлет-коэффициенты $\alpha(\lambda) = \langle f, \psi_\lambda \rangle$ в базисе (5.16), соответствующем 2-регулярному КМА, удовлетворяют условию

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda} 4^j |\alpha(\lambda)|^2 < \infty. \quad (5.19)$$

Для выполнения условия (5.19) достаточно предполагать, что вейвлет-коэффициенты $d_{l,j,k_1,k_2} = \langle f, \psi_{l,j,k_1,k_2} \rangle$ функции f удовлетворяют неравенствам

$$|d_{l,j,k_1,k_2}| \leq 2^{-2j} \eta_j \left(l = \overline{1, 3}; j \geq 0, k_1, k_2 = \overline{0, 2^j - 1}\right), \quad (5.20)$$

где $\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^2 < \infty$, например, $\eta_j = j^{-(1+\gamma)/2}$, $\gamma > 0$.

3. **Вариационная бесконечномерная задача, эквивалентная исходной задаче.** Запишем задачу $A_{1,0}(Q_T)$ в виде операторного уравнения

$$Au = f, \quad f \in L_2(Q_T), \quad (5.21)$$

где $f \equiv \frac{\partial f_1}{\partial r} - f_0$; A – оператор, порожденный дифференциальной операцией $\mathcal{L}u$ из (5.10) и начально-краевыми условиями (5.11)–(5.12), при этом производные в (5.10) являются об. производными.

Для описания отображения, определяемого оператором A , рассмотрим пространство $K(Q_T)$, образованное из всех основных (т. е. непрерывных вместе со своими производными любого порядка) функций $\varphi(r, t)$, сосредоточенных внутри области Q_T ($\text{supp } \varphi(r, t) \subset Q_T$). Обозначим через $K'(Q_T)$ совокупность всех обобщенных функций (сокращенно об. функций) – линейных непрерывных функционалов в $K(Q_T)$.

По определению об. производной [43], (обычная) функция $\omega(r, t)$ есть об. производная вида $D^k = \frac{\partial^k}{\partial r^{k_1} \partial t^{k_2}}$ от (обычной) функции $f(r, t)$ в области, если для любой $(-1)^{|k|} \langle \omega, \varphi \rangle = \langle f, D^k \varphi \rangle$ из $K(Q_T)$ имеет место равенство

$$(-1)^{|k|} \langle \omega, \varphi \rangle = \langle f, D^k \varphi \rangle, \quad |k| = k_1 + k_2. \quad (5.22)$$

Под «обычной» понимается [46] функция, интегрируемая по Лебегу.

С другой стороны, по определению производной от об. функции из $K'(Q_T)$ [43] имеем

$$\langle D^k f, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, D^k \varphi \rangle. \quad (5.23)$$

Из (5.22) и (5.23) вытекает, что $\omega = D^k f$. Отсюда следует, что об. производная $\omega = \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ есть обычная функция, если такова функция $f = k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}$. Для совместности уравнения (5.21) требуется, чтобы функция $\frac{\partial}{\partial r} \left(k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ принадлежала $L_2(Q_T)$. В связи с этим рассмотрим гильбертово пространство H_1 , образованное функциями из $K(Q_T)$, со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_1 = \sum_{|k| \leq 1} \langle D^k \varphi, D^k \psi \rangle \quad (5.24)$$

и, следовательно, с нормой

$$\|\varphi\|_1^2 = \sum_{|k| \leq 1} \int_{Q_T} (D^k \varphi(r, t))^2 dr dt. \quad (5.25)$$

Построим пополнение $\overline{H_1}$ пространства H_1 путем его замыкания по $L_2(Q_T)$ -норме. Каждая из последовательностей $\{D^k \varphi_\nu(r, t)\}$, соответствующая фундаментальной в H_1 последовательности $\{\varphi_\nu(r, t)\}$, фундаментальна в $\overline{H_1}$ в смысле сходимости в «среднем квадратичном» и, следовательно, имеет пределом некоторую функцию $\varphi^{[k]}(r, t) \in L_2(Q_T)$ [46].

Очевидно, что $\overline{H_1} = W_2^{1,1}(Q_T)$, где $W_2^{1,1}(Q_T)$ введено в рассмотрение в п. 1.

Функционалу f из H_1' отвечает некоторая система квадратично-интегрируемых функций $\{f^{[k]}(r, t)\}$, $|k| \leq 1$, такая, что для любого элемента $\{\varphi^{[k]}(r, t)\} \in \overline{H_1}$ имеет место равенство

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|k| \leq 1} \langle f^{[k]}(r, t), \varphi^{[k]}(r, t) \rangle. \quad (5.26)$$

При условии 3° и в предположении, что $\frac{\partial u}{\partial r} \in L_2(Q_T)$, имеем

$$f \equiv k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \in L_2(Q_T). \quad \text{В силу (5.22) для функционала } \omega = \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

выполняется равенство

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \left\langle (-f), \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\rangle. \quad (5.27)$$

Принимая во внимание единственность представления линейного непрерывного функционала в $\overline{H_1}$, находим, что

$$\|\omega\|_{H_1'} = \|\omega\|_{\overline{H_1}} = \left\| k(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L_2(Q_T)}. \quad (5.28)$$

Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что если $u \in L_2(Q_T)$, то

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\overline{H_1}} = \|u\|_{L_2(Q_T)}. \quad (5.29)$$

Таким образом, оператор A из (5.21), рассматриваемый как функционал из $\overline{H_1}'$, отображает $W_2^{1,1}(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$. Другими словами, область

определения оператора A – множество $D(A) = U$, $U = \overset{\circ}{W}_2(Q_T)$, $W_2^1(Q_T) = W_2^{1,1}(Q_T)$, а область его значений – $R(A) \subseteq F$, $F = L_2(Q_T)$. При этом A будет линейным непрерывным оператором, действующим из U в F , и равенство (5.21) следует понимать как эквивалентность функций Au и f в $L_2(Q_T)$. Это значит, что как уравнение (5.10), так и условия (5.12) (в силу теоремы о следах элементов из $W_2^1(Q_T)$ [39]) удовлетворяются в «среднем квадратичном».

Будем искать об. решение из $W_2^{1,0}$ задачи $A_{1,0}(Q_T)$ в классе обычных функций $u(r,t) \in \overset{\circ}{W}_2(Q_T)$ с вейвлет-разложениями (5.15) в КМА $L_2(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что в качестве исходных данных в уравнении (5.21) используются приближения $\tilde{f} = f_\delta$ и $\tilde{A} = A_h$, вызванные неточным заданием функции проницаемости $k(r,t)$. Пусть $k_\varepsilon(r,t)$ – ε -приближение функции $k(r,t)$ в $W_2^1(Q_T)$ -норме, удовлетворяющее условиям 3^0-4^0 . Тогда при точно заданных функциях $\psi_0(r)$, $P_0(t)$ и $P'_0(t)$ будем иметь

$$\|f_\delta - f\|_F \leq \delta, \quad \delta = \frac{c}{L} \left[\frac{R-r_0}{(r_0L)^2} + \frac{1}{r_0L} + \frac{1}{R-r_0} \right] v_1 \varepsilon, \quad (5.30)$$

с константами c и v_1 из (5.13) и условия 2^0 соответственно.

Разность $A_h u - Au$ при условиях 1^0-4^0 будет оцениваться в F -норме как

$$\|A_h u - Au\|_F \leq h \cdot \|u\|_U, \quad 0 < h \leq h_0 = \varepsilon c \left(\frac{1}{R-r_0} + \frac{1}{r_0L} \right) \frac{2v_2}{Lv_1}. \quad (5.31)$$

Семейство $\{A_h\}$, $0 < h \leq h_0$, состоит из линейных ограниченных операторов из класса $(U \rightarrow F)$, причем число h определяется соотношением

$$h = \sup_{u \in U, u \neq 0} \|A_h u - Au\|_F / \|u\|_U. \quad (5.32)$$

Пусть

$$A_h u = f_\delta, \quad f_\delta \in F \quad (5.33)$$

– операторное уравнение, получаемое из (5.21) при замене $k(r,t)$ на $k_\varepsilon(r,t)$. Об. решение $u_\sigma(r,t)$, $\sigma = (h, \delta)$ уравнения (5.33) обладает теми же свойствами, что и об. решение $u(r,t)$ уравнения (5.21) в классе $W_2^{1,0}(Q_T)$.

4. Проекционный метод решения задачи с применением кратномасштабного анализа.

В качестве приближенных решений уравнения (5.21) в методе регуляризации Тихонова [41] принимаются экстремальные элементы следующей вариационной задачи:

$$\inf \left\{ \|A_h u - f_\delta\|_F^2 + \alpha \Omega(u) : u \in U \right\}, \quad (5.34)$$

где $\Omega(u) = \|u - u^0\|_U^2$ – стабилизирующий функционал; $u^0 \in U$ – заданный элемент, учитывающий априорную информацию о решении. В задаче $A_{1,0}(Q_T)$ за u^0 принимается функция $u^0 = u^0(r,t)$, соответствующая начальному пластовому давлению p_0 .

Как известно [41], для непрерывного линейного оператора A_h существует единственная экстремаль функционала (5.34), реализующая его минимум в U при данных $\sigma = (h, \delta)$ и α .

Для построения устойчивого приближенного решения операторного уравнения (5.21) при неточно заданных операторе и правой части применим регуляризирующий алгоритм обобщенной невязки [42]. Согласно этому алгоритму выбор параметра регуляризации α осуществляется по обобщенному принципу невязки путем решения уравнения

$$A_\sigma(\alpha) = \|A_h u_\delta^\alpha - f_\delta\|_F^2 - (\delta + h\Omega(u_\delta^\alpha))^2 - \mu_\sigma = 0, \quad (5.35)$$

где u_σ^α – экстремаль функционала (5.34) и $\mu_\sigma = \inf \left\{ \|A_h u - f_\delta\|_F^2 : u \in U \right\}$. Если при независимом стремлении h и δ к нулю выполнено естественное условие $\|f_\delta\|_F^2 > \delta^2 + \mu_\sigma$, то, как показано в [42], уравнение (5.35) имеет единственное решение $\alpha = \alpha(\sigma)$. Соответствующая такому выбору α последовательность u_σ^α сходится при $\sigma \rightarrow 0$ в метрике пространства U к решению $u(r,t)$ уравнения (5.21).

Задачу (5.34) при фиксированных σ, α будем аппроксимировать конечномерной задачей, применяя проекционный метод с оператором проектирования $P_j : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow V_j$, где V_j – замкнутое подпространство из п. 2:

$$\inf \left\{ \|P_n A_h u - P_n f_\delta\|_F^2 + \alpha \Omega(u) : u \in U_n = P_n U \right\}. \quad (5.36)$$

Здесь $P_n (n = j^*, j^* = j_{\max} - 1)$ – ортогональный проектор на V_n ; j_{\max} – детальный уровень разрешения по переменным r, t , который для простоты рассуждений принимается одинаковым по обоим переменным.

Как и любое гильбертово пространство, U удовлетворяет условиям Ефимова–Стечкина, т.е. из условий $u_n \xrightarrow{сн} u$, и $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ вытекает сильная сходимость $u_n \rightarrow u$ при $n \rightarrow \infty$. Так как, к тому же, F есть сепарабельное гильбертово пространство, к проекционному методу решения задачи (5.36) применима общая схема конечномерной аппроксимации [47]. Следуя данной схеме, рассмотрим возрастающие цепочки конечномерных подпространств U и F

$$U_n = P_n U, F_n = P_n F, U_j \subset U_{j+1}, F_j \subset F_{j+1} \quad (j \geq 0) \quad (5.37)$$

такие, что

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} = U, \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} = F. \quad (5.38)$$

Вложения (5.37) являются следствием вложений $V_j \subset V_{j+1}$ ($j \geq 0$), а равенства (5.38) – следствиями соответственно предельного равенства (5.18) и равенства $\overline{\bigcup_{j \geq 0} V_j} = L_2(\mathbb{R}^2)$, которому удовлетворяют подпространства V_j $j \geq 0$, образующие КМА в $L_2(\mathbb{R}^2)$. На операторы $A_{h,n} = P_n A_h$ в (5.36) будем смотреть как на некоторые возмущения оператора A_h . Если на F ввести метризуемую локально выпуклую топологию τ , порожденную семейством преднорм $\{p_m\}$, $m \geq 0$ ($p_m(f) = \|P_m f\|$), то с учетом свойств оператора метрического проектирования получим для $m \geq n$:

$$\sup\{p_n(P_m A_h u - A_h u) : \|u\| \leq 1\} = 0. \quad (5.39)$$

Таким образом, последовательность операторов $\{A_{h,n}\}$ будет сходиться к оператору A_h в топологии τ -равномерной сходимости, определяемой с помощью семейства преднорм $\{p_n\}$:

$$\mathcal{A}_n(A_h) = \sup\{\|pr(A_h u, F_n)\| : \|u\| \leq 1\}. \quad (5.40)$$

Так как $\forall f \in F P_n f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$, то $P_n f_{\delta} \rightarrow f_{\delta}$ и последовательность $\{A_{h,n}\}$ будет сходиться к A_h в сильной операторной топологии ($\|A_{h,n}\| \rightarrow \|A_h\|$). Запишем базис (5.16) в виде вектора

$$\zeta(r, t) = \{\zeta_{0,0,0,0}(r, t), \zeta_{1,j,k,k'}(r, t), l = \overline{1,3}; j \geq 0, k, k' = \overline{0, 2^j - 1}\},$$

где $\zeta_{0,0,0,0}(r, t) = \varphi(r)\varphi(t)$, $\zeta_{1,j,k,k'}(r, t) = \varphi_{j,k}(r)\psi_{j,k'}(t)$, $\zeta_{2,j,k,k'}(r, t) = \psi_{j,k}(r)\varphi_{j,k'}(t)$, $\zeta_{3,j,k,k'}(r, t) = \psi_{j,k}(r)\psi_{j,k'}(t)$. Вводя дополнительно функции $\zeta_{0,j,k,k'}(r, t) = \varphi_{j,k}(r)\varphi_{j,k'}(t)$ ($j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}$) можем записать решение $u(r, t)$ из U_n уравнения (5.21) в виде разложения по базису $\zeta^{\circ}(r, t) = \{\zeta_{l,j,k,k'}(r, t), l = \overline{0,3}, j = \overline{0, j^*}, k, k' = \overline{0, 2^j - 1}\}$:

$$u(r, t) = \sum_{l=0}^3 \sum_{j=0}^{j^*} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{k'=0}^{2^j-1} x_{l,j,k,k'} \zeta_{l,j,k,k'}(r, t). \quad (5.41)$$

При этом $x_{0,j,k,k'} = 0$ ($j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}$), а остальные коэффициенты $x_{l,j,k,k'}$ подлежат определению. Из свойств вейвлет-функций следует, что $\langle \zeta_{l_1,j_1,k_1,k'_1}, \zeta_{l_2,j_2,k_2,k'_2} \rangle = 0$ при $(l_1 \neq l_2) \vee (j_1 \neq j_2) \vee (k_1 \neq k_2) \vee (k'_1 \neq k'_2)$. Обозначим через $U_{\sigma,n}^{\alpha}$ множество решений $u_{\sigma,n}^{\alpha}$ вариационной задачи (5.36), а коэффициенты разложения функций $u_{\sigma,n}^{\alpha}(r, t)$ в базисе $\zeta^{\circ}(r, t)$ через $x_{l,j,k,k'}^{\alpha,n}$, где $x_{0,j,k,k'}^{\alpha,n} = 0$ ($j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}$). Так как $U = \overset{1}{W}_2(Q_T)$, то в силу неравенств (5.20) коэффициенты $x_{l,j,k,k'}^{\alpha,n}$ должны удовлетворять условиям

$$|x_{l,j,k,k'}^{\alpha,n}| \leq 2^{-2j} \eta_j \quad (l = \overline{1,3}; j = \overline{0, j^*}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}), \quad (5.42)$$

где η_j – некоторая последовательность, для которой сходится ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^2$.

Функционал (5.36) при фиксированных σ, α, n является сильно выпуклым, поскольку сумма сильно выпуклого функционала $\alpha\Omega(u)$ и выпуклого функционала $\|A_{h,n}u - f_{\delta,n}\|$ ($f_{\delta,n} = P_n f_{\delta}$) дает сильно выпуклый функционал. При условии (5.42) множество U_n будет выпуклым, и поэтому множество $U_{\sigma,n}^{\alpha}$ состоит из единственного элемента $u_{\sigma,n}^{\alpha}$.

Из всего сказанного и теоремы 6.2.1 [47] следует β -сходимость множества $U_{\sigma,n}^{\alpha}$ к множеству U_{σ}^{α} решений вариационной задачи (5.34) при $n \rightarrow \infty$ (определение β -сходимости множества M_n к множеству M при $n \rightarrow \infty$ см. [47, с. 42]). В случае одноэлементных множеств $U_{\sigma,n}^{\alpha}$ и U_{σ}^{α} это означает сильную сходимость $u_{\sigma,n}^{\alpha}$ к u_{σ}^{α} в метрике пространства U .

Из (5.30), (5.31) и (5.35) находим

$$\|A_n u_\sigma^\alpha - f_\delta\|_F^2 \leq \delta + h \|u_\sigma^\alpha\|_U + (\delta + h\Omega(u_\sigma^\alpha))^2. \quad (5.43)$$

Обозначив через

$$I(u, f, \eta) = \int_{Q_T} \left[u \eta_t - \frac{c}{R - r_0} k(r, t) u_r \eta_r + \frac{ck(r, t)}{r_0 L + r(R - r_0)} u_r \eta + f_1(r, t) \eta_r + f_0(r, t) \right] dr dt - \int_{\Omega} \psi_0(r) \eta(r, 0) dr, \quad (5.44)$$

интегральное тождество (5.14) можно записать в виде равенства $I(u, f, \eta) = 0$, которое получается после интегрирования по частям в следующем равенстве:

$$\int_{Q_T} (Lu - f) \eta dr dt = 0. \quad (5.45)$$

Аналогичным образом после интегрирования по частям приходим к соотношениям

$$I(u, f_\delta, \eta) = \int_{Q_T} (A_n u - f_\delta) \eta dr dt, \quad u \in U, f_\delta \in F, \quad (5.46)$$

$$I(u, f_{\delta, n}, \eta) = \int_{Q_T} (A_{n, n} u - f_{\delta, n}) \eta dr dt, \quad u \in U_n, f_{\delta, n} \in F_n, \quad (5.47)$$

которые справедливы для любой функции $\eta(r, t)$ из $W_2^1(Q_T)$, равной нулю при $t = T$. Так как $u_{\sigma, n}^\alpha \rightarrow u_\sigma^\alpha$ в U -норме, то, принимая во внимание (5.18), получим $I(u_{\sigma, n}^\alpha, f_{\delta, n}, \eta) \rightarrow I(u_\sigma^\alpha, f_\delta, \eta)$ при $n \rightarrow \infty$. Множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в Q_T функций плотно в $L_2(Q_T)$, а $L_2(Q_T)$ плотно в $W_2^1(Q_T)$. В силу леммы дю Буа–Реймонда [48, с. 26], отсюда следует, что $\|A_{n, n} u_n - f_{\delta, n}\| = \|A_n u - f_\delta\|$ с точностью до $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ и что при независимом стремлении $\sigma \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ предельная функция $u(r, t)$ последовательности $u_{\sigma, n}^\alpha$ (при выборе параметра α из решения уравнения (5.35)) является об. решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи $A_{1,0}(Q_T)$.

5. Решение конечномерной аппроксимационной задачи.

Решение конечномерной вариационной задачи (5.36) с параметром α , определяемым из условия (5.35), будем искать в классе функций

$u(r, t) \in U_n = P_n U$. Если $j_{\max} = j^* + 1$ – детальный уровень разрешения по переменным r и t , то вейвлет-разложение (5.15) функции $u(r, t)$ можно записать в виде

$$u(r, t) = s_{0,0} \varphi_0(r) \varphi_0(t) + \sum_{j=0}^{j^*} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{k'=0}^{2^j-1} \{ d_{1,j,k,k'} \varphi_{j,k}(r) \psi_{j,k'}(t) + d_{2,j,k,k'} \psi_{j,k}(r) \varphi_{j,k'}(t) + d_{3,j,k,k'} \psi_{j,k}(r) \psi_{j,k'}(t) \}. \quad (5.48)$$

Запишем (5.48) в виде разложения по вейвлет-функциям переменной r и применим формулы дифференцирования вейвлет-представления функции одной переменной (см., например, [7]). Тогда для производной $\frac{\partial^n u}{\partial r^n}$ ($n \geq 1$) получим разложение по базису $\zeta^0(r, t)$ с коэффициентами $x_{1,j,k,k'}^{r^n}$ при $\zeta_{1,j,k,k'}^0$, которые линейно выражаются через коэффициенты $x_{1,j,k,k'}$ разложения (5.41):

$$x_{0,0,0,0}^{r^n} = T_{SS}^n(0, 0; 0, 0) x_{0,0,0,0} + 2T_{SD}^n(0, 0; 0, 0) x_{2,0,0,0};$$

$$x_{1,0,0,0}^{r^n} = T_{SD}^n(0, 0; 0, 0) x_{3,0,0,0} + T_{SS}^n(0, 0; 0, 0) x_{1,0,0,0};$$

$$x_{2,0,0,0}^{r^n} = T_{DD}^n(0, 0; 0, 0) x_{2,0,0,0}; \quad x_{3,0,0,0}^{r^n} = T_{DD}^n(0, 0; 0, 0) x_{3,0,0,0} + T_{DS}^n(0, 0; 0, 0) x_{1,0,0,0};$$

$$x_{0,j,k,k'}^{r^n} = \sum_{k''=0}^{2^j-1} T_{SD}^n(j, k; j, k'') x_{2,j,k'',k'};$$

$$x_{1,j,k,k'}^{r^n} = \sum_{k''=0}^{2^j-1} [T_{SS}^n(j, k; j, k'') x_{1,j,k'',k'} + T_{SD}^n(j, k; j, k'') x_{3,j,k'',k'}];$$

$$x_{2,j,k,k'}^{r^n} = \sum_{k''=0}^{2^j-1} T_{DD}^n(j, k; j, k'') x_{2,j,k'',k'};$$

$$x_{3,j,k,k'}^{r^n} = \sum_{k''=0}^{2^j-1} T_{DS}^n(j, k; j, k'') x_{1,j,k'',k'} + T_{DD}^n(j, k; j, k'') x_{3,j,k'',k'}$$

$$(j \geq 1; k, k' = 0, 2^j - 1). \quad (5.49)$$

Здесь T_{SS}^n , T_{SD}^n , T_{DS}^n , и T_{DD}^n – матричные элементы оператора дифференцирования n -го порядка от функции одной переменной, определяемые формулой [7]

$$T_{SS}^n(j, k; j, k') = \int \varphi_{j,k}(x) \frac{d^n}{dx^n} \varphi_{j,k'}(x) dx, \quad (5.50)$$

и замена нижних индексов $S \rightarrow D$ соответствует подстановке $\varphi \rightarrow \psi$ в правой части равенства (5.50).

Запишем теперь (5.48) в виде разложения по вейвлет-функциям переменной t . Применение формул дифференцирования вейвлет-представления приводит в этом случае к разложению для $\frac{\partial u}{\partial t}$ по базису $\zeta^0(r, t)$ с коэффициентами $x_{l,j,k,k'}^t$, выражающимися через $x_{l,j,k,k'}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{0,0,0,0}^t &= T_{SS}^1(0,0;0,0) \cdot x_{0,0,0,0} + 2T_{SD}^1(0,0;0,0) \cdot x_{1,0,0,0}; \\ x_{1,0,0,0}^t &= T_{DD}^1(0,0;0,0) \cdot x_{1,0,0,0}; \\ x_{2,0,0,0}^t &= T_{SD}^1(0,0;0,0) \cdot x_{3,0,0,0} + T_{SS}^1(0,0;0,0) \cdot x_{2,0,0,0}; \\ x_{3,0,0,0}^t &= T_{DD}^1(0,0;0,0) \cdot x_{3,0,0,0} + T_{DS}^1(0,0;0,0) \cdot x_{2,0,0,0}; \\ x_{0,j,k,k'}^t &= \left(\sum_{k''=0}^{2^j-1} T_{SD}^1(j,k';j,k'') \right) \cdot x_{1,j,k,k''}^t; \quad x_{1,j,k,k'}^t = \left(\sum_{k''=0}^{2^j-1} T_{DD}^1(j,k';j,k'') \right) \cdot x_{1,j,k,k''}^t; \\ x_{2,j,k,k'}^t &= \sum_{k''=0}^{2^j-1} \{ T_{SS}^1(j,k';j,k'') \cdot x_{2,j,k,k''}^t + T_{SD}^1(j,k';j,k'') \cdot x_{3,j,k,k''}^t \}; \\ x_{3,j,k,k'}^t &= \sum_{k''=0}^{2^j-1} \{ T_{DD}^1(j,k';j,k'') \cdot x_{2,j,k,k''}^t + T_{DD}^1(j,k';j,k'') \cdot x_{3,j,k,k''}^t \} \\ &\quad (j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Матричные элементы операторов дифференцирования будем вычислять следующим образом. Обозначим через $q_{j,l;j,l'} = \langle \varphi_{j,l} | T | \varphi_{j,l'} \rangle \int \varphi_{j,l}(x) \times T \varphi_{j,l'}(x) dx$ матричные элементы любого линейного оператора в вейвлет-базисе $\xi(x) = \{ \varphi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x), j \geq 0, k = \overline{0, 2^j - 1} \}$, которые соответствуют базисным функциям $\varphi_{j,k}(x)$, и через $q_{j,k}$ их значения при $j = j'$ и $\ell' - \ell = k$, т. е. $q_{j,k} = q_{j,\ell;j,\ell'} \Big|_{\ell' - \ell = k}$. Используя рекуррентные соотношения между скейлинг-функциями $\varphi_{j,k}$ на заданном и на более мелком уровне разрешения, получим следующее уравнение, связывающее матричные элементы $q_{j,\ell;j,\ell'}$ на соседних уровнях:

$$\begin{aligned} q_{j,k} \Big|_{k=\ell'-\ell} &= q_{j,\ell;j,\ell'} = \left\langle \sum_i h_i \varphi_{j+1,2\ell+i} \Big| T \Big| \sum_m h_m \varphi_{j+1,2\ell'+m} \right\rangle = \sum_i \sum_m h_i h_m q_{j+1,2\ell+k;j+1,2\ell'+m} = \\ &= \sum_i \sum_m h_i h_m q_{j+1,2k-i+m}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

В случае оператора дифференцирования $T = \frac{d^n}{dx^n}$ наряду с (5.52) можно получить уравнение, связывающее матричные элементы одного и того же уровня (будем обозначать их через $q_{j,\ell;j,\ell'}^{(n)}$), используя замену $2x = \tilde{x}$:

$$\begin{aligned} q_{j,k}^{(n)} \Big|_{k=\ell'-\ell} &= q_{j,\ell;j,\ell'}^{(n)} = \left\langle 2^{j/2} \sum_i h_i \varphi \left[2^{j/2} \cdot 2x - (2\ell + i) \right] \Big| \frac{d^n}{dx^n} \right\rangle \times \\ &\quad \times \left(2^{j/2} \sum_m h_m \varphi \left[2^{j/2} \cdot 2x - (2\ell' + m) \right] \right) = \\ &= 2^n \left\langle \left(\sum_i h_i 2^{j/2} \varphi \left[2^{j/2} \tilde{x} - (2\ell + i) \right] \right) \Big| \frac{d^n}{d\tilde{x}^n} \right\rangle \times \left(\sum_m h_m 2^{j/2} \varphi \left[2^{j/2} \cdot \tilde{x} - (2\ell' + m) \right] \right) = \\ &= 2^n \sum_i \sum_m h_i h_m q_{j,2\ell+i;2\ell'+m}^{(n)} = 2^n \sum_i \sum_m h_i h_m q_{j,2k-i+m}^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

При $j=0$ из (5.53) находим уравнение для $q_{0,k}^{(n)}$:

$$q_{0,k}^{(n)} = 2^n \sum_i \sum_m h_i h_m q_{0,2k-i+m}. \quad (5.54)$$

При выводе уравнения (5.53) опущена постоянная $\sqrt{2}$ в выражении (5.17) для $\varphi(x)$, поскольку уравнения (5.52) и (5.53) определяют искомые коэффициенты с точностью до нормировочного множителя, который легко получить из результата воздействия оператора T на полином заданной степени. Условие нормировки коэффициентов $q_{0,k}^{(n)}$ определяется как [7]

$$\sum_{k=1}^L k^n \cdot q_{0,k}^{(n)} = n!. \quad (5.55)$$

Используя это условие и соотношение $q_{0,-k}^{(n)} = (-1)^n q_{0,k}$, из (5.55) получим

$$q_{0,0}^{(n)} = -2^n \cdot n! / (2^n - 1), \quad q_{0,1}^{(n)} = n!, \quad q_{0,-1}^{(n)} = (-1)^n \cdot n!.$$

Коэффициенты $q_{1,k}^{(n)} (k=0, \pm 1)$ находятся из совместного решения уравнения (5.52) при $j=0, k=0, 1$ и уравнения (5.53) при $j=1, k=0$:

$$q_{1,0}^{(n)} = 2^n \cdot q_{0,0}^{(n)}, \quad q_{1,1}^{(n)} = 2q_{0,1}^{(n)}, \quad q_{1,-1}^{(n)} = 2(1 - 2^n)q_{0,0}^{(n)} - 2q_{0,1}^{(n)}.$$

Для определения $2^{j+1} - 1$ неизвестных $q_{j,k}^{(n)} (k=0, \pm 1, \dots, \pm(2^j - 1))$ при $j > 1$ получим на основе (5.52)–(5.53) следующую систему из $2^{j+1} - 1$

уравнений:

$$\begin{cases} q_{j-1,k}^{(n)} = \sum_{i=0}^L \sum_{m=0}^L h_i h_m q_{j,2k-i+m}^{(n)} (k=0, \pm 1, \dots, \pm(2^{j-1}-1)), \\ q_{j,k}^{(n)} = 2^n \sum_{i=0}^L \sum_{m=0}^L h_i h_m q_{j,2k-i+m}^{(n)} (k=\pm 1, \dots, \pm 2^{j-1}). \end{cases} \quad (5.56)$$

Таким образом могут быть вычислены все матричные элементы $T_{SS}^{(n)}(j, \ell; j, \ell')$ оператора $T = \frac{d^n}{dx^n}$. Остальные матричные элементы $T_{SD}^{(n)}(j, \ell; j, \ell')$, $T_{DS}^{(n)}(j, \ell; j, \ell')$ и $T_{DD}^{(n)}(j, \ell; j, \ell')$ вычисляются аналогичным образом. Например, для $T_{SD}^{(n)}(j, \ell; j, \ell')$ при $j \geq 0$ получаем выражение

$$T_{SD}^{(n)}(j, \ell; j, \ell') = 2^n \sum_{i=0}^L \sum_{m=0}^L h_i h_m q_{j,2\ell+i; j,2\ell'+m}^{(n)}. \quad (5.57)$$

Подстановкой $h_i \rightarrow g_i$ получаем из (5.57) формулы для $T_{DS}(j, \ell; j, \ell')$, а подстановки $h_i \rightarrow g_i$, $h_m \rightarrow g_m$ приводят к формулам для $T_{DD}^{(n)}(j, \ell; j, \ell')$.

При нахождении решения вариационной задачи (5.36) будем считать заданными вейвлет-разложения по базису $\zeta^0(r, t)$ функций $\frac{c}{R-r_0} k_\varepsilon(r, t)$,

$\frac{c}{R-r_0} \frac{\partial}{\partial r} k_\varepsilon(r, t)$, $\frac{ck_\varepsilon(r, t)}{r_0 L + r(R-r_0)}$ и $f_\delta(r, t)$ с коэффициентами $z_{\ell, j; k, k'}$, $z_{\ell, j; k, k'}^1$,

$\tilde{z}_{\ell, j; k, k'}$ и $y_{\ell, j; k, k'}$ соответственно. На основании формул (5.49) и (5.51) вейвлет-коэффициенты $x_{\ell, j; k, k'}^t$, $x_{\ell, j; k, k'}^r$, $x_{\ell, j; k, k'}^{r^2}$ функций u , u_r , u_{rr} линейно выражаются через компоненты вектора

$$x = \left\{ x_{0, j; k, k'}^{\alpha, n} \left(j = \overline{1, j^*} \right), x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, n} \left(\ell = \overline{1, 3}; j = \overline{1, j^*} \right), k, k' = \overline{0, 2^j - 1} \right\},$$

являющиеся искомыми вейвлет-коэффициентами функции $u(r, t)$. Поэтому функционал (5.36) представляет собой квадратичную функцию $J(x)$ с коэффициентами, зависящими от величин $z_{\ell, j; k, k'}$, $z_{\ell, j; k, k'}^1$, $\tilde{z}_{\ell, j; k, k'}$, $y_{\ell, j; k, k'}$ и величин

$$\alpha(\ell, j, k, k'; \ell_1, j_1, k_1, k_1'; \hat{\ell}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{k}') = \int_{Q_r} \zeta_{\ell, j; k, k'}(r, t) \cdot \zeta_{\ell_1, j_1; k_1, k_1'}(r, t) \cdot \zeta_{\ell, \hat{j}; \hat{k}, \hat{k}'}(r, t) dr dt,$$

$$\beta(\ell, j, k, k'; \ell_1, j_1, k_1, k_1'; \hat{\ell}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{k}'; \ell_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1, \hat{k}_1') = \int_{Q_r} \zeta_{\ell, j; k, k'}(r, t) \cdot \zeta_{\ell_1, j_1; k_1, k_1'}(r, t) \cdot \zeta_{\ell, \hat{j}; \hat{k}, \hat{k}'}(r, t) \times \zeta_{\ell_1, \hat{j}_1; \hat{k}_1, \hat{k}_1'}(r, t) dr dt$$

$$(\ell, \ell_1, \hat{\ell}, \hat{\ell}_1 = \overline{0, 3}; j, j_1, \hat{j}, \hat{j}_1 = \overline{0, j^*}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}; k_1, k_1' = \overline{0, 2^{j_1} - 1};$$

$$\hat{k}, \hat{k}' = \overline{0, 2^{\hat{j}} - 1}; \hat{k}_1, \hat{k}_1' = \overline{0, 2^{\hat{j}_1} - 1}). \quad (5.58)$$

Вычисление интегралов в правых частях выражений (5.58) сводится к нахождению соответственно интегралов от функций одного переменного $x = r$ и $x = t$:

$$\int_0^L \varphi(2^j x - k) \varphi(2^{\hat{j}} x - k_1) \varphi(2^{\hat{j}} x - \hat{k}) dx, \quad (5.59)$$

$$\int_0^L \varphi(2^j x - k) \varphi(2^{\hat{j}} x - k_1) \varphi(2^{\hat{j}} x - \hat{k}) \varphi(2^{\hat{j}} x - \hat{k}_1) dx.$$

Интегралы (5.59) представляются в виде сумм конечного числа постоянных величин, если аппроксимировать $\varphi(x)$ кусочно-постоянной функцией с помощью каскадного алгоритма [10].

Используя вейвлет-разложение (5.51), краевые условия (5.12) можно записать в виде

$$\sum_{\ell=0}^3 \sum_{j=0}^{j^*} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{k'=0}^{2^j-1} x_{\ell, j; k, k'} \cdot \zeta_{\ell, j; k, k'}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.60)$$

$$\sum_{\ell=0}^3 \sum_{j=0}^{j^*} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{k'=0}^{2^j-1} x_{\ell, j; k, k'} \cdot \zeta_{\ell, j; k, k'}(L, t) = 0, \quad 0 < t < T.$$

Каждое из уравнений (5.60), после умножения последовательно на $\varphi_{j, k'}(t)$ и $\psi_{j, k'}(t)$ и интегрирования по промежутку $[0, T]$, порождает $2^{j^*} - 1$ линейных уравнений относительно x . Обозначая левые части этих уравнений через $\hat{g}_i(x)$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\hat{g}_i(x) = 0 \quad (i = \overline{1, i_0}; i_0 = 2(2^{j^*} - 1)), \quad (5.61)$$

первые $2^{j^*} - 1$ уравнений которой являются следствием первого уравнения (5.60), а остальные $2^{j^*} - 1$ уравнений – следствием второго уравнения (5.60). Записывая каждое из уравнений (5.61) в виде совокупности неравенств $\hat{g}_i(x) \geq 0$ и $\hat{g}_i(x) \leq 0$ и вводя функции $g_i(x) = -\hat{g}_i(x)$ ($i = \overline{1, i_0}$), $g_{i_0+i}(x) = \hat{g}_i(x)$ ($i = \overline{1, i_0}$), получим систему линейных неравенств

$$g_\nu(x) \leq 0 \quad (\nu = \overline{1, \nu_0}; \nu_0 = 2i_0). \quad (5.62)$$

С учетом неравенств (5.42), которые представляются в виде двусторонних линейных неравенств

$$-2^{-2j} \cdot \eta_j \leq x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, n} \leq 2^{-2j} \cdot \eta_j \quad (\ell = \overline{1, 3}; j = \overline{0, j^*}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}), \quad (5.63)$$

задача (5.36) при фиксированных σ, α сведется к следующей задаче нелинейного программирования:

$$J(x) \rightarrow \inf, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^N; x \in X_0, g(x) \leq 0\}, \quad (5.64)$$

где

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^N, -2^{-2j} \cdot \eta_j \leq x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, n} \leq 2^{-2j} \cdot \eta_j (\ell = \overline{1, 3}; j = \overline{0, j^*}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}), \quad (5.65)$$

$\eta_j = O(j^{-(1+\gamma)/2})$, $\gamma > 0$; $g(x) = (g_1(x), \dots, g_{v_0}(x))$; \mathbb{R}^N – вещественное евклидово пространство размерности $N = \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} - 1\right) + 3 \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^{n+2} - 7)$, $n = j^*$.

Очевидно, что X – выпуклое множество, а функция $J(x)$ сильно выпукла (и, следовательно, строго выпукла) на X как сумма выпуклой и сильно выпуклой функций от x , порождаемых первым и вторым слагаемым в функционале (5.36). Тогда по теореме 4.2.1 [49] всякая точка локального минимума $J(x)$ одновременно является точкой ее глобального минимума на X и множество

$$X_* = \left\{x: x \in X, J(x) = J_* = \inf_{x \in X} J(x)\right\}$$

содержит не более одной точки. Так как, к тому же, по теореме 3.6.1 [40] задача $A_{1,0}(Q_T)$ однозначно разрешима в U_n при $k(r, t), f(r, t) \in F_n$, то множество X_* состоит из единственного элемента x_* . Принимая во внимание линейность функций $g_\nu(x)$ ($\nu = \overline{1, v_0}$) и применяя общий вариант теоремы Куна–Таккера ([49], теорема 4.8.5), заключаем, что для точки $x_* \in X_*$ необходимо существуют множители Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_{v_0}^*) \in \Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^{v_0} : \lambda_\nu \geq 0, \nu = \overline{1, v_0}\}$ такие, что пара (x_*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = J(x) + \langle g(x), \lambda \rangle, \quad x \in X_0, \lambda \in \Lambda_0. \quad (5.66)$$

В силу теоремы 4.8.1 [49] седловая точка (x_*, λ^*) дает решение x_* задачи (5.64), а именно $J_* = L(x_*, \lambda^*) = J(x_*)$.

Как известно [49], классическая функция Лагранжа (5.66) не очень хорошо «устроена» по переменной λ , что может привести к расходимости итерационных методов поиска седловых точек функции (5.66). В этой связи обычно строятся так называемые модифицированные функции Лагранжа (МФЛ), которые имеют то же множество седловых точек, что и функ-

ция (5.66), но обладающие лучшими свойствами. Следуя [50], рассмотрим следующую МФЛ

$$M(x, \lambda) = J(x) + \frac{1}{2A} \left[(\lambda + Ag(x))^+ \right]^2 - \frac{1}{2A} |\lambda|^2 \quad (5.67)$$

переменных $x \in X_0$, $\lambda \in \Lambda_0$, где A – произвольная фиксированная положительная константа;

$$a^+ = P_{\mathbb{R}_+^{v_0}}(a) = (a_1^+, \dots, a_{v_0}^+), \quad a_\nu^+ = \max\{a_\nu, 0\}, \quad v = \overline{1, v_0}$$

– проекция точки $a \in \mathbb{R}^{v_0}$ на положительный октант $\mathbb{R}_+^{v_0} = \{a \in \mathbb{R}^{v_0} : a \geq 0\}$.

Так как $J(x)$, $g(x) \in C^1(X_0)$, функция (5.67) непрерывно дифференцируема по x и λ , причем

$$\frac{\partial M}{\partial x} = M_x(x, \lambda) = J'(x) + (g'(x))^T (\lambda + Ag(x))^+, \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = M_\lambda(x, \lambda) = \frac{1}{A} \left[(\lambda + Ag(x))^+ - \lambda \right], \quad x \in X_0, \lambda \in \mathbb{R}^{v_0},$$

где $g'(x)$ – матрица порядка $v_0 \times N$, составленная из производных $\frac{\partial g_\nu(x)}{\partial x_i}$

(x_i – i -я компонента вектора $x = (x_1, \dots, x_N)$); T – символ транспонирования матрицы. Вследствие выпуклости на X_0 функций $J(x)$, $g_\nu(x)$ функция $M(x, \lambda)$ выпукла (вниз) по переменной x на множестве X_0 при любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}^{v_0}$ и вогнута (вверх) по переменной λ на множестве Λ_0 при любом фиксированном $x \in X_0$.

Алгоритм поиска седловой точки функции (5.67) состоит в следующем [50]. В качестве начального приближения берется любая пара (x_0, λ_0) , $x_0 \in X_0$, $\lambda_0 \in \Lambda_0$. Пусть k -е приближение $x_k \in X_0$, $\lambda_k \in \Lambda_0$ уже известно. Составим функцию

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2} |x - x_k|^2 + \alpha M(x, \lambda_k), \quad x \in X_0, \quad (5.69)$$

где α – некоторое положительное число, являющееся параметром метода. Найдем решение x_{k+1} задачи минимизации:

$$x_{k+1} \in X_0, \quad \Phi_k(x_{k+1}) = \inf_{X_0} \Phi_k(x). \quad (5.70)$$

После определения x_{k+1} точка λ_{k+1} находится по формуле

$$\lambda_{k+1} = (\lambda_k + Ag(x_{k+1}))^+. \quad (5.71)$$

Доказательство сходимости итерационного процесса (5.70)–(5.71) излагается подробно в [49], с.347. Так как функции $J(x)$, $g_v(x)$ ($v=1, \nu_0$) выпуклы на выпуклом замкнутом множестве X_0 из \mathbb{R}^N и принадлежат классу $C_1(X_0)$, $J_* > -\infty$, $X_* \neq \emptyset$, и функция Лагранжа (5.66), как было указано выше, имеет непустое (точнее, одноэлементное) множество седловых точек $(x_*, \lambda^*) \in X_0 \times \Lambda_0$, то последовательность (x_k, λ_k) , определяемая формулами (5.70)–(5.71), при любом выборе начальных $(x_0, \lambda_0) \in X_0 \times \Lambda_0$ и любых фиксированных параметрах $\alpha > 0$, $A > 0$ сходится к седловой точке функции Лагранжа (5.66) ([49] теорема 5.11.1).

Достаточно эффективным методом решения задачи (5.70) на множестве X_0 , определяемом неравенствами (5.65), является метод сопряженных градиентов [51], обобщенный в [52] на случай экстремальных задач с простыми ограничениями $a \leq x \leq b$. При каждом фиксированном $k \geq 1$ функция $\Phi_k(x)$ сильно выпукла на X_0 как сумма сильно выпуклой функции $\frac{1}{2}|x - x_k|^2$ и выпуклой по x функции $M(x, \lambda_k)$, кроме того, градиент Φ'_k удовлетворяет условию Липшица. Указанные свойства гладкости $\Phi_k(x)$ обеспечивают сходимость итерационной последовательности к точке минимума x^* со скоростью геометрической прогрессии ([51] теорема 2). При этом, в отличие от метода Ньютона, не требуется никаких предположений о близости начального приближения x^0 к решению. Решение конечномерной задачи (5.36) при $\alpha = 0$ определяет величину μ_σ из (5.35).

Таким образом, получено теоретическое обоснование вейвлет-метода решения задачи нестационарной фильтрации с разрывными коэффициентами и неточными данными. Доказано, что найденное этим методом приближенное решение задачи устойчиво и сходится в метрике пространства функций, квадратично интегрируемых вместе с об. производными первого порядка, к об. решению, удовлетворяющему дифференциальному уравнению и начальному условию в смысле интегрального тождества и краевым условиям в среднем квадратичном.

Для сравнения отметим, что об. решение задачи $A_{1,0}(Q_T)$ может быть получено и другими способами. Если для его нахождения, следуя [40], применить метод Галеркина с системой базисных функций, зависящих только от r , и с коэффициентами разложения в виде функций от t , определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, то полученное приближенное решение будет устойчиво в норме пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ по отношению к вариациям коэффициентов правой части уравнения (5.10). Этот результат доказывается в [40] при условии, что последовательность

функций $k_m(r, t)$, аппроксимирующих $k(r, t)$, равномерно ограничена и сходится почти всюду на Q_T к функции $k(r, t)$ при $m \rightarrow \infty$. Поскольку сходимость в среднем квадратичном не влечет за собой сходимость почти всюду, полученное с помощью вейвлет-метода об. решение задачи $A_{1,0}(Q_T)$ применимо к более широкому классу разрывных, квадратично-интегрируемых функций $k(r, t)$.

Предложенный в работе метод можно использовать для нахождения устойчивых решений ряда других задач для линейных и квазилинейных уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами в условиях неточно заданных входных данных. Вейвлет-метод позволяет получить аналитический вид решения в виде отрезка вейвлет-ряда, в то время как применение явных и неявных разностных схем [39, 53] или проекционно-сеточных схем [54] дает лишь численное решение задачи на некотором сеточном разбиении множества переменных. Для каждой конкретной задачи должны подбираться такие схемы, которые приводят к устойчивым и, следовательно, сходящимся значениям сеточных функций при стремлении к нулю длин сторон ячеек сетки. Кроме того, должен существовать разностный аналог «энергетических оценок», который гарантирует устойчивость, что приводит к необходимости использования интегрального тождества, соответствующего дифференциальному уравнению. На основе этого тождества определяется «обобщенное решение» (или, что то же, решение из «энергетического пространства») и обеспечивается правильная аппроксимация уравнений и краевых условий в окрестности разрывов их коэффициентов [39, 54].

Следует отметить, что решение проблемы устойчивости связано с определенными трудностями и дополнительными ограничениями. В методе конечных разностей этот вопрос решается путем надлежащего выбора регуляризатора разностной схемы [53], а в проекционно-сеточном методе (методе конечных элементов) приводит к необходимости выполнения условия равномерной линейной независимости или сильной минимальности базиса [54], что сужает класс используемых базисных систем.

5.2. Метод решения обратной коэффициентной задачи

Задача идентификации фильтрационных и емкостных параметров при нестационарной фильтрации флюидов является одной из актуальных проблем подземной гидромеханики и относится к классу обратных коэффициентных задач для уравнений параболического типа. Характерной особенностью обратных задач математической физики является некорректность исходной постановки, связанная с возможной неоднозначностью и неустойчивостью их решения, что требует разработки специальных ма-

тематических методов и вычислительных алгоритмов. Основой решения обратных задач является математическая «теория регуляризации» [41].

Частные постановки задачи идентификации фильтрационно-емкостных параметров пластов для уравнения нестационарной фильтрации рассмотрены в [55] путем использования специальных граничных режимов, при которых задачи идентификации в автоматической постановке допускают явное решение [56].

В более общей постановке задачи идентификации фильтрационных параметров пласта по данным нестационарного притока жидкости к скважинам исследованы в работах [57, 58]. При этом решение задачи нахождения коэффициента гидропроводности ищется в классе кусочно-постоянных функций при конечном априори заданном числе зон однородности. В условиях гладкости коэффициентов прямой задачи, обеспечивающих существование и единственность ее классического решения, приближенное решение обратной задачи получено в [57, 58] с помощью методов теории возмущений [59] и регуляризирующих по А. Н. Тихонову алгоритмов [41] с выбором параметра регуляризации по критерию невязки. Однако, как показано в [60], применяемые в случае линейных операторов уравнения, соответствующие принципу невязки и обобщенному принципу невязки, могут не иметь решений для задач с нелинейными операторами. Вопросы устойчивого приближенного решения параметрической вариационной задачи для нелинейного операторного уравнения исследованы в [61] с применением общей схемы проекционного метода.

В работах [62, 63] для решения обратных задач теплообмена, сформулированных для общего уравнения теплопроводности, разработаны алгоритмы итеративной регуляризации, в которых регуляризация осуществляется прерыванием итерационного процесса при условии согласования номера итерации с погрешностью исходных данных. Строгое обоснование этих алгоритмов получено в [62, 63] только для линейных постановок обратных задач. К таким задачам, в частности, относятся обратные коэффициентные задачи с неизвестной правой частью исходного уравнения. Для обратной коэффициентной задачи по определению неизвестных коэффициентов исходной задачи теплопроводности оператор A обратной задачи является, вообще говоря, нелинейным как для линейного, так и для нелинейного уравнения теплопроводности. Поэтому основной проблемой, возникающей при решении обратных задач, является проверка дифференцируемости оператора A . Построение производной Фреше оператора A осуществляется в [57, 58] и в [62, 63] методами теории возмущений [59]. Для задачи теплопроводности с переменными по x и t коэффициентами требуемая для дифференцируемости оператора A гладкость решения обратной задачи и соответствующей сопряженной задачи обеспечивается

в [62, 63] путем привлечения результатов [64] о существовании классического решения для уравнения второго порядка параболического типа с кусочно-непрерывными коэффициентами.

В настоящей работе исследуются коэффициентные (с неизвестными коэффициентами прямой задачи) обратные задачи для линейного нестационарного уравнения фильтрации в случае радиальной симметрии с переменными по r и t и, вообще говоря, разрывными коэффициентами. Под решением $u(r, t)$ прямой задачи понимается обобщенное решение, удовлетворяющее уравнению в смысле интегрального тождества и обладающее обобщенными производными по Соболеву [43] u_r , u_{rr} и u_t . При этом, по сравнению с работами [57, 58, 62, 63], существенно ослабляются условия дифференцируемости оператора обратной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс нестационарной фильтрации плоскорадиального осесимметричного потока в круговом пласте радиуса R , в центре которого имеется совершенная скважина радиуса r_0 , описываемый дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r, t) r \frac{\partial p(r, t)}{\partial r} \right) = \mu \frac{\partial p(r, t)}{\partial t}, \quad r_0 < r < R, \quad 0 < t < T, \quad (5.72)$$

при начальном условии

$$p(r, 0) = \psi_0(r), \quad r_0 < r < R, \quad (5.73)$$

и краевых условиях

$$2\pi \frac{k(r, t)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = q(t), \quad 0 < t < T, \quad (5.74)$$

$$p(r, t) \Big|_{r=R} = p_m, \quad 0 < t < T. \quad (5.75)$$

Здесь $p(r, t)$ – давление жидкости на окружности радиуса r в момент времени t ; p_m – давление на контуре пласта; $q(t)$ – дебит скважины; $k(r, t)$ – проницаемость пласта; μ – вязкость жидкости.

Требуется определить фильтрационный параметр $k(r, t)$ при заданных μ , $\psi_0(r)$, $q(t)$, p_m исходя из условия минимизации функционала

$$J(k) = \int_0^T [p(r_0, t) - y_0(t)]^2 dt, \quad (5.76)$$

где $y_0(t)$ – заданная неотрицательная функция из $L_2[0, T]$, представляющая собой наблюдаемое значение забойного давления.

Коэффициентная обратная задача фильтрации (5.72)–(5.76) является некорректно поставленной задачей, для приближенного решения которой необходимо построить устойчивый алгоритм исходя из фундаментального понятия «регуляризирующего алгоритма» (РА) [41].

Функция $W(r, t) = \frac{k(r, t)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$ из (5.74) представляет собой скорость

фильтрации. Из физических соображений ясно, что при $r = R$ наряду с равенством (5.75) будет выполняться также равенство

$$W(r, t)|_{r=R} = 0. \quad (5.77)$$

Для задачи (5.72)–(5.76) будем полагать выполненными следующие условия:

1⁰. $\psi_0(r) \in W_2^1[r_0, R]$, т. е. $\psi_0(r)$ квадратично-интегрируема на $[r_0, R]$ вместе с обобщенной производной (сокращенно об. производной) по Соболеву и обращается в нуль при $r = r_0$ и $r = R$.

2⁰. $q(t)$ и $q'(t)$ квадратично-интегрируемы на $[0, T]$.

3⁰. $v_1 < k(r, t) < v_2$, $v_1 > 0$, $(r, t) \in \overline{Q_T}$, $\overline{Q_T}$ – замыкание области $Q_T = (r_0, R) \times (0, T)$ и $k'(0, t)$ существенно ограничена на $(0, T)$.

4⁰. $\text{vrai max}_{Q_T} \left| \frac{\partial k(r, t)}{\partial r} \right| \leq v_3 < \infty$.

5⁰. $\text{vrai max}_{Q_T} \left| \frac{\partial k(r, t)}{\partial t} \right| \leq \mu_1 < \infty$.

Подстановка $u(r, t) = p(r, t) - g(r, t)$ с функцией $g(r, t) = -\frac{R\mu}{4\pi} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 \times$

$\times \frac{q(t)}{k(r_0, t)} + p_{n1}$ приводит к однородному условию $\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$. Обозначим

$u_0(r) = \psi_0(r) - g(r, 0)$, $y(t) = y_0(t) - g(r_0, t)$ и перейдем к новой переменной \tilde{r} путем замены $r = r(\tilde{r}) = r_0 + (R - r_0) \cdot \frac{\tilde{r}}{L}$ (значение L будет определено в п. 5). Сохраняя после данной замены прежние обозначения $u(r, t)$,

$u_0(r)$ и $k(r, t)$ для функций $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$, $u_0(r)$ и $k(r, t)$, получим для $u(r, t)$ следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(a_{11}(k, r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + b_1(k, r, t) \frac{\partial u}{\partial r} = f(k, r, t), \quad (r, t) \in Q_T, \quad (5.78)$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < r < L, \quad (5.79)$$

$$\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.80)$$

$$u(r, t)|_{r=L} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.81)$$

$$J(k) = \int_0^T [u(0, t) - y(t)]^2 dt. \quad (5.82)$$

Здесь

$$a_{11}(k, r, t) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{L}{R - r_0} \right)^2 \cdot k(r, t),$$

$$b_1(k, r, t) = \frac{1}{\mu} \frac{L^2 k(r, t)}{(R - r_0)[r_0 L + r(R - r_0)]},$$

$$f(k, r, t) = \frac{\partial f_1(k, r, t)}{\partial r} - f_0(k, r, t),$$

$$f_1(k, r, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{L}{R - r_0} \right)^2 \left[1 - \frac{r_0 L + r(R - r_0)}{RL} \right] \frac{k(r, t)}{k(0, t)} \cdot q(t),$$

$$f_0(k, r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{L^2}{(R - r_0)[r_0 L + r(R - r_0)]} \cdot \left[1 - \frac{r_0 L + r(R - r_0)}{RL} \right] -$$

$$\frac{R\mu}{4\pi} \left[1 - \frac{r_0 L + r(R - r_0)}{RL} \right]^2 \left(\frac{q'(t)}{k(0, t)} - \frac{k'(0, t)}{k^2(0, t)} \cdot q(t) \right). \quad (5.83)$$

Из условия (5.77) находим, что

$$\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=L} = 0, \quad 0 < t < T. \quad (5.84)$$

2. Существование и единственность решения прямой задачи. Задачу нахождения функции $u(r, t)$, удовлетворяющей уравнению (5.78) и начально-краевым условиям (5.79)–(5.81) при заданной функции проницаемости $k(r, t)$, назовем прямой задачей фильтрации (сокращенно ПЗФ). При исследовании разрешимости ПЗФ будем пользоваться введенными в [39, 65] функциональными пространствами $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, $W_2^{2,1}(Q_T)$, $V_2(Q_T)$ и $V_2^{1,0}(Q_T)$. Под решением ПЗФ будем понимать обобщенное решение в смысле определения из [39, 65]. А именно обобщенным решением (сокращенно об. решением) из $V_2^{1,0}(Q_T)(W_2^{1,0}(Q_T))$ ПЗФ будем называть

функцию $u(r,t)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)(W_2^{1,0}(Q_T))$, удовлетворяющую уравнению (5.78) и начальному условию (5.79) в смысле интегрального тождества

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + a_{11}(k,r,t)u_r\eta_r + b_1(k,r,t)u_r\eta) drdt = \int_{\Omega} u_0(r)\eta(r,0)dr + \int_{Q_T} (f_0\eta - f_1\eta_r) drdt \quad (5.85)$$

при любой функции $\eta(r,t)$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t=T$. Краевые условия (5.80)–(5.81) при этом будут удовлетворяться в «среднем квадратичном».

Вопросы существования и единственности в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ об. решения краевых задач для уравнения (5.78) исследованы в [39, 40]. В [39] доказано, что любое об. решение из $W_2^{1,0}(Q_T)$ каждой из этих задач фактически является ее об. решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и в этих классах справедлива теорема единственности. Из замечания 6.3 к теореме 3.6.1 [40] следует в частности, что при условиях 1^0-5^0 об. решение из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (5.78)–(5.81) будет принадлежать $W_2^{2,1}(Q_T)$.

В отличие от первой краевой задачи, для которой в [40] на основе первого и второго энергетических неравенств получены оценки решения в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$, построение аналогичных оценок для об. решения краевых задач для уравнения (5.78) на основе соответствующих энергетических неравенств в случае краевых условий 2-го и 3-го рода становится проблематичным ввиду следующих обстоятельств. При условиях 3^0-4^0 выполняются все условия теоремы 3.10.1 [65], которая обеспечивает существование об. решения $\bar{u}(r) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $\Omega = (0, L)$ для эллиптического уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(a_{11}(k(r,\bar{t}), r, \bar{t}) \frac{\partial u(r,\bar{t})}{\partial r} \right) + b_1(k(r,\bar{t}), r, \bar{t}) \frac{\partial u(r,\bar{t})}{\partial r} = f(k(r,\bar{t}), r, \bar{t}), \quad (5.86)$$

получаемого из (5.78) при фиксированном значении $t = \bar{t}$, $\bar{t} \in (0, T)$. Это решение, определенное в любой внутренней подобласти Ω' области Ω , имеет об. производные второго порядка, квадратично суммируемые по $\forall \bar{\Omega}'' \subset \Omega'$, и удовлетворяет уравнению (5.86) для почти всех r из Ω' . Однако при этом не гарантируется существование об. производных u_r и u_{rr} вблизи границы S области Ω и, стало быть, принадлежность $\bar{u}(r)$ к пространству $W_2^2(\Omega)$ (как это имеет место для задачи Дирихле).

Выведем оценки в $W_2^{2,1}(Q_T)$ для задачи 1^0-5^0 без использования второго энергетического неравенства.

Оценки для $u(r,t)$ по $V_2(Q_T)$ -норме можно получить, предполагая выполненными условия 1^0-4^0 . В самом деле, обозначим $\mathcal{L}u = \mathcal{L}_0u + b_1 \cdot u_r$, $\mathcal{L}_0u = u_t - \frac{\partial}{\partial r}(a_{11}u_r)$ и рассмотрим интеграл $\int_{Q_t} \mathcal{L}_0u \cdot u drdt$, $Q_t = \Omega \times (0, t)$:

$$\int_{Q_t} \mathcal{L}_0u \cdot u drdt = \int_{Q_t} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2) \right] drdt - \int_0^t a_{11}u_r \cdot u|_{r=0}^{r=L} dt + \int_{Q_t} a_{11}u_r^2 drdt.$$

Откуда, полагая $\bar{v}_1 = v_1\mu^{-1}[L/(R-r_0)]^2$, с учетом условий (5.81), (5.84) находим

$$\int_{\Omega} u^2(r,t)dr + 2\bar{v}_1 \int_{Q_t} u_r^2 drdt \leq \int_{\Omega} u^2(r,0)dr + \int_0^t \int_{\Omega} u^2(r,t)drdt + \int_{Q_t} (\mathcal{L}_0u)^2 drdt, \quad (5.87)$$

$$\int_{Q_t} \mathcal{L}_0u \cdot u drdt \leq \int_{Q_t} \mathcal{L}u \cdot u drdt + \int_{Q_t} \bar{b}_1 u_r drdt \leq \leq \frac{1}{2} \left[\lambda_1 \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_t}^2 + \frac{1}{\lambda_1} \|u\|_{2,Q_t}^2 + \frac{\bar{b}_1}{\lambda_2} \|u_r\|_{2,Q_t}^2 + \lambda_2 \|u\|_{2,Q_t}^2 \right], \quad (5.88)$$

где λ_1, λ_2 – положительные числа; $\bar{b}_1 = Lv_2[\mu r_0(R-r_0)]^{-1}$.

Выберем λ_2 так, чтобы $\lambda_3 = 2\bar{v}_1 - \bar{b}_1(2v_2)^{-1} > 0$. Тогда из (5.87) и (5.88) получим

$$\int_{\Omega} u^2(r,t)dr + \lambda_3 \int_{Q_t} u_r^2 drdt \leq \int_{\Omega} u^2(r,0)dr + \left(1 + \frac{1}{2\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2} \right) \int_0^t \int_{\Omega} u^2(r,t)drdt + \frac{\lambda_1}{2} \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_t}^2. \quad (5.89)$$

Пусть

$$z(t) = \int_0^t \int_{\Omega} u^2(r,t)drdt,$$

$$\frac{dz}{dt} = \int_{\Omega} u^2(r,t)dr, \quad \mathcal{F}(t) = \int_{\Omega} u^2(r,0)dr + \frac{\lambda_1}{2} \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_t}^2, \quad c = 1 + \frac{1}{2\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2}.$$

Применяя лемму 2.5.5 [40], получим

$$\int_0^t \int_{\Omega} u^2(r,t) dr dt \leq \frac{1}{c} (e^{ct} - 1) \cdot \mathcal{F}(t), \quad \int_{\Omega} u^2(r,t) dr \leq e^{ct} \cdot \mathcal{F}(t). \quad (5.90)$$

Из (5.89) следует неравенство

$$\int_{Q_t} u_r^2 dr dt \leq \frac{1}{\lambda_3} e^{ct} \cdot \mathcal{F}(t),$$

суммируя которое со вторым неравенством в (5.90), получим

$$\int_{\Omega} u^2(r,t) dr + \int_{Q_t} u_r^2 dr dt \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_3}\right) e^{ct} \mathcal{F}(t),$$

откуда для нормы $\|u\|_{Q_T}$ в пространстве $V_2(Q_T)$, определяемой как

$$\|u\|_{Q_T} = \text{vrai max}_{t \in [0, T]} \|u(r,t)\|_{2,\Omega} + \|u_r(r,t)\|_{2,Q_T},$$

получим оценку

$$\|u\|_{Q_T} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right) e^{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\lambda_4} + \frac{\lambda_2}{2}\right)T} \left(\|u_0(r)\|_{2,\Omega} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_T}\right). \quad (5.91)$$

Из (5.91) заключаем, что об. решение из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (5.78)–(5.81) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{Q_T} \leq M_1 \|k(r,t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + M_2 \|u_0(r)\|_{2,\Omega}, \quad M_1, M_2 > 0. \quad (5.92)$$

В самом деле, интегральное тождество (5.85) получается с помощью интегрирования по частям в соотношении

$$\int_{Q_T} \mathcal{L}u \cdot \eta dr dt = \int_{Q_T} \left(\frac{\partial f_1}{\partial r} + f_0\right) dr dt \quad (5.93)$$

с учетом краевых условий (5.80), (5.84) принадлежности $\eta(r,t)$ к $W_2^{1,0}(Q_T)$ и условия $\eta(r,t)|_{t=T} \equiv 0$.

Принимая во внимание плотность в $L_2(Q_T)$ множества всех бесконечно дифференцируемых финитных в Q_T функций, в силу леммы дю Буа–Реймонда [48, с. 26] и из (5.93) заключаем, что локально суммируемая в Q_T функция $\mathcal{L}u - f$ почти всюду в Q_T обращается в нуль и, следовательно, $\mathcal{L}u$ эквивалентна f в $L_2(Q_T)$.

Пусть теперь наряду с условиями 1^0-4^0 выполняется условие 5^0 . Рассмотрим интеграл $\int_{Q_t} \mathcal{L}u \cdot u_t dr dt$ и преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} \mathcal{L}u \cdot u_t dr dt &= \int_{Q_t} \left[u_t - \frac{\partial}{\partial r} (a_{11} u_r) + b_1 u_r \right] u_t dr dt = \int_{Q_t} u_t^2 dr dt - \int_0^t a_{11} u_r \cdot u_{rr} \Big|_{r=0}^{r=L} dt + \\ &+ \int_{Q_t} a_{11} u_r \cdot u_{rr} dr dt + \int_{Q_t} b_1 u_r \cdot u_t dr dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{11} \cdot u_r^2 \Big|_{t=0}^{t=t} dr + \\ &+ \int_{Q_t} \left(u_t^2 - \frac{1}{2} a_{11} u_r^2 + b_1 u_r \cdot u_t \right) dr dt. \end{aligned}$$

Откуда, полагая $\mu_2 = \mu_1 + \bar{b}_1^2 \cdot \lambda_4$, $\bar{v}_2 = v_2 \cdot \mu^{-1} [L/(R-r_0)]^2$, $\lambda_4, \lambda_5 > 0$ и $\lambda_6 = 1 - (\lambda_4^{-1} + \lambda_5^{-1}) > 0$, получим

$$\lambda_6 \int_{Q_t} u_t^2 dr dt + \frac{\bar{v}_1}{2} \|u_r\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{\bar{v}_2}{2} \|u_r(r,0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \mu_2 \|u_r(r,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \lambda_5 \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_t}^2. \quad (5.94)$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{2\mu_2}{v_1}, \quad z(t) = \frac{\bar{v}_1}{2} \int_0^t \|u_r(r,\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau, \quad \frac{\bar{v}_2}{2} \|u_r(r,0)\|_{2,\Omega}^2 + \lambda_5 \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_t}^2 = \mathcal{F}_1(t).$$

На основании леммы 2.5.5 [40] из (5.94) будем иметь

$$\frac{\bar{v}_1}{2} \|u_r(r,t)\|_{2,\Omega}^2 + \lambda_6 \|u_t\|_{2,Q_t}^2 \leq e^{c_1 t} \cdot \mathcal{F}_1(t). \quad (5.95)$$

Тогда из (5.95) получим

$$\|u_t\|_{2,Q_t}^2 \leq \frac{1}{\lambda_6} e^{\frac{2\mu_2}{v_1} t} \times \left[\frac{v_2}{2} \|u_0(r)\|_{2,\Omega}^2 + \lambda_5 \|\mathcal{L}u\|_{2,Q_t}^2 \right]. \quad (5.96)$$

Как показано при выводе неравенства (5.92), $\mathcal{L}u$ совпадает с f почти всюду в $L_2(Q_T)$. Поэтому из (5.96) заключаем, что $u_t \in L_2(Q_T)$ и

$$\|u_t\|_{2,Q_T} \leq M_3 \|k(r,t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + M_4 \|u_0(r)\|_{2,\Omega}, \quad M_3, M_4 > 0. \quad (5.97)$$

Из равенства $\mathcal{L}u = u_t - (a_{11,r} \cdot u_r + a_{11} \cdot u_{rr}) + b_1 u_r$ теперь следует, что $u_{rr} \in L_2(Q_T)$ и

$$\|u_{rr}\|_{2,Q_T} \leq M_5 \|k(r,t)\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + M_6 \|u_0(r)\|_{2,\Omega}, \quad M_5, M_6 > 0. \quad (5.98)$$

Итак, при условиях 1^0-5^0 об. решение $u(r,t)$ из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (5.78)–(5.81) принадлежит пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Отметим, что в работах [62, 63] при решении обратных задач для линейного уравнения теплопроводности используются оценки в $W_2^{2,1}(Q_T)$ решения прямой задачи, полученные в [40, с. 388] для гладких коэффициентов уравнения, а именно при условии непрерывности в \bar{Q}_r функций $k(r, t)$ и $\frac{\partial k(r, t)}{\partial r}$.

3. Дифференцируемость оператора обратной задачи. Обобщенное решение $u(r, t)$ задачи (5.78)–(5.81) определяет при $r = 0$ функцию $u(0, t)$, зависящую неявным образом от $k(r, t)$, т. е. $u(0, t) = Ak(r, t)$, где A – некоторый нелинейный оператор. Обратную задачу фильтрации (сокращенно ОЗФ), сформулированную в п. 1, можно тогда записать в виде операторного уравнения I рода

$$Ak(r, t) = y(t), \quad (5.99)$$

при этом равенство в (5.99) понимается в смысле эквивалентности в $L_2[0, T]$ левой и правой части. Оператор A описывается краевой задачей:

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(a_{11}(k, r, t) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right) + b_1(k, r, t) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = f(k, r, t), \quad (r, t) \in Q_T, \quad (5.100)$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < r < L, \quad (5.101)$$

$$\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.102)$$

$$u(r, t)|_{r=L} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.103)$$

$$Ak(t) = u(0, t), \quad 0 < t < T. \quad (5.104)$$

Полагая, что $k(r, t) \in W_2^1(Q_T)$, дадим $k(r, t)$ малое по $W_2^1(Q_T)$ -норме приращение $\Delta k(r, t)$, при котором функция $k(r, t) + \Delta k(r, t)$ будет по-прежнему удовлетворять условиям 3^0 – 5^0 . Обозначив соответствующее приращение функции $u(r, t)$ через $\Delta u(r, t)$, запишем задачу для $A(k + \Delta k)$:

$$(u + \Delta u)_t = \left\{ a_{11}(k + \Delta k, r, t) (u + \Delta u)_r \right\}_r + b_1(k + \Delta k, r, t) (u + \Delta u)_r + f(k + \Delta k, r, t), \quad (r, t) \in Q_T, \quad (5.105)$$

$$u(r, 0) + \Delta u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < r < L, \quad (5.106)$$

$$\left. \frac{\partial (u + \Delta u)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.107)$$

$$(u + \Delta u)|_{r=L} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.108)$$

$$A(k + \Delta k)(t) = u(0, t) + \Delta u(0, t), \quad 0 < t < T. \quad (5.109)$$

В силу линейности a_{11} и b_1 по k из (5.105) имеем

$$u_t + \Delta u_t = \left\{ (a_{11}(k, r, t) + a_{11}(\Delta k, r, t)) (u_r + \Delta u_r) \right\}_r + (b_1(k, r, t) + b_1(\Delta k, r, t)) (u_r + \Delta u_r) + f(k + \Delta k, r, t).$$

Откуда для приращения оператора $A(k + \Delta k) - Ak$ получим задачу:

$$\Delta u_t - \left\{ a_{11}(k + \Delta k, r, t) \Delta u_r \right\}_r + b_1(k + \Delta k, r, t) \Delta u_r = \Phi(k, \Delta k, r, t), \quad (r, t) \in Q_T, \quad (5.110)$$

$$\Delta u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < L, \quad (5.111)$$

$$\Delta u_r(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.112)$$

$$\Delta u(r, 0) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.113)$$

$$A(k + \Delta k) - Ak = \Delta u(0, t), \quad (5.114)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(k, \Delta k, r, t) = & \frac{1}{\mu} \left(\frac{L}{R - r_0} \right)^2 \cdot \left\{ \Delta k(r, t) u_r \right\}_r - \frac{1}{\mu (R - r_0)} \left[r_0 L + r(R - r_0) \right] \times \\ & \times \Delta k(r, t) \cdot u_r + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{L}{R - r_0} \right)^2 \left\{ \left[1 - \frac{r_0 L + r(R - r_0)}{L^2} \right] (k(r, t) + \Delta k(r, t)) \right\}_r \times \\ & \frac{q(t)}{k(0, t) + \Delta k(0, t)} + \frac{R\mu}{4\pi} \left[1 - \frac{r_0 L + r(R - r_0)}{RL} \right]^2 \times \\ & \times \left[\frac{q'(t)}{k(0, t) + \Delta k(0, t)} - \frac{k'(0, t) + \Delta k'(0, t)}{k^2(0, t) + (\Delta k(0, t))^2} q(t) \right]. \quad (5.115) \end{aligned}$$

Покажем, что значения дифференциала Фреше $A'_k \Delta k$ для оператора Ak находятся из решения следующей краевой задачи:

$$\Theta_t = \left\{ a_{11}(k, r, t) \Theta_r \right\}_r + b_1(k, r, t) \cdot \Theta_r + \tilde{\Phi}(k, \Delta k, r, t), \quad (r, t) \in Q_T, \quad (5.116)$$

$$\Theta(r, 0) = 0, \quad 0 < r < L, \quad (5.117)$$

$$\Theta_r(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.118)$$

$$\Theta(r, 0) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.119)$$

$$(A'_k \Delta k)(\Delta t) = \Theta(0, t), \quad 0 < t < T, \quad (5.120)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(k, \Delta k, r, t) = & \frac{1}{\mu} \left(\frac{L}{R-r_0} \right)^2 \cdot \{ \Delta k(r, t) u_r \}_r - \frac{1}{\mu (R-r_0)} \left[r_0 L + r(R-r_0) \right] \times \\ & \times \Delta k(r, t) \cdot u_r + \frac{L}{R-r_0} \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \left[1 - \frac{r_0 L + r(R-r_0)}{L^2} \right] (k(r, t) + \Delta k(r, t)) \right\} \times \\ & \times \frac{q(0, t)}{k(0, t)} \left(1 - \frac{\Delta k(0, t)}{k(0, t)} \right) + \frac{R\mu}{4\pi} \left[1 - \frac{r_0 L + r(R-r_0)}{RL} \right]^2 \times \\ & \times \left[\frac{q'(t)}{k(0, t)} \left(1 - \frac{\Delta k(0, t)}{k(0, t)} \right) - \frac{k'(0, t) + \Delta k'(0, t)}{k^2(0, t)} q(t) \right]. \quad (5.121) \end{aligned}$$

По условию 4^0 функция $k(r, t)$ имеет об. производную $\frac{\partial k}{\partial r} \in L_1(Q_T)$. Из свойств об. производных ([39], с. 49) следует, что $k(r, t)$ будет абсолютно непрерывной по $r \in [0, L]$ при почти всех значениях $t \in (0, T)$. Аналогичным свойством, при заданных ограничениях на приращение $\Delta k(r, t)$, будет обладать и функция $\Delta k(r, t)$. Тогда при почти всех значениях $t \in (0, T)$ $1/\sqrt{1 + \Delta k(0, t)/k(0, t)}$ разлагается в ряд по степеням отношения $\Delta k(0, t)/k(0, t)$, норма которого в пространстве L_∞ существенно ограниченных функций будет бесконечно малой при $\|\Delta k(r, t)\| \rightarrow 0$. Подставляя в (5.115) указанное разложение в ряд выражения $1/\sqrt{1 + \Delta k(0, t)/k(0, t)}$ и отбрасывая нелинейные члены от переменных $\Delta k(r, t)$, $\Delta k(r, t)$, получим выражение (5.121).

Запишем задачу для $A(k + \Delta k) - Ak - A'_k \cdot \Delta k$, вычитая из (5.110)–(5.114) соответственно (5.116)–(5.120).

Обозначим $v(r, t) = \Delta u(r, t) - \Theta(r, t)$. Тогда

$$v_t = \{ a_{11}(k, r, t) v_r \}_r + b_1(k, r, t) v_r + \Phi_1(k, \Delta k, r, t), \quad (r, t) \in Q_T \quad (5.122)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad 0 < r < L, \quad (5.123)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad 0 < r < L, \quad (5.124)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad 0 < r < L, \quad (5.125)$$

$$(A(k + \Delta k) - Ak - A'_k \cdot \Delta k)(t) = v(0, t), \quad 0 < r < L, \quad (5.126)$$

где функция $\Phi_1(k, \Delta k, r, t)$ имеет при $\|\Delta k\|_{W_2^1(Q_T)} \rightarrow 0$ асимптотическую оценку

$$\Phi_1(k, \Delta k, r, t), \quad M_7 > 0. \quad (5.127)$$

Отсюда, принимая во внимание (5.92), (5.97) и (5.98), заключаем, что $\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} = 0(\|k\|_{W_2^1(Q_T)})$. По теореме о следах [39, с.70] имеем $\|v(0, t)\|_{W_2^1[0, T]} \leq C \cdot \|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}$. Из двух последних соотношений получим

$$\|v(0, t)\|_{W_2^1[0, T]} = 0(\|k\|_{W_2^1(Q_T)}), \quad (5.128)$$

т. е.

$$A(k + \Delta k) - Ak - A'_k \cdot \Delta k = 0(\|k\|_{W_2^1(Q_T)}).$$

Таким образом, при условиях 1^0 – 5^0 оператор A обратной задачи дифференцируем по Фреше и его дифференциал $A'_k \cdot \Delta k$ находится из решения задачи (5.116)–(5.120).

4. Сопряженная задача и градиент функционала обратной задачи. Построим сопряженный оператор к оператору $\mathcal{A} \Delta k = A'_k \Delta k$ задачи (5.116)–(5.120). Запишем эту задачу в виде:

$$\begin{cases} \mathcal{A} \theta = \chi, \quad \chi \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \{ \theta \in W_2^{1,0}(Q_T) : B_{it}(r_i(t), t) = 0, \quad i = 1, 2; \quad \theta(r, 0) = 0 \}, \end{cases} \quad (5.129)$$

где $\chi = \tilde{\Phi}(\Delta k, r, t)$; $r_1(t) : r = 0$; $r_2(t) : r = L$; $B_{1t}(0, t) = \theta_r(0, t)$, $B_{2t}(L, t) = \theta(L, t)$; $\mathcal{A} \theta = \theta_t - D_{rr}$, $D_{rr} = a_1 \theta_{rr} + a_2 \theta_r$, $a_1 = a_{11}(k, r, t)$, $a_2 = \frac{\partial a_1}{\partial r} + b_1(k, r, t)$.

Итак, \mathcal{A} – оператор, действующий из $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ в $L_2(Q_T)$. Определим сопряженный оператор \mathcal{A}^* в соответствии с тождеством Лагранжа

$$\langle \mathcal{A} \theta, \psi \rangle = \langle \theta, \mathcal{A}^* \psi \rangle. \quad (5.131)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \theta, \psi) &= \int_{Q_T} \psi \cdot \mathcal{A} \theta dr dt = \int_{Q_T} \psi (\theta_t - a_1 \theta_{rr} - a_2 \theta_r) dr dt = I_1 - I_2, \\ I_1 &= \int_{Q_T} [-\theta \psi_t + (a_1 \psi)_r \theta_r + (a_2 \psi)_r \theta] dr dt, \\ I_2 &= \int_{Q_T} [(a_1 \psi \theta_r + a_2 \psi \theta)_r - (\psi \theta)_t] dr dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, с учетом краевых условий, входящих в (5.130), получим

$$\int_{Q_T} (a_1 \psi)_r \theta_r dr dt = \int_0^T (a_1 \psi)_r \cdot \theta \Big|_{r=0}^{r=L} dt - \int_{Q_T} (a_1 \psi)_{rr} \cdot \theta dr dt = \\ - \int_0^T (a_1 \psi)_r \cdot \theta \Big|_{r=0} dt - \int_{Q_T} (a_1 \psi)_{rr} \cdot \theta dr dt,$$

откуда

$$I_1 = - \int_{Q_T} [\psi_t + (a_1 \psi)_{rr} - (a_2 \psi)_r] \theta dr dt - \int_0^T (a_1 \psi)_r \cdot \theta \Big|_{r=0} dt.$$

Аналогичным образом, преобразуя I_2 , получим

$$I_2 = - \int_0^T a_2 \psi \theta \Big|_{r=0} dt - \int_0^T \psi \theta \Big|_{r=L} dt.$$

На основании (5.131) сопряженная к (5.129)–(5.130) задача будет иметь вид:

$$\mathcal{M}^* \psi = \zeta(r, t), \quad (r, t) \in Q_T, \quad (5.132)$$

$$\psi(r, T) = 0, \quad 0 < r < L, \quad (5.133)$$

$$-[(a_1 \psi)_r - a_2 \psi] \Big|_{r=0} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.134)$$

$$(a_1 \psi)_r \Big|_{r=L} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.135)$$

где $\mathcal{M}^* \psi = -\psi_t - D_{rr}^*$, $D_{rr}^* = (a_1 \psi)_{rr} - (a_2 \psi)_r$. Как будет показано ниже, в (5.132) $\zeta(r, t) = 2e(t)\delta(r)$, $e(t) = u(0, t) - y(t)$, $\delta(x)$ – функция Дирака.

Запишем задачу (5.132)–(5.135) в форме, аналогичной (5.129)–(5.130):

$$\begin{cases} \mathcal{M}^* \psi = \zeta, & \psi \in D_{\mathcal{M}^*}, \\ D_{\mathcal{M}^*} = \{\psi \in W_2^{1,0}(Q_T) : B_i^* \psi \Big|_{r=r_i(t)} = 0, \quad i=1,2, \quad \psi(r, T) = 0\}. \end{cases} \quad (5.136)$$

$$(5.137)$$

Пусть \mathcal{M}^{-1} и \mathcal{M}^{*-1} – операторы, обратные к \mathcal{M} и \mathcal{M}^* соответственно. Имеем $\langle \theta, \psi \rangle = \langle \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} \theta, \psi \rangle = \langle \mathcal{M}^{-1} \theta, \mathcal{M}^* \psi \rangle = \langle \theta, \mathcal{M}^{-1*} \mathcal{M}^* \psi \rangle$. Откуда следует, что $\mathcal{M}^{-1*} \mathcal{M}^* = E$ в $\mathcal{D}_{\mathcal{M}^*}$ (E – единичный оператор). Таким образом:

$$\mathcal{M}^{-1*} = \mathcal{M}^{*-1}. \quad (5.138)$$

Из (5.132) ясно, что $\mathcal{M}^{-1*}[2e(t)\delta(r)] = \psi$, где $\psi = \psi(r, t)$ – об. решение задачи (5.132)–(5.135), в которой $\zeta(r, t) = 2e(t) \cdot \delta(r)$. Здесь $\psi(r, t)$ является

обобщенной функцией, удовлетворяющей уравнению (4.4) в обобщенном смысле, т. е.

$$\psi \in \Gamma : \langle \varphi, \mathcal{M}^* \psi \rangle = \langle \varphi, 2e(t)\delta(r) \rangle, \quad (5.139)$$

где Γ – множество обобщенных функций (сокращенно об. функций), удовлетворяющих начальному и краевым условиям (5.133) и (5.134)–(5.135); под $\varphi = \varphi(r, t)$ понимается вещественная функция, непрерывная вместе со своими производными φ_t , φ_r , φ_{rr} и финитная в Q_T .

Для проведения расчетов задачу (5.132)–(5.135) необходимо привести к форме, в которой отсутствует сингулярный член с $\delta(r)$. С этой целью, следуя [62], введем функцию $\Psi(r, t) = \psi(r, t)$ при $0 < r < L$, $0 < t < T$ такую, что $[(a_1 \Psi)_r - a_2 \Psi]_{r=0} = 2e(t)$, $0 < t < T$.

Пусть $\gamma_0 : r = d(t)$, $d(t) \equiv 0$, $0 < t < T$. Принимая во внимание соотношения между классическими и об. производными, получим

$$\Psi_t = \{\Psi_t\} - \delta(r - d(t))[\Psi]_{\gamma_0}, \quad d'(t) = \{\Psi_t\} = \{\psi_t\},$$

$$((a_1 \Psi)_r - a_2 \Psi)_r = \{(a_1 \Psi)_{rr} - (a_2 \Psi)_r\} + \delta(r)[(a_1 \Psi)_r - a_2 \Psi]_{\gamma_0} =$$

$$= \{(a_1 \Psi)_{rr} - (a_2 \Psi)_r\} + 2e(t)\delta(r) = \{(a_1 \psi)_{rr} - (a_2 \psi)_r\} + 2e(t)\delta(r),$$

где $\{f\}$ – регулярная часть об. функции f .

Тогда

$$\mathcal{M}^* \Psi = -\Psi_t - [(a_1 \Psi)_{rr} - (a_2 \Psi)_r] = -\{\psi_t\} - \{(a_2 \psi)_{rr} - (a_2 \psi)_r\} - 2e(t)\delta(r) = 0.$$

Итак, для функции $\Psi(r, t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{M}^* \Psi = 0, & (r, t) \in Q_T, \\ \Psi(r, T) = 0, & 0 < r < L, \\ [(a_1 \Psi)_r - a_2 \Psi]_{r=0} = 2e(t), & 0 < t < T, \\ a_1 \Psi \Big|_{r=L} = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (5.140)$$

$$(5.141)$$

$$(5.142)$$

$$(5.143)$$

Заметим, что после замены $t' = T - t$ задача (5.140)–(5.143) приводится к краевой задаче (обозначим ее через (5.140')–(5.143')) с линейным параболическим уравнением (5.140') вида (5.78), однородным начальным условием при $t' = 0$ и однородными краевыми условиями 3-го рода и 2-го рода при $r = 0$ и $r = L$ соответственно. Под решением этой задачи, как и задачи (5.78)–(5.81), будем понимать об. решение из $W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющее интегральному тождеству (5.85). На основании замечания 6.3 к теореме 3.6.1 [40] при условиях 1^0 – 5^0 об. решение из $W_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (5.140')–(5.143') будет принадлежать пространству $W_2^{2,1}(Q_T)$.

Приращение функционала $J(k)$, определяемого формулой (5.82), имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(k + \Delta k) - J(k) = 2 \langle Ak - \xi, A'_k \Delta k \rangle + o(\|\Delta k\|) = \\ &= 2 \int_0^T [u(k, 0, t) - \xi(t)] \theta(0, t) dt + o(\|\Delta k\|),\end{aligned}$$

где $u(k, 0, t)$ – решение прямой задачи (5.78)–(5.81) при $r = 0$, соответствующее фиксированной функции $k(r, t)$.

Представим ΔJ через δ -функцию:

$$\Delta J = \int_{Q_T} \theta(r, t) 2e(t) \delta(r) dr dt + o(\|\Delta k\|).$$

Замечая, что $\theta(r, t) = M^{-1} \chi$ с $\chi = \tilde{\Phi}(\Delta k, r, t)$, получим

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{Q_T} M^{-1} \chi \cdot 2e(t) \delta(r) dr dt + o(\|\Delta k\|) = \\ &= \langle \chi, M^{-1*} [2e(t) \delta(r)] \rangle + o(\|\Delta k\|) = \langle \chi, \psi \rangle + o(\|\Delta k\|).\end{aligned}\quad (5.144)$$

Так как $\psi = \Psi$ на Q_T , то в (5.144) можно заменить ψ на Ψ . Откуда находим

$$J_k \Delta k = \langle \chi, \Psi \rangle = \int_{Q_T} \Psi(r, t) \tilde{\Phi}(k, \Delta k, r, t), \quad (5.145)$$

где $\tilde{\Phi}(k, \Delta k, r, t)$ определяется формулой (5.121).

5. Конечномерная вейвлет-аппроксимация регуляризованных решений прямой и обратной задачи. Запишем ПЗФ в виде операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f, \quad f \in L_2(Q_T), \quad (5.146)$$

где $f = \frac{\partial f_1}{\partial r} - f_0$; \mathcal{L} – оператор, порожденный дифференциальной операцией из (5.78) $\mathcal{L}u = u_t - \frac{\partial}{\partial r}(a_{11}u_r) + b_1u_r$ и начально-краевыми условиями (5.79)–(5.81).

Для решения уравнения (5.146) уточним прежде всего область определения и область значения оператора \mathcal{L} .

Пусть $K(Q_T)$ – пространство, образованное из всех основных (т. е. непрерывных вместе со своими производными любого порядка) функций $\varphi(r, t)$, сосредоточенных внутри области Q_T . Из существования об. производной $\omega(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} f(r, t)$ от функции $f(r, t) = a_{11}(k, r, t) \frac{\partial u}{\partial r}$ следует, что $\omega(r, t)$ есть обычная (т. е. интегрируемая по Лебегу) функция, если такова функция $f(r, t)$.

Рассмотрим гильбертово пространство H_1 , образованное функциями из $K(Q_T)$ со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_1 = \sum_{|k| \leq 1} \langle D^k \varphi, D^k \psi \rangle$, и построим пополнение \bar{H}_1 пространства H_1 путем его замыкания по $L_2(Q_T)$ -норме. Оператор \mathcal{L} из (5.146), рассматриваемый как функционал из \bar{H}_1 , отображает пространство $W_2^{1,1}(Q_T)$ в пространство $L_2(Q_T)$. Другими словами, область определения оператора \mathcal{L} есть $D(A) = U$, $U = W_2^{1,1}(Q_T)$ (очевидно, что $W_2^{1,1}(Q_T) = W_2^1(Q_T)$), а область его значений – $R(A) = F$, $F = L_2(Q_T)$.

Если при $n \rightarrow \infty$ $u_n \rightarrow u$ в $W_2^1(Q_T)$ -норме, то функции $\omega_n(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(a_{11}(k, r, t) \frac{\partial u_n}{\partial r} \right)$ сходятся к функции $\omega(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(a_{11}(k, r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ в $L_2(Q_T)$ -норме. Принимая теперь во внимание, что при условиях 1^0-5^0 об. решение $u(r, t)$ из $W_2^1(Q_T)$ задачи (5.78)–(5.81) удовлетворяет уравнению (5.78) почти всюду в Q_T , находим, что $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ в $L_2(Q_T)$ -норме. Отсюда заключаем, что в операторном уравнении (5.146) \mathcal{L} – линейный непрерывный оператор из U в F , удовлетворяющий условию единственности в U .

Предположим, что в качестве исходных данных в уравнении (5.146) используются приближения $\tilde{f} = f_\delta$ и $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_\delta$, вызванные приближенным заданием либо функции проницаемости $k(r, t)$ на Q_T , либо функции $q(t)$ на $(0, T)$, задающей краевое условие на забое скважины ($r = 0$). Пусть $k_\varepsilon(r, t) - \varepsilon$ – приближение функции $k(r, t)$ в $W_2^1(Q_T)$ -норме, удовлетворяющее условиям 3^0-5^0 , и $q_\varepsilon(t) - \varepsilon'$ – приближение функции $q(t)$ в $W_2^1(0, T)$ -норме. Тогда при точно заданных $\psi_0(r)$ и p_{nn} будем иметь:

$$\|f_\delta - f\|_F \leq \delta,$$

$$\delta = \left(\frac{L}{R-r_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi\nu_1} \left(1 + \frac{R-r_0}{RL} - \frac{r_0}{R} \right) \left[\varepsilon'(\|k\| + \varepsilon) + \varepsilon(\|q\| + \varepsilon') \right] + \frac{R\mu}{4\pi\nu_1} \left(1 - \frac{r_0}{R} \right) \left[(1 + \nu_1^{-1} + \|k\|)\varepsilon' + \varepsilon\nu_1^{-1}\|q\| \right], \quad (5.147)$$

$$\|\mathcal{L}_\mu u - \mathcal{L}u\|_F \leq h \cdot \|u\|_U, \quad 0 < h < h_0 = \varepsilon \cdot \frac{L}{\mu(R-r_0)} \left(\frac{L}{R-r_0} + \frac{1}{r_0} \right). \quad (5.148)$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$\mathcal{L}_\mu u = f_\delta, \quad f_\delta \in F, \quad (5.149)$$

получаемое из (5.146) при замене $k(r,t)$ на $k_\varepsilon(r,t)$. Об. решение $u_\sigma(r,t)$, $\sigma = (h, \delta)$ уравнения (5.149) обладает теми же свойствами, что и об. решение $u(r,t)$ уравнения (5.146) в классе $W_2^{1,0}(Q_T)$.

В качестве приближенных решений уравнения (5.146) в методе регуляризации Тихонова принимаются экстремальные элементы следующей вариационной задачи:

$$\inf \left\{ \|\mathcal{L}_\mu u - f_\delta\|_F^2 + \alpha \Omega(u) : u \in U \right\}, \quad (5.150)$$

где $\Omega(u) = \|u - u^0\|^2$ – стабилизирующий функционал; $u^0 \in U$ – заданный элемент, учитывающий, например, априорную информацию о решении. В ПЗФ $u^0 = u^0(r,t) = p_0 - g(r,t)$, где p_0 – начальное пластовое давление (давление на контуре пласта при $t = 0$).

Как известно [41], для непрерывного линейного оператора \mathcal{L}_μ существует единственная экстремаль этого функционала u_σ^α , реализующая его глобальный минимум в U при данных $\sigma = (h, \delta)$ и α . Выбор параметра регуляризации α в задаче (5.150) будем осуществлять по обобщенному принципу невязки [42] путем решения уравнения

$$\Delta_\sigma(\alpha) = \|\mathcal{L}_\mu u_\sigma^\alpha - f_\delta\|_F^2 - (\delta + h \cdot \Omega(u_\sigma^\alpha))^2 - \mu_\sigma = 0, \quad (5.151)$$

где u_σ^α – экстремаль функционала в (5.150) и $\mu_\sigma = \inf \left\{ \|\mathcal{L}_\mu u - f_\delta\|_F^2 : u \in U \right\}$.

При условиях 1^0-5^0 $\mathcal{L}u$ почти всюду совпадает с f на Q_T и, в силу неравенств (5.147), (5.148), при независимом стремлении h и δ к нулю $\mu_\sigma = O(|\sigma|)$, $|\sigma| = \sqrt{h^2 + \delta^2}$, и выполняется условие

$$\|f_\delta\|_F^2 > \delta^2 + \mu_\sigma. \quad (5.152)$$

Уравнение (5.151) при условии (5.152) имеет единственное решение $\alpha = \alpha(\sigma)$, и соответствующая такому выбору α последовательность u_σ^α сходится при $\sigma \rightarrow 0$ в метрике U к решению $u(r,t)$ уравнения (5.146) [42].

Область определения U операторов \mathcal{L} и \mathcal{L}_μ , будучи гильбертовым пространством, является пространством Ефимова–Стечкина, т. е. оно рефлексивно и из условий $u_n \xrightarrow{ct} u$ и $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ вытекает сильная сходимость $u_n \rightarrow u$ при $n \rightarrow \infty$. Для решения задачи (5.150) при фиксированных σ и α применим проекционный метод, следуя схеме конечномерной аппроксимации [47]. Согласно этой схеме рассматриваются возрастающие цепочки конечномерных подпространств пространства Ефимова–Стечкина U и сепарабельного гильбертова пространства F

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n \subset \dots \subset U, \quad F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \subset F$$

такие, что

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} = U, \quad \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m} = F,$$

и семейство линейных ограниченных операторов $\{P_m\}$ таких, что при любом m P_m является оператором метрического проектирования $\text{pr}(\cdot, F_m)$ пространства F на подпространство F_m . Из свойств оператора метрического проектирования следует, что $P_m F = F_m$, $\|P_m\| = 1$, $P_m P_n = P_m$ для $m \leq n$ и для любого $f \in F$ $P_m f \rightarrow f$ при $m \rightarrow \infty$.

Проекционный метод решения вариационной задачи (5.150) заключается в сведении последней к конечномерной задаче

$$\inf \left\{ \|P_m \mathcal{L}_\mu u - P_m f_\delta\|_F^2 + \alpha \Omega(u) : u \in U_n = P_n U \right\}. \quad (5.153)$$

На операторы $P_m \mathcal{L}_\mu$ будем смотреть как на некоторые возмущения оператора \mathcal{L}_μ . При этом если на F ввести метризуемую локально выпуклую топологию τ , порожденную семейством преднорм $\{p_m\}$ ($p_m(f) = \|P_m f\|$), то, учитывая свойства операторов P_m , получим для $m \geq n$ $\sup \{ p_n(P_m \mathcal{L}_\mu u - \mathcal{L}_\mu u) : \|u\| \leq 1 \} = 0$.

Таким образом, последовательность операторов $\{P_m \mathcal{L}_\mu\}$ будет сходиться к оператору \mathcal{L}_μ в топологии τ -равномерной сходимости, определяемой с помощью семейства преднорм $\{\mathcal{L}_n\}$:

$$\mathcal{L}_n(A) = \sup \{ \|\text{pr}(Au, F_n)\| : \|u\| \leq 1 \}. \quad (5.154)$$

Так как для любого $f \in F$ $P_m f \rightarrow f$ при $m \rightarrow \infty$, то $P_m f_\delta \rightarrow f_\delta$ и последовательность операторов $\{P_m \mathcal{L}_h\}$ будет сходиться к \mathcal{L}_h в сильной операторной топологии ($\|P_m \mathcal{L}_h\| \rightarrow \|\mathcal{L}_h\|$).

Обозначим множество решений вариационной задачи (5.153) через $U_\sigma^{\alpha,n,m}$. Функционал (5.153) при фиксированных α, σ, n, m является сильно выпуклым, так как сумма сильно выпуклого $\alpha \Omega(u)$ и выпуклого функционала $\|\mathcal{L}_{h,m} u - f_{\delta,m}\|^2$ ($\mathcal{L}_{h,m} = P_m \mathcal{L}_h$, $f_{\delta,m} = P_m f_\delta$) дает сильно выпуклый функционал. Поэтому при условии выпуклости U_n множество $U_\sigma^{\alpha,n,m}$ состоит из единственного элемента $u_\sigma^{\alpha,n,m}$.

Из всего сказанного и теоремы 6.2.1 [42] будет следовать β -сходимость множества $U_\sigma^{\alpha,n,m}$ ко множеству U_σ^α решений вариационной задачи (5.150) при $n, m \rightarrow \infty$, т. е.

$$\beta(U_\sigma^{\alpha,n,m}, U_\sigma^\alpha) \equiv \sup_{y \in U_\sigma^{\alpha,n,m}} \inf_{x \in U_\sigma^\alpha} \rho(y, x) \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Для одноэлементных множеств $U_\sigma^\alpha = \{u_\sigma^\alpha\}$ и $U_\sigma^{\alpha,n,m} = \{u_\sigma^{\alpha,n,m}\}$ β -сходимость $U_\sigma^{\alpha,n,m}$ к U_σ^α при $n, m \rightarrow \infty$ означает сильную сходимость $u_\sigma^{\alpha,n,m}$ к u_σ^α в U -норме.

Конкретную реализацию проекционного метода решения задачи (5.150) будем проводить с помощью операторов проектирования на линейные подпространства, базисом которых являются вейвлет-функции. В рамках кратномасштабного анализа (КМА) в $L_2(\mathbb{R}^2)$, использующего ортонормированные базисы вейвлетов, любой функции $u(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^2)$ соответствует ряд [8]:

$$u(x) = \langle u, \varphi \rangle \cdot \varphi(x) + \sum_{\substack{\lambda \in \bigcup_{j \geq 0} \Lambda_j}} \langle u, \psi_\lambda \rangle \cdot \psi_\lambda(x), \quad (5.155)$$

где $\psi_\lambda(x) = 2^j \psi_\ell(2^j \cdot x - k)$, $\Lambda_j = \{\lambda = (\ell, j, k) : 1 \leq \ell \leq 3, k \in Z^2\}$, $Z^2 = Z \times Z$, Z – множество целых неотрицательных чисел; $k = (k_1, k_2) \in Z^2$; $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения; $\varphi(x) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$, $\psi_1(x - k) = \varphi(x_1 - k_1) \psi(x_2 - k_2)$, $\psi_2(x - k) = \psi(x_1 - k_1) \varphi(x_2 - k_2)$, $\psi_3(x - k) = \psi(x_1 - k_1) \times \varphi(x_2 - k_2)$.

Для одной переменной $x \in \mathbb{R}^1$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, называемые соответственно скейлинг-функцией (масштабирующей функцией) и вейвлет-

функцией, определяются как [7]

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L h_k \cdot \varphi(2x - k), \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L g_k \cdot \varphi(2x - k), \quad (5.156)$$

где $L = 2M - 1$ (M – целое положительное число); $g_k = (-1)^k h_{L-k}$.

Для вейвлетов Хаара ($M = 1$) $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, а для вейвлетов Добеши $\varphi(x)$ порядка M ($M > 1$) значения h_k для $M = 2, 10$ приведены в [10]. Функции (5.156) имеют компактный носитель ширины L .

Регулярность масштабирующих функций ${}_M \varphi(x)$ порядка M одной переменной x исследована в [10]. Методами Фурье установлено [10], что глобальный (для всех $x \in \mathbb{R}^1$) показатель Гельдера α функции ${}_M \varphi(x)$ удовлетворяет неравенству $\alpha > 2$ при $M \geq 7$. Следовательно, ${}_M \varphi(x)$ при $M \geq 7$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией для всех $x \in (0, L)$.

При $x \in \mathbb{R}^2$ совокупность функций

$$\{\varphi(x), \psi_\lambda(x)\}, \quad \lambda = (\ell, j, k), \quad 1 \leq \ell \leq 3, \quad j \geq 0, \quad k \in Z^2, \quad (5.157)$$

образует сепарабельный ортонормированный базис (ОНБ) в $L_2(\mathbb{R}^2)$ [8]. Очевидно, что базис (5.157), построенный вышеуказанным образом с помощью одномерных функций (5.156), будет иметь компактный носитель $(0, L) \times (0, L)$.

Пусть V_j – замкнутое подпространство в $L_2(\mathbb{R}^2)$ с базисом $\varphi_j(x - k) = 2^j \varphi(2^j \cdot x - k)$, $x = (x_1, x_2)$, $k = (k_1, k_2)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $k \in Z^2$. Последовательность $\{V_j\}$ ($j \geq 0$) порождает кратномасштабный анализ (КМА) в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Учитывая финитность на $(0, L)$ функций ${}_M \varphi(x)$, $M \geq 1$, и дважды непрерывно дифференцируемость функции ${}_M \varphi(x)$, $M \geq 7$, можно заключить, что в случае базиса (5.157), построенного с помощью функций (5.156) с $L = 2M - 1$, $M \geq 7$, порождаемый последовательностью $\{V_j\}$ ($j \geq 0$) кратномасштабный анализ будет 2-регулярным по определению [8].

Если $P_j : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow V_j$ – ортогональный проектор на V_j , то на основании теоремы 22.1 [8] для любой функции f из пространства Соболева $W_2^1(Q_T)$ последовательность $P_j f$ сходится к f в $W_2^1(Q_T)$ -норме, т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\partial^\alpha P_j f - \partial^\alpha f\|_{L_2(Q_T)} = 0, \quad |\alpha| \leq 1. \quad (5.158)$$

Согласно теореме 26.1 [8] распределение (об. функция) f принадлежит $W_2^1(Q_T)$ тогда и только тогда, когда ее вейвлет-коэффициенты $\alpha(\lambda) = \langle f, \psi_\lambda \rangle$ в 2-регулярном КМА удовлетворяют условию

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} 4^j |\alpha(\lambda)|^2 < \infty. \quad (5.159)$$

Для выполнения условия (5.159) достаточно предполагать, что вейвлет-коэффициенты $d_{\ell, j; k_1, k_2} = \langle f, \psi_{\ell, j; k_1, k_2} \rangle$ функции f удовлетворяют неравенствам

$$|d_{\ell, j; k_1, k_2}| \leq 2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2}, \quad \ell = \overline{1, 2, 3}; \quad j \geq 0; \quad k_1, k_2 = \overline{0, 2^j - 1}, \quad (5.160)$$

где γ – любое положительное число.

Базис (5.157) запишем в виде вектора $\zeta(r, t) = \{\zeta_{0,0;0,0}(r, t), \zeta_{\ell, j; k, k'}(r, t), \ell = \overline{1, 3}, j \geq 0, k, k' = \overline{0, 2^j - 1}\}$, где $\zeta_{0,0;0,0}(r, t) = \varphi(r) \cdot \varphi(t)$, $\zeta_{1, j; k, k'}(r, t) = \varphi_{j, k}(r) \cdot \psi_{j, k'}(t)$, $\zeta_{2, j; k, k'}(r, t) = \psi_{j, k}(r) \cdot \varphi_{j, k'}(t)$, $\zeta_{3, j; k, k'}(r, t) = \psi_{j, k}(r) \cdot \psi_{j, k'}(t)$. Введя дополнительно функции $\zeta_{0, j; k, k'}(r, t) = \varphi_{j, k}(r) \cdot \varphi_{j, k'}(t)$ ($j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}$), можем записать решение $u(r, t)$ уравнения (5.146) в виде разложения по базису $\zeta^0(r, t) = \{\zeta_{\ell, j; k, k'}(r, t); \ell = \overline{0, 3}; j = \overline{0, j^*}; j^* = j_{\max} - 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}\}$:

$$u(r, t) = \sum_{\ell=0}^3 \sum_{j=0}^{j^*} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{k'=0}^{2^j-1} x_{\ell, j; k, k'} \cdot \zeta_{\ell, j; k, k'}(r, t), \quad (5.161)$$

в котором $x_{0, j; k, k'} = 0$ ($j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}$), а остальные коэффициенты $x_{\ell, j; k, k'}$ подлежат определению. Из свойств вейвлет-функций следует, что $\langle \zeta_{\ell, j; k, k'}, \zeta_{\ell_1, j_1; k_1, k_1'} \rangle = 0$ при $(\ell \neq \ell_1) \vee (j \neq j_1) \vee (k' \neq k_1')$. Коэффициенты разложения функции $u_{\sigma, n}^{\alpha, n}(r, t)$ в базисе $\zeta^0(r, t)$ с $j_{\max} = n$ обозначим через $x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, n}$, где $x_{0, j; k, k'}^{\alpha, n} = 0$ ($j \geq 1; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}$). Число j_{\max} – детальный уровень разложения по переменным r и t ; для простоты рассуждений примем его одинаковым по обоим переменным.

Пусть $V_{j^*} = \bigcup_{j=0}^{j^*} V_j$, где $\{V_j\}$ ($j \geq 0$) – последовательность, порождающая 2-регулярный КМА в $L_2(\mathbb{R}^2)$. При решении прямой задачи

(5.78)–(5.81) будем полагать, что в (5.156) $L = T = 2M - 1$, $M \geq 7$ – целое число. Обозначим через $u_\sigma^{\alpha, n}(r, t)$ единственное решение конечномерной вариационной задачи (5.153) при фиксированных σ, n, α . Как указано выше, в этом случае последовательность $\{u_\sigma^{\alpha, n}(r, t)\}$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sigma \rightarrow 0$ сходится по U -норме к решению $u(r, t)$ уравнения (5.146).

Так как $u_\sigma^{\alpha, n}(r, t) \in W_2^{2,1}(Q_T) \subset W_2^{1,1}(Q_T)$, из (5.160) вытекают следующие ограничения на коэффициенты $x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, \sigma, n}$ разложения функции $u_\sigma^{\alpha, n}$ по базису $\zeta^0(r, t)$:

$$-2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2} \leq x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, \sigma, n} \leq 2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2} \quad (\ell = \overline{1, 3}; j = \overline{0, n}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}). \quad (5.162)$$

Подставим в (5.81) выражение для $u(L, t)$, определяемое формулой (5.161) при $r = L$. Умножая теперь обе части равенства (5.81) последовательно на $\varphi_{j, k}(t)$ и $\psi_{j, k'}(t)$ ($j = \overline{0, n}; k' = \overline{0, 2^j - 1}$) и интегрируя по промежутку $[0, T]$, получим $2^n - 1$ линейных алгебраических уравнений $\hat{g}_v(x^{\alpha, \sigma, n}) = 0$ ($v = \overline{1, v_0}; v_0 = 2^n - 1$) относительно компонент вектора $x^{\alpha, \sigma, n} = \{x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, \sigma, n}, \ell = \overline{1, 3}; j = \overline{0, n}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}\}$.

Аналогичным образом из краевого условия (5.80) можно получить еще $2^j - 1$ линейных алгебраических уравнений $\hat{g}_v(x^{\alpha, \sigma, n}) = 0$ ($v = \overline{v_0 + 1, 2v_0}$), если использовать формулы дифференцирования вейвлет-представления функции одной переменной (см., например, [7]). Систему уравнений $g_v(x) = 0$ ($v = \overline{1, v_1}; v_1 = 2v_0$) можно записать в матричном виде

$$Ax^{\alpha, \sigma, n} - b = 0, \quad (5.163)$$

где A – матрица размера $v_1 \times N$, $N = \frac{1}{3}(4^{n+2} - 7)$ – размерность вектора $x^{\alpha, \sigma, n}$.

Записывая каждое двустороннее неравенство (5.162) в виде совокупности двух односторонних неравенств $x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, \sigma, n} \leq 2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2}$ и $-x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha, \sigma, n} \leq 2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2}$, приходим к системе неравенств

$$f_i(x^{\alpha, \sigma, n}) \leq 0 \quad (i = \overline{1, i_0}; i_0 = 2N) \quad (5.164)$$

с линейными функциями $f_i(x)$. Обозначая теперь через $f_0(x)$ функцию, определяемую функционалом в (5.153), получим задачу выпуклого программирования

$$\inf \{f_0(x^{\alpha, \sigma, n}); x^{\alpha, \sigma, n} \in \mathbb{R}^N, f_i(x^{\alpha, \sigma, n}) \leq 0, i = \overline{1, i_0}; Ax - b = 0\}, \quad (5.165)$$

где $f_0(x^{\alpha;\sigma;n})$ – сильно выпуклая функция вследствие сильной выпуклости функционала Ju в (5.81) и $f_i(x^{\alpha;\sigma;n})$ – линейные функции. Каждое из уравнений $\hat{g}_v(x^{\alpha;\sigma;n})=0$ эквивалентно совокупности неравенств $\hat{g}_v(x^{\alpha;\sigma;n}) \geq 0$ и $\hat{g}_v(x^{\alpha;\sigma;n}) \leq 0$. Следовательно, система уравнений $\hat{g}_v(x^{\alpha;\sigma;n})=0$ ($v=\overline{1, v_1}$) (или, что то же, матричное уравнение $Ax - b = 0$) эквивалентна системе неравенств $g_v(x^{\alpha;\sigma;n}) \leq 0$, $v=1, v_2$, $v_2=2v_1$, определяющей выпуклое множество в \mathbf{R}^N . Здесь $g_v(x^{\alpha;\sigma;n}) = \hat{g}_v(x^{\alpha;\sigma;n})$ ($v=\overline{1, v_1}$) и $g_v(x^{\alpha;\sigma;n}) = -\hat{g}_v(x^{\alpha;\sigma;n})$ ($v=\overline{v_1+1, v_2}$). Очевидно, что множество $X^{\alpha;\sigma;n}$, определяемое ограничениями задачи (5.165), также выпукло и, по теореме 4.2.1 [49], сильно выпуклая (и, стало быть, строго выпуклая) функция $f_0(x^{\alpha;\sigma;n})$ имеет единственную точку минимума на $X^{\alpha;\sigma;n}$.

Так как $\mathcal{L}_{h,m} = P_m \mathcal{L}_h$ в (5.153) является линейным ограниченным оператором, то его производная Фреше совпадает с оператором $\mathcal{L}_{h,m}$, и для градиента J'_u получаем выражение $J'_u = \mathcal{L}_{h,m}^* (\mathcal{L}_{h,m} u - f_{\delta,m})$. Отсюда ясно, что градиент функционала Ju и градиент функции $f_0(x^{\alpha;\sigma;n})$ удовлетворяют условию Липшица. Применив к решению задачи (5.165) метод возможных направлений, можно построить итерационную последовательность точек $x_k \in X^{\alpha;\sigma;n}$, которая сходится к единственной точке x_* минимума функции $f_0(x)$ (см. теорему 3.2.1 и замечание 2 к этой теореме из [66]).

Пусть $u_\sigma^{\alpha;n}$ задано вейвлет-разложением вида (5.161) с коэффициентами $x_{\ell,j;k,k'}^{\alpha;\sigma;n}$, получаемыми путем решения задачи (5.165). Тогда для любой функции $\eta(r,t)$ из $W_2^1(Q_T)$, равной нулю при $t=T$, с учетом равенства (5.151) при $\sigma \rightarrow 0$ будет справедлива оценка

$$\left| \langle \mathcal{L}_{h,n} u_\sigma^{\alpha;n} - f_{\delta,n}, \eta \rangle_{L_2(Q_T)} \right| \leq \left[(\delta + h\Omega(u_\sigma^{\alpha;n}))^2 + \mu_\sigma \right] \cdot \|\eta\|_{W_2^1(Q_T)}. \quad (5.166)$$

Откуда следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $\sigma \rightarrow 0$ последовательность $\{u_\sigma^{\alpha;n}\}$ будет сходиться в U -норме к об. решению $u(r,t)$ из $W_2^{1,0}$ задачи (5.78)–(5.81).

Перейдем теперь к конечномерной аппроксимации обратной задачи фильтрации (ОЗФ), описываемой операторным уравнением (5.99), где A – нелинейный оператор, действующий из пространства $K = W_2^1(Q_T)$ функций $k(r,t)$ в пространство $Y = L_2[0, T]$ функций $y(t)$. Покажем, что оператор A обладает свойством усиленной непрерывности: из $k_n \xrightarrow{cl} k$ следует $\|Ak_n - Ak\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Действительно, разности $k_n - k$ соответствует функция $u_n(0,t) - u(0,t)$, которая получается при $r=0$ из об. решения краевой задачи (5.78)–(5.81) с $u_0(r) \equiv 0$. На основании теоремы о следах [39, с. 70] с учетом неравенств (5.91), (5.97) и (5.98) можно заключить, что из $k_n \rightarrow k$ в K -норме следует $\|Ak_n - Ak\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Слабая сходимость $k_n \xrightarrow{cl} k$ в $W_2^1(Q_T)$ означает, что $\langle \partial^\alpha k_n, g \rangle \rightarrow \langle \partial^\alpha k, g \rangle$, $|\alpha| \leq 1$, для любого элемента $g \in K$ и, в частности, для $g = \varphi$, где φ – основная функция. При $k_n, k \in K$ разности $(\partial^\alpha k_n - \partial^\alpha k)$, $|\alpha| \leq 1$, локально суммируемы в Q_T , и по лемме дю-Буа–Реймонда [48] из предельных соотношений $\langle \partial^\alpha k_n - \partial^\alpha k, \varphi \rangle \rightarrow 0$, $|\alpha| \leq 1$, следует, что $k_n \rightarrow k$ в $W_2^1(Q_T)$ -норме. Как указано выше, последнее предельное соотношение влечет сильную сходимость $Ak_n \rightarrow Ak$ в F -норме, и, следовательно, оператор A усиленно непрерывен.

Пусть правая часть уравнения (5.99) задана некоторым приближением $\tilde{y} = y_\delta$ таким, что $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае приближенное решение уравнения (5.99) находится по методу А. Н. Тихонова путем решения параметрической вариационной задачи

$$\inf \left\{ \|Ak - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \Omega(k) : k \in K \right\}, \quad (5.167)$$

где $\Omega(k) = \|k - k^0\|_K$, k^0 – заданный элемент из K . В задаче (5.72)–(5.76), исходя из физических соображений, будем полагать $k^0(r,t) = k_0$; k_0 – константа, равная ожидаемому максимальному значению $k(r,t)$ в области Q_T .

Для конечномерной аппроксимации задачи (5.167) применим схему проекционного метода, предложенную в [61] для решения неустойчивых (некорректно поставленных) задач, описываемых нелинейными операторными уравнениями. По проекционному методу бесконечномерной вариационной задаче ставится в соответствие конечномерная вариационная задача

$$\inf \left\{ \|Q_n Ak - Q_n y_\delta\|_Y^2 + \alpha \Omega(k) : k \in K_n = P_n K \right\}. \quad (5.168)$$

Здесь P_n и Q_n – проекционные операторы такие, что:

- а) $P_n K = K_n$ ($Q_n Y = Y_n$),
- б) последовательность K_n (Y_n) предельно плотна в K (Y), т. е.

$$\rho(k, K_n) = \inf_{k_n \in K_n} \|k - k_n\| = \|k - P_n k\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (\|y - Q_n y\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty).$$

В качестве операторов P_n и Q_n в (5.168) возьмем $P_n : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow V_n$ и $Q_n : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{V}_n$, где \tilde{V}_n – замкнутая линейная оболочка одномерных базисных векторов

$$\{\varphi(t), \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot t - k) : j = \overline{0, n}; k = \overline{0, 2^j - 1}\}, \quad (5.169)$$

$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам (5.156).

Так как гильбертовы пространства K и Y строго выпуклы, K – пространство Ефимова–Стечкина, Y – линейное нормированное пространство и A – усиленно непрерывный оператор, то, обозначив через K_δ^α и $K_\delta^{\alpha, n}$ множество экстремальных элементов в задаче (5.167) и соответственно в задаче (5.168) и через K_0 – множество решений операторного уравнения (5.99) (при точно заданной правой части $y(t)$), согласно теоремам 1.1 и 1.2 [61] имеем:

- 1) задача (5.167) разрешима и $\beta(K_\delta^{\alpha(\delta)}, K_0) \rightarrow 0$, если $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ (например, $\alpha(\delta) = \delta^{2-\gamma}$, $\gamma > 0$);
- 2) задача (5.156) разрешима и $\beta(K_\delta^{\alpha, n}, K_\delta^\alpha) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Будем искать решение $k(r, t)$ обратной задачи фильтрации в пространстве $W_2^1(Q_T)$ с помощью вейвлет-разложений вида (5.161). При этом будем полагать, что базис (5.157) построен на основе функции (5.156) с $L = 2M - 1$, $M \geq 7$ – целое число. Обозначим через $x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha; \delta, n}$ коэффициенты разложения (5.161) функции $k(r, t)$ из задачи (5.168) при фиксированных δ, α, n . Из неравенств (5.162) вытекают следующие простые ограничения на компоненты вектора $x^{\alpha; \delta, n} = \{x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha; \delta, n}, \ell = \overline{1, 3}; j = \overline{0, n}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}\}$:

$$-2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2} \leq x_{\ell, j; k, k'}^{\alpha; \delta, n} \leq 2^{-2j} \cdot j^{-(1+\gamma)/2} (\ell = \overline{1, 3}; j = \overline{0, n}; k, k' = \overline{0, 2^j - 1}). \quad (5.170)$$

Задача (5.168) сводится к задаче нелинейного программирования

$$\inf\{f(x^{\alpha; \delta, n}) : x^{\alpha; \delta, n} \in \mathbb{R}^N, x^{\alpha; \delta, n} \in X^{\alpha; \delta, n}\}, \quad (5.171)$$

где $f(x^{\alpha; \delta, n})$ – функция, определяемая функционалом в (5.168); $X^{\alpha; \delta, n}$ – множество, определяемое неравенствами (5.170). Функционал в (5.167) имеет конечную производную Фреше, что следует из дифференцируемости функционала $\|Ak - y_\delta\|_Y^2$ (см. формулу (5.145)) и равенства $\Omega_k' = 2(k - k^0)$. Отсюда заключаем, что функция $f(x^{\alpha; \delta, n})$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию Липшица. Для поиска глобального экстремума

такой функции на N -мерном параллелепипеде (5.170) в [67] предложен метод последовательного перебора, в котором предусмотрена возможность сочетания с методами отыскания локального экстремума.

Таким образом, предлагается метод приближенного решения обратной коэффициентной задачи нестационарной фильтрации с неизвестной функцией проницаемости пласта. Дифференцируемость по Фреше оператора обратной задачи устанавливается с помощью оценок в $W_2^{2,1}(Q_T)$ решения прямой задачи. Эти оценки получены без использования второго энергетического неравенства, вопрос построения которого становится проблематичным для краевых условий 2-го и 3-го рода.

Применяемые в случае линейных операторов уравнения, соответствующие принципу невязки и обобщенному принципу невязки, могут не иметь решений для задач с нелинейными операторами. В этой связи для некорректной (неоднозначно разрешимой) обратной задачи фильтрации в качестве исходного регуляризующего алгоритма (РА) рассматривается метод А. Н. Тихонова и для полученного регуляризованного решения применяется конечномерная аппроксимация.

Решение обратной задачи, получаемое с помощью кратномасштабного вейвлет-анализа с базисом, имеющим компактный носитель, позволяет по заданным на забое скважины значениям проницаемости, давления и дебита восстанавливать значения проницаемости и давления в любой точке пласта и отслеживать их изменения во времени и в пространстве при переменном уровне разрешения.

Предложенный метод можно использовать для нахождения устойчивых решений ряда других обратных задач для уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами в условиях неточных входных данных.

Литература к главе 5

1. Блейхунд Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1998. – 448 с.
2. Prony R. Essai experimental et analytique: sur les lois de la dilatabilite de fluids elastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, a differentes temperatures // Journal de L'Ecole Polytechnique Floreal et Plarial, an III. – V. 1. – Cahier 22. – 24–76.
3. Kay S. M. Modern spectral estimation. Theory and application. – NJ: Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1988. – 543 p.

4. Lang S. W., Kurjian A. L., McClellan J. H. etc. Estimating slowness dispersion from arrays of sonic logging waveforms // *Geophysics*. – 1987. – V. 52, № 4. – P. 530–544.
5. Ellefsen K. J., Cheng C. H., Tubman K. V. Estimating phase velocity and attenuation of guided waves in acoustic logging data // *Geophysics*. – 1989. – V. 54, № 8. – P. 1054–1059.
6. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. – 1996. – Т. 166, № 1. – С. 1145–1170.
7. Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // *Успехи физических наук*. – 2001. – Т. 171, № 5. – С. 465–501.
8. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // *Успехи математических наук*. – 1998. – Т. 53, № 6. – С. 53–128.
9. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб: Издательство ВУС, 1999. – 208 с.
10. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 464 с.
11. Чуи К. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
12. Meyer Y. *Wavelets: Algorithms and Applications*. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993. – 423 p.
13. Меркушева А. В. Классы преобразований стационарного сигнала в информационно-измерительных системах. II. Время-частотные преобразования // *Научное приборостроение*. – 2002. Т. 12, № 2. – С. 59–70.
14. Combes J. M., Grossman A., Tchamitchian P. Ed. *Wavelets: time frequency methods, phase space*. – N. Y.: Springer: B., 1989. – 400 p.
15. Atmanspacher H., Scheingraber H., Wiedenmann G. Determination of $f(\alpha)$ for a limited random point set // *Physical Review A*. – 1989. – V. 40, № 7. – P. 3954–3963.
16. Стаховский И. Р. Вейвлетный анализ временных сейсмических рядов // *Доклады РАН*. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 393–396.
17. Новиков Л. В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов // *Научное приборостроение*. – 2000. – Т. 10, № 3. – С. 70–77.
18. Holschneider M. *Wavelets An Analysis Tool*. – Oxford: Clarendon press, 1995. – 423 p.
19. Кравченко В. Ф., Рвачев В. А. «Wavelet» – системы и их применение в обработке сигналов // *Зарубежная радиоэлектроника*. – 1996, № 4. – С. 3–20.

20. Петухов А. П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. – 131 с.
21. Burrus C. S., Gopinath R. A. and Haital Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transfort*. – New Jersey: Prentice Hall, 1998. – 268 p.
22. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. – 1984. – V. 15. – P. 723–736.
23. Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets // *Communications on pure and applied mathematics*. – 1988. – V. 41, November. – P. 909–926.
24. Mallat S. G. Multiresolution approximations and Wavelet of orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1989. – V. 315, September. – P. 69–87.
25. Lichman E., Peters S. W., Squyres D. H. // *Oil and Gas Journal*: I. Jan. 5., 2004; II. Jan. 12, 2004; III. Jan. 19, 2004; IV. Jan. 26, 2004.
26. Lichman E. Phase Inversion Deconvolution for Surface Consistent Processing and Multiple Attenuation // *SEG 69 th annual meeting expanded abstracts*. – 1999, – P. 1299–1302.
27. Camito C., Tabaceo A., Urban K. The wavelet element method. Part I: Construction and analysis // *Applied Computational Harmonic Analysis*. – 1999. – V. 6. – P. 1–52.
28. Dahmen W. Wavelet and multiscale method for operator equations // *Acta Numerica* – 1997. – V. 6. – P. 55–228.
29. Gori L., Pezza L. On some applications of the Wavelet Galerkin method for boundary value problem // *Математическое моделирование*. – 2003. – Т. 15, № 5, – С. 61–70.
30. Gori L., Pitolli F. A class of totally positive refinable functions // *Rendiconti di Matematica, Serie VII*. – 2000. – V. 20. – P. 305–322.
31. Quarteroni A., Valli A. *Numerical approximation of partial differential equations*. – Heidelberg: Springer – Verlag, 1994. – 543 p.
32. Sastova N., Drstakova E., Kucera P. A. A wavelet multilevel solution of the stationary geoelectrical field in the non – homogeneous environment // *Математическое моделирование*. – 2002. – Т. 14, № 5. – С. 98–108.
33. Lawton W. Global analysis of wavelet methods for Eulers equation // *Математическое моделирование*. – 2002. – Т. 14, № 5, с. 75–88.
34. Meyer Y., Coifman R., Salinger D. *Wavelets: Calderon–Zygmund and multilinear operators*. – Cambridge University Press, 1997. – 314 p.
35. Cannone M. *Ondelletes, paraproducts et Navier – Stokes*. – Paris: Diderot Editeur, 1995.

36. Federbrush P. Navier and Stokes meet the wavelet // *Communications in Matimatical Physics*. – 1993. – V. 155. – P. 219–248.
37. Qian S., Weiss C. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations // *Journal of Computational Physics*. – 1993. – V. 106. – P. 155–175.
38. Lawton W., Creamer D., Lin P., Weiss J. Strain Vorticity and Turbulence. Proposal to the Academic Research Fund, National University of Singapore, 2001.
39. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
40. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
41. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
42. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. С. Обобщенный принцип невязки // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1973. – Т. 13, № 2. – С. 295–302.
43. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 255 с.
44. Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н., Максимов В. Н. Подземная гидравлика. – М.: Недра, 1986. – 303 с.
45. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. Ч. 1. – М.: Нефть и газ, 1995. – 586 с.
46. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
47. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
48. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
49. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
50. Антипин А. С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. – М.: ВНИИ системных исследований, 1979. – 73 с.

51. Поляк Б. Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум. // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 807–821
52. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наукова думка, 1978. – 226 с.
53. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
54. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
55. Методика идентификации фильтрационных и емкостных параметров деформируемых пластов при нестационарной фильтрации флюидов. – Баку: ЭЛМ, 1989. – 48 с.
56. Искендеров А. Д., Гардашов Т. Б., Ибрагимов Т. М. Решение обратных задач для систем квазилинейных уравнений теплопроводности в автомобильном режиме // *Инженерно-физический журнал*. – 1989. – Т. 56, № 1. – С. 127–132.
57. Хайруллин М. Х. О применении метода регуляризации к определению параметров многослойных пластов // *Журнал прикладной механики и технической физики*. – 1990, № 1. – С. 104–109.
58. Морозов П. Е., Садовников Р. В., Хайруллин М. Х., Шамсиев М. Н. Оценка фильтрационных параметров пласта по данным нестационарного притока жидкости к вертикальным скважинам // *Инженерно-физический журнал*. – 2003. – Т. 76, № 6. – С. 142–145.
59. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
60. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризирующем алгоритме их решения // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1975. – Т. 15, № 2. – С. 290–297
61. Васин В. В. О β -сходимости проекционного метода для нелинейных операторных уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1972. – Т. 12, № 2. – С. 492–497.
62. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
63. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

64. Камынин Л. И. О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1964. – Т. 28. – С. 721–744.
65. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
66. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
67. Евтушенко Ю. Г. Численный метод поиска глобального экстремума функции (перебор на неравномерной сетке) // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11, № 6. – С. 1390–1403.

Сулейманов Багир Алекперович

Особенности фильтрации гетерогенных систем

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко

Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 25.12.06. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.

Усл. печ. л. 20,69. Уч. изд. л. 20,52. Гарнитура Таймс.

Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО Институт компьютерных исследований

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://shop.rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru

Уважаемые читатели!

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин:

<http://shop.rcd.ru>

а также заказать по электронной почте **subscribe@rcd.ru**

Книги также можно приобрести в наших представительствах:

МОСКВА

Физико-технологический институт РАН,
Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 129–53–49

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: 135–54–37

ИЖЕВСК

Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500–295

Также книги можно приобрести:

МОСКВА

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.),
Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина
ГЗ (3–4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

Магазины:

МОСКВА:

«Дом научно-технической книги»
Ленинский пр., 40. тел.: 137–06–33
«Московский дом книги»
ул. Новый Арбат, 8. тел.: 290–45–07
«Библиоглобус»
м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6. тел.: 928–87–44

ДОЛГОПРУДНЫЙ:

Книжный магазин «Физматкнига»
новый корп. МФТИ, 1 эт. тел.: 409–93–28

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ:

«Санкт-Петербургский дом книги»
Невский проспект, 28
Издательство СПбГУ, Магазин №1
Университетская набережная, 7/9