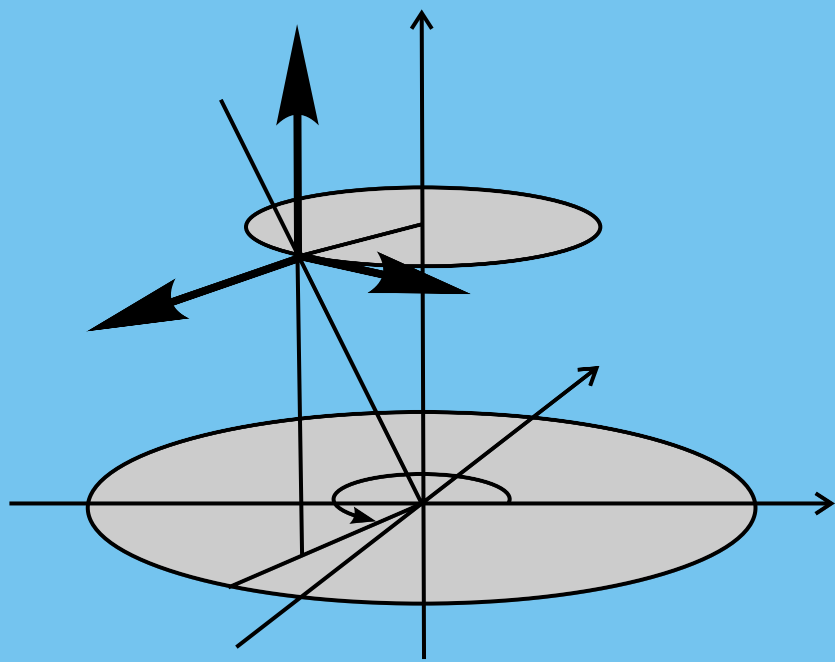
Р. А. Шарипов

Быстрое введение в тензорный анализ.



Эта книга была написана в процессе подготовки к занятиям со студентами-физиками в феврале 2004 года, которые я провел в Университете города Акрон США, когда находился там по приглашению доктора Сергея Ф. Люксютова в рамках программы COBASE при поддержке Национального Совета по Исследованиям США. Эти четыре класса (четыре занятия по 1 часу 20 минут без перерыва) были проведены в рамках общего курса электромагнетизма как введение в тензорные методы.

Книга написана в стиле "сделай сам", то есть я даю только наброски теории тензоров, что включает формулировки определений и теорем, а также основные идеи и формулы. Вся остальная работа, такая как проверка корректности определений, вывод формул, доказательство теорем или же отработка деталей в доказательствах, оставлена читателю в форме многочисленных упражнений. Я надеюсь, что такой стиль сделает изучение предмета действительно быстрым и более эффективным для восприятия и запоминания.

Я благодарен декану факультета профессору Роберту Р. Маллику за возможность проведения занятий, что дало мне возможность полностью почувствовать атмосферу американского университета. Я благодарен

Майку Бойвке (mboiwka@hotmail.com),
Элу Калабрезе (ajc10@uakron.edu),
Джефу Комеру (funnybef@lycos.com),
Энтони Мозински (arm5@uakron.edu),
Мэтью Жерому Шепарду (sheppp2000@yahoo.com)

за посещение моих занятий и прочтение рукописи этой книги. Я особо признателен Джефу Комеру, который выправил грамматику и скорректировал некоторое количество трудных фраз в английском варианте книги, а также

А. Р. Мигранову (spleen-ufa@mail.ru),
С. К. Мухаметдинову (MySK@land.ru)

за перевод книги на русский язык.

Контактная информация для связи с автором.

Место работы:	Математический факультет, Башкирский Государственный Университет, ул. Фрунзе 32, Уфа 450074, Россия
Тел.:	7-(3472)-23-67-18
Факс:	7-(3472)-23-67-74
Домашний адрес:	ул. Рабочая 5, Уфа 450003, Россия
Тел.:	7-(917)-75-55-786
E-mail:	R_Sharipov@ic.bashedu.ru, r-sharipov@mail.ru, ra_sharipov@lycos.com, ra_sharipov@hotmail.com
URL:	http://www.geocities.com/r-sharipov

СОДЕРЖАНИЕ.

ЧАСТЬ I.
ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

§ 1. Геометрические и физические векторы.

Вектор обычно понимается как отрезок прямой линии, имеющий направление. Самый простой пример — вектор смещения $\mathbf{a}$. Пусть его длина 4 см:

$$|\mathbf{a}| = 4\,\mathrm{cm}.$$

Вы можете нарисовать это на бумаге как показано на Рис. 1a. Это означает, что точка B отстоит на 4 см от точки A в направлении, указанном вектором $\mathbf{a}$. Однако, если вы берете вектор скорости $\mathbf{v}$ для потока в ручье, вы не можете

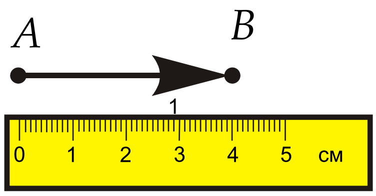


Рис. 1а.

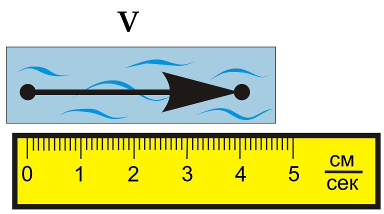


Рис. 1б.

немедленно нарисовать его на бумаге. Вы сначала должны принять масштаб, например, говоря что 1 cm на бумаге представляет 1 см/сек (см. Рис. 1b).

Вывод 1.1. *Вектора с физическим смыслом, отличным от векторов смещения, не имеют никакого безусловного геометрического представления. Их геометрическое представление зависит от выбранного нами масштаба.*

Вывод 1.2. *Существует большое число физических векторов, которые не видны геометрически, но могут быть измерены и затем нарисованы как геометрические векторы.*

Можно рассмотреть единичный вектор $\mathbf{m}$. Его длина не равна ни 1 см, ни 1 км, ни 1 дюйму, и ни 1 миле, а просто числу 1:

$$|\mathbf{m}| = 1.$$

Как и физические векторы, единичный вектор $\mathbf{m}$ не может быть нарисован без применения специального масштаба. Понятие единичного вектора очень удобно При умножении $\mathbf{m}$ на различные скалярные величины, мы можем получить векторные величины различной физической природы: скорость, ускорение, сила, вращающий момент и т. д.

Вывод 1.3. *Наряду с геометрическими и физическими векторами можно вообразить себе векторы, длина которых есть число без единицы измерения.*

§ 2. Связанные векторы и свободные векторы.

Все векторы смещения являются связанными. Они связаны с теми точками, чье смещение они представляют. Свободные векторы обычно представляют глобальные физические параметры, например, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ для вращения Земли вокруг её оси. Этот вектор определяет Кориолисову силу,

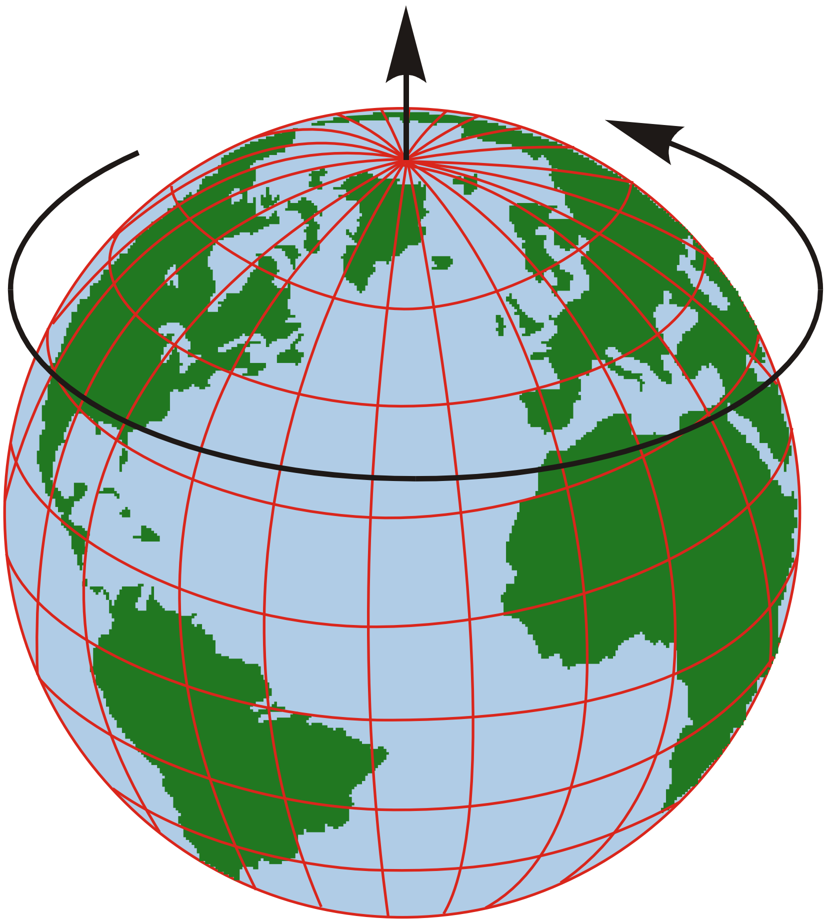


Рис. 2.

которая действует на водные потоки в маленьких реках и в океанах по всему миру. Хотя он обычно изображается прикрепленным к северному полюсу, мы можем переместить этот вектор в любую точку если сохраним его длину и направление неизменными.

Следующий пример иллюстрирует понятие *векторного поля*. Рассмотрим водный поток в реке в фиксированный момент времени t. Для каждой точки P в воде определена скорость водной струи проходящей через эту точку. Таким образом, мы имеем функцию

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, P). \tag{2.1}$$

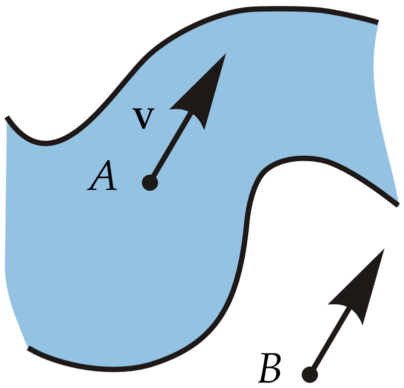


Рис. 3.

Ее первый аргумент — время t. Второй аргумент функции (2.1) не числовой. Это геометрический объект — точка. Значения функции (2.1) также не числовые: они — векторы.

Определение 2.1. Векторнозначная функция с точечным аргументом называется *векторным полем*. Если имеется дополнительный аргумент t, то она называется меняющимся со временем векторным полем.

Пусть $\mathbf{v}$ — значение функции (2.1) в точке A в реке. Тогда $\mathbf{v}$ — это связанный вектор. Это скорость водной струи в точке A. Следовательно, он связан с точкой A. Конечно же, можно перенести его в точку B на берег реки (см. Рис. 3). Но здесь он потеряет свое первоначальное предназначение — задавать скорости воды в точке A.

Вывод 2.1. *Существуют функции с нечисловыми аргументами и нечисловыми значениями.*

Упражнение 2.1. *Что такое скалярное поле? Предложите соответствующее определение по аналогии с определением 2.1.*

Упражнение 2.2 (для глубоких размышлений). *Пусть $y = f(x)$ — функция с нечисловым параметром. Может ли она быть непрерывной? Дифференцируема ли она? Вообще, ответ отрицателен. Однако, в некоторых случаях можно распространить определение непрерывности и определения производных на некоторые функции с нечисловыми параметрами. Предложите свою версию такого обобщения. Если нет версий, запомните эту проблему и вернитесь к ней позже, когда наберете больше опыта.*

Пусть A — некоторая фиксированная точка (на земле, под землей, на небе, или в космосе, не имеет значения). Рассмотрим все векторы некоторой физической природы, связанные с этой точкой (скажем, всевозможные векторы силы в этой точке). Они составляют бесконечный множество. Давайте обозначим его V_A. Мы можем проводить определенные алгебраические операции с векторами из V_A, а именно:

(1) мы можем сложить два любых из них;
(2) мы можем умножить любой их них на вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$;

Эти операции называются линейными операциями, а V_A называются линейным векторным пространством.

Упражнение 2.3. *Вспомните метод параллелограмма для сложения двух векторов (нарисуйте картинку). Вспомните, как векторы умножаются на целые числа α. Рассмотрим три случая: $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ и $\alpha = 0$. Вспомните о нулевом векторе. Как он изображается геометрически?*

Упражнение 2.4. *Вы помните точное математическое определение линейного векторного пространства? Если да, напишите его. Если нет, посетите страничку Джима Хефферона в Интернете*

http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/

и скачайте его книгу [1]. *Сохраните эту книгу в качестве справочного пособия. Если Вы найдете ее полезной для себя, Вы можете поблагодарить автора, написав ему письмо:* jim@joshua.smcvt.edu .

Вывод 2.2. *Таким образом, каждая точка A нашего геометрического пространства не так проста, даже если это точка в вакууме. Она может оснащаться линейными векторными пространствами векторов различной физической природы (такими, как пространство векторов силы в вышеупомянутом примере). Эта идея, где каждая точка вакуума понимается как контейнер для различных физических полей, популярна в современной физике. Математически это реализуется в понятии расслоения: векторные расслоения, тензорные расслоения и т. д.*

Свободные векторы, взятые как они есть, не формируют линейное векторное пространство. Давайте обозначать через V множество всех свободных векторов. Тогда V есть объединение векторных пространств V_A связанных со всеми точками A в пространстве:

$$V = \bigcup_{A \in E} V_A. \tag{2.2}$$

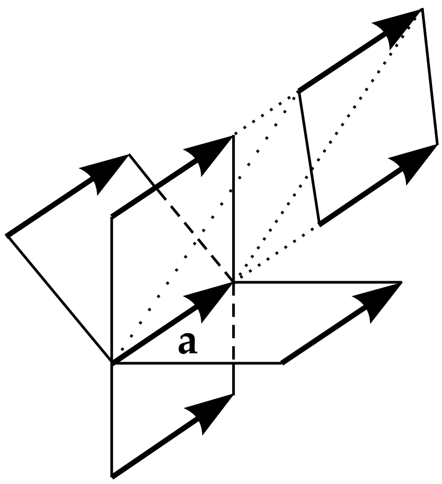


Рис. 4.

Свободные векторы, формирующие это множество, (2.2) слишком многочисленны: мы должны поработать, чтобы подогнать их к определению линейного векторного пространства. Действительно, если мы имеем вектор $\mathbf{a}$ и если он свободный, мы можем размножить его при помощи параллельных переносов, что приводит к появлению бесконечного числа его копий (см. Рис. 4). Все эти клоны вектора $\mathbf{a}$ формируют класс — класс вектора $\mathbf{a}$. Давайте обозначать его $\mathrm{Cl}(\mathbf{a})$. Вектор $\mathbf{a}$ — представитель этого класса. Однако, мы можем выбрать любой другой вектор этого класса в качестве представителя, скажем это может быть вектор $\tilde{\mathbf{a}}$. Тогда мы имеем

$$\mathrm{Cl}(\mathbf{a}) = \mathrm{Cl}(\tilde{\mathbf{a}}).$$

Давайте рассматривать $\mathrm{Cl}(\mathbf{a})$ как единое целое, как один неделимый объект. Тогда рассмотрим множество всех таких объектов. Это множество называется *фактормножеством.* Оно обозначается как $V/\sim$. Это фактормножество $V/\sim$ удовлетворяет определению линейного векторного пространства. Далее для простоты обозначим его тем же самым символом V как первоначальное множество (2.2), из которого оно было получено разложением факторизацией.

Упражнение 2.5. *Вы когда-нибудь слышали о бинарных отношениях, о фактормножествах, о факторгруппах, о факторкольцах и т. д. ? Если да, попытайтесь вспомнить строгое математическое определение для них. Если нет, то посмотрите ссылки* [2], [3], [4]. *Конечно, вы не должны читать все эти ссылки, но помните что они бесплатны и доступны в любой момент.*

3. Евклидово пространство.

Каково наше геометрическое пространство? Является ли оно линейным векторным пространством? Ни в коем случае. Оно формируется точками, а не векторами. Свойства нашего пространства были впервые систематически описаны древнегреческим математиком Евклидом. Поэтому, оно названо евклидовым пространством и обозначается E. Евклид предложил 5 аксиом (5 постулатов) для описания E. Однако, его теория не полностью удовлетворяет современной точке зрения. В настоящее время E описано 20 аксиомами. В память о Евклиде они разделены на 5 групп:

(1) аксиомы инцидентности;
(2) аксиомы порядка;
(3) аксиомы конгруэнтности;
(4) аксиомы непрерывности;
(5) аксиома параллельной.

Двадцатая аксиома, которая также известна как пятый постулат, самая известная.

Упражнение 3.1. *Посетите следующий веб-сайт* Non-Euclidean Geometry *и почитайте о неевклидовой геометрии и о роли 5-го постулата в ее открытии.*

Обычно никто не помнит все эти 20 аксиом наизусть, даже я, хотя я написал учебник по основаниям евклидовой геометрии в 1998 году. В дальнейшем, имея дело с евклидовым пространством E, мы будем полагаться только на здравый смысл и на нашу геометрическую интуицию.

§ 4. Базисы и декартовы координаты.

Итак, пространство E составлено из точек. Давайте выберем одну из них, обозначим ее O и рассмотрим векторное пространство V_O составленное из векторов смещения. Тогда каждая точка $B \in E$ может однозначно идентифицироваться с вектором смещения $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{OB}$. Этот вектор называется *радиус-вектором* точки B, в то время как O называется началом координат. Переходя от точек к их радиус-векторам мы идентифицируем E с линейным векторным пространством V_O. Далее, переходя от векторов к их классам, мы можем идентифицировать V с пространством свободных векторов. Такая идентификация — удобный инструмент в изучении E без обращения к аксиомам Евклида. Однако, мы должны помнить что такая идентификация не единственна: она зависит от нашего выбора точки O начала координат.

Определение 4.1. Мы говорим, что три вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ формируют некомпланарную тройку векторов, если они не могут быть положены на плоскость параллельным переносом.

Эти три вектора не могут быть привязаны к некоторой точке O общей для всех трех, или они могут быть связаны с различными точками в пространстве, это не имеет никакого значения. Но они также могут пониматься как векторы без определенной фиксированной точки привязки.

Определение 4.2. Всякая некомпланарная упорядоченная тройка векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется базисом в нашем геометрическом пространстве E.

Упражнение 4.1. *Сформулируйте определения базисов на плоскости и на прямой по аналогии с определением 4.2.*

Далее мы различаем три типа базисов: ортонормированный базис (ОНБ), ортогональный базис (ОБ) и косоугольный базис (КСБ). Ортонормированный базис состоит из трех взаимно перпендикулярных единичных векторов:

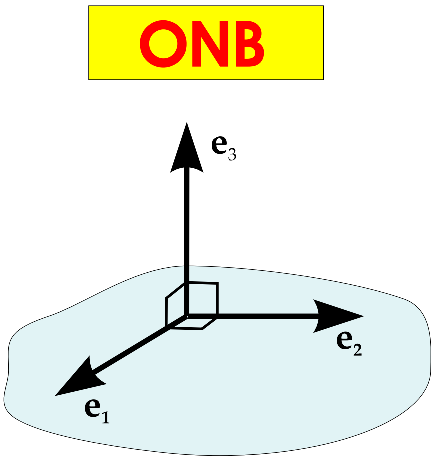


Рис. 5.

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2, \\ &\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &|\mathbf{e}_1| = 1, \\ &|\mathbf{e}_2| = 1, \\ &|\mathbf{e}_3| = 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для ортогонального базиса выполняются три условия (4.1), но длины векторов базиса не фиксируются.

Косоугольный базис — это наиболее общий случай. Для таких базисов углы и длины не фиксированы. Как мы увидим далее, из-за его асимметрии КСБ может выявить много тонкостей, которые скрыты в обычном симметричном ОНБ.

Давайте выберем некоторый базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в E. В общем случае это косоугольный. Допустим, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ связаны с точкой O, как показано на Рис.. 6 ниже. То есть они могут быть перенесены в эту позицию посредством параллельного переноса. Пусть $\mathbf{a}$ — некоторый произвольный вектор. Этот вектор также может быть перенесен в точку O. В результате мы имеем четыре вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}$, берущие начало в одной и той же точке O. Проводя дополнительные линии как показано на Рис. 6, мы получаем

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{4.3}$$

Тогда из следующих очевидных соотношений

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, & \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}, & \mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}, \\ \overrightarrow{OE_1} \parallel \overrightarrow{OA}, & \overrightarrow{OE_2} \parallel \overrightarrow{OB}, & \overrightarrow{OE_3} \parallel \overrightarrow{OC} \end{array}$$

мы получаем

$$\overrightarrow{OA} = \alpha\,\mathbf{e}_1, \qquad \overrightarrow{OB} = \beta\,\mathbf{e}_2, \qquad \overrightarrow{OC} = \gamma\,\mathbf{e}_3, \tag{4.4}$$

где α, β, γ — скаляры. Теперь из (4.3) и (4.4) мы выводим

$$\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{e}_1 + \beta\,\mathbf{e}_2 + \gamma\,\mathbf{e}_3. \tag{4.5}$$

Упражнение 4.2. *Объясните для чего, как, и в какой последовательности проведены дополнительные линии на Рис. 6.*

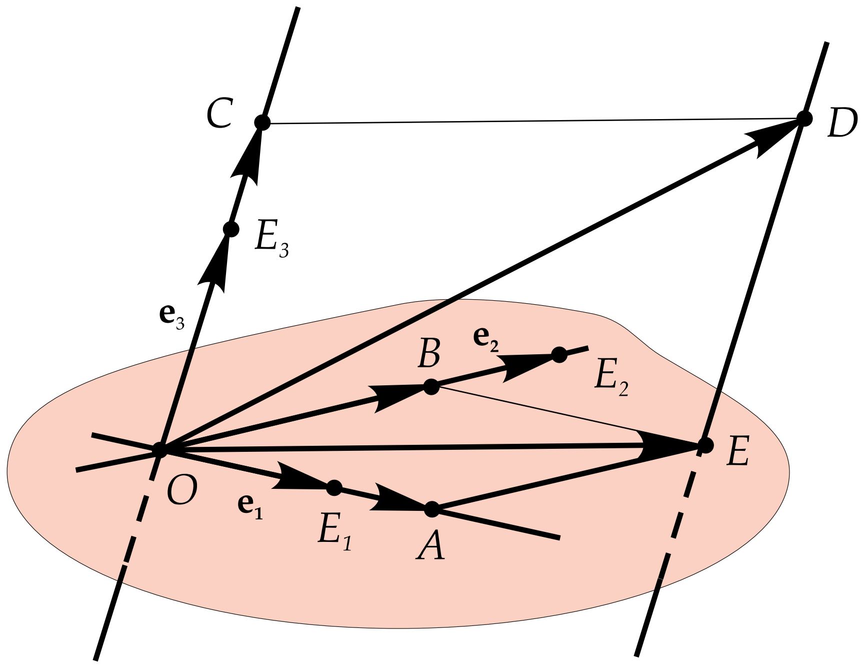


Рис. 6.

Формула (4.5) известна как разложение вектора в $\mathbf{a}$ базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, где α, β, γ — координаты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе.

Упражнение 4.3. *Объясните почему α, β и γ однозначно определяются вектором* $\mathbf{a}$.

Подсказка: вспомните что такое линейная зависимость и линейная независимость. Дайте точное математическое определение для этих понятий. Примените их к упражнению 4.3.

Далее мы запишем формулу (4.5) следующим образом

$$\mathbf{a} = a^1\,\mathbf{e}_1 + a^2\,\mathbf{e}_2 + a^3\,\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a^i\,\mathbf{e}_i, \tag{4.6}$$

Обозначим $\alpha = a^1$, $\beta = a^2$, и $\gamma = a^3$. Не путайте верхние индексы в (4.6) с показателями степени a^1 — это не a, a^2 — не a в квадрате, и a^3 — не a в кубе. Использование верхних индексов и неявных правил суммирования было предложено Эйнштейном. Они известны как тензорная нотация Эйнштейна.

Как только мы выбрали базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (независимо от того будь то ОНБ, ОБ, или КСБ), мы можем отождествить векторы со столбцами чисел:

$$\mathbf{a} \longleftrightarrow \begin{Vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{Vmatrix}, \qquad\qquad \mathbf{b} \longleftrightarrow \begin{Vmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{Vmatrix}. \tag{4.7}$$

Затем мы можем производить алгебраические операции с векторами, приводя их к арифметическим операциям с числами:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &\longleftrightarrow \begin{Vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a^1 + b^1 \\ a^2 + b^2 \\ a^3 + b^3 \end{Vmatrix}, \\ 0\alpha\,\mathbf{a} &\longleftrightarrow \alpha \begin{Vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha\,a^1 \\ \alpha\,a^2 \\ \alpha\,a^3 \end{Vmatrix}. \end{aligned}$$

Столбцы чисел, окруженные матричными разделителями как в (4.7), называются вектор-столбцами. Они образуют линейное векторное пространство.

Упражнение 4.4. *Вспомните точное математическое определение арифметического векторного пространства действительных чисел $\mathbb{R}^n$, где n — целое положительное число.*

Определение 4.1. Декартова система координат — это базис, дополненный некоторой фиксированной точкой, которая в таком случае называется началом координат.

Действительно, если у нас есть начало координат O, тогда мы можем отождествлять каждую точку A нашего пространства с радиус-вектором $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$. Тогда, разложив этот вектор по базису, мы получим три числа, называемых декартовыми координатами точки A. Координаты точки также нумеруются верхними индексами, так как они суть координаты радиус-вектора этой точки. Однако, в отличии от координат векторов, они обычно не записываются в столбцы. Причина этого станет ясна когда мы рассмотрим криволинейные координаты. Так, запись $A(a^1, a^2, a^3)$ — вполне приемлемое обозначение для точки A с координатами a^1, a^2, a^3.

Идея задания геометрических объектов посредством координат была впервые высказана французским математиком и философом Рене Декартом (1596-1650). Декартовы координаты названы в его честь.

§ 5. Что если надо изменить базис ?

Зачем надо менять базис ? Могут быть различные причины: нам может не понравиться начальный базис, потому что он слишком симметричен, как ОНБ, или слишком асимметричен, как КСБ. А может быть нас все устраивает, но житейская мудрость гласит, что наблюдая за тем, как что-то изменяется, мы можем узнать больше об этой вещи, чем если смотреть на нее в статическом положении. Допустим мы имеем базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, давайте назовем его **старый базис**, и предположим, что мы хотим заменить его на **новый базис** $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$. Давайте возьмем первый вектор нового базиса $\mathbf{e}_1$. Изолируем его от двух других векторов $\tilde{\mathbf{e}}_2$ и $\tilde{\mathbf{e}}_3$. Тогда это ничем не примечательный обычный вектор пространства. В этом качестве, вектор $\tilde{\mathbf{e}}_1$ может быть разложен в старом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = S^1\,\mathbf{e}_1 + S^2\,\mathbf{e}_2 + S^3\,\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} S^j\,\mathbf{e}_j. \tag{5.1}$$

Сравните (5.1) и (4.6). Затем мы можем взять другой вектор $\tilde{\mathbf{e}}_2$ и также разложить его в старом базисе. Но какую букву мы должны выбрать для обозначения коэффициентов этого разложения ? Мы можем выбрать любую букву, ну скажем, букву «R»:

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = R^1\,\mathbf{e}_1 + R^2\,\mathbf{e}_2 + R^3\,\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} R^j\,\mathbf{e}_j. \tag{5.2}$$

Однако, это не лучшее решение. Действительно, векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1$ и $\tilde{\mathbf{e}}_2$ отличаются только по номеру, в то время как для обозначения их координат мы используем различные буквы. Лучше добавить дополнительный индекс к S в (5.1). Это нижний индекс, совпадающий с номером вектора:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = S^1_1\,\mathbf{e}_1 + S^2_1\,\mathbf{e}_2 + S^3_1\,\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} S^j_1\,\mathbf{e}_j \tag{5.3}$$

Цвет не имеет значения, он используется только для выделения. Вместо (5.2), для второго вектора $\mathbf{e}_2$, мы напишем формулу, похожую на (5.3):

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = S^1_2\,\mathbf{e}_1 + S^2_2\,\mathbf{e}_2 + S^3_2\,\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} S^j_2\,\mathbf{e}_j. \tag{5.4}$$

И для третьего вектора тоже:

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = S^1_3\,\mathbf{e}_1 + S^2_3\,\mathbf{e}_2 + S^3_3\,\mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} S^j_3\,\mathbf{e}_j. \tag{5.5}$$

Когда рассматриваются совместно, формулы (5.3), (5.4), и (5.5) называются **формулами перехода**. Мы используем левую фигурную скобку для обозначения того, что мы объединяем их в систему:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_1 = S^1_1\,\mathbf{e}_1 + S^2_1\,\mathbf{e}_2 + S^3_1\,\mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 = S^1_2\,\mathbf{e}_1 + S^2_2\,\mathbf{e}_2 + S^3_2\,\mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 = S^1_3\,\mathbf{e}_1 + S^2_3\,\mathbf{e}_2 + S^3_3\,\mathbf{e}_3. \end{cases} \tag{5.6}$$

Мы также можем записать формулы (5.6) в более символической форме

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} S^j_i\,\mathbf{e}_j. \tag{5.7}$$

Здесь индекс i пробегает по диапазону целых чисел от 1 до 3.

Посмотрите на индекс i в формуле (5.7). Это свободный индекс, он может принимать любое числовое значение из диапазона 1, 2, 3. Обратите внимание на то, что i нижний индекс в обеих частях формулы (5.7). Это общее правило.

Правило 5.1. *В правильно написанных тензорных формулах свободные индексы пишутся на том же уровне (верхнем или нижнем) в обеих частях равенства.*

Теперь рассмотрим индекс j. Это индекс суммирования. Он присутствует только в правой стороне формулы (5.7), и он имеет ровно два вхождения (кроме того j, что стоит внизу под знаком суммы): один на верхнем уровне и один на нижнем. Это также общее правило для тензорных формул.

Правило 5.2. *В правильно написанных тензорных формулах каждый индекс суммирования должен иметь точно два вхождения: одно верхнее и одно нижнее.*

Предлагая правило 5.2, Эйнштейн предложил вообще не записывать символы суммирования. Формула (5.7) стала бы выглядеть как $\tilde{\mathbf{e}}_i = S_i^j\,\mathbf{e}_j$ с неявным суммированием по повторяющемуся индексу j. Многие физики (особенно астрофизики) предпочитают писать тензорные формулы таким образом. Однако, я не люблю опускать знаки сумм. Это нарушает целостность системы обозначений в науке. Новички из других областей науки столкнулись бы с трудностями в понимании формул с неявным суммированием.

Упражнение 5.1. *Что будет если $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1$? Каковы будут числовые значения коэффициентов S_1^1, S_1^2 и S_1^3 в формуле (5.3) для этого случая?*

Вернемся к формулам перехода (5.6) и (5.7) отметим, что коэффициенты в них параметризованы двумя индексами, пробегающими независимо по диапазону целых чисел от 1 до 3. Другими словами, они формируют двумерный массив обычно представляемый как таблица или матрица:

$$S = \begin{Vmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 \end{Vmatrix} \tag{5.8}$$

Матрицу S называют **матрицей перехода** или **матрицей прямого перехода**, так как мы используем его при прохождении от старого базиса к новому. В составлении таких матриц как S используются следующие правила.

Правило 5.3. *Для любого двухиндексного массива с индексами на одном уровне (два верхних или два нижних индекса), первый индекс — это номер строки, второй индекс является номером столбца. Если индексы находятся на различных уровнях (один верхний и один нижний), тогда верхний индекс это номер строки, а нижний индекс — номер столбца.*

Обратите внимание, что согласно правилу 5.3, коэффициенты формулы (5.3), которые написаны в строку, составляют первый столбец в матрице (5.8). Так что линии в формуле (5.6) превращаются в столбцы в матрице (5.8). Стоит запомнить этот факт.

Если мы представим каждый вектор нового базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$ как столбец из его координат в старом базисе, как это было сделано для $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в формуле (4.7) выше

$$\mathbf{e}_1 \longleftrightarrow \begin{Vmatrix} S_1^1 \\ S_1^2 \\ S_1^3 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 \longleftrightarrow \begin{Vmatrix} S_2^1 \\ S_2^2 \\ S_2^3 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 \longleftrightarrow \begin{Vmatrix} S_3^1 \\ S_3^2 \\ S_3^3 \end{Vmatrix}, \tag{5.9}$$

то тогда эти столбцы (5.9) являются в точности первым, вторым, и третьим столбцами в матрице (5.8). Это самый простой способ запомнить структуру матрицы S.

Упражнение 5.2. *Что случится, если* $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2$, *и* $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ *? Найдите матрицу перехода для этого случая. Также рассмотрите следующие два случая и напишите матрицу перехода для каждого из них:*

(1) $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_3$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_2$;
(2) $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_3$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_2$.

Объясните, почему следующий случай невозможен:

(3) $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$.

Теперь переставим базисы. Это означает, что мы будем рассматривать $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$ как старый базис, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ как новый базис, и станем изучать обратный переход. Весь вышеизложенный материал применим к этой ситуации. Однако, в написании формул перехода (5.6), давайте использовать другие коэффициенты. По традиции здесь используется буква «T»:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = T^1_1\,\tilde{\mathbf{e}}_1 + T^2_1\,\tilde{\mathbf{e}}_2 + T^3_1\,\tilde{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_2 = T^1_2\,\tilde{\mathbf{e}}_1 + T^2_2\,\tilde{\mathbf{e}}_2 + T^3_2\,\tilde{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_3 = T^1_3\,\tilde{\mathbf{e}}_1 + T^2_3\,\tilde{\mathbf{e}}_2 + T^3_3\,\tilde{\mathbf{e}}_3. \end{cases} \tag{5.10}$$

Вот сокращенная символическая форма записи формул перехода (5.10):

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} T^j_i\,\tilde{\mathbf{e}}_j. \tag{5.11}$$

Обозначим через T матрицу перехода, построенную на основе (5.10) and (5.11). Ее называют **матрицей обратного перехода**, когда сравнивают с матрицей прямого перехода S:

$$(\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3) \;\underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}}\; (\tilde{\mathbf{e}}_1,\,\tilde{\mathbf{e}}_2,\,\tilde{\mathbf{e}}_3). \tag{5.12}$$

Теорема 5.1. *Матрица обратного перехода T в (5.12) является обратной матрицей для матрицы прямого перехода S, то есть $T = S^{-1}$.*

Упражнение 5.3. *Что называется обратной матрицей? Вспомните определение. Как вычислить обратную матрицу A^{-1}, если известна A? (Не говорите, что вы используете математические пакеты, такие как Maple, MathCad, или любые другие, вспомните алгоритм для вычисления A^{-1}).*

Упражнение 5.4. *Вспомните понятие детерминанта матрицы. Как он обычно вычисляется? Как найти* $\det(A^{-1})$, *если* $\det A$ *уже известен?*

Упражнение 5.5. *Что такое умножение матриц? Вспомните определение. Предположим, что у вас имеются прямоугольная 5×3 матрица A и другая прямоугольная матрица B, которая 4×5. Какое из этих двух произведений $A\,B$ или $B\,A$ вы можете вычислить?*

Упражнение 5.6. *Предположим, что A и B — две прямоугольные матрицы, и пусть $C = A\,B$. Вспомните формулу для элементов в матрице C, если элементы A и B известны (они обозначены A_{ij} и B_{pq}). Перепишите эту формулу для случая, когда элементы B обозначены B^{pq}. Какие индексы (верхние, или нижние, или смешанные) вы будете использовать для элементов C в последнем случае (посмотрите правила 5.1 и 5.2 тензорной системы обозначений Эйнштейна).*

Упражнение 5.7. *Приведите несколько примеров матричного умножения, которые совместимы с тензорной системой обозначений Эйнштейна и таких, которые не совместимы (пожалуйста, не используйте примеры, которые уже присутствуют в упражнении 5.6).*

Давайте рассмотрим три базиса: первый базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, второй базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$, и третий базис $\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_1, \tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_2, \tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_3$. Пусть они связаны матрицами перехода:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}} (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3) \underset{\tilde{T}}{\overset{\tilde{S}}{\rightleftarrows}} (\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_1, \tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_2, \tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_3). \tag{5.13}$$

Обозначим через $\tilde{\tilde{S}}$ и $\tilde{\tilde{T}}$ матрицы перехода, связывающие первый и третий базисы в (5.13). То есть мы можем записать диаграмму:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \underset{\tilde{\tilde{T}}}{\overset{\tilde{\tilde{S}}}{\rightleftarrows}} (\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_1, \tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_2, \tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_3). \tag{5.14}$$

Упражнение 5.8. *Для матриц $\tilde{\tilde{S}}$ и $\tilde{\tilde{T}}$ в (5.14) докажите что $\tilde{\tilde{S}} = S\,\tilde{S}$ and $\tilde{\tilde{T}} = \tilde{T}\,T$. Примените полученный результат для доказательства теоремы 5.1.*

§ 6. Что происходит с векторами, если мы меняем базис?

Ответ на этот вопрос очень прост. Ничего не происходит! Для существования векторов не требуются базисы. Но их координаты зависят от выбранного нами базиса. И они изменяются, если мы изменяем базис. Давайте проследим как они изменяются. Предположим, что мы имеем некоторый вектор $\mathbf{x}$, расписанный в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{x} = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\,\mathbf{e}_i. \tag{6.1}$$

Тогда мы оставляем вектор $\mathbf{x}$ и заменяем базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ на другой базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$. Как мы уже знаем, этот процесс описан формулой перехода (5.11):

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} T^j_i\,\tilde{\mathbf{e}}_j.$$

Давайте подставим эту формулу в (6.1) для $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \left(\sum_{j=1}^{3} T_i^j \, \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x^i \, T_i^j \, \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} x^i \, T_i^j \, \tilde{\mathbf{e}}_j = \\ = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} T_i^j \, x^i \right) \tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^{3} \tilde{x}^j \, \tilde{\mathbf{e}}_j, \text{ где } \tilde{x}^j = \sum_{i=1}^{3} T_i^j \, x^i.$$

Таким образом мы разложили вектор в новом базисе $\mathbf{x}$ и получили формулу, связывающую ее новые координаты с начальными:

$$\tilde{x}^j = \sum_{i=1}^{3} T_i^j \, x^i. \tag{6.2}$$

Эту формулу называют **формулой преобразования**, или **формулой прямого преобразования**. Подобно (5.7), ее можно записать так:

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = T_1^1 \, x^1 + T_2^1 \, x^2 + T_3^1 \, x^3, \\ \tilde{x}^2 = T_1^2 \, x^1 + T_2^2 \, x^2 + T_3^2 \, x^3, \\ \tilde{x}^3 = T_1^3 \, x^1 + T_2^3 \, x^2 + T_3^3 \, x^3. \end{cases} \tag{6.3}$$

Формула перехода (6.2) также может быть записана в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix}. \tag{6.4}$$

Подобно (5.7), формулу (6.2) можно обратить. Это **формула обратного преобразования**, она выражает первоначальные координаты вектора $\mathbf{x}$ через его новые координаты:

$$x^j = \sum_{i=1}^{3} S_i^j \, \tilde{x}^i. \tag{6.5}$$

Упражнение 6.1. *По аналогии с вышеупомянутыми вычислениями получите формулу обратного преобразования* (6.5) *используя* (5.7).

Упражнение 6.2. *По аналогии с* (6.3) *и* (6.4) *напишите* (6.5) *в развернутой и в матричной формах.*

Упражнение 6.3. *Получите формулу* (6.5) *из* (6.2) *используя свойство обратной матрицы* $S = T^{-1}$.

Обратите внимание на то, что формула прямого преобразования (6.2) использует матрицу обратного перехода T, а формула обратного преобразования (6.5) использует матрицу прямого перехода S. Это смешно, но это на самом деле так.

§ 7. Что нового мы узнали о векторах, узнав формулы преобразования для их координат ?

Векторы слишком обычные, слишком хорошо известные вещи, чтобы ожидать чего-то нового от них. Однако, новизна состоит в том, что методы их изучения могут быть обобщены и затем применены к менее общеизвестным объектам. Предположим, что мы не можем визуально наблюдать векторы (и это действительно так для некоторых типов векторов, см. параграф 1), но предположим, что мы можем вычислять

их координаты в любом базисе, который мы выберем. Что мы тогда знаем о векторах ? И как мы можем отличить их от других (невекторных) объектов ? Ответ содержится в формулах (6.2) и (6.5). Координаты векторов (и только координаты векторов) будут удовлетворять правилам преобразования (6.2) и (6.5) при замене базиса. Остальные объекты обычно имеют другое количество числовых параметров связанных с базисом, и даже если они имеют ровно три координаты (подобно векторам), их координаты ведут себя по-другому при замене базиса. Таким образом, формулы преобразования (6.2) и (6.5) работают как детекторы, как сито для отделения векторов от невекторов. Что такое невектор и какие геометрические или физические объекты невекторной природы могут существовать — это вопросы для отдельного обсуждения. В дальнейшем мы рассмотрим только часть таких объектов, которые называются тензорами.

ЧАСТЬ II.
ТЕНЗОРЫ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ.

§ 8. Ковекторы.

В предыдущих 7 параграфах мы узнали важный факт: вектор — это физический объект, в каждом базисе нашего трехмерного евклидового пространства E представленный такими тремя числами, которые удовлетворяют некоторым правилам преобразования, когда мы изменяем базис. Эти правила преобразования представлены формулами (6.2) и (6.5).

Теперь представим себе, что мы имеем некоторый объект, который задается тремя числами в каждом базисе, и эти числа удовлетворяют некоторым правилам преобразования при замене базиса, но эти правила отличаются от (6.2) и (6.5). Возможно ли это? Каждый может попытаться найти подобный объект в природе. Однако, в математике мы имеем другую возможность. Мы можем построить такой объект мысленно, затем изучить его свойства, и наконец поискать представлен ли он каким-либо образом в природе.

Давайте обозначим наш гипотетический объект через $\mathbf{a}$, и обозначим через a_1, a_2, a_3 те три числа, которые представляют этот объект в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. По аналогии с векторами мы назовем их **координатами**. Но в отличие от векторов, мы преднамеренно используем нижние индексы для их обозначения a_1, a_2, a_3. Давайте установим следующие правила преобразования a_1, a_2, a_3 когда мы заменяем $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на другой базис $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$:

$$\tilde{a}_j = \sum_{i=1}^{3} S^i_j\, a_i, \tag{8.1}$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} T^i_j\, \tilde{a}_i. \tag{8.2}$$

Здесь S и T — это те же самые матрицы перехода, как в случае векторов в (6.2) и (6.5). Обратите внимание, что одной формулы (8.1) достаточно, формула (8.2) выводится из (8.1).

Упражнение 8.1. *Используя понятие обратной матрицы $T = S^{-1}$ выведите формулу* (8.2) *из формулы* (8.1). *Сравните данное упражнение 8.1 с упражнением 6.3.*

Определение 8.1. Геометрический объект $\mathbf{a}$, который в каждом базисе представляется тройкой координат a_1, a_2, a_3, удовлетворяющей правилам преобразования (8.1) и (8.2) при смене базиса, называется **ковектором**.

Смотря на вышенаписанное, мы можем подумать, что мы произвольным образом выбрали формулу преобразования (8.1). Однако, это не так. Выбор формулы преобразования должен быть последователен в следующем смысле. Допустим, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$ два базиса и $\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_1$, $\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_2$, $\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_3$ — третий базис в пространстве. Для краткости будем их называть базис один, базис два и базисы три. Мы можем напрямую перейти от первого базиса к третьему (смотри правую стрелку в (5.14)). Или же мы можем использовать второй базис как промежуточный базис (смотри правые стрелки в (5.13)). В обоих случаях окончательный результат для координат ковектора третьем базисе должен быть тот же самый — это требование самосогласованности. Это означает, что координаты геометрического объекта должны зависеть от базисов, но не от способа, каким они были вычислены.

Упражнение 8.2. *Используя* (5.13) *и* (5.14) *и полагаясь на результаты упражнения 5.8, докажите, что формулы* (8.1) *и* (8.2) *дают самосогласованный способ определения ковектора.*

Упражнение 8.3. *Замените S на T в* (8.1) *и T на S в* (8.2). *Покажите, что получающиеся при этом формулы не являются самосогласованными.*

Что можно сказать о физической природе ковекторов? Позже мы увидим, что ковекторы существуют в природе. Они ближайшие родственники векторов. И более того, мы увидим, что некоторые известные физические объекты, которые мы относили к векторам, имеют скорее ковекторную природу, нежели векторную.

§ 9. Скалярное произведение вектора и ковектора.

Предположим, что мы имеем вектор $\mathbf{x}$ и ковектор $\mathbf{a}$. После выбора некоторого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ оба имеют по три координаты: x^1, x^2, x^3 для вектора $\mathbf{x}$, и a_1, a_2, a_3 для ковектора $\mathbf{a}$. Давайте обозначим через $\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle$ сумму

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle=\sum_{i=1}^{3}a_i\,x^i. \tag{9.1}$$

Сумма (9.1) написана в согласии с тензорным правилом Эйнштейна, смотрите правило 5.2 в параграфе 5 выше. Это число, зависящее от вектора $\mathbf{x}$ и от ковектора $\mathbf{a}$. Оно называется скалярным произведением вектора $\mathbf{x}$ и ковектора $\mathbf{a}$. Мы используем угловые скобки для этого скалярного произведения чтобы отличить его от скалярного произведения двух векторов E, которое также известно как «dot product»[1].

Определяя скалярное произведение $\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle$ посредством суммы (9.1) мы использовали координаты вектора $\mathbf{x}$ и ковектора $\mathbf{a}$, которые зависят от базиса. Однако, значение суммы (9.1) не зависит ни от какого базиса. Такие числовые величины, которые не зависят от выбора базиса, называются **скалярами** или **истинными скалярами**.

Упражнение 9.1. *Пусть даны два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$; рассмотрите координаты вектора $\mathbf{x}$ и ковектора $\mathbf{a}$ в них обоих. Полагаясь на правила*

[1] Термин «dot product» (точечное произведение) в русскоязычной литературе, насколько нам известно, не используется.

преобразования (6.2), (6.5), (8.1) *и* (8.2), *докажите равенство*

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\,x^i=\sum_{i=1}^{3}\tilde{a}_i\,\tilde{x}^i. \tag{9.2}$$

Таким образом, вы докажете самосогласованность формулы (9.1) *и покажете, что скалярное произведение* $\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle$, *определяемое этой формулой, есть истинно скалярная величина.*

Упражнение 9.2. *Пусть* α *— вещественное число, пусть* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *— два ковектора, а* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *— два вектора. Докажите следующие свойства скалярного произведения* (9.1)*:*

(1) $\langle\mathbf{a}+\mathbf{b},\,\mathbf{x}\rangle=\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{b},\,\mathbf{x}\rangle$; (3) $\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle=\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{a},\,\mathbf{y}\rangle$;
(2) $\langle\alpha\,\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle=\alpha\,\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle$; (4) $\langle\mathbf{a},\,\alpha\,\mathbf{x}\rangle=\alpha\,\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle$.

Упражнение 9.3. *Объясните почему скалярное произведение* $\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle$ *иногда называют билинейной функцией векторного аргумента* $\mathbf{x}$ *и ковекторного аргумента* $\mathbf{a}$. *В этом случае, его можно обозначить* $f(\mathbf{a},\mathbf{x})$. *Вспомните наше обсуждение функций с нечисловыми аргументами в параграфе 2.*

Важное примечание. Скалярное произведение $\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle$ не является симметричным. Кроме того, правая часть формулы

$$\langle\mathbf{a},\,\mathbf{x}\rangle=\cancel{\langle\mathbf{x},\,\mathbf{a}\rangle}$$

неправильна, так как первый аргумент скалярного произведения (9.1) по определению должен быть ковектором. Подобным же образом, второй аргумент должен быть вектором. Поэтому мы никогда не сможем поменять их местами.

§ 10. Линейные операторы.

В этом разделе мы будем рассматривать более сложные объекты. Для определенности давайте обозначим один из таких объектов $\mathbf{F}$. В каждом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ он будет представляется прямоугольной 3×3 матрицей F^i_j из действительных чисел. Элементы такой матрицы будут играть роль координат, как и в случае векторов и ковекторов. Давайте договоримся использовать следующие правила преобразования для F^i_j:

$$\tilde{F}^i_j=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}T^i_p\,S^q_j\,F^p_q, \tag{10.1}$$

$$F^i_j=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}S^i_p\,T^q_j\,\tilde{F}^p_q. \tag{10.2}$$

Упражнение 10.1. *Используя понятие обратной матрицы* $T=S^{-1}$ *докажите, что формулу* (10.2) *можно вывести из формулы* (10.1).

Если мы запишем матрицы F^i_j и $\tilde{F}^p_q$ согласно правилу 5.3 (см. параграф 5), то тогда (10.1) и (10.2) можно будет записать как два матричных равенства:

$$\tilde{F}=T\,F\,S,\qquad\qquad F=S\,\tilde{F}\,T. \tag{10.3}$$

Упражнение 10.2. *Вспомните матричное умножение (мы уже рассматривали это в упражнениях 5.5 и 5.6) и выведите* (10.3) *из* (10.1) *и* (10.2).

Определение 10.1. Геометрический объект $\mathbf{F}$, который в каждом базисе представлен некоторой квадратной матрицей F^i_j, такой, что ее компоненты удовлетворяют правилам преобразования (10.1) и (10.2) при смене базиса, называют **линейным оператором**.

Упражнение 10.3. *По аналогии с упражением 8.2 докажите самосогласованность вышеупомянутого определения линейного оператора.*

Давайте возьмем линейный оператор $\mathbf{F}$ представленный матрицей F^i_j в некотором базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и возьмем некоторый вектор $\mathbf{x}$ с координатами x^1, x^2, x^3 в том же базисе. Используя F^i_j и x^j, составим следующую сумму:

$$y^i = \sum_{j=1}^{3} F^i_j \, x^j. \tag{10.4}$$

Индекс i в сумме (10.4) — это свободный индекс; он может произвольным образом принимать одно из трех значений: $i = 1$, $i = 2$ или $i = 3$. Для каждого определенного значения i мы получаем определенное значение суммы (10.4). Они обозначены через y^1, y^2, y^3 согласно (10.4). Теперь предположим, что мы переходим к другому базису $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$ и делаем те же самые операции. Как результат мы получаем другие три значения $\tilde{y}^1$, $\tilde{y}^2$, $\tilde{y}^3$, заданные формулой

$$\tilde{y}^p = \sum_{q=1}^{3} \tilde{F}^p_q \, \tilde{x}^q. \tag{10.5}$$

Упражнение 10.4. *Основываясь на* (10.1) *и* (10.2), *докажите, что три числа y^1, y^2, y^3 и другие три числа $\tilde{y}^1$, $\tilde{y}^2$, $\tilde{y}^3$ связаны следующим образом:*

$$\tilde{y}^j = \sum_{i=1}^{3} T^j_i \, y^i, \qquad\qquad y^j = \sum_{i=1}^{3} S^j_i \, \tilde{y}^i. \tag{10.6}$$

Упражнение 10.5. *Глядя на формулу* (10.6) *и сравнивая ее с* (6.2) *и* (6.5), *покажите, что y^1, y^2, y^3 и $\tilde{y}^1$, $\tilde{y}^2$, $\tilde{y}^3$, вычисленные по формулам* (10.4) *и* (10.5), *представляют один и тот же вектор, но в различных базисах.*

Итак, формула (10.4) определяет векторный объект $\mathbf{y}$, в то время как упражнение 10.5 доказывает корректность этого определения. В результате мы имеем вектор $\mathbf{y}$ заданный линейным оператором $\mathbf{F}$ и вектором $\mathbf{x}$. Поэтому, мы записываем этот факт в виде равенства

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{10.7}$$

и говорим, что $\mathbf{y}$ получен применением линейного оператора $\mathbf{F}$ к вектору $\mathbf{x}$. Некоторые люди любят записывать (10.7) без круглых скобок:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\,\mathbf{x}. \tag{10.8}$$

Формула (10.8) — это более алгебраизированная форма формулы (10.7). Здесь действие оператора $\mathbf{F}$ на вектор $\mathbf{x}$ записывается подобно своего рода умножению. Есть также матричное представление формулы (10.8), в котором $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ представлены как столбцы:

$$\begin{Vmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F^1_1 & F^1_2 & F^1_3 \\ F^2_1 & F^2_2 & F^2_3 \\ F^3_1 & F^3_2 & F^3_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Vmatrix}. \tag{10.9}$$

Упражнение 10.6. *Получите* (10.9) *из* (10.4).

Упражнение 10.7. *Допустим, α — некоторое действительное число, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — два вектора. Докажите следующие свойства линейного оператора* (10.7)*:*

(1) $\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{y})$,
(2) $\mathbf{F}(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\,\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Запишите эти свойства в более алгебраическом стиле как в (10.8). *Действительно ли они похожи на свойства умножения?*

Упражнение 10.8. *Вспомните то, что для произведения двух матриц*

$$\det(A\,B) = \det A\,\det B. \tag{10.10}$$

Также вспомните формулу для $\det(A^{-1})$. *Примените их к* (10.3) *и получите*

$$\det F = \det \tilde{F}. \tag{10.11}$$

Формула (10.10) означает, что, не смотря на тот факт, что в различных базисах линейный оператор $\mathbf{F}$ представлен различными матрицами, детерминанты всех этих матриц равны друг другу. Тогда мы можем определить детерминант линейного оператора $\mathbf{F}$, как число, равное детерминанту его матрицы в любом произвольно выбранном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\det \mathbf{F} = \det F. \tag{10.12}$$

Упражнение 10.9 (для глубокого размышления). *Квадратные матрицы много различные параметров: собственные значения, собственные векторы , характеристический полином, ранг (может быть вы назовете еще что-нибудь). Если мы рассматриваем эти параметры применительно к матрице линейного оператора, то какой из них может быть поднят на один уровень выше, то есть может рассматриваться как независимый от базиса атрибут линейного оператора? Детерминант* (10.12) *— пример такого параметра.*

Упражнение 10.10. *Подставьте единичную матрицу вместо F^i_j* в (10.1) *и проверьте, что $\tilde{F}^i_j$ тоже единичная матрица в этом случае. Объясните это.*

Упражнение 10.11. *Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ для некоторого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве. Подставьте этот вектор $\mathbf{x}$ в формулу* (10.7) *и посредством* (10.4) *выведите следующую формулу:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{3} F^j_i\,\mathbf{e}_j. \tag{10.13}$$

Сравните (10.13) *и* (5.7). *Обсудите сходства и различия этих формул. Известно, что в некоторых учебниках сначала определяется линейный оператор, а потом вводится его матрица посредством формулы* (10.13). *Объясните, почему, если мы знаем три вектора* $\mathbf{F}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{F}(\mathbf{e}_2)$ *и* $\mathbf{F}(\mathbf{e}_3)$, *то мы можем восстановить всю матрицу оператора* $\mathbf{F}$ *посредством формулы* (10.13).

Предположим, что мы имеем два линейных оператора $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$. Мы можем применить $\mathbf{H}$ к вектору $\mathbf{x}$ и затем можем применить $\mathbf{F}$ к вектору $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. В результате этих действий мы получаем

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{H}(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})). \tag{10.14}$$

Здесь $\mathbf{F}\circ\mathbf{H}$ — новый линейный оператор, введенный формулой (10.14). Его называют **составным оператором**, а маленький кружочек обозначает операцию **композиции**.

Упражнение 10.12. *Найдите матрицу составного оператора* $\mathbf{F}\circ\mathbf{H}$ *если матрицы для* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{H}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *известны.*

Упражнение 10.13. *Вспомните определение тождественного отображения (посетите сайт* on-line Math. Encyclopedia) и сформулируйте определение тождественного оператора **id**. Найдите матрицу этого оператора.

Упражнение 10.14. *Вспомните определение обратного отображения в математике и определите обратный оператор* $\mathbf{F}^{-1}$ *для линейного оператора* $\mathbf{F}$. *Найдите матрицу этого оператора, если матрица* $\mathbf{F}$ *известна.*

§ 11. Билинейные и квадратичные формы.

Векторы, ковекторы, линейные операторы — все это примеры тензоров (хотя мы еще и не имеем определения тензора). Сейчас мы рассмотрим другой класс тензорных объектов. Для ясности, давайте обозначать через a один из таких объектов. В каждом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ этот объект представлен некоторой квадратной 3×3 матрицей a_{ij} из действительных чисел. При замене базиса эти числа изменяются следующим образом:

$$\tilde{a}_{ij}=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}S_i^p\,S_j^q\,a_{pq}, \tag{11.1}$$

$$a_{ij}=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}T_i^p\,T_j^q\,\tilde{a}_{pq}. \tag{11.2}$$

Правила преобразования (11.1) и (11.2) можно записать в матричной форме:

$$\tilde{a}=S^{\top}a\,S, \qquad\qquad a=T^{\top}\tilde{a}\,T. \tag{11.3}$$

Здесь через $S^{\top}$ и $T^{\top}$ мы обозначаем транспонированные матрицы для S и T соответственно.

Упражнение 11.1. *Выведите* (11.2) *из* (11.1), *и* (11.3) *из* (11.1) *и* (11.2).

Определение 11.1. Геометрический объект a, в каждом базисе представленный некоторой квадратной матрицей a_{ij}, такой, что элементы матрицы a_{ij} удовлетворяют правилам преобразования (11.1) и (11.2) по смене базиса, называется **а билинейной формой**.

Давайте рассмотрим два произвольных вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Мы используем их координаты и компоненты билинейной формы a, чтобы записать сумму

$$a(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\,x^i\,y^j. \tag{11.4}$$

Упражнение 11.2. *Докажите, что сумма в правой части формулы* (11.4) *не зависит от базиса, т. е. докажите равенство*

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\,x^i\,y^j=\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\tilde{a}_{pq}\,\tilde{x}^p\,\tilde{y}^q.$$

Это равенство означает, что $a(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — это число, определенное векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ независящее от выбора базиса. Следовательно мы можем рассмотреть (11.4) как скалярную функцию двух векторных аргументов.

Упражнение 11.3. *Пусть α — некоторое действительное число, и пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, и $\mathbf{z}$ — три вектора. Докажите следующие свойства функции* (11.4)*:*

(1) $a(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=a(\mathbf{x},\mathbf{z})+a(\mathbf{y},\mathbf{z})$; (3) $a(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=a(\mathbf{x},\mathbf{y})+a(\mathbf{x},\mathbf{z})$;
(2) $a(\alpha\,\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\,a(\mathbf{x},\mathbf{y})$; (4) $a(\mathbf{x},\alpha\,\mathbf{y})=\alpha\,a(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Из-за этих свойств функция (10.4) *называется билинейной функцией или билинейной формой. Она линейна относительно каждого из ее двух аргументов.*

Обратите внимание, что скалярное произведение (9.1) — это тоже билинейная функция его аргументов. Однако, есть огромное различие между (9.1) и (11.4). Аргументы скалярного произведения (9.1) имеют различную природу: первый аргумент является ковектором, второй — вектором. Поэтому, мы не можем переставлять их. В билинейной форме (11.4) мы можем переставлять аргументы. В результате мы получаем другую билинейную функцию

$$b(\mathbf{x},\mathbf{y})=a(\mathbf{y},\mathbf{x}). \tag{11.5}$$

Матрицы форм a и b связаны друг с другом следующим образом:

$$b_{ij}=a_{ji},\qquad\qquad b=a^{\top}. \tag{11.6}$$

Определение 11.2. Билинейную форму называют симметричной билинейной формой, если $a(\mathbf{x},\mathbf{y})=a(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Упражнение 11.4. *Докажите следующее тождество, которое выполнено для любой симметричной билинейной формы:*

$$a(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{a(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})-a(\mathbf{x},\mathbf{x})-a(\mathbf{y},\mathbf{y})}{2}. \tag{11.7}$$

Определение 11.3. Квадратичная форма — это скалярная функция одного векторного аргумента $f(\mathbf{x})$, которая получается из некоторой билинейной функции $a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ путем замены $\mathbf{y} = \mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \tag{11.8}$$

Без потери общности билинейная функция a в (11.8) может считаться симметричной. Действительно, если a не является симметричной, мы можем задать симметричную билинейную функцию

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + a(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2}, \tag{11.9}$$

и тогда из (11.8) в (11.9) мы получим

$$f(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + a(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{2} = c(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Это равенство такое же, как и (11.8), с одной лишь разницей, что a заменено на c. Таким образом, каждая квадратичная функция f получается из некоторой симметричной билинейной функции a. И наоборот, сравнивая (11.8) с (11.7), мы получаем, что a может быть получено из f:

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})}{2}. \tag{11.10}$$

Формула (11.10) называется **формулой восстановления**. Она восстанавливает билинейную функцию a по квадратичный функции f, полученной по формуле (11.8). Из-за этой формулы, имея дело с квадратной формой, мы всегда подразумеваем некоторую симметричную билинейную форму, являющуюся геометрическим объектом в смысле определения 11.1.

§ 12. Общее определение тензоров.

Векторы, ковекторы, линейные операторы, и билинейные формы — примеры тензоров. Они являются геометрическими объектами, которые представляются в числовой форме, после того, как выбран базис в пространстве. Это числовое представление является своим для каждого из них: векторы и ковекторы представляются одномерными массивами, линейные операторы и квадратичные формы — двумерными массивами. Кроме количества индексов, имеет значение также и их расположение. Координаты вектора нумеруются одним верхним индексом, который называется контравариантным индексом. Координаты ковектора нумеруются одним нижним индексом, который называется ковариантным индексом. В матрице билинейной формы мы используем два нижних индекса; поэтому билинейные формы называют **дважды-ковариантными тензорами**. Линейные операторы — тензоры **смешанного типа**; их элементы нумеруются одним нижним и одним верхним индексами. Число индексов и их положения определяют правила преобразования, т. е. то как компоненты каждого конкретного тензора ведут себя при смене базиса. В общем случае, любой тензор представляет собой многомерный массив с определенным числом верхних и нижних индексов. Давайте обозначать число этих индексов через r и s. Тогда получится **тензор типа** (r, s); или иногда используется термин **валентность**. Тензор типа (r, s), или тензор валентности (r, s) — это r**-раз контравариантный** и s**-раз ковариантный** тензор. Все это была терминология; теперь давайте перейдем к точному определению. Оно базируется на следующих общих формулах преобразования:

$$X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s} = \sum^{3}\ldots\sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}} S^{i_1}_{h_1}\ldots S^{i_r}_{h_r} T^{k_1}_{j_1}\ldots T^{k_s}_{j_s}\,\tilde{X}^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}, \tag{12.1}$$

$$\tilde{X}^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s} = \sum^{3}\ldots\sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}} T^{i_1}_{h_1}\ldots T^{i_r}_{h_r} S^{k_1}_{j_1}\ldots S^{k_s}_{j_s}\,X^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}. \tag{12.2}$$

Определение 12.1. Геометрический объект $\mathbf{X}$, который в каждом базисе представляется $(r + s)$-мерным массивом $X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}$ вещественных чисел, удовлетворяющих правилам преобразования (12.1) и (12.2) при смене базиса, называется **тензором** типа (r, s), или валентности (r, s).

Формулу (12.2) можно вывести из (12.1), так что достаточно запомнить только одну из них. Пусть это будет формула (12.1). Хоть она и большая, но формулу (12.1) легко запомнить. Нужно строго следовать правилам 5.1 и 5.2 из параграфа 5.

Индексы $i_1, \ldots, i_r$ и $j_1, \ldots, j_s$ — свободные индексы. В правой стороне равенства (12.1) они распределены в S-ках и T-шках, каждый имеет только одно вхождение и сохраняет свою позицию при переходе из левой в правую часть равенства, т. е. верхние индексы $i_1, \ldots, i_r$ остаются верхними, а нижние индексы $j_1, \ldots, j_s$ остаются нижними в правой части равенства (12.1).

Остальные индексы $h_1, \ldots, h_r$ и $k_1, \ldots, k_s$ — это индексы суммирования, они входят в правую часть (12.1) парами: один раз в качестве верхнего индекса и один раз в качестве нижнего индекса, один раз в S-матрице либо в T-матрице и второй раз среди индексов в компонентах массива $\tilde{X}^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}$.

При выражении $X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}$ через $\tilde{X}^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}$ каждый верхний индекс обслуживается ровно один раз матрицей прямого перехода S, порождая при этом ровно одно суммирование в формуле (12.1):

$$X^{\ldots\, i_\alpha\, \ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots} = \sum\ldots\sum^{3}_{h_\alpha=1}\ldots\sum\ldots\, S^{i_\alpha}_{h_\alpha}\,\ldots\,\tilde{X}^{\ldots\, h_\alpha\, \ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots}. \tag{12.3}$$

Подобным же образом, каждый нижний индекс обслуживается матрицей обратного перехода T и тоже порождает одно суммирование в формуле (12.1):

$$X^{\ldots\,\ldots\,\ldots}_{\ldots\, j_\alpha\, \ldots} = \sum\ldots\sum^{3}_{k_\alpha=1}\ldots\sum\ldots\, T^{k_\alpha}_{j_\alpha}\,\ldots\,\tilde{X}^{\ldots\,\ldots\,\ldots}_{\ldots\, k_\alpha\, \ldots}. \tag{12.4}$$

Формулы (12.3) и (12.4) совпадают с (12.1), они записаны для того, чтобы сделать более понятным то, как записывается формула (12.1). Итак, определение тензоров дано. Дальше мы рассмотрим примеры, которые показывают, что многие известные объекты подходят под определению 12.1.

Упражнение 12.1. *Проверьте, являются ли формулы* (6.5), (8.2), (10.2), *и* (11.2) *частными случаями формулы* (12.1). *Каковы валентности векторов, ковекторов, линейных операторов и билинейных форм, когда они рассматриваются как тензоры?*

Упражнение 12.2. *Пусть* a_{ij} *- матрица некоторой билинейной формы* a. *Давайте обозначим через* b^{ij} *элементы обратной матрицы для* a_{ij}. *Докажите, что матрица* b^{ij} *при замены базиса преобразуется как матрица дважды ковариантного тензора. Следовательно, она определяет тензор* b *of валентности* $(2, 0)$. *Тензор* b *называется* **двойственной билинейной формой** *для* a.

§ 13. Скалярное произведение и метрический тензор.

Ковекторы, линейные операторы и билинейные формы, те что мы рассматривали выше, все это были искусственно построенные тензоры. Однако, есть некоторое количество тензоров естественного происхождения. Давайте вспомним что мы живем метрическом мире. Мы можем измерять расстояния между точками (следовательно мы можем измерять длины векторов) и мы измерять углы между двумя направлениями в пространстве. Поэтому для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ мы можем определить их скалярное произведение:

$$(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos(\varphi), \tag{13.1}$$

где φ - угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Это естественное скалярное произведение, порожденное нашей способностью измерять длины или, вернее сказать, тем что понятие длины дано нам в ощущениях в том мире, где мы живем.

Упражнение 13.1. *Вспомните следующие свойства естественного скалярного произведения* (13.1):

(1) $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\,\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\,\mathbf{z}) + (\mathbf{y},\,\mathbf{z})$; (3) $(\mathbf{x},\,\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\,\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\,\mathbf{z})$;
(2) $(\alpha\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x},\,\mathbf{y})$; (4) $(\mathbf{x},\,\alpha\,\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x},\,\mathbf{y})$;

(5) $(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\,\mathbf{x})$;
(6) $(\mathbf{x},\,\mathbf{x}) \geqslant 0$ *и* $(\mathbf{x},\,\mathbf{x}) = 0$ *влечет* $\mathbf{x} = 0$.

Обычно эти свойства рассматриваются в курсах аналитической геометрии или векторной алгебры, смотрите также Vector Lessons on the Web.

Обратите внимание, что первые четыре свойства скалярного произведения (13.1) очень похожи на свойства квадратичной формы (см. упражнение 11.3). Это не случайное совпадение.

Упражнение 13.2. *Давайте рассмотрим два произвольных вектора* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *вместе с их разложениями в некотором базисе* $\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3$. *Это означает, что мы имеем следующие выражения для них:*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i\,\mathbf{e}_i, \qquad\qquad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{3} x^j\,\mathbf{e}_j. \tag{13.2}$$

Подставьте (13.2) *в формулу* (13.1) *и, используя четыре свойства* (1)–(4) *из шести упомянутых в упражнении 13.1, выведите следующую формулу для ска-*

лярного произведения векторов $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$*:*

$$(\mathbf{x},\,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j)\,x^i\,y^j. \tag{13.3}$$

Упражнение 13.3. *Обозначьте* $g_{ij}=(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j)$ *и запишите* (13.3) *в виде*

$$(\mathbf{x},\,\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}\,x^i\,y^j. \tag{13.4}$$

Сравните (13.4) *с формулой* (11.4). *Рассмотрите другой базис* $\tilde{\mathbf{e}}_1,\,\tilde{\mathbf{e}}_2,\,\tilde{\mathbf{e}}_3$*, обозначьте* $\tilde{g}_{pq}=(\tilde{\mathbf{e}}_p,\,\tilde{\mathbf{e}}_q)$ *и посредством формул преобразования* (5.7) *и* (5.11) *докажите, что матрицы* g_{ij} *и* $\tilde{g}_{pq}$ *являются компонентами геометрического объекта, подчиняющимися преобразованиям* (11.1) *и* (11.2) *при замене базиса. Таким образом вы докажете, что эта матрица Грама*

$$g_{ij}=(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j) \tag{13.5}$$

задает тензор типа $(0,2)$. *Это очень важный тензор; его называют* **метрическим тензором**. *Оно описывает не только скалярное произведения в форме* (13.4), *но и всю геометрию нашего пространства. Свидетельства этого факта приводятся ниже.*

Матрица (13.5) симметрична из-за свойства (5) в упражнении 13.1. Теперь, сравнивая формулу (13.4) с формулой (11.4) и помня о тензорной природе матрицы (13.5), мы приходим к выводу, что скалярное произведение — это симметричная билинейная форма:

$$(\mathbf{x},\,\mathbf{y})=g(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{13.6}$$

Квадратичная форма, соответствующая (13.6), очень проста: $f(\mathbf{x})=g(\mathbf{x},\mathbf{x})=|\mathbf{x}|^2$. Обратная матрица для (13.5) обозначается тем же самым символом g, но она имеет два верхних индекса: g^{ij}. Это определяет тензор типа $(2,0)$. Такой тензор называется **дуальным метрическим тензором** (подробности см. в упражнении 12.2).

§ 14. Умножение на числа и сложение тензоров.

Операции над тензорами используются для получения новых тензоров из тех, которые мы уже имеем. Наиболее простые операции — это **умножение на число** и **сложение**. Если мы имеем некоторый тензор $\mathbf{X}$ типа (r,s) и действительное число α, то в некотором базисе $\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3$ мы имеем массив из компонент тензора X. Давайте обозначим его $X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}$. Тогда после умножения всех элементов этого массива на α мы получим другой массив

$$Y^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}=\alpha\,X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}. \tag{14.1}$$

Выбирая другой базис $\tilde{\mathbf{e}}_1,\,\tilde{\mathbf{e}}_2,\,\tilde{\mathbf{e}}_3$ и повторяя эту же операцию мы получим

$$\tilde{Y}^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}=\alpha\,\tilde{X}^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}. \tag{14.2}$$

Упражнение 14.1. *Докажите, что массивы* $\tilde{Y}^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}$ *и* $Y^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}$ *связаны друг с другом теми же соотношениями, что и массивы* $\tilde{X}^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}$ *и* $X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}$, *т. е. формулами преобразования* (12.1) *и* (12.2). *При этом вы докажете, что формула* (14.1), *если ее применить в произвольном базисе, порождает новый тензор* $\mathbf{Y} = \alpha\,\mathbf{X}$ *из первоначального тензора* $\mathbf{X}$.

Формула (14.1) определяет **умножение тензоров на числа**. Сделав упражнение 14.1, вы докажете корректность такого определения. Следующая формула определяет **сложение тензоров**:

$$X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s} + Y^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s} = Z^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}. \tag{14.3}$$

Имея два тензора, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ типа (r, s), при помощи формулы (14.3) мы строим третий тензор $\mathbf{Z}$ того же самого типа (r, s). Естественно обозначить этот тензор так: $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$.

Упражнение 14.2. *По аналогии с упражнением 14.1 докажите корректность формулы* (14.3).

Упражнение 14.3. *Что произойдет, если мы умножим тензор* $\mathbf{X}$ *на ноль или же на число в минус один? Как бы вы назвали те тензора, которые при этом получатся?*

§ 15. Тензорное произведение.

Произведение двух тензоров определяется более хитрой формулой. Предположим, мы имеем тензор $\mathbf{X}$ типа (r, s) и второй тензор $\mathbf{Y}$ типа (p, q). Тогда мы можем записать следующее выражение:

$$Z^{i_1\ldots\,i_{r+p}}_{j_1\ldots\,j_{s+q}} = X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}\,Y^{i_{r+1}\ldots\,i_{r+p}}_{j_{s+1}\ldots\,j_{s+q}}. \tag{15.1}$$

Из формулы (15.1) получаем новый тензор $\mathbf{Z}$ типа $(r+p, s+q)$. Он называется **произведением тензоров** $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ и обозначается $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$. Не путайте тензорное произведение с векторным произведением, они различны[1].

Упражнение 15.1. *По аналогии с упражнением 14.1 докажите корректность формулы* (15.1).

Упражнение 15.2. *Приведите пример двух тензоров, таких, что их тензорное произведение не перестановочно:* $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} \neq \mathbf{Y} \otimes \mathbf{X}$.

§ 16. Свертка.

Как мы видели выше, произведение тензоров увеличивает число индексов. Обычно тензор $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ имеет большее количество индексов, чем $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Свертка — это операция, которая уменьшает число индексов. Предположим, что мы имеем тензор $\mathbf{X}$ типа $(r+1, s+1)$. Тогда мы можем получить тензор $\mathbf{Z}$ типа (r, s) посредством следующей формулы:

$$Z^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s} = \sum_{\rho=1}^{n} X^{i_1\ldots\,i_{m-1}\,\rho\,i_m\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_{k-1}\,\rho\,j_k\ldots\,j_s}. \tag{16.1}$$

---

[1] В Америке векторное произведение называется «cross product» и обозначается $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (умножение крестиком).

Что мы делаем? Тензор $\mathbf{X}$ имеет по крайней мере один верхний и один нижний индекс. Мы выбираем m-ый верхний индекс и заменяем его на индекс суммирования ρ. Таким же образом заменяем k-й нижний индекс на ρ. Остальные r верхних индексов и s нижних индексов свободны. Они пронумерованы каким-нибудь удобным способом, скажем так, как это сделано в формуле (16.1). Далее мы проводим суммирование по индексу ρ. Свертка выполнена. Эта операция называется **свертКой по** m-ому **верхнему и** k-ому **нижнему индексу**. Таким образом, если мы имеем много верхних индексов и много нижних индексов в тензоре $\mathbf{X}$, то мы можем произвести различные типы сверток этого тензора.

Упражнение 16.1. *Докажите корректность формулы* (16.1).

Упражнение 16.2. *Посмотрите на формулу* (9.1) *и проинтерпретируйте эту формулу как свертку тензорного произведения* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$. *Найдите подобные интерпретации для* (10.4), (11.4) *и* (13.4).

§ 17. Поднятие и опускание индексов.

Предположим, что $\mathbf{X}$ — это тензор типа (r, s). Давайте выберем его α-тый нижний индекс: $X^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\,k\,\dots}$. Символы, используемые для других индексов, несущественны. Поэтому, мы обозначили их точками. Затем рассмотрим тензорное произведение $\mathbf{Y} = g \otimes \mathbf{X}$:

$$Y^{\dots\,p\,q\,\dots}_{\dots\,k\,\dots} = g^{pq}\,X^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\,k\,\dots}. \tag{17.1}$$

Здесь g — дуальный метрический тензор с элементами g^{pq} (см. раздел 13 выше). На следующем шаге свернем (17.1) по паре индексов k и q. Для этой цели мы заменяем их на s и проводим суммирование:

$$X^{\dots\,p\,\dots}_{\dots\,\dots\,\dots} = \sum_{s=1}^{3} g^{ps}\,X^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\,s\,\dots}. \tag{17.2}$$

В целом вся операция (17.2) называется **поднятием индекса**. Эта операция обратима. Обратная операция называется **опусканием индекса**:

$$X^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\,p\,\dots} = \sum_{s=1}^{3} g_{ps}\,X^{\dots\,s\,\dots}_{\dots\,\dots\,\dots}. \tag{17.3}$$

Подобно (17.2), операция опускания индекса (17.3) включает в себя две операции над тензорами: тензорное произведение и свертку.

§ 18. Некоторые специальные тензоры и некоторые полезные формулы.

Символ Кронекера — известный объект. Это двумерный массив, представляющий единичную матрицу. Он определяется следующим образом:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{при } \ i = j, \\ 0 & \text{при } \ i \neq j. \end{cases} \tag{18.1}$$

Мы можем определить две другие версии символа Кронекера:

$$\delta^{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{18.2}$$

Упражнение 18.1. *Докажите, что определение* (18.1) *инвариантно относительно смены базиса, если мы интерпретируем символ Кронекера как тензор. Покажите, что оба определения в* (18.2) *не являются инвариантными по отношению к смене базиса.*

Упражнение 18.2. *Пусть мы опускаем индекс i в тензоре* (18.1) *посредством* (17.3). *Какой тензорный объект получится в результате этой операции?*

Упражнение 18.3. *Аналогично, поднимем индекс j в тензоре* (18.1). *Что при этом получится?*

Другой известный объект — символ Леви-Чевита. Это трехмерный массив, определенный следующей формулой:

$$\epsilon_{jkq} = \epsilon^{jkq} = \begin{cases} 0, & \text{если среди } j,\ k,\ q, \text{ есть по крайней мере два равных числа;} \\ 1, & \text{если } (j\,k\,q) \text{ четная перестановка чисел } (1\,2\,3); \\ -1, & \text{если } (j\,k\,q) \text{ нечетная перестановка чисел } (1\,2\,3). \end{cases} \tag{18.3}$$

Символ Леви-Чевита (18.3) не является тензором. Однако, мы можем построить два тензора при помощи символа Леви-Чевита. Первый из них

$$\omega_{ijk} = \sqrt{\det(g_{ij})}\, \epsilon_{ijk} \tag{18.4}$$

известен как **тензор объема**. Другой — **дуальный тензор объема**:

$$\omega^{ijk} = \sqrt{\det(g^{ij})}\, \epsilon^{ijk}. \tag{18.5}$$

Возьмем два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Используя (18.4), мы построим ковектор $\mathbf{a}$:

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \omega_{ijk}\, x^j\, y^k. \tag{18.6}$$

Применив операцию поднятия индекса (17.2), можно сделать его вектором:

$$a^r = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} g^{ri}\, \omega_{ijk}\, x^j\, y^k. \tag{18.7}$$

Формула (18.7) известна как формула для векторного произведения двух векторов в косоугольном базисе.

Упражнение 18.4. *Докажите, что вектор* $\mathbf{a}$ *с элементами* (18.7) *совпадает с векторным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$, *т. е.* $\mathbf{a} = [\mathbf{x},\, \mathbf{y}]$.

ЧАСТЬ III
ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ.

§ 19. Тензорные поля в декартовых координатах.

Тензоры, которые мы определили в параграфе 12, — это свободные тензоры. Действительно, их компоненты — это массивы, связанные с базисами, а любой базис — это тройка свободных векторов (не связанных с какой-либо точкой пространства). Следовательно, тензоры, рассмотренные выше, также не связаны с какой-либо точкой.

Теперь предположим, что мы хотим связать наш тензор с некоторой точкой в пространстве, а другой тензор — с другой точкой и т. д. Сделав это, мы сможем заполнить наше пространство тензорами, по одному в каждую точку. В таком случае мы скажем, что имеется тензорное поле. Чтобы отметить точку P, с которой связан конкретный тензор нашего тензорного поля, мы должны записать P как аргумент:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(P). \tag{19.1}$$

Обычно валентности всех тензоров, составляющих тензорное поле, остаются одними и теми же в каждой точке. Пусть все тензоры имеют тип (r, s). Тогда, если мы выберем некоторый базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, мы сможем представить любой тензор нашего тензорного поля как массив $X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ с $r + s$ индексами:

$$X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(P). \tag{19.2}$$

Таким образом, тензорное поле (19.1) — это тензорнозначная функция с аргументом P, являющимся точкой в трехмерном Евклидовом пространстве E, а (19.2) — это представление (19.1) в базисе. Для каждого фиксированного набора числовых значений индексов $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ в (19.2), мы имеем числовую функцию с точечным аргументом. Работать с точечным аргументом не очень удобно, например, если мы хотим вычислять производные. Поэтому мы должны заменить P чем-то числовым. Вспомните, что мы уже выбрали базис. Если, кроме того, мы фиксируем некоторую точку O как начало координат, то мы получим декартову систему координат в пространстве и, следовательно, сможем представить P через радиус-вектор $\mathbf{r}_P = \overrightarrow{OP}$ и через координаты этого радиус-вектора x^1, x^2, x^3:

$$X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x^1, x^2, x^3). \tag{19.3}$$

Вывод 19.1. *В отличие от свободных тензоров, тензорные поля связаны не с базисами, а с целыми системами координат (включающими начало координат). В каждой системе координат они представлены функциональными массивами, т. е. массивами из функций (см.* (19.3)*).*

Функциональный массив (19.3) — это координатное представление тензорного поля (19.1). Что будет когда мы изменим систему координат? В случае (19.2), мы должны только пересчитать компоненты массива $X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}$ в новый базисе при помощи формул преобразования (12.2):

$$\tilde X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}(P)=\sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}}\!\!\ldots\!\sum^{3} T^{i_1}_{h_1}\ldots\, T^{i_r}_{h_r} S^{k_1}_{j_1}\ldots\, S^{k_s}_{j_s}\, X^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}(P). \tag{19.4}$$

В случае (19.3), мы должны пересчитать $X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}$ в новый базис

$$\tilde X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}(\tilde x^1,\tilde x^2,\tilde x^3)=\sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}}\!\!\ldots\!\sum^{3} T^{i_1}_{h_1}\ldots\, T^{i_r}_{h_r} S^{k_1}_{j_1}\ldots\, S^{k_s}_{j_s}\, X^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}(x^1,x^2,x^3), \tag{19.5}$$

используя (12.2), и мы также должны выразить старые координаты x^1, x^2, x^3 точки P в правой части (19.5) через новые координаты той же самой точки:

$$\begin{cases} x^1=x^1(\tilde x^1,\tilde x^2,\tilde x^3),\\ x^2=x^2(\tilde x^1,\tilde x^2,\tilde x^3),\\ x^3=x^3(\tilde x^1,\tilde x^2,\tilde x^3).\end{cases} \tag{19.6}$$

Подобно (12.2), формулу (19.5) можно обратить в виде (12.1):

$$X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}(x_1,x_2,x_3)=\sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}}\!\!\ldots\!\sum^{3} S^{i_1}_{h_1}\ldots\, S^{i_r}_{h_r} T^{k_1}_{j_1}\ldots\, T^{k_s}_{j_s}\, \tilde X^{h_1\ldots\, h_r}_{k_1\ldots\, k_s}(\tilde x^1,\tilde x^2,\tilde x^3). \tag{19.7}$$

Но теперь, кроме (19.7), мы должны получить обратные формулы и для (19.6):

$$\begin{cases} \tilde x^1=x^1(x^1,x^2,x^3),\\ \tilde x^2=x^2(x^1,x^2,x^3),\\ \tilde x^3=x^3(x^1,x^2,x^3).\end{cases} \tag{19.8}$$

Пара формул (19.5) и (19.6), а также другая пара формул (19.7) и (19.8), в случае тензорных полей играют ту же роль, что и формулы преобразования (12.1) и (12.2) в случае свободных векторов.

§ 20. Замена декартовой системы координат.

Обратите внимание, что формулы (19.6) и (19.8) написаны в абстрактной форме. Они только указывают функциональную зависимость новых координат точки P от старых и наоборот. Сейчас мы определим их для случая, когда одна декартова система координат заменяется другой декартовой системой координат. Вспомните, что каждая декартова система координат определена некоторым базисом и некоторой фиксированной точкой (началом координат). Мы рассматриваем две декартовы системы координат. Пусть началом координат первой и второй системы будут точки O и $\tilde{O}$, соответственно. Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ базис первой системы координат, а через $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3$ — базис второй системы координат (см. Рис. 7 ниже).

Пусть P некоторая точка в пространстве, для координат которой мы хотим получить конкретизированные формулы (19.6) и (19.8). Обозначим $\mathbf{r}_P$ и $\tilde{\mathbf{r}}_P$ радиус-векторы этой точки в наших двух координатных системах. Тогда $\mathbf{r}_P = \overrightarrow{OP}$ и $\tilde{\mathbf{r}}_P = \overrightarrow{\tilde{O}P}$, откуда

$$\mathbf{r}_P = \overrightarrow{O\tilde{O}} + \tilde{\mathbf{r}}_P. \tag{20.1}$$

Вектор $\overrightarrow{O\tilde{O}}$ определяет сдвиг начала координат от от старой системы координат к новой. Мы раскладываем этот вектор в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{O\tilde{O}} = \sum_{i=1}^{3} a^i\,\mathbf{e}_i. \tag{20.2}$$

Радиус-векторы $\mathbf{r}_P$ и $\tilde{\mathbf{r}}_P$ разложены в базисах своей системы координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P &= \sum_{i=1}^{3} x^i\,\mathbf{e}_i,\\ \tilde{\mathbf{r}}_P &= \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}^i\,\tilde{\mathbf{e}}_i, \end{aligned} \tag{20.3}$$

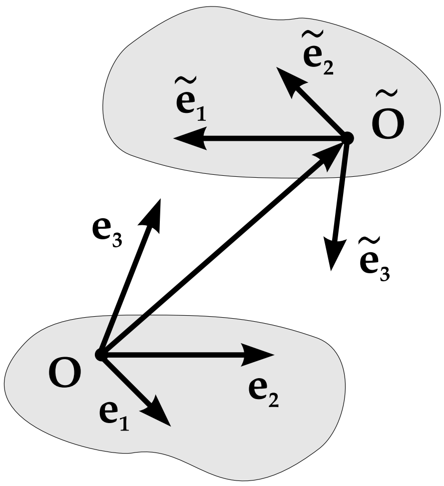


Рис. 7.

Упражнение 20.1. *Используя* (20.1), (20.2), (20.3) *и* (5.7), *получите следующую формулу, связывающую координаты точки P в двух системах на Рис. 7:*

$$x^i = a^i + \sum_{j=1}^{3} S^i_j\,\tilde{x}^j. \tag{20.4}$$

Сравните (20.4) *с* (6.5). *Объясните различия в этих формулах.*

Упражнение 20.2. *Получите следующую обратную формулу для* (20.4)*:*

$$\tilde{x}^i = \tilde{a}^i + \sum_{j=1}^{3} T^i_j\,x^j. \tag{20.5}$$

Докажите, что a^i в (20.4) *и $\tilde{a}^i$ в* (20.5) *связаны друг с другом формулами*

$$\tilde{a}^i = -\sum_{j=1}^{3} T^i_j\,a^j, \qquad\qquad a^i = -\sum_{j=1}^{3} S^i_j\,\tilde{a}^j. \tag{20.6}$$

Сравните (20.6) *с* (6.2) *и* (6.5). *Объясните знаки минус в этих формулах.*

Формула (20.4) может быть написана в следующей развернутой форме:

$$\begin{cases} x^1 = S^1_1\,\tilde{x}^1 + S^1_2\,\tilde{x}^2 + S^1_3\,\tilde{x}^3 + a^1, \\ x^2 = S^2_1\,\tilde{x}^1 + S^2_2\,\tilde{x}^2 + S^2_3\,\tilde{x}^3 + a^2, \\ x^3 = S^3_1\,\tilde{x}^1 + S^3_2\,\tilde{x}^2 + S^3_3\,\tilde{x}^3 + a^3. \end{cases} \tag{20.7}$$

Это и есть требуемая конкретизация для формул (19.6). Подобным же образом мы можем развернуть (20.5):

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = T^1_1\,x^1 + T^1_2\,x^2 + T^1_3\,x^3 + \tilde{a}^1, \\ \tilde{x}^2 = T^2_1\,x^1 + T^2_2\,x^2 + T^2_3\,x^3 + \tilde{a}^2, \\ \tilde{x}^3 = T^3_1\,x^1 + T^3_2\,x^2 + T^3_3\,x^3 + \tilde{a}^3. \end{cases} \tag{20.8}$$

Это конкретизация для (19.8). Формулы (20.7) и (20.8) используются для дополнения основных формул преобразования (19.5) и (19.7).

§ 21. Дифференцирование тензорных полей.

В этом параграфе мы рассматриваем два различных типа производных, которые обычно применяются к тензорным полям: дифференцирование относительно пространственных переменных x^1, x^2, x^3 и дифференцирование относительно внешних параметров, отличных от x^1, x^2, x^3, если таковые имеются. Второй тип производных проще для понимания. Давайте начнем с них. Предположим, мы имеем тензорное поле $\mathbf{X}$ типа (r, s) и зависящее от дополнительного параметра t (например, это может быть время). Тогда после выбора некоторой декартовой системы координат мы можем написать

$$\frac{\partial X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}}{\partial t} = \lim_{h\to 0}\frac{X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(t+h, x^1, x^2, x^3) - X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(t, x^1, x^2, x^3)}{h}. \tag{21.1}$$

Левая часть (21.1) — это тензор, так как дробь в правой части получена посредством тензорных операций (14.1) и (14.3). При переходе к пределу $h \to 0$ тензорный характер этой дроби не нарушается, так как матрицы перехода S и T в (19.5), (19.7), (20.7), (20.8) не зависят от времени.

Вывод 21.1. *Дифференцирование относительно внешних параметров (таких как время t в* (21.1)*) — это тензорная операция, создающая новые тензоры из уже существующих.*

Упражнение 21.1. *Дайте более детальное объяснение почему производная по времени* (21.1) *представляет собой тензор типа* (r, s).

Теперь давайте рассмотрим пространственную производную тензорного поля $\mathbf{X}$, т. е. его производную относительно пространственной переменной, например, относительно x^1. Здесь мы также можем написать

$$\frac{\partial X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}}{\partial x^1} = \lim_{h\to 0}\frac{X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(x^1+h, x^2, x^3) - X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(x^1, x^2, x^3)}{h}, \tag{21.2}$$

но в числителе дроби в правой части (21.2) мы получаем разность двух тензоров, связанных с различными точками пространства: с точкой P с координатами x^1, x^2, x^3 и с точкой P' с координатами $x^1 + h$, x^2, x^3. К какой точке должна относиться разность двух таких тензоров? Это не ясно. Поэтому мы должны выработать другой подход к производным типа (21.2).

Давайте выберем некоторый дополнительный символ, скажем это может быть буква q, и рассмотрим частную производную функций $X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ относительно пространственной переменной x^q:

$$Y^{i_1 \ldots i_r}_{q\, j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}}{\partial x^q}. \tag{21.3}$$

Частные производные (21.3), рассматриваемые во всей их совокупности, формируют $(r + s + 1)$-мерный массив с одним дополнительным индексом q. Мы запишем его как нижний индекс $Y^{i_1 \ldots i_r}_{q\, j_1 \ldots j_s}$ вследствие следующей теоремы 21.1.

Теорема 21.1. *Для любого тензорного поля* $\mathbf{X}$ *типа* (r, s) *частные производные* (21.3) *относительно пространственных переменных* x^1, x^2, x^3 *в любой декартовой системе координат представляют собой компоненты нового тензорного поля* $\mathbf{Y}$ *типа* $(r, s + 1)$.

Таким образом, дифференцирование относительно x^1, x^2, x^3 производит новые тензоры из уже существующих. Для красоты и удобства эта операция обозначается знаком набла: $\mathbf{Y} = \nabla\mathbf{X}$. В индексной форме это выглядит так:

$$Y^{i_1 \ldots i_r}_{q\, j_1 \ldots j_s} = \nabla_q X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}. \tag{21.4}$$

Для упрощении системы обозначений мы также запишем

$$\nabla_q = \frac{\partial}{\partial x^q}. \tag{21.5}$$

Предупреждение 21.1. *Теорема 21.1 и равенство* (21.5) *имеют место только в декартовой системе координат. В криволинейных координатах (которые мы рассмотрим ниже) обстоятельства совсем другие.*

Упражнение 21.2. *Докажите теорему 21.1. Для этого рассмотрите другую декартову систему координат* $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$ *связанную с* x^1, x^2, x^3 *посредством* (20.7) *и* (20.8). *В новой системе координат рассмотрите частные производные*

$$\tilde{Y}^{i_1 \ldots i_r}_{q\, j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial \tilde{X}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}}{\partial \tilde{x}^q} \tag{21.6}$$

и выведите соотношения, связывающие (21.6) *и* (21.3).

§ 22. Градиент, дивергенция и ротор. Операторы Лапласа и Даламбера.

Тензорный характер частных производных, установленный в теореме 21.1, — очень полезная особенность. Мы можем применять это для того, чтобы расширить возможности классических операций векторного анализа. Давайте рассмотрим **градиент**, $\operatorname{grad} = \nabla$. Обычно оператор градиента применяется к скалярному полю, т. е. к функции $\varphi = \varphi(P)$ или, что то же самое, к функции $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$, если записать ее в координатной форме:

$$a_q = \nabla_q \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^q}. \tag{22.1}$$

Обратите внимание, что в (22.1) мы использовали нижний индекс q для a_q. Это означает, что $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$ ковектор. Действительно, согласно теореме 21.1, оператор набла применяется к скалярному полю, которое является тензорным полем типа $(0, 0)$, и производит тензорное поле типа $(0, 1)$. Чтобы получить векторную форму градиента нужно поднять индекс q:

$$a^q = \sum_{i=1}^{3} g^{qi}\, a_i = \sum_{i=1}^{3} g^{qi}\, \nabla_i \varphi. \tag{22.2}$$

Запишем (22.2) в форме дифференциального оператора (без применения к φ):

$$\nabla^q = \sum_{i=1}^{3} g^{qi}\, \nabla_i. \tag{22.3}$$

В этой форме оператор градиента (22.3) может применяться не только к скалярным полям, но и к векторным полям, ковекторным полям и к любым другим тензорным полям.

Обычно в физике мы не различаем векторный градиент ∇^q и ковекторный градиент ∇_q, потому что мы используем ортонормированные координаты с ОНБ в качестве базиса. В этом случае дуальный метрический тензор задается единичной матрицей ($g^{ij} = \delta^{ij}$) и компоненты ∇^q и ∇_q совпадают.

Дивергенция — это вторая дифференциальная операция векторного анализа. Обычно она применяется к векторному полю и задается формулой:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{3} \nabla_i X^i. \tag{22.4}$$

Как мы видим, (22.4) есть свертка (см. параграф 16) тензора $\nabla_q X^i$. Поэтому мы можем обобщить формулу (22.4) и применить оператор div к произвольному тензорному полю, у которого есть хотя бы один верхний индекс:

$$(\operatorname{div} \mathbf{X})^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\,\dots\,\dots} = \sum_{s=1}^{3} \nabla_s X^{\dots\,\dots\,s\,\dots}_{\dots\,\dots\,\dots}. \tag{22.5}$$

Оператор Лапласа определен как дивергенция, примененная к какому-то векторному градиенту, он обозначается значком треугольника: $\triangle = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. Из (22.3) и (22.5) для оператора Лапласа $\triangle$ мы выводим следующую формулу:

$$\triangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g^{ij}\, \nabla_i\, \nabla_j. \tag{22.6}$$

Обозначим через $\square$ следующий дифференциальный оператор:

$$\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle. \tag{22.7}$$

Оператор (22.7) называется **оператором Даламбера** или **волновым оператором**. В общей теории относительности после введения дополнительной координаты $x^0 = c\,t$ он записывается в виде очень похожем на запись оператора Лапласа (22.6) (см. мою книгу [5], она доступна для скачивания с сайта http://samizdat.mines.edu).

И наконец, давайте рассмотрим **оператор ротора**[1]. Оператор ротора обычно применяется к векторным полям и производит другое векторное поле: $\mathbf{Y} = \operatorname{rot}\mathbf{X}$. Вот формула для r-той координаты оператора $\operatorname{rot}\mathbf{X}$:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{X})^r = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g^{ri}\,\omega_{ijk}\,\nabla^j X^k. \tag{22.8}$$

Тензор объема $\boldsymbol{\omega}$ в (22.8) дается формулой (18.4), в то время как векторный оператор градиента ∇^j определен в (22.3).

Упражнение 22.1. *Формула* (22.8) *может быть обобщена для случая когда* $\mathbf{X}$ *произвольное тензорное поле, имеющее, по крайней мере, один верхний индекс. По аналогии с* (22.5) *предложите вашу версию такого обобщения.*

Обратите внимание, что формулы (22.6) и (22.8) для оператора Лапласа и для ротора отличаются от стандартных формул для этих операторов:

$$\triangle = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2, \tag{22.9}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{X} = \det\begin{Vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ X^1 & X^2 & X^3 \end{Vmatrix}. \tag{22.10}$$

Дело в том, что формулы (22.6) и (22.8) написаны в общей косоугольной системе координат. Стандартные формулы (22.9) и (22.10) справедливы только в ортонормированных координатах с ОНБ в качестве базиса.

Упражнение 22.2. *Покажите, что в случае ортонормированных координат, когда* $g^{ij} = \delta^{ij}$, *формула* (22.6) *для оператора Лапласа* $\triangle$ *приводится к стандартной формуле* (22.9).

Координаты вектора $\operatorname{rot}\mathbf{X}$ в косоугольной системе координат даются формулой (22.8). Тогда для вектора $\operatorname{rot}\mathbf{X}$ мы имеем разложение

$$\operatorname{rot}\mathbf{X} = \sum_{r=1}^{3}(\operatorname{rot}\mathbf{X})^r\,\mathbf{e}_r. \tag{22.11}$$

Упражнение 22.3. *Подставьте* (22.8) *в* (22.11) *и покажите, что в случае ортонормированной системы координат формула* (22.11) *сводится к* (22.10).

[1] В Америке оператор ротора называют оператором вихря и обозначают curl.

ЧАСТЬ IV
ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ.

§ 23. Основная идея криволинейных координат.

Что такое координаты, если мы на мгновение забудем о радиус-векторах, базисах и осях? В чем смысл координат? Смысл состоит в представлении точек пространства тройками чисел. Это означает, что мы должны иметь взаимно однозначное отображение $P \leftrightarrows (y^1, y^2, y^3)$ во всем пространстве или, по крайней мере, в некоторой области, где мы собираемся использовать наши координаты y^1, y^2, y^3. В декартовых координатах это отображение $P \leftrightarrows (y^1, y^2, y^3)$ задается посредством векторов и базисов. Другие координатные системы могут использовать другие методы. Например, в **сферических координатах** $y^1 = r$ — это расстояние от точки P до центра сферы, а $y^2 = \theta$ и $y^3 = \varphi$ — два угла. Кстати, сферические координаты — это простейший пример криволинейных координат. Давайте представлять себе сферические координаты при размышлении о более общих и, следовательно, о более абстрактных криволинейных системах координат.

§ 24. Вспомогательная декартова система координат.

Теперь мы знаем почти все о декартовых координатах и почти ничего об абстрактных криволинейных системах координат y^1, y^2, y^3, которые мы начинаем изучать. Поэтому, замечательная идея состоит в том, чтобы представить каждую точку P через радиус-вектор $\mathbf{r}_P$ в некоторой вспомогательной декартовой системе координат и затем рассмотреть отображения $\mathbf{r}_P \leftrightarrows (y^1, y^2, y^3)$. Сам радиус-вектор представляется тремя координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вспомогательной системы координат:

$$\mathbf{r}_P = \sum_{i=1}^{3} x^i\,\mathbf{e}_i. \tag{24.1}$$

Поэтому, мы имеем биективное отображение $(x^1, x^2, x^3) \leftrightarrows (y^1, y^2, y^3)$. Ура! Это числовое отображение. Мы можем обрабатывать его в числовой форме. Левая стрелка представляется тремя функциями от трех переменных:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(y^1, y^2, y^3),\\ x^2 = x^2(y^1, y^2, y^3),\\ x^3 = x^3(y^1, y^2, y^3). \end{cases} \tag{24.2}$$

Для правой стрелки мы имеем другие три функции от трех переменных:

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, x^2, x^3),\\ y^2 = y^2(x^1, x^2, x^3),\\ y^3 = y^3(x^1, x^2, x^3). \end{cases} \tag{24.3}$$

Далее мы продифференцируем все функции (24.2) и (24.3) и рассмотрим их частные производные. Давайте обозначим

$$S^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}, \qquad\qquad T^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}. \tag{24.4}$$

Частные производные (24.4) могут быть размещены в двух квадратных матрицах S и T соответственно. В математике такие матрицы называются матрицами Якоби. Компоненты матрицы S в той форме, в какой определены в (24.4), являются функциями y^1, y^2, y^3. Компоненты матрицы T являются функциями от переменных x^1, x^2, x^3:

$$S^i_j = S^i_j(y^1, y^2, y^3), \qquad\qquad T^i_j = T^i_j(x^1, x^2, x^3). \tag{24.5}$$

Однако, подставив в (24.3) аргументы S^i_j, или подставив в (24.2) аргументы T^i_j, мы можем сделать так, чтобы они имели общий набор аргументов:

$$S^i_j = S^i_j(x^1, x^2, x^3), \qquad\qquad T^i_j = T^i_j(x^1, x^2, x^3), \tag{24.6}$$

$$S^i_j = S^i_j(y^1, y^2, y^3), \qquad\qquad T^i_j = T^i_j(y^1, y^2, y^3), \tag{24.7}$$

После приведения к виду (24.6), или к виду (24.7) (но не в форме (24.5)), матрицы S и T оказываются обратными друг для друга:

$$T = S^{-1}. \tag{24.8}$$

Это соотношение (24.8) выполнено вследствие того, что отображения (24.2) и (24.3) являются обратными друг другу.

Упражнение 24.1. *Вы, конечно же, знаете следующую формулу:*

$$\frac{df(x^1(y), x^2(y), x^3(y))}{dy} = \sum_{i=1}^{3} f'_i(x^1(y), x^2(y), x^3(y))\,\frac{dx^i(y)}{dy}, \quad \text{где} \quad f'_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это правило дифференцирования сложной функции. Примените его к функциям (24.2) *и выведите соотношение* (24.8).

§ 25. Координатные линии и координатная сетка.

Давайте подставим (24.2) в (24.1) и примем во внимание то, что все функции (24.2) предполагаются дифференцируемыми функциями от трех переменных y^1, y^2, y^3. Тогда вектор-функция

$$\mathbf{R}(y^1, y^2, y^3) = \mathbf{r}_P = \sum_{i=1}^{3} x^i(y^1, y^2, y^3)\,\mathbf{e}_i \tag{25.1}$$

будет дифференцируемой функцией от трех переменных y^1, y^2, y^3. Вектор-функция $\mathbf{R}(y^1, y^2, y^3)$, определенная в (25.1), называется **главной вектор-функцией** криволинейной системы координат. Пусть P_0 — некоторая фиксированная точка в пространстве, заданная своими криволинейными координатами y^1_0, y^2_0, y^3_0. Здесь нолик — это не тензорный индекс, мы используем его, чтобы еще раз подчеркнуть что P_0 фиксированная точка, и что ее координаты y_0^1, y_0^2, y_0^3 — это три фиксированных числа. На следующем шаге давайте отменим фиксацию одного из них, скажем сначала первого. Тогда

$$y^1 = y_0^1 + t, \qquad y^2 = y_0^2, \qquad y^3 = y_0^3. \tag{25.2}$$

Подставив (25.2) в (25.1) мы получим вектор-функцию одной переменной t:

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}(y_0^1 + t, y_0^2, y_0^3), \tag{25.3}$$

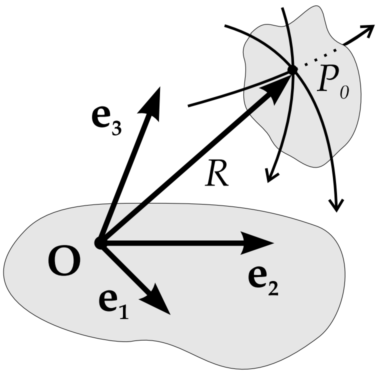


Рис. 8.

Если трактовать t как переменную времени (хотя это может быть не только время), то (25.3) описывает кривую (траекторию частицы). В момент времени $t = 0$ эта кривая проходит через фиксированную точку P_0. То же самое происходит и с кривыми, заданными двумя другими вектор-функциями, аналогичными (25.4):

$$\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}(y_0^1,\, y_0^2 + t,\, y_0^3), \tag{25.4}$$

$$\mathbf{R}_3(t) = \mathbf{R}(y_0^1,\, y_0^2,\, y_0^3 + t). \tag{25.5}$$

Это означает, что все три кривые, заданные тремя вектор-функциями (25.3), (25.4) и (25.5) пересекаются в точке P_0, как это показано на Рис. 8. Стрелки на этих линиях указывают направление, в котором параметр t возрастает. Кривые (25.3), (25.4), и (25.5) называются **координатными линиями**. Они подразделяются на три семейства. Кривые в пределах одного семейства не пересекаются друг с другом. Кривые из разных семейств пересекаются так, что через любую регулярную точку пространства проходят ровно три координатные кривые (по одной из каждого семейства).

Координатные линии криволинейной системы координат, взятые во всей их совокупности, формируют **координатную сетку**. Это бесконечно плотная сетка. Но обычно на рисунке она изображается как сетка с конечной плотностью. На Рис. 9 координатная сетка криволинейных координат сравнивается с координатной сеткой декартовой системы координат.

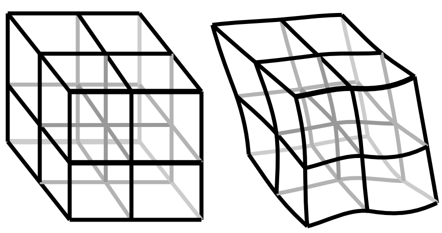


Рис. 9.

Другой пример координатной сетки приведен на Рис. 2. Действительно, меридианы и параллели — это координатные линии сферической системы координат. Параллели не пересекаются, но меридианы формируют одно семейство координатных линий и пересекаются на северном и южном полюсах. Это означает, что северный и южный полюса — сингулярные (не регулярные) точки для сферических координат.

Упражнение 25.1. *Вспомните точное определение сферических координат и найдите все сингулярные точки.*

§ 26. Подвижный репер криволинейной системы координат.

Давайте снова рассмотрим три координатные линии, показанные на Рис. 8. И давайте найдем касательные векторы к ним в точке P_0. Для этого мы должны продифференцировать вектор-функции (25.3), (25.4), и (25.5) по переменной времени t и затем подставить $t = 0$ в производные:

$$\mathbf{E}_i = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y^i}\bigg|_{\text{в точке } P_0}. \tag{26.1}$$

Теперь давайте подставим разложение (25.1) в (26.1) и вспомним (24.4):

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\,\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{3} S^j_i\,\mathbf{e}_j. \tag{26.2}$$

Все вычисления в (26.2) все еще относятся к точке P_0. Хотя P_0 — фиксированная точка, это произвольная фиксированная точка. Поэтому равенство (26.2) имеет силу в любой точке пространства. Теперь давайте опустим промежуточные вычисления и запишем (26.2) так:

$$\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{3} S^j_i\,\mathbf{e}_j. \tag{26.3}$$

Затем сравним (26.3) с (5.7). Эти формулы поразительно похожи, и $\det S \neq 0$ вследствие (24.8). Формула (26.3) означает, что касательные векторы к координатным линиям образуют базис $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ (см. Рис. 10), а матрицы (24.4) — это матрицы перехода из декартового базиса в этот базис и обратно в декартов базис.

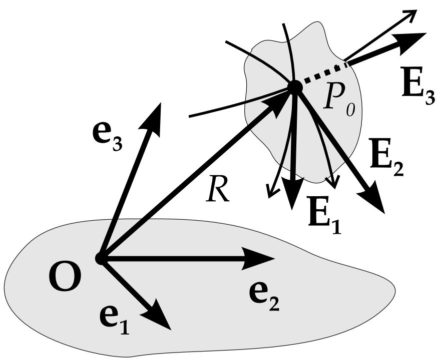


Рис. 10.

Несмотря на очевидную схожесть формул (26.3) и (5.7), имеется некоторое решающее различие между базисами $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Векторы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ не являются свободными. Они связаны с той точкой, где посчитаны производные (24.4). И они перемещаются, когда мы перемещаем эту точку. По этой причине базис $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ называется **подвижным репером** криволинейной системы координат. В процессе их движения векторы подвижного репера $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ не просто перемещаются от точки к точке, они могут изменять свои длины, а также углы, которые они образуют друг с другом. Поэтому, в общем случае, подвижный репер $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ — это косоугольный базис. В некоторых случаях векторы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ могут быть ортогональными друг другу во всех точках пространства. В этом случае мы говорим, что имеем ортогональную криволинейную систему координат. Все наиболее известные криволинейные системы координат ортогональны, например, сферическая, цилиндрическая, эллиптическая, параболическая, тороидальная и другие. Однако, не бывают криволинейных системы координат, подвижным репером которых является ОНБ! Мы не будем доказывать этот факт, так как это увело бы нас глубоко в дебри дифференциальной геометрии.

§ 27. Динамика подвижного репера.

Итак, мы знаем, что **подвижный репер** движется. Давайте опишем это движение количественно. Согласно (24.5) компоненты матрицы S в (26.3) — это функции криволинейных координат y^1, y^2, y^3. Поэтому, при дифференцировании $\mathbf{E}_i$ относительно y^j мы должны ожидать, что получится некоторый вектор отличный от нуля $\partial\mathbf{E}_i/\partial y^j$. Этот вектор может быть разложен по векторам подвижного репера $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, разложение записывается так:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial y^j}=\sum_{k=1}^{3}\Gamma^k_{ij}\,\mathbf{E}_k. \tag{27.1}$$

Формула (27.1) известна как **деривационная формула**. Коэффициенты Γ^k_{ij} в формуле (27.1) называются **символами Кристоффеля** или же **компонентами связности**.

Упражнение 27.1. *Основываясь на формулах* (25.1) *и* (26.1), *нарисуйте векторы подвижного репера для цилиндрических координат.*

Упражнение 27.2. *Сделайте то же самое для сферических координат.*

Упражнение 27.3. *Основываясь на формулах* (27.1) *и результатах упражнения 27.1, вычислите символы Кристоффеля для цилиндрических координат.*

Упражнение 27.4. *Сделайте то же самое для сферических координат.*

Упражнение 27.5. *Вспомните формулу* (26.2), *из которой вы получаете*

$$\mathbf{E}_i=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y^i}. \tag{27.2}$$

Подставьте (27.2) *на левую часть деривационной формулы* (27.1) *и, используя свойство смешанных производных, докажите, что символы Кристоффеля симметричны относительно пары нижних индексов:* $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$.

Обратите внимание на то, что символы Кристоффеля Γ^k_{ij} составляют трехмерный массив с одним верхним индексом и двумя нижними индексами. Однако, они не образуют тензор. Мы не будем доказывать этот факт, так как это опять увело бы нас глубоко в дифференциальную геометрию.

§ 28. Формула для символов Кристоффеля.

Давайте возьмем формулу (26.3) и подставим ее в обе части (27.1). В результате мы получаем следующее равенство для символов Кристоффеля:

$$\sum_{q=1}^{3}\frac{\partial S^q_i}{\partial y^j}\,\mathbf{e}_q=\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\Gamma^k_{ij}\,S^q_k\,\mathbf{e}_q. \tag{28.1}$$

Декартовы базисные векторы $\mathbf{e}_q$ не зависят от y^j, поэтому они не дифференцируются, когда мы подставляем (26.3) в (27.1). Обе части (28.1) являются разложениями по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вспомогательной декартовой системы координат. Из-за единственности таких разложений мы имеем следующее равенство, вытекающее из (28.1):

$$\frac{\partial S^q_i}{\partial y^j}=\sum_{k=1}^{3}\Gamma^k_{ij}\,S^q_k. \tag{28.2}$$

Упражнение 28.1. *Используя понятие обратной матрицы ($T=S^{-1}$), выведите из* (28.2) *следующую формулу для символов Кристоффеля Γ^k_{ij}:*

$$\Gamma^k_{ij}=\sum_{q=1}^{3}T^k_q\,\frac{\partial S^q_i}{\partial y^j}. \tag{28.3}$$

В силу (24.4) формула (28.3) может быть преобразована к виду

$$\Gamma^k_{ij}=\sum_{q=1}^{3}T^k_q\,\frac{\partial S^q_i}{\partial y^j}=\sum_{q=1}^{3}T^k_q\,\frac{\partial^2 x^q}{\partial y^i\,\partial y^j}=\sum_{q=1}^{3}T^k_q\,\frac{\partial S^q_j}{\partial y^i}. \tag{28.4}$$

Формула (28.4) не имеет практического применения, потому что она выражает Γ^k_{ij} через нечто внешнее по отношению к самой криволинейной системе координат, а именно, через матрицы перехода в базис вспомогательной декартовой системы координат. Но она поможет нам разобраться с дифференцированием тензоров в криволинейных координатах.

§ 29. Тензорные поля в криволинейных координатах.

Как мы помним, тензоры — это геометрические объекты связанные с базисами и представляемые массивами чисел, если определен некоторый базис. Каждая криволинейная система координат обеспечивает нас числовым представлением точек, и в добавок к этому, обеспечивает базисом. Таким базисом служит подвижный репер. Поэтому, мы можем записать тензоры в криволинейных системах координат, где они представляются как массивы функций:

$$X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}=X^{i_1\ldots\, i_r}_{j_1\ldots\, j_s}(y^1,y^2,y^3). \tag{29.1}$$

Мы также можем рассмотреть две криволинейные системы координат и можем переходить от одной к другой посредством функций перехода:

$$\begin{cases} \tilde{y}^1 = \tilde{y}^1(y^1, y^2, y^3), \\ \tilde{y}^2 = \tilde{y}^2(y^1, y^2, y^3), \\ \tilde{y}^3 = \tilde{y}^3(y^1, y^2, y^3), \end{cases} \qquad \begin{cases} y^1 = y^1(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3), \\ y^2 = y^2(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3), \\ y^3 = y^3(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3). \end{cases} \tag{29.2}$$

Если мы назовем $\tilde{y}^1$, $\tilde{y}^2$, $\tilde{y}^3$ новыми координатами, а y^1, y^2, y^3 — старыми координатами, то матрицы перехода S и T задаются следующими формулами:

$$S^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j}, \qquad T^i_j = \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}. \tag{29.3}$$

Они связывают подвижные реперы двух криволинейных систем координат:

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \sum_{j=1}^{3} S^j_i\,\mathbf{E}_j, \qquad \mathbf{E}_j = \sum_{i=1}^{3} T^i_j\,\tilde{\mathbf{E}}_i. \tag{29.4}$$

Упражнение 29.1. *Выведите* (29.3) *из* (29.4) *и* (29.2), *используя некоторые вспомогательные декартовы координаты с базисом* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *в качестве промежуточной системы координат:*

$$(\mathbf{E}_1,\,\mathbf{E}_2,\,\mathbf{E}_3) \;\underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}}\; (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3) \;\underset{\tilde{T}}{\overset{\tilde{S}}{\rightleftarrows}}\; (\tilde{\mathbf{E}}_1,\,\tilde{\mathbf{E}}_2,\,\tilde{\mathbf{E}}_3) \tag{29.5}$$

Сравните (29.5) *с* (5.13) *и объясните различия, которые вы обнаружили.*

Формулы преобразования тензорных полей при переходе из одной криволинейной системы координат в другую те же самые, что в (19.4) и (19.5):

$$\tilde{X}^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(\tilde{y}^1,\tilde{y}^2,\tilde{y}^3) = \sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}}\!\!\ldots\sum^{3} T^{i_1}_{h_1}\,\ldots\,T^{i_r}_{h_r} S^{k_1}_{j_1}\,\ldots\,S^{k_s}_{j_s}\,X^{h_1\ldots\,h_r}_{k_1\ldots\,k_s}(y^1,y^2,y^3), \tag{29.6}$$

$$X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(y_1,y_2,y_3) = \sum^{3}_{\substack{h_1,\,\ldots\,,\,h_r\\ k_1,\,\ldots\,,\,k_s}}\!\!\ldots\sum^{3} S^{i_1}_{h_1}\,\ldots\,S^{i_r}_{h_r} T^{k_1}_{j_1}\,\ldots\,T^{k_s}_{j_s}\,\tilde{X}^{h_1\ldots\,h_r}_{k_1\ldots\,k_s}(\tilde{y}^1,\tilde{y}^2,\tilde{y}^3). \tag{29.7}$$

Но формулы (19.6) и (19.8) должны быть заменены на (29.2).

§ 30. Дифференцирование тензорных полей в криволинейных координатах.

Мы уже знаем как дифференцировать тензорные поля в декартовых координатах (см. параграф 21). Мы знаем, что оператор ∇ производит тензорное поле типа $(r, s+1)$, когда применяется к тензорному полю типа (r, s). Единственная вещь, в которой мы сейчас нуждаемся, состоит в том, чтобы преобразовать ∇ к криволинейным системам координат. Чтобы вычислить тензор $\nabla\mathbf{X}$ в криволинейных координатах, давайте сначала преобразуем $\mathbf{X}$

во вспомогательные декартовы координаты, затем применим ∇, и тогда уж преобразуем $\nabla\mathbf{X}$ обратно в криволинейные координаты:

$$\begin{array}{ccc} X^{h_1\ldots\,h_r}_{k_1\ldots\,k_s}(y^1,y^2,y^3) & \xrightarrow{S,T} & X^{h_1\ldots\,h_r}_{k_1\ldots\,k_s}(x^1,x^2,x^3) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\nabla_p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\nabla_q=\partial/\partial x^q} \\ \nabla_p X^{i_1\ldots\,i_r}_{j_1\ldots\,j_s}(y^1,y^2,y^3) & \xleftarrow{T,S} & \nabla_q X^{h_1\ldots\,h_r}_{k_1\ldots\,k_s}(x^1,x^2,x^3) \end{array}\tag{30.1}$$

Отметим, что S и T в (30.1) — это матрицы (24.4). Из (12.3) и (12.4) мы знаем, что преобразование каждого индекса есть отдельная мультипликативная процедура. Когда она применяется к α-тому верхнему индексу, происходит целая цепочка преобразований (30.1), которая выглядит так

$$\nabla_p X^{\ldots\,i_\alpha\,\ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots} = \sum_{q=1}^{3} S^q_p \ldots \sum_{h_\alpha=1}^{3} T^{i_\alpha}_{h_\alpha} \ldots \nabla_q \ldots \sum_{m_\alpha=1}^{3} S^{h_\alpha}_{m_\alpha} \ldots X^{\ldots\,m_\alpha\,\ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots}.\tag{30.2}$$

Обратите внимание, что $\nabla_q = \partial/\partial x^q$ — дифференциальный оператор. Теперь в силу (24.4) мы имеем следующее соотношение:

$$\sum_{q=1}^{3} S^q_p\,\frac{\partial}{\partial x^q} = \frac{\partial}{\partial y^p}.\tag{30.3}$$

Любой дифференциальный оператор, когда он применяется к произведению, порождает сумму из стольких слагаемых, сколько было сомножителей в произведении. Вот слагаемое, порожденное множителем $S^{h_\alpha}_{m_\alpha}$ в формуле (30.2):

$$\nabla_p X^{\ldots\,i_\alpha\,\ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots} = \ldots + \sum_{m_\alpha=1}^{3}\sum_{h_\alpha=1}^{3} T^{i_\alpha}_{h_\alpha}\,\frac{S^{h_\alpha}_{m_\alpha}}{\partial y^p}\,X^{\ldots\,m_\alpha\,\ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots} + \ldots\,.\tag{30.4}$$

Сравнивая (30.4) с (28.3) или с (28.4), мы можем преобразовать его к виду

$$\nabla_p X^{\ldots\,i_\alpha\,\ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots} = \ldots + \sum_{m_\alpha=1}^{3} \Gamma^{i_\alpha}_{p m_\alpha}\,X^{\ldots\,m_\alpha\,\ldots}_{\ldots\,\ldots\,\ldots} + \ldots\,.\tag{30.5}$$

Теперь давайте рассмотрим преобразование α-того нижнего индекса в (30.1):

$$\nabla_p X^{\ldots\,\ldots\,\ldots}_{\ldots\,j_\alpha\,\ldots} = \sum_{q=1}^{3} S^q_p \ldots \sum_{k_\alpha=1}^{3} S^{k_\alpha}_{j_\alpha} \ldots \nabla_q \ldots \sum_{n_\alpha=1}^{3} T^{n_\alpha}_{k_\alpha} \ldots X^{\ldots\,\ldots\,\ldots}_{\ldots\,n_\alpha\,\ldots}.\tag{30.6}$$

Применив (30.3) к (30.6) с той же самой логикой, как и в (30.4), мы получаем

$$\nabla_p X^{\ldots\,\ldots\,\ldots}_{\ldots\,j_\alpha\,\ldots} = \ldots + \sum_{n_\alpha=1}^{3}\sum_{k_\alpha=1}^{3} S^{k_\alpha}_{j_\alpha}\,\frac{T^{n_\alpha}_{k_\alpha}}{\partial y^p}\,X^{\ldots\,\ldots\,\ldots}_{\ldots\,n_\alpha\,\ldots} + \ldots\,.\tag{30.7}$$

Чтобы упростить (30.7), нам нужна следующая формуле, которая довольно-таки просто выводится из формулы (28.3):

$$\Gamma^k_{ij} = -\sum_{q=1}^{3} S^q_i \, \frac{\partial T^k_q}{\partial y^j}. \tag{30.8}$$

Применяя (30.8) к (30.7), мы получаем

$$\nabla_p X^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\, j_\alpha\, \dots} = \ldots - \sum_{n_\alpha=1}^{3} \Gamma^{n_\alpha}_{p j_\alpha} \, X^{\dots\,\dots\,\dots}_{\dots\, n_\alpha\, \dots} + \ldots . \tag{30.9}$$

Теперь мы должны соединить (30.5) с (30.9) и добавить слагаемое, которое получается в результате действия оператора ∇_q в формуле (30.2) (или, что то же самое, в формуле (30.4)) на компоненты тензора $\mathbf{X}$. После этого, мы получаем следующую основную формулу для $\nabla_p X^{i_1\dots\, i_r}_{j_1\dots\, j_s}$:

$$\begin{aligned} \nabla_p X^{i_1\dots\, i_r}_{j_1\dots\, j_s} = \frac{\partial X^{i_1\dots\, i_r}_{j_1\dots\, j_s}}{\partial y^p} + \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{m_\alpha=1}^{3} \Gamma^{i_\alpha}_{p m_\alpha} \, X^{i_1\dots\, m_\alpha\, \dots\, i_r}_{j_1\dots\,\dots\,\dots\, j_s} - \\ - \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{n_\alpha=1}^{3} \Gamma^{n_\alpha}_{p j_\alpha} \, X^{i_1\dots\,\dots\,\dots\, i_r}_{j_1\dots\, n_\alpha\, \dots\, j_s}. \end{aligned} \tag{30.10}$$

Оператор ∇_p, определенный этой формулой называется **ковариантной производной**.

Упражнение 30.1. *Примените общую формулу* (30.10) *к векторному полю и вычислите ковариантную производную* $\nabla_p X^q$.

Упражнение 30.2. *Примените общую формулу* (30.10) *к ковекторному полю и вычислите ковариантную производную* $\nabla_p X_q$.

Упражнение 30.3. *Примените общую формулу* (30.10) *к операторному полю и найдите* $\nabla_p F^q_m$. *Рассмотрите частный случай, когда* ∇_p *применяется к символу Кронекера* δ^q_m.

Упражнение 30.4. *Примените общую формулу* (30.10) *к билинейной форме и найдите* $\nabla_p a_{qm}$.

Упражнение 30.5. *Примените общую формулу* (30.10) *к произведению тензора* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$ *для случая, когда* $\mathbf{x}$ *— вектор и* $\mathbf{a}$ *— ковектор. Убедитесь в справедливости формулы* $\nabla(\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}) = \nabla\mathbf{a} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{a} \otimes \nabla\mathbf{x}$.

Упражнение 30.6. *Примените общую формулу* (30.10) *к свертке* $C(\mathbf{F})$ *для случая, когда* $\mathbf{F}$ *— операторное поле. Проверьте формулу* $\nabla C(\mathbf{F}) = C(\nabla\mathbf{F})$.

Упражнение 30.7. *Выведите* (30.8) *из* (28.3).

§ 31. Согласованность метрики и связности.

Давайте вспомним, что мы рассматриваем криволинейные координаты в евклидовом пространстве E. В этом пространстве мы имеем скалярное произведение (13.1) и метрический тензор (13.5).

Упражнение 31.1. *Преобразуйте метрический тензор* (13.5) *к криволинейным координатам, используя матрицы перехода* (24.4), *и покажите, что здесь он задается формулой*

$$g_{ij} = (\mathbf{E}_i,\, \mathbf{E}_j). \tag{31.1}$$

В декартовых координатах все компоненты метрического тензора являются константами, так как базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — константы. Ковариантная производная (30.10) в декартовых координатах приводит к дифференцированию $\nabla_p = \partial/\partial x^p$. Поэтому здесь мы имеем

$$\nabla_p g_{ij} = 0. \tag{31.2}$$

Но ∇g — это тензор. Если все его компоненты в некоторой системе координат равны нулю, то они равны нулю и в любой другой системе координат (объясните почему). Поэтому тождество (31.2) справедливо и в криволинейных координатах тоже.

Упражнение 31.2. *Докажите тождество* (31.2) *прямыми вычислениями, используя формулу* (27.1).

Тождество (31.2) известно как **условие согласованности** метрики g_{ij} и связности Γ^k_{ij}. Это очень важно для общей теории относительности.

Вспомните, что метрический тензор присутствует во многих формулах параграфа 22 для градиента, для дивергенции, для ротора и для оператора Лапласа. Что важно — так это то, что все эти формулы остаются справедливыми в криволинейных координатах, с единственным отличием, что вы должны понимать, что ∇_p — это не частная производная $\partial/\partial x^p$, а ковариантная производная в смысле формулы (30.10).

Упражнение 31.3. *Вычислите* $\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\operatorname{div}\mathbf{H}$, $\operatorname{grad}\varphi$ *(векторный градиент) в цилиндрических и сферических координатах.*

Упражнение 31.4. *Вычислите оператор Лапласа* $\triangle\varphi$*, примененный к скалярному полю* φ*, в цилиндрических и в сферических координатах.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Дж. Хефферон, *Линейная алгебра*, электронный учебник, бесплатен для скачивания с Веб-сайта Колледжа Святого Михаила в Колчестере, штат Вермонт 05439, США; Скачать [PDF] или же [PS] файл.
2. А. П. Ленен, *Элементарное введение в логику и теорию множеств*, On-line ресурс, Технический Колледж округа Мэдисон, город Мэдисон, штат Висконсин 53704, США.
3. Т. Константопулос, *Вводная часть к курсу информатики и криптографии*, On-line материалы, Февраль 2000, Факультет Электроинженерии и Компьютерной Техники, Техасский Университет в Остине, город Остин, штат Техас 78712, США.
4. М. Воган-Ли, *Введение в теорию колец, уровень сложности B2*, On-line лекции, Сентябрь 2000, Оксфордский Университет, Институт Математики, город Оксфорд OX1 3LB, Соединенное Королевство Великобритания.
5. Шарипов R. A., *Классическая электродинамика и теория относительности*, Башкирский Государственный Университет, город Уфа, Россия, 1997; английский перевод, 2003, physics/0311011 в электронном архиве http://arXiv.org.